

К теории крыла в плоскопараллельном потоке идеальной несжимаемой жидкости

§ 1.

Пусть в плоскости комплексного переменного z дана некоторая простая (т. е. не имеющая двойных точек) кривая b с непрерывно меняющейся касательной и пусть точка $z=0$ лежит внутри этой кривой, а из точек $z=-1$, $z=1$ первая лежит на b , а вторая внутри или на b . Область вне b обозначим через \mathfrak{G} .

Если мы положим

$$\frac{z-n}{z+n} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n, \quad (1)$$

где z новая комплексная переменная, а число n удовлетворяет неравенству

$$1 < n \leq 2,$$

то кривой b в плоскости комплексного переменного z будет отвечать некоторая кривая C , а область \mathfrak{G} изобразится конформно на область G плоскости z вне C .

Заметим, что на основании (1) получается следующее разложение величины z в ряд по убывающим степеням z :

$$z = z - \frac{n^2-1}{3} \cdot \frac{1}{z} + \dots \quad (2)$$

Поэтому при соответствии (1) между областями \mathfrak{G} и G бесконечно-далекая точка одной плоскости переходит в бесконечно-далекую точку другой плоскости так, что масштаб изображения на бесконечности есть 1.

В частном случае, когда b есть окружность и точка $z=1$ на ней лежит, кривая C состоит из двух дуг окружности, проходящих через точки $z = \pm n$ и пересекающихся под углом

$$(2-n)\pi.$$

Если же b не есть окружность, проходящая через точки $z=-1$, $z=1$, а представляет какую-нибудь линию от этой окружности мало отличающуюся, а точки $z=-1$, $z=1$, не лежат вне b , то линия C будет мало отличаться от указанной луночки. Предполагая при этом, что точка $z=-1$ лежит на b , а точка $z=1$ внутри b , мы найдем, что кривая C будет иметь всего одну угловую точку B (отвечающую точке \mathfrak{B} , для которой $z=-1$) и притом угол между касательными в этой точке будет равен, как и для луночки

$$(2-n)\pi.$$

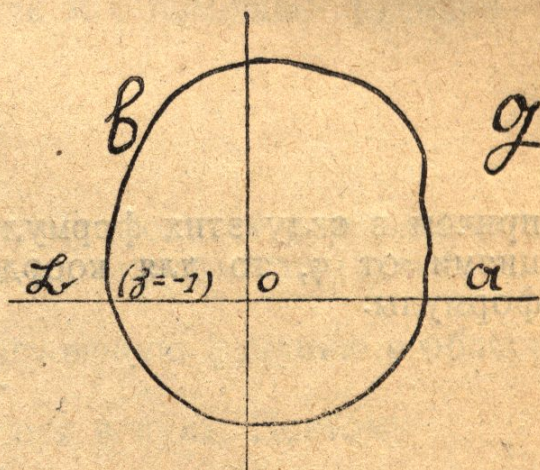


Рис. 1

Таким путем получается возможность построения разнообразных профилей спереди закругленных, сзади имеющих угловую точку с заданным углом и вполне пригодных в качестве профилей крыльев.

Для возможности теоретического исследования таких профилей необходимо иметь функцию, конформно изображенную область \mathfrak{G} на область вне круга.

Изложенный общий прием в основном принадлежит Н. Е. Жуковскому и был разработан несколькими позднейшими исследованиями.

В частности, если b есть окружность, проходящая через точку $z = -1$ и не проходящая через точку $z = 1$, и если $n = 2$, получается профиль Н. Е. Жуковского.

Приведем теперь ряд общих формул, относящихся к профилю C .

Примем, что нам известно параметрическое представление кривой b в полярных координатах, а именно пусть даны натуральный логарифм ψ радиуса вектора точки кривой b и ее полярный угол θ , как функции некоторого параметра φ .

Заметим, что величина z представится при этом, как

$$z = e^{\psi + i\theta}.$$

Тогда, если положить:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} t &= \frac{\sin \theta}{\operatorname{sh} \psi} \\ \operatorname{th} s &= \frac{\cos \theta}{\operatorname{ch} \psi} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

причем в силу этих формул величины t, s будут также некоторыми функциями от φ , то для координат точки (x, y) на кривой C получаются формулы:

$$\left. \begin{aligned} x &= n \frac{\operatorname{sh} ns}{\operatorname{ch} ns - \cos nt} \\ y &= n \frac{\sin nt}{\operatorname{ch} ns - \cos nt} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Обратно, для нахождения величины ψ, θ через x, y служат формулы:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{th} ns &= \frac{2xn}{x^2 + y^2 + n^2} \\ \operatorname{tg} nt &= \frac{2ny}{x^2 + y^2 - n^2} \end{aligned} \right\}; \quad (4 \text{ bis})$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh} \psi &= \frac{\cos t}{\sqrt{\sin^2 t + \operatorname{sh}^2 s}} \\ \cos \theta &= \frac{\operatorname{sh} s}{\sqrt{\sin^2 t + \operatorname{sh}^2 s}} \end{aligned} \right\} \quad (3 \text{ bis})$$

Для случая, когда $n = 2$, аналогичные формулы были выведены в работе Т. Theodorsen and I. E. Garrick „General Potential Theory of arbitrary Wing Sections“¹⁾.

