Кандидат математических наук МАКАРОВ А. Н.

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВТОРОГО МЕТОДА ЯКОБИ НА ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, ЗАВИСЯЩИХ ОТ НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИИ.

§ 1.

Пусть дана замкнутая система нелинейных диференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0 \end{array}\right| \qquad (A) \qquad m \leqslant n,$$

где $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$, т. е. для которой скобки $[F_i, F_j]$ $i, j = 1, 2, \ldots m$ обращаются в нуль на основании уравнений системы (A). В настоящей статье дается простое, без ограничивающих предположений, изложение процесса ее интегрирования, аналогичного данному самим Якоби для случая одного уравнения.

§ 2.

Рассмотрим систему диференциальных уравнений (A) в предположении, что якобиан $\frac{D(F_1, F_2, \ldots F_m)}{D(p_1, p_2, \ldots p_m)}$ не обращается в нуль на основании системы уравнений (A). Тогда, разрешая последнюю относительно переменных $p_1, p_2, \ldots p_m$, можно представить данную систему в таком виде:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 = p_1 - f_1(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_m = p_m - f_2(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0. \end{array}\right| \qquad (B) \qquad m \leqslant n,$$

Так как система уравнений (A) замкнутая, то и система уравнений (B) также замкнутая. Если уравнения (A) не заключают z, то система (B) нормальная. Но мы будем полагать, что z явно входит и система (B) замкнутая.

Условимся, что символ (f) означает результат замены в функции $f(x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_m, p_{m+1}, \ldots p_n)$ переменных $p_1, p_2, \ldots p_m$ их значениями из уравнений (B). Тогда то обстоятельство, что уравнения

$$[\varphi_i, \varphi_j] = 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots m \\ j = 1, 2, \ldots m \end{array}$$

есть следствия уравнений (B) при этом нашем обозначении запишется так

$$([\varphi_i \varphi_j]) \equiv 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots m \\ j = 1, 2, \ldots m. \end{array}$$

Докажем следующую теорему:

Теорема. Если данная система уравнений (B) замкнутая, т. е. такая, что $([\varphi_i, \varphi_j]) \equiv 0$, то система линейных однородных уравнений

$$([\varphi_i, \Phi]) = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} + f_i\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \sum_{m+1}^{n} s\left[\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_s} + p_s\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) - \frac{\partial\Phi}{\partial p_s}\frac{d\varphi_i}{dx_s}\right] = 0, \qquad (C)$$

где искомая функция Φ не зависит от $p_1 \dots p_m$ и

$$\frac{d\varphi_i}{dx_s} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_s} + p_s\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}$$

$$i, j, = 1, 2, \dots m,$$

есть полная. Перепишем эту систему в развернутом виде:

$$([\varphi_i, \Phi]) = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} + \sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}\frac{\partial\Phi}{\partial x_s} + \left[f_i + \sum_{m+1}^{n} s\, p_s\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \sum_{m+1}^{n} s\frac{d\varphi_i}{dx_s}\frac{\partial\Phi}{\partial p_s} = 0. \qquad (C)$$

$$i = 1, \dots m$$

Вводя оператор:

$$X_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{m+1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_s}\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s} + \left[f_i + \sum_{m+1}^{n} p_s\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}\right]\frac{\partial f}{\partial z} - \sum_{m+1}^{n}\frac{\partial f}{\partial p_s}\frac{d\varphi_i}{dx_s}$$

дадим ей вид

$$X_i(\Phi) = 0 \qquad i = 1, 2, \dots m.$$

Должно показать, что

$$X_i X_k(\Phi) - X_k X_i(\Phi) \equiv 0,$$

т. е. что

$$X_i\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_t}\right) - X_k\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_t}\right) \equiv 0$$

$$X_i\left(f_k + \sum_{m+1}^{n} s\, p_s\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}\right) - X_k\left(f_i + \sum_{m+1}^{n} s\, p_s\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}\right) \equiv 0,$$

$$X_i\left(\frac{d\varphi_k}{dx_t}\right) - X_k\left(\frac{d\varphi_i}{dx_t}\right) \equiv 0,$$

если

$$([\varphi_i, \varphi_k]) \equiv 0; \quad i, k = 1, 2, \dots m; \quad \text{и} \quad t = m+1, \dots n.$$

Покажем, что

$$X_i\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_t}\right) - X_k\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_t}\right) \equiv 0 \qquad t = m+1, \dots n.$$