Приведем еще выражение для кривизны профиля C , которое бывает иногда полезно; при этом радиус кривизны мы обозначим через r :

¹⁾ N. A. C., Rep. № 452, 1933. При $n = 2$ x, y выражаются непосредственно через ψ и θ , так что в этом частном случае введение величин t, s вообще излишне.

$$\frac{1}{r} = \frac{\operatorname{ch} ns - \cos nt}{n^2} \sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2 \psi + \sin^2 \theta}{\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2}} \left\{ \frac{\sin 2\theta \cdot \frac{d\psi}{d\varphi} - \operatorname{sh} 2\psi \cdot \frac{d\theta}{d\varphi}}{2(\operatorname{sh}^2 \psi + \sin^2 \theta)} + \right. \\ \left. + x \frac{dt}{d\varphi} - y \frac{ds}{d\varphi} + \frac{\frac{d^2\theta}{d\varphi^2} \frac{d\psi}{d\varphi} - \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} \frac{d\theta}{d\varphi}}{\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2} \right\}. \quad (5)$$

Закончим этот § выражением линейного масштаба для изображения (1) в точках профиля.

Это выражение имеет вид

$$\left| \frac{dz}{d\delta} \right| = \frac{n^2 e^{-\psi}}{(\operatorname{ch} ns - \cos nt) \sqrt{\operatorname{sh}^2 \psi + \sin^2 \theta}}. \quad (6)$$

§ 2.

Возьмем теперь вспомогательную плоскость комплексного переменного ζ и обозначим через K область этой плоскости, лежащую вне единичного круга, т. е. круга с центром $\zeta = 0$ и радиусом 1.

В силу известных теорем теории конформного изображения область \mathcal{G} может быть конформно отображена на область K с помощью функции

$$z = D\zeta + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{\zeta^k}, \quad (7)$$

где $D > 0$, причем ряд правой части формулы (7) сходится равномерно не только в любой части области K , но также и на окружности $|\zeta| = 1$.

Выражение $1 + \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{\zeta^{k+1}}$ представляет регулярную функцию в области $|\zeta| \geq 1$, нигде в этой области не обращающуюся в нуль. Поэтому

$$1 + \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{\zeta^{k+1}} = e^{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{\zeta^k}} \quad (7 \text{ bis})$$

где ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{\zeta^k}$$

также равномерно сходится при $|\zeta| \geq 1$.

На основании (7) и (7 bis) изображающая функция может быть представлена также в виде

$$z = D\zeta e^{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{\zeta^k}}. \quad (8)$$

Если мы положим

$$D = e^{A_0}, \quad C_k = A_k + iB_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

и примем, что $\zeta = e^{i\varphi}$, т. е., что точка ζ лежит на линии $|\zeta| = 1$, а значит, что точка z лежит на b ($z = e^{\psi + i\theta}$), то мы получим формулу

$$e^{\psi + i\theta} = e^{i\varphi + A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + iB_k)(\cos k\varphi - i \sin k\varphi)}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \psi &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) \\ \theta &= \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \cos k\varphi - A_k \sin k\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Уравнения (9) дают некоторое параметрическое представление кривой b (в полярных координатах).

Условимся обозначать через $\zeta_B = -e^{i\beta}$ ту точку окружности $|\zeta| = 1$, которая отвечает точке $z = -1$ линии b ; заметим, что величина β удовлетворяет уравнению

$$\beta = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (B_k \cos k\beta - A_k \sin k\beta). \quad (9 \text{ bis})$$

Представление изображающей функции в виде (8) в теории крыла применено впервые в работе Theodorsen'a и Garrick'a²⁾. В следующем параграфе мы увидим целесообразность этого представления.

Отметим формулы, позволяющие перейти от коэффициентов D_j к коэффициентам C_j

$$\left. \begin{aligned} (k+1)D_k &= (k+1)C_{k+1}D + kC_k D_0 + (k-1)C_{k-1}D_1 + \dots + 1 \cdot C_1 \cdot D_{k-1} \\ D &= e^{A_0} \end{aligned} \right\} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (10)$$

Пример 1. Линия b окружность.

В этом случае в разложении (7): $D_1 = D_2 = \dots = D_n = \dots = 0$; формулы (10) принимают вид

$$\begin{aligned} D &= e^{A_0}, \quad D_0 = DC_1 \\ (k+1)C_{k+1} + kC_k \cdot C_1 &= 0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение показывает, что

$$(-1)^{k+1} (k+1) \frac{C_{k+1}}{C_1^{k+1}} = (-1)^k k \frac{C_k}{C_1^k},$$

т. е., что выражение

$$(-1)^k k \frac{C_k}{C_1^k}$$

от k не зависит.

Следовательно,

$$(-1)^k k \frac{C_k}{C_1^k} = (-1)^1 \cdot 1 \cdot \frac{C_1}{C_1} = -1$$

и значит

$$C_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{D_0}{D}\right)^k \quad (k=1, 2, \dots).$$

Обозначая

$$D = R, \quad \frac{D_0}{D} = \lambda e^{i\delta} \quad (0 < \lambda < 1)$$

будем иметь, что

$$A_0 = \log R, \quad A_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \lambda^n \cos n\delta \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$B_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \lambda^n \sin n\delta$$

²⁾ См. также работу T. Theodorsen, Theory of wing Sections of arbitrary shape; NAC. 1931, Report № 411.

и формулы (9) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \log R + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \lambda^m \cos m(\varphi - \delta) = \log R + \\ &+ \log \sqrt{1 + 2\lambda \cos(\varphi - \delta) + \lambda^2} \\ \theta &= \varphi + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \lambda^m \sin m(\varphi - \delta) = \varphi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\lambda \sin(\varphi - \delta)}{1 + \lambda \cos(\varphi - \delta)}. \end{aligned} \right\} (11)$$

Величины R и λ являются параметрами, определяющими окружность b : R есть радиус окружности b , а λR расстояние центра от начала координат.

В самом деле, наибольшее и наименьшее значения ψ получаются при $\varphi = \delta$ и $\varphi = \delta + \pi$, и эти значения равны:

$$\log R(1 + \lambda), \quad \log R(1 - \lambda).$$

Поэтому наибольшими и наименьшими значениями радиуса-вектора являются $R(1 + \lambda)$, $R(1 - \lambda)$.

Что касается величины δ , то она равна углу между радиусом-вектором, идущим в центр, и осью абсцисс, так как при $\varphi = \delta$ будет также $\theta = \delta$.

Величина δ определяется из условия прохождения окружности через точку $\delta = -1$, а именно с помощью равенства

$$R^2 = 1 + \lambda^2 R^2 + 2\lambda R \cos \delta.$$

Что касается, наконец, величины β , то она может быть найдена из условия (9 bis), которое дает

$$\beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\lambda \sin(\delta - \beta)}{1 - \lambda \cos(\delta - \beta)}$$

или

$$\sin \beta = \lambda \sin \delta.$$

Чертеж поясняет сказанное

Пример 2. Линия b эллипс.

Теперь в разложении (7): $D_2 = D_3 = \dots = D_n = \dots = 0$, и на основании (10) мы получаем

$$D = e^{A_0}, \quad D_0 = D(A_1 + iB_1),$$

$$D_1 = D \left[A_2 + iB_2 + \frac{1}{2}(A_1 + iB_1)^2 \right]$$

$$(n+1)DC_{n+1} + nD_0C_n + (n-1)D_1C_{n-1} = 0 \quad (n=2, 3, 4, \dots).$$

Решая эти уравнения обычными методами, мы найдем, что

$$nC_n = M \left(\frac{-D_0 + \sqrt{D_0^2 - 4DD_1}}{2D} \right)^n + N \left(\frac{-D_0 - \sqrt{D_0^2 - 4DD_1}}{2D} \right)^n,$$

где M , N произвольные константы.

А так как

$$C_1 = \frac{D_0}{D}, \quad C_2 = \frac{D_1}{D} - \frac{1}{2} \left(\frac{D_0}{D} \right)^2,$$

то $M = N = -1$.

Положим теперь

$$\frac{D_0 + \sqrt{D_0^2 - 4DD_1}}{2D} = \lambda e^{i\delta},$$

$$\frac{D_0 - \sqrt{D_0^2 - 4DD_1}}{2D} = \mu e^{i\delta}.$$

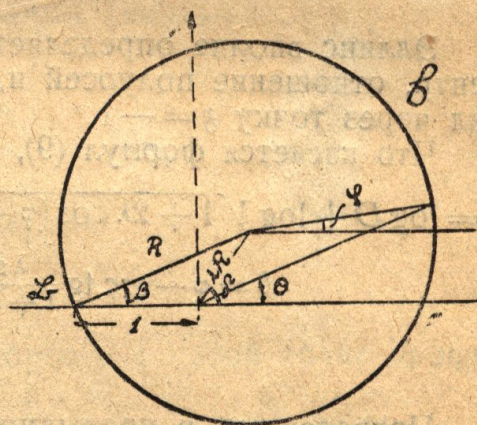


Рис. 2

Мы получаем, что

$$C_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left\{ \lambda^n e^{in\delta} + \mu^n e^{in\varepsilon} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

или

$$A_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left\{ \lambda^n \cos n\delta + \mu^n \cos n\varepsilon \right\},$$

$$B_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left\{ \lambda^n \sin n\delta + \mu^n \sin n\varepsilon \right\},$$

причем

$$\begin{aligned} D_0 &= D(\lambda e^{i\delta} + \mu e^{i\varepsilon}), \\ D_1 &= D\lambda\mu e^{i(\delta+\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Изображающая функция имеет вид

$$z = D \left\{ \zeta + (\lambda e^{i\delta} + \mu e^{i\varepsilon}) + \frac{\lambda\mu e^{i(\delta+\varepsilon)}}{\zeta} \right\}.$$

Отсюда видно, что параметры D , λ , μ , δ , ε имеют следующее значение: $\frac{\delta+\varepsilon}{2}$ есть угол между линией фокусов и вещественной осью, полуоси равны $D(1+\lambda\mu)$, $D(1-\lambda\mu)$, центр эллипса находится в точке

$$D(\lambda e^{i\delta} + \mu e^{i\varepsilon}).$$

Эллипс вполне определяется, если мы зададим наклон линии фокусов, центр, отношение полуосей и, наконец, потребуем, чтобы эллипс проходил через точку $z = -1$.