Действительно,

$$X_i\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_t}\right) - X_k\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_t}\right) = \frac{\partial^2\varphi_k}{\partial p_t\partial x_i} + \sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial p_t\partial x_s}\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s} + \left[f_i + \sum_{m+1}^{n} s\, p_s\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}\right]\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial p_t\partial z} -$$

$$- \sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial p_t\partial p_s}\frac{d\varphi_i}{dx_s} - \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial p_t\partial x_k} - \sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial p_t\partial x_s}\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s} - \left[f_k + \sum_{m+1}^{n} s\, p_s\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}\right]\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial p_t\partial z} +$$

$$+ \sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial p_t\partial p_s}\frac{d\varphi_k}{dx_s}. \qquad (1)$$

С другой стороны, диференцируя по p_t выражение

$$([\varphi_i, \varphi_k]) = \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i} + \frac{\partial\varphi_k}{\partial z}f_i - \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial z}f_k\right) +$$

$$+ \sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_s} + p_s\frac{\partial\varphi_k}{\partial z}\right) - \sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_s} + p_s\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\right),$$

имеем:

$$\frac{\partial}{\partial p_t}([\varphi_i,\ \varphi_k]) = \frac{\partial^2\varphi_k}{\partial p_t \partial x_i} + \frac{\partial^2\varphi_k}{\partial p_t \partial z} f_i + \frac{\partial\varphi_k}{\partial z}\frac{\partial f_i}{\partial p_t} - \left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial p_t \partial x_k} + \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial p_t \partial z} f_k + \frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\frac{\partial f_k}{\partial p_t}\right) +$$

$$+ \sum_{m+1}^{n} s \left[\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial p_t \partial p_s}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial\varphi_k}{\partial z}\right) + \frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}\left(\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial p_t \partial x_s} + p_s \frac{\partial^2\varphi_k}{\partial p_t \partial z}\right)\right] +$$

$$+ \frac{\partial\varphi_i}{\partial p_t}\frac{\partial\varphi_k}{\partial z} - \sum_{m+1}^{n} s \left[\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial p_t \partial p_s}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\right) + \frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}\left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial p_t \partial x_s} + p_s \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial p_t \partial z}\right)\right] - \frac{\partial\varphi_k}{\partial p_t}\frac{\partial\varphi_i}{\partial z},$$

или иначе:

$$\frac{\partial}{\partial p_t}([\varphi_i,\ \varphi_k]) = \frac{\partial^2\varphi_k}{\partial p_t \partial x_i} + \sum_{m+1}^{n} s \frac{\partial^2\varphi_k}{\partial p_t \partial x_s}\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s} + \frac{\partial^2\varphi_k}{\partial p_t \partial z}\left[f_i + \sum_{m+1}^{n} s\, p_s \frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}\right] -$$

$$- \sum_{m+1}^{n} s \frac{\partial^2\varphi_k}{\partial p_t \partial p_s}\frac{d\varphi_i}{dx_s} - \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial p_t \partial x_k} - \sum_{m+1}^{n} s \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial p_t \partial x_s}\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s} - \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial p_t \partial z}\left[f_k + \sum_{m+1}^{n} s\, p_s \frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}\right] +$$

$$+ \sum_{m+1}^{n} s \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial p_t \partial p_s}\frac{d\varphi_k}{dx_s} + \frac{\partial\varphi_k}{\partial z}\frac{\partial f_i}{\partial p_t} + \frac{\partial\varphi_k}{\partial z}\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_t} - \frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\frac{\partial f_k}{\partial p_t} - \frac{\partial\varphi_k}{\partial p_t}\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}.$$

Но так как

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_t} = -\frac{\partial f_i}{\partial p_t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\varphi_k}{\partial p_t} = -\frac{\partial f_k}{\partial p_t}, \qquad t = m+1, \dots n$$

то

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial z}\frac{\partial f_i}{\partial p_t} + \frac{\partial\varphi_k}{\partial z}\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_t} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\frac{\partial f_k}{\partial p_t} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_t} = 0.$$

Следовательно

$$\frac{\partial}{\partial p_t}([\varphi_i,\ \varphi_k]) = \frac{\partial^2\varphi_k}{\partial p_t \partial x_i} + \sum_{m+1}^{n} s \frac{\partial^2\varphi_k}{\partial p_t \partial x_s}\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s} + \frac{\partial^2\varphi_k}{\partial p_t \partial z}\left[f_i + \sum_{m+1}^{n} s\, p_s \frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}\right] -$$

$$- \sum_{m+1}^{n} s \frac{\partial^2\varphi_k}{\partial p_t \partial p_s}\frac{d\varphi_i}{dx_s} - \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial p_t \partial x_k} - \sum_{m+1}^{n} s \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial p_t \partial x_s}\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s} - \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial p_t \partial z}\left[f_k + \sum_{m+1}^{n} s \frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s} p_s\right] +$$

$$+ \sum_{m+1}^{n} s \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial p_t \partial p_s}\frac{d\varphi_k}{dx_s}. \tag{2}$$