Что касается формул (9), то они теперь принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \log D + \log \sqrt{1 + 2\lambda \cos(\varphi - \delta) + \lambda^2} + \log \sqrt{1 + 2\mu \cos(\varphi - \varepsilon) + \mu^2} \\ \theta &= \varphi - \arctg \frac{\lambda \sin(\varphi - \delta)}{1 + \lambda \cos(\varphi - \delta)} - \arctg \frac{\mu \sin(\varphi - \varepsilon)}{1 + \mu \cos(\varphi - \varepsilon)}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

§ 3

Приведенные в предыдущих параграфах формулы позволяют составить общее выражение для комплексного потенциала течения в плоскости профиля C , а также написать общую формулу для скорости в любой точке профиля C .

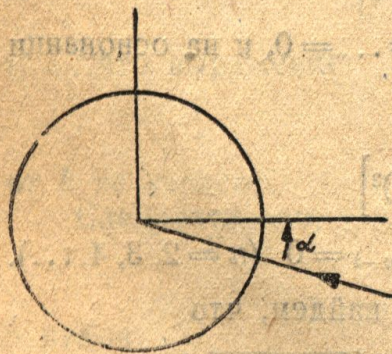


Рис. 3

Исходным моментом является выражение для комплексного потенциала в плоскости круга. Это выражение имеет вид

$$f = f(\zeta) = -V_* \left(e^{i\alpha} \zeta + \frac{e^{-i\alpha}}{\zeta} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \log \zeta,$$

где V_* абсолютная величина скорости на бесконечности, α — угол атаки, направление отсчета которого указано на чертеже, и Γ — циркуляция.

Для определения циркуляции мы должны потребовать, чтобы комплексная скорость обратилась в нуль при $\zeta = -e^{i\beta}$, т. е. в точке, отвечающей угловой точке профиля.

Это дает циркуляции значение

$$\Gamma = 4\pi V_* \sin(\alpha + \beta)$$

после чего для абсолютной величины скорости на окружности $|\zeta| = 1$ получается выражение

$$\left| \frac{df}{d\zeta} \right| = 2V_* |\sin(\alpha + \varphi) + \sin(\alpha + \beta)|.$$

Чтобы получить скорость в некоторой точке профиля C необходимо составить выражение

$$\left| \frac{df}{dz} \right| = \left| \frac{df}{d\zeta} \right| \cdot \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|.$$

Так как на окружности: $\zeta = e^{i\varphi}$, а на линии b : $z = e^{\psi+i\theta}$, то

$$ie^{i\varphi} \frac{d\zeta}{d\zeta} = \frac{dz}{d\varphi} = e^{\psi+i\theta} \left(\frac{d\psi}{d\varphi} + i \frac{d\theta}{d\varphi} \right)$$

и значит

$$\left| \frac{dz}{d\zeta} \right| = e^{\psi} \sqrt{\left(\frac{d\psi}{d\varphi} \right)^2 + \left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2}.$$

Поэтому в силу (6) и (3)

$$\left| \frac{df}{dz} \right| = 2V_* \left| \sin(\alpha + \varphi) + \sin(\alpha + \beta) \right| \frac{(\operatorname{ch} ns - \cos nt) \sqrt{\operatorname{sh}^2 \psi + \sin^2 \theta}}{n^2 \sqrt{\left(\frac{d\psi}{d\varphi} \right)^2 + \left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2}}.$$

Чтобы получить окончательную формулу нам остается выразить V_* через скорость на бесконечности в плоскости профиля. Обозначая ее через V_0 , имеем равенство

$$V_0 = \left| \frac{df}{dz} \right|_{z=\infty} = \left| \frac{df}{d\zeta} \right|_{\zeta=\infty} \cdot \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|_{z=\infty} \cdot \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|_{z=\infty}$$

А так как

$$\left| \frac{dz}{d\zeta} \right|_{\infty} = D = e^{A_0},$$

то в силу (2)

$$V_0 = V_* \cdot e^{-A_0}$$

и значит

$$V_* = V_0 e^{A_0}.$$

Поэтому окончательная формула для скорости в любой точке профиля имеет вид

$$\left| \frac{df}{dz} \right| = \frac{2V_0 \left| \sin(\alpha + \varphi) + \sin(\alpha + \beta) \right| e^{A_0} (\operatorname{ch} ns - \cos nt) \sqrt{\operatorname{sh}^2 \psi + \sin^2 \theta}}{n^2 \sqrt{\left(\frac{d\psi}{d\varphi} \right)^2 + \left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2}}. \quad (13)$$

В частном случае, когда $n = 2$, эта формула упрощается:

$$\left| \frac{df}{dz} \right| = \frac{V_0 \left| \sin(\alpha + \varphi) + \sin(\alpha + \beta) \right| e^{A_0}}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \psi + \sin^2 \theta} \cdot \sqrt{\left(\frac{d\psi}{d\varphi} \right)^2 + \left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2}} \quad (13 \text{ bis})$$

Последняя формула была выведена в работе Theodorsen'a и Garrick'a. Если скорость в каждой точке контура C известна, то с помощью уравнения Bernoulli уже нетрудно получить распределение давлений по профилю.

Нетрудно было бы также показать, как определить фокус крыла и параболу устойчивости, но мы на этом останавливаться не будем.

Подчеркнем только, что во всем нашем анализе мы предполагали заданной линию b и известной изображающую функцию (7) или (8).

Однако можно непосредственно задаваться функциями (9), беря даже всего несколько членов в правых частях.

Таким путем мы получаем некоторую изображающую функцию с небольшим числом параметров.

Кривые b при подходящих значениях этих параметров приведут к просто рассчитываемым профилям близкого к употребляемым на практике типа.

Например, или положить

$$\begin{aligned}\psi &= \log R + \lambda \cos(\varphi - \delta) \\ \theta &= \varphi - \lambda \sin(\varphi - \delta)\end{aligned}$$

при достаточно малом λ , то эти выражения являются некоторыми приближениями к функциям (11), а потому среди профилей, получаемых с помощью написанных формул мы найдем близкие к профилям Жуковского, когда $n=2$, и к профилям Карман—Треффца, когда $n < 2$. Преимущество же этих профилей по сравнению с профилями Жуковского и Карман—Треффца в том, что для первых значительно проще находится распределение давления по профилю, чем для последних.

§ 4

Теперь мы обратимся к вопросу о том, насколько выведенные формулы могут быть полезны для расчета произвольно заданного профиля.

Пусть в плоскости z дан произвольный профиль C с угловой точкой B , в которой касательные к профилю образуют угол $(2-n)\pi$.

Возьмем внутри профиля некоторую точку A , лежащую вблизи центра кривизны профиля для передней кромки.

Прямую BA примем за ось абсцисс и, не нарушая общности, будем считать, что точки A и B имеют абсциссы n , $-n$ (это достигается выбором масштаба).

После этого, беря на профиле некоторое количество точек и пользуясь формулами (4 bis) и (3 bis), мы найдем в табличной форме связь между величинами ψ и θ . Эта связь позволяет построить в плоскости комплексного переменного z кривую b , которая, очевидно, будет проходить через точку \mathfrak{B} ($z = -1$) и для которой точка $z = 1$ будет внутренней.

Теперь наша задача сводится уже к нахождению изображающей функции для полученного контура b .

Мы пришли таким образом к чисто математической задаче первостепенной важности: найти функцию (7) или (8), изображающую конформно область вне b на область $|\zeta| > 1$.

Эта задача в последние годы была предметом исследования многих математиков, среди которых мы отметим Л. В. Канторовича³⁾, который показал, как с помощью последовательных приближений для кривой, заданной вначале уравнением

$$F(X, Y) = 0, \quad (*)$$

может быть при выполнении некоторых условий построено параметрическое представление вида

$$\begin{aligned}X &= F_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nt - b_n \sin nt), \\ Y &= F_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n \cos nt + a_n \sin nt),\end{aligned}$$

и как после этого решается задача о конформном изображении.

Это параметрическое представление характеризуется сопряженностью тригонометрических рядов, представляющих X и Y .

Назовем рассматриваемое параметрическое представление кривой (*) нормальным представлением кривой в декартовых координатах.

Совершенно ясно, что в интересующем нас вопросе задача состоит в том, чтобы упомянутую выше зависимость между ψ и θ , найденную в табличной форме с помощью (4 bis) и (3 bis), представить в виде (9), т. е. найти для b нормальное представление в полярных координатах через некоторый параметр φ .

³⁾ Л. В. Канторович, О конформном отображении. Математический сборник, том 40, 1933.

В самом деле, если бы это удалось сделать, то-есть если бы удалось найти коэффициенты A_j, B_j , то полагая $C_j = A_j + iB_j$, мы нашли бы функцию (8), изображающую область \mathfrak{G} на область $|\zeta| > 1$.

С другой стороны знание рядов (9) позволило бы применить результаты § 3 и тем самым найти аэродинамическую характеристику профиля.

Задачей нахождения для контура b нормального представления в полярных координатах занимались также Theodorsen и Garrick.

Применяемый ими метод для нахождения этого представления по идее близок к методу Л. В. Канторовича, но изложен недостаточно четко и не имеет обоснования, которое, как ниже будет показано, можно получить, опираясь на работу Л. В. Канторовича.

§ 5

Покажем, в чем состоит метод Л. В. Канторовича в интересующем нас случае.

При этом условимся, следуя Л. В. Канторовичу, обозначать через $\Phi(t)$ функцию, представляемую рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nt - a_n \sin nt),$$

если

$$\Phi(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Так как в нашем вопросе кривая b мало отличается от окружности, то мы можем принять, что уравнение кривой b в координатах ψ, θ имеет вид:

$$\psi = \psi_0 + \Psi(\theta), \quad (14)$$

где ψ_0 есть константа, а $\Psi(\theta)$ некоторая функция, численные значения которой достаточно малы, чем и обеспечивается близость кривой b к окружности $\psi = \psi_0$.

Например, можно считать, что $\Psi(\theta)$ есть тригонометрическая сумма вида

$$\Psi(\theta) = \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \quad (14 \text{ bis})$$

полученная методами интерполирования по тем табличным данным, которые определяют кривую b .

Воспользовавшись обычным в математике методом малого параметра, рассмотрим вместе с (14) уравнение

$$\psi = \psi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \psi_k(\theta), \quad (15)$$

где λ есть параметр, а функции $\psi_k(\theta)$ таковы, что при $\lambda = 1$ уравнение (15) превращается в уравнение (14).