Сравнивая правую часть равенства (1) с правой частью равенства (2) видим, что

$$X_i\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_t}\right) - X_k\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_t}\right) = \frac{\partial}{\partial p_t}([\varphi_i,\ \varphi_k]).$$

Но $([\varphi_i,\ \varphi_k]) \equiv 0$. Поэтому

$$X_i\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_t}\right) - X_k\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_t}\right) \equiv 0 \qquad \begin{matrix} t = m+1, \dots n \\ i,\ k = 1,\ 2, \dots m. \end{matrix} \tag{3}$$

Теперь докажем, что

$$X_i\left(f_k + \sum_{m+1}^{n} s\, p_s \frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}\right) - X_k\left(f_i + \sum_{m+1}^{n} s\, p_s \frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}\right) \equiv 0.$$

Именно, имеем, что

$$X_i(f_k) - X_k(f_i) + \sum_{m+1}^{n} s\, p_s \left[X_i\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}\right) - X_k\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}\right)\right] + \sum_{m+1}^{n} s \left[\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s} X_i(p_s) - \frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s} X_k(p_s)\right].$$

Пользуясь доказанным тождеством (3) и раскрывая символ $X(f)$, имеем:

$$X_i\Big(f_k+\sum_{m+1}^{n} s\, p_s \frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}\Big)-X_k\Big(f_i+\sum_{m+1}^{n} s\, p_s \frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}\Big)=\frac{\partial f_k}{\partial x_i}+\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial f_k}{\partial x_s}\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}+$$

$$+\frac{\partial f_k}{\partial z}\Big[f_i+\sum_{m+1}^{n} s\, p_s\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}\Big]-\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial f_k}{\partial p_s}\frac{d\varphi_i}{dx_s}-\frac{\partial f_i}{\partial x_k}-\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial f_i}{\partial x_s}\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}-\frac{\partial f_i}{\partial z}\Big[f_k+\sum_{m+1}^{n} s\, p_s\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}\Big]+$$

$$+\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial f_i}{\partial p_s}\frac{d\varphi_k}{dx_s}-\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}\frac{d\varphi_i}{dx_s}+\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}\frac{d\varphi_k}{dx_s};$$

а к как

$$X_i(p_s)=-\frac{d\varphi_i}{dx_s}\quad\text{и}\quad X_k(p_s)=-\frac{d\varphi_k}{dx_s}\qquad s=m+1,\ldots n.$$

Но

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}=-\frac{\partial f_k}{\partial p_s}\quad\text{и}\quad\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}=-\frac{\partial f_i}{\partial p_s}\qquad \begin{matrix} i,\ k=1,\ 2,\ldots m\\ s=m+1,\ldots n.\end{matrix}$$

Поэтому

$$\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial f_k}{\partial p_s}\frac{d\varphi_i}{dx_s}+\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}\frac{d\varphi_i}{dx_s}=0.$$

$$\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial f_i}{\partial p_s}\frac{d\varphi_k}{dx_s}+\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}\frac{d\varphi_k}{dx_s}=0.$$

Таким образом, имеем

$$X_i\Big(f_k+\sum_{m+1}^{n} s\, p_s\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}\Big)-X_k\Big(f_i+\sum_{m+1}^{n} s\, p_s\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}\Big)\equiv\frac{\partial f_k}{\partial x_i}+\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial f_k}{\partial x_s}\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}+$$

$$+\frac{\partial f_k}{\partial z}\Big[f_i+\sum_{m+1}^{n} s\, p_s\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}\Big]-\frac{\partial f_i}{\partial x_k}-\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial f_i}{\partial x_s}\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}-\frac{\partial f_i}{\partial z}\Big[f_k+\sum_{m+1}^{n} s\, p_s\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}\Big].\qquad(4)$$

Должно показать, что правая часть тождества (4) есть $([\varphi_k,\ \varphi_i])$. Действительно, имеем, что

$$([\varphi_k,\ \varphi_i])\equiv\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}+\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}f_k-\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}-\frac{\partial\varphi_k}{\partial z}f_i+$$

$$+\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}\Big(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_s}+p_s\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\Big)-\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}\Big(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_s}+p_s\frac{\partial\varphi_k}{\partial z}\Big)\equiv 0.$$