При $\lambda = 0$ задача нахождения нормального представления кривой (15) решается формулами

$$\psi = \psi_0, \quad \theta = \varphi.$$

Наша цель найти нормальное представление при $\lambda = 1$. С этой целью, следуя методу малого параметра, будем искать нормальное представление кривой (15) при $\lambda \neq 0$, стараясь представить θ в виде

$$\theta = \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k h_k(\varphi) \quad (16_1)$$

так, чтобы после замены в уравнении (15) величины θ через φ по формуле (16₁) получилось уравнение

$$\psi = \psi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k g_k(\varphi), \quad (16_2)$$

где

$$h_k(\varphi) = \tilde{g}_k(\varphi) \quad (k=1, 2, \dots). \quad (17)$$

Легко видеть, что указанный метод малого параметра приводит к двум вопросам: 1) указать способ последовательного построения функций $h_k(\varphi)$, удовлетворяющих изложенному требованию и 2) исследовать полученные ряды (16₁) и (16₂) в смысле их сходимости. При этом нас должна интересовать сходимость рядов при $\lambda = 1$, т. е. тогда, когда кривая (15) превращается в кривую (14), т. е. в б.

Обычно в аналогичных исследованиях с помощью малого параметра оказывается, что сходимость удается доказать для отличных от нуля значений λ , но не при $\lambda = 1$, а лишь при $|\lambda| < \lambda_0 < 1$. На практике, несмотря на это, применяют ряды и при $\lambda = 1$, проверяя а posteriori качество полученного решения.

Имея в виду эти соображения, мы можем ограничиться первым вопросом и доказательством того, что ряды сходятся по крайней мере для достаточно малых $|\lambda| \neq 0$.

Предположим, что каждая из функций $\psi_k(\theta)$ аналитична. Это предположение, на практике не является существенным ограничением, т. к. на практике можно считать, что $\Psi(\theta)$ имеет вид (14 bis).

Предполагая представление (16₁) найденным, заменим в (15) θ через φ , согласно (16₁).

Так как по теореме Taylor'a

$$\begin{aligned} \psi_k(\theta) &= \psi_k(\varphi + \lambda h_1 + \lambda^2 h_2 + \dots) = \\ &= \psi_k(\varphi) + (\lambda h_1 + \lambda^2 h_2 + \dots) \psi'_k(\varphi) + \frac{(\lambda h_1 + \lambda^2 h_2 + \dots)^2}{2!} \psi''_k(\varphi) + \dots \end{aligned}$$

где для краткости вместо $h_k(\varphi)$ написано просто h_k , то мы получим, что

$$\begin{aligned} \psi = \psi_0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \lambda^k \psi_k(\varphi) + \lambda^k (\lambda h_1 + \lambda^2 h_2 + \dots) \psi'_k(\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda^k \frac{(\lambda h_1 + \lambda^2 h_2 + \dots)^2}{2!} \psi''_k(\varphi) + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с выражением (16₂), мы найдем, что $g_n(\varphi)$ есть коэффициент при λ^n в следующем многочлене от λ :

$$\begin{aligned} &\lambda^n \psi_n(\varphi) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k (\lambda h_1 + \lambda^2 h_2 + \dots + \lambda^{n-1} h_{n-1}) \psi'_k(\varphi) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-2} \lambda^k (\lambda h_1 + \lambda^2 h_2 + \dots + \lambda^{n-1} h_{n-1})^2 \frac{1}{2!} \psi''_k(\varphi) + \dots + \\ &\quad + \lambda^n h_1^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \psi_1^{(n-1)}(\varphi) \end{aligned}$$

что можно записать также в виде,

$$g_n(\varphi) = \psi_n(\varphi) + \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda^k \psi_k^{(j)}(\varphi) [\lambda h_1 + \lambda^2 h_2 + \dots + \lambda^{n-1} h_{n-1}]^j \right\}_{\lambda=0}$$

$$(n=1, 2, 3, \dots) \quad (18)$$

В частности

$$g_1(\varphi) = \psi_1(\varphi) \quad (18 \text{ bis})$$

$$g_2(\varphi) = \psi_2(\varphi) + h_1(\varphi) \psi'_1(\varphi)$$

$$g_3(\varphi) = \psi_3(\varphi) + h_2(\varphi) \psi'_1(\varphi) + h_1(\varphi) \psi'_2(\varphi) + \frac{1}{2} [h_1(\varphi)]^2 \psi''_1(\varphi).$$

Сравнивая формулы (18) с соотношением (17), мы можем последовательно найти все функции $h_k(\varphi)$. Первое из уравнений (18 bis) дает

$$h_1(\varphi) = \tilde{\psi}_1(\varphi).$$

Найдя $h_1(\varphi)$, мы можем по второй из формул (18 bis) найти $g_2(\varphi)$, а затем в силу (17) получим

$$h_2(\varphi) = \tilde{g}_2(\varphi)$$

и т. д.

Таким образом первый из наших вопросов решен. Что касается сходимости, то на основании работы Л. В. Канторовича можно сделать следующее заключение: если положить

$$\psi_m(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k^{(m)} \cos k\theta + \beta_k^{(m)} \sin k\theta)$$

и ввести обозначение

$$M_m^{(j)} = (m+1)^2 \sum_{k=0}^{\infty} k^j \sqrt{[\alpha_k^{(m)}]^2 + [\beta_k^{(m)}]^2},$$

то ряды (16) будут сходящимися для достаточно малых $|\lambda|$ во всяком случае тогда, когда ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} M_m^{(j)} u^m v^j$$

сходится при достаточно малых $|u| \neq 0$, $|v| \neq 0$.

§ 6

Изложенный в предыдущем параграфе способ нахождения нормального представления контура b в координатах ψ , θ является, конечно, не единственным.

Приведем теперь другой способ, являющийся легкой переработкой способа, указанного в работе Theodorsen'a и Garrick'a.

Исходя из уравнения

$$\psi = F_0(\theta), \tag{19a}$$

введем новую переменную t_1 по формуле

$$\theta = t_1 + \tilde{F}_0(t_1),$$

благодаря чему уравнение (19a) приведет к системе

$$\psi = F_1(t_1), \quad \theta = t_1 + \tilde{F}_0(t_1); \tag{19b}$$

далее положим

$$\theta = t_2 + \tilde{F}_1(t_2),$$

в силу чего уравнение (19a) даст систему

$$\psi = F_2(t_2), \quad \theta = t_2 + \tilde{F}_1(t_2), \tag{19c}$$

которую по сравнению с системой (19b) будем рассматривать, как второе приближение; затем положим

$$\theta = t_3 + \tilde{F}_2(t_3)$$

и заменим уравнение (19a) системой

$$\psi = F_3(t_3), \quad \theta = t_3 + \tilde{F}_2(t_3);$$

после n таких операций мы придем к системе

$$\psi = F_n(t_n), \quad \theta = t_n + \tilde{F}_{n-1}(t_n).$$

Предполагая процесс сходящимся при $n \rightarrow \infty$, мы получим, что

$$\psi = F(\varphi), \quad \theta = \varphi + \tilde{F}(\varphi);$$

на практике оказывается возможным положить $t_n = \varphi$, $F_n(\varphi) = F_{n-1}(\varphi) = \dots = F(\varphi)$ уже после небольшого числа операций, часто после двух.

Описанная здесь схема представляет то преимущество по сравнению со схемой предыдущего параграфа, что здесь не вводится параметр λ , а все рассуждение непосредственно относится к кривой b .

Однако, если мы пожелаем рассмотреть вторую схему с точки зрения сходимости, то нам снова придется принять, что

$$\psi = F_0(\varphi) = \psi_0 + \lambda \psi_1(\theta) + \lambda^2 \psi_2(\theta) + \dots + \lambda^n \psi_n(\theta) + \dots \quad (20)$$

Докажем, что после n операций мы получим представление (для простоты письма здесь положено $t_n = u$)

$$\psi = F_n(u) = \psi_0 + \lambda g_1(u) + \lambda^2 g_2(u) + \dots + \lambda^n g_n(u) + \lambda^{n+1} g_{n+1}(u) + \dots \quad (21a)$$

$$\theta = u + \tilde{F}_{n-1}(u) = u + \lambda h_1(u) + \dots + \lambda^{n-1} h_{n-1}(u) + \lambda^n h_n(u) + \lambda^{n+1} h_{n+1}(u) + \dots \quad (21b)$$

в котором

$$h_k(u) = \tilde{g}_k(u) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (22)$$

т. е. что это представление является „нормальным“ до членов порядка λ^n включительно.

Для доказательства предположим, что наше утверждение уже доказано для числа операций равного n , т. е. пусть (21) и (22) выполняются,

Если бы мы изменили как-нибудь функцию $h_{n+1}(u)$ и затем подставили полученное выражение для θ в формулу (20) то, очевидно, мы получили бы ряд для ψ тождественный с выражением (21a) до членов порядка λ^{n+1} включительно, это следует из того, что $h_{n+1}(u)$ множится на λ^{n+1} , а во всех членах ряда (20), содержащих θ , имеется также и λ .

Стоит поэтому положить $h_{n+1}(u) = \tilde{g}_{n+1}(u)$, оставить без изменения все предыдущие $h_k(u)$ и взять как угодно $h_{n+2}(u), \dots$, например, положить

$$\theta = v + \lambda h_1(v) + \dots + \lambda^{n+1} h_{n+1}(v) + \dots = v + \tilde{F}_n(v)$$

и мы получим после подстановки этого выражения в (20) формулу

$$\psi = F_{n+1}(v) = \psi_0 + \lambda g_1(v) + \dots + \lambda^{n+1} g_{n+1}(v) + \dots$$

откуда видно, что после применения еще одной операции представление станет „нормальным“ уже до степеней λ^{n+1} включительно.

Наше утверждение будет доказано, если мы проверим, что после первой операции представление становится „нормальным“ до первой степени λ включительно.

Но это следует из того, что беря

$$\theta = t_1 + \tilde{F}_0(t_1) = t_1 + \lambda \tilde{\psi}_1(t_1) + \lambda^2 \tilde{\psi}_2(t_1) + \dots$$

мы получим после подстановки в (20) ряд

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 + \lambda \psi_1(t_1 + \lambda \tilde{\psi}_1 + \dots) + \lambda^2 \psi_2(t_1 + \lambda \tilde{\psi}_1 + \dots) = \\ &= \psi_0 + \lambda \psi_1(t_1) + \lambda^2 \{ \tilde{\psi}_1(t_1) \psi_1'(t_1) + \psi_2(t_1) \} + \dots \end{aligned}$$

Итак, наше утверждение доказано.

Чтобы применять изложенный здесь метод необходимо иметь правила

для вычисления значений функции $\tilde{\Phi}(t)$ по значениям функции $\Phi(t)$.