Так как:

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}=-\frac{\partial f_i}{\partial x_k};\quad\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_s}=-\frac{\partial f_i}{\partial x_s};\quad\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}=-\frac{\partial f_i}{\partial z}.\quad i,\ k=1,\ 2,\ldots m$$

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}=-\frac{\partial f_k}{\partial x_i};\quad\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_s}=-\frac{\partial f_k}{\partial x_s};\quad\frac{\partial\varphi_k}{\partial z}=-\frac{\partial f_k}{\partial z}.\quad s=m+1,\ldots n,$$

то можно переписать последнее тождество в таком виде

$$([\varphi_k,\ \varphi_i])\equiv\frac{\partial f_k}{\partial x_i}+\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial f_k}{\partial x_s}\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}+$$

$$+\frac{\partial f_k}{\partial z}\Big[f_i+\sum_{m+1}^{n} s\, p_s\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}\Big]-\frac{\partial f_i}{\partial x_k}-\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial f_i}{\partial x_s}\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}-\frac{\partial f_i}{\partial z}\Big[f_k+\sum_{m+1}^{n} s\, p_s\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}\Big].\qquad(5)$$

Сравнивая правые части тождеств (4) и (5), видим, что

$$X_i\Big(f_k+\sum_{m+1}^{n} s\, p_s\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}\Big)-X_k\Big(f_i+\sum_{m+1}^{n} p_s\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}\Big)\equiv([\varphi_k,\ \varphi_i]).$$

Следовательно,

$$X_i\Big(f_k+\sum_{m+1}^{n} s\, p_s \frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}\Big)-X_k\Big(f_i+\sum_{m+1}^{n} s\, p_s \frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}\Big)\equiv 0. \quad i,k=1,2,\dots m.$$

Докажем, наконец, что

$$X_i\Big(\frac{d\varphi_k}{dx_t}\Big)-X_k\Big(\frac{d\varphi_i}{dx_t}\Big)\equiv 0. \qquad \begin{matrix} t=m+1,\dots n \\ i,k=1,2,\dots m.\end{matrix}$$

Действительно, имеем, что:

$$X_i\Big(\frac{d\varphi_k}{dx_t}\Big)-X_k\Big(\frac{d\varphi_i}{dx_t}\Big)=X_i\Big(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_t}\Big)+$$

$$+\frac{\partial\varphi_k}{\partial z}X_i(p_t)+p_tX_i\Big(\frac{\partial\varphi_k}{\partial z}\Big)-X_k\Big(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_t}\Big)-\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}X_k(p_t)-p_tX_k\Big(\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\Big)$$

или

$$X_i\Big(\frac{d\varphi_k}{dx_t}\Big)-X_k\Big(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_t}\Big)=X_i\Big(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_t}\Big)-X_k\Big(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_t}\Big)-\frac{\partial\varphi_k}{\partial z}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_t}+\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_t}+p_t\Big[X_i\Big(\frac{\partial\varphi_k}{\partial z}\Big)-X_k\Big(\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\Big)\Big].$$

Но

$$X_i\Big(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_t}\Big)-X_k\Big(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_t}\Big)=\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_t\partial x_i}+\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_t\partial x_s}\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}+$$

$$+\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_t\partial z}\Big[f_i+\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}p_s\Big]-\sum_{m+1}^{n}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_t\partial p_s}\frac{d\varphi_i}{dx_s}-\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_t\partial x_k}-\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_t\partial x_s}\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}-$$

$$-\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_t\partial z}\Big[f_k+\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}p_s\Big]+\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_t\partial p_s}\frac{d\varphi_k}{dx_s}. \tag{6}$$

С другой стороны, диференцируя выражение

$$([\varphi_i,\varphi_k])=\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}+\frac{\partial\varphi_k}{\partial z}f_i-\Big(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}+\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}f_k\Big)+$$

$$+\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}\Big(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_s}+p_s\frac{\partial\varphi_k}{\partial z}\Big)-\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}\Big(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_s}+p_s\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\Big)$$