Поскольку при этом на практике никогда не приходится иметь дело с бесконечным тригонометрическим рядом, а лишь с конечным числом

членов, то мы приведем здесь основанные на приближенном гармоническом анализе формулы, предполагая, что число точек равно 36, т. е. что точки берутся через $\frac{\pi}{18}$ (через 10°).

Пусть для функции $\Phi(t)$ известны значения

$$\Phi_k = \Phi\left(\frac{\pi k}{18}\right) \quad (k=0, 1, 2, \dots, 35)$$

$$\Phi_{k+36} = \Phi_k.$$

Тогда $\Phi(t)$ можно приближенно представить в виде

$$\Phi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{17} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) + \frac{1}{2} a_{18} \cos 18t, \quad (\alpha)$$

где коэффициенты суть некоторые функции от чисел Φ_k .
После этого можно построить

$$\tilde{\Phi}(t) = \sum_{k=1}^{17} (b_k \cos kt - a_k \sin kt), \quad (\beta)$$

причем член $-\frac{1}{2} a_{18} \sin 18t$ может быть отброшен, так как его значения в точках $\frac{\pi k}{18}$ равны нулю, и затем найти числа

$$\tilde{\Phi}_k = \tilde{\Phi}\left(\frac{k\pi}{18}\right).$$

Несложный подсчет, который мы опустим, показывает, что

$$\tilde{\Phi}_n = \sum_{k=1}^9 I_k [\Phi_{n+2k-1} - \Phi_{n-2k+1}], \quad (n=1, 2, \dots, 36) \quad (23)$$

где

$$I_1 = \frac{1}{18} \operatorname{ctg} 5^\circ = 0,6350$$

$$I_2 = \frac{1}{18} \operatorname{ctg} 15^\circ = 0,2074$$

$$I_3 = \frac{1}{18} \operatorname{ctg} 25^\circ = 0,1191$$

$$I_4 = \frac{1}{18} \operatorname{ctg} 35^\circ = 0,07934$$

$$I_5 = \frac{1}{18} \operatorname{ctg} 45^\circ = 0,05556$$

$$I_6 = \frac{1}{18} \operatorname{ctg} 55^\circ = 0,03890$$

$$I_7 = \frac{1}{18} \operatorname{ctg} 65^\circ = 0,02591$$

$$I_8 = \frac{1}{18} \operatorname{ctg} 75^\circ = 0,01489$$

$$I_9 = \frac{1}{18} \operatorname{ctg} 85^\circ = 0,004861$$

Вычисления, связанные с расчетом крыла, удобно производить по следующей схеме.

В первую таблицу заносятся значения функции $\psi = F_0(\theta)$ для значений θ через $\frac{\pi}{18}$ (т. е. через 10°); если при этом по первоначальной таблице значения ψ в этих точках не были известны, то их необходимо найти интерполированием.

Затем в последнюю графу вносятся соответствующие значения для $\tilde{F}_0(\theta)$, находящиеся по (23).

Складывая соответственные числа 2-ой и 4-ой графы таблицы I, получаем числа 3-ей графы II таблицы и для них интерполированием по таблице I находим числа 4-ой графы таблицы II и затем продолжаем эти операции, переходя к таблице III и т. д.

Процесс считается законченным, если суммы соответственных чисел 2-ой и 5-ой граф дают с достаточной точностью числа 3-ей графы.

Напомним, что все углы следует брать в радианах.

Таблица I				Таблица II				
N	θ	$\psi = F_0(\theta)$	$\tilde{F}_0(\theta)$	N	t_1	$\theta = t_1 + \tilde{F}_0(t_1)$	$\psi = F_1(t_1)$	$\tilde{F}_1(t_1)$
1	2	3	4	1	2	3	4	5
1	$\frac{\pi}{18}$			1	$\frac{\pi}{18}$			
2	$\frac{2\pi}{18}$			2	$\frac{2\pi}{18}$			
3	$\frac{3\pi}{18}$			3	$\frac{3\pi}{18}$			
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮			
36	2π			36	2π			

Таблица III				
N	t_2	$\theta = t_2 + \tilde{F}_1(t_2)$	$\psi = F_2(t_2)$	$\tilde{F}_2(t_2)$
1	2	3	4	5

После того, как процесс закончен, т. е. найдена таблица IV

Таблица IV			
N	φ	$\theta = \varphi + \tilde{F}(\varphi)$	$\psi = F(\varphi)$
1	2	3	4

функции $F(\varphi) = \psi$ и $\varphi + \tilde{F}(\varphi) = \theta$ могут быть построены как тригонометрические суммы вида (α), (β) по правилам гармонического анализа.

Если же нас интересуют только аэродинамические свойства профиля, то для применения формулы (13) нужные значения производных можно найти непосредственно из последней таблицы, заменяя производную разделенной разностью, а число A_0 можно найти так.

$$\frac{1}{2\pi\beta} \int_0^{2\pi} \psi(\varphi) d\varphi$$

заменяя при этом интеграл суммой.

Что же касается числа β, то для его нахождения нужно найти в графе 3-ей число $\pm\pi$ и к соответствующему φ прибавить $\mp\pi$, т. к. при $\varphi = \pm\pi \mp \beta$ должно получиться $\theta = \pm\pi$.