по переменной x_t где $t=m+1,\dots n$, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x_t}([\varphi_i,\varphi_k])\equiv\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_t\partial x_i}+\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_t\partial z}f_i+\frac{\partial\varphi_k}{\partial z}\frac{\partial f_i}{\partial x_t}-\Big(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_t\partial x_k}+\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_t\partial z}f_k+\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\frac{\partial f_k}{\partial x_t}\Big)+$$

$$+\sum_{m+1}^{n} s\Big[\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_t\partial p_s}\Big(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_s}+p_s\frac{\partial\varphi_k}{\partial z}\Big)+\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}\Big(\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_t\partial x_s}+p_s\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_t\partial z}\Big)\Big]-$$

$$-\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_t\partial p_s}\Big(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_s}+p_s\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\Big)-\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}\Big(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_t\partial x_s}+p_s\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_t\partial z}\Big),$$

или, иначе,

$$\frac{\partial}{\partial x_t}([\varphi_i,\varphi_k])\equiv\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_t\partial x_i}+\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_t\partial x_s}\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}+\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_t\partial z}\Big[f_i+\sum_{m+1}^{n} s\, p_s\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}\Big]-$$

$$\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_t\partial p_s}\frac{d\varphi_i}{dx_s}-\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_t\partial x_k}-\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_t\partial x_s}\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}-\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_t\partial z}\Big[f_k+\sum_{m+1}^{n} s\, p_s\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_s}\Big]+$$

$$+\sum_{m+1}^{n} s\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_t\partial p_s}\frac{d\varphi_k}{dx_s}+\frac{\partial\varphi_k}{\partial z}\frac{\partial f_i}{\partial x_t}-\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\frac{\partial f_k}{\partial x_t}. \tag{7}$$

Сравнивая выражения (6) и (7), мы видим, что

$$X_i\Big(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_t}\Big)-X_k\Big(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_t}\Big)\equiv\frac{\partial}{\partial x_t}([\varphi_i,\varphi_k])-\frac{\partial\varphi_k}{\partial z}\frac{\partial f_i}{\partial x_t}+\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\frac{\partial f_k}{\partial x_t},$$

или, так как

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_t} = -\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_t} = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_t} \qquad \begin{array}{l} t = m+1, \dots n \\ i, k = 1, 2, \dots m \end{array}$$

имеем окончательно, что

$$X_i\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_t}\right) - X_k\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_t}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x_t}\left([\varphi_i, \varphi_k]\right) + \frac{\partial \varphi_k}{\partial z}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_t} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_t}.$$

Рассмотрим теперь

$$X_i\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial z}\right) - X_k\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\right) \qquad i, k = 1, 2, \dots m$$

имеем, что

$$\begin{aligned} X_i\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial z}\right) - X_k\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\right) &= \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z\, \partial x_i} + \sum_{m+1}^{n} s\, \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z\, \partial x_s}\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_s} + \\ &+ \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z^2}\left[f_i + \sum_{m+1}^{n} s\, \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial p_s} p_s\right] - \sum_{m+1}^{n} s\, \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z\, \partial p_s}\frac{d\varphi_i}{dx_s} - \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z\, \partial x_k} - \\ &- \sum_{m+1}^{n} s\, \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z\, \partial x_s}\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_s} - \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2}\left[f_k + \sum_{m+1}^{n} s\, \frac{d\varphi_k}{\partial p_s} p_s\right] + \sum_{m+1}^{n} s\, \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z\, \partial p_s}\frac{d\varphi_k}{dx_s}. \end{aligned} \tag{8}$$

С другой стороны, продиференцировав по переменной z выражение $([\varphi_i, \varphi_k])$, имеем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}([\varphi_i, \varphi_k]) &\equiv \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z\, \partial x_i} + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z^2} f_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial z}\frac{\partial f_i}{\partial z} - \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z\, \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} f_k + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\frac{\partial f_k}{\partial z}\right) + \\ &+ \sum_{m+1}^{n} s\left[\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z\, \partial p_s}\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial \varphi_k}{\partial z}\right) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_s}\left(\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_s\, \partial z} + p_s \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z^2}\right)\right] - \\ &- \sum_{m+1}^{n} s\left[\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z\, \partial p_s}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\right) + \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_s}\left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z\, \partial x_s} + p_s \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2}\right)\right]; \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}([\varphi_i, \varphi_k]) &\equiv \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z\, \partial x_i} + \sum_{m+1}^{n} s\, \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z\, \partial x_s}\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_s} + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z^2}\left[f_i + \sum_{m+1}^{n} s\, p_s \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_s}\right] - \\ &- \sum_{m+1}^{n} s\, \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z\, \partial p_s}\frac{d\varphi_i}{dx_s} - \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z\, \partial x_k} - \sum_{m+1}^{n} s\, \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z\, \partial x_s}\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_s} - \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2}\left[f_k + \sum_{m+1}^{n} s\, \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_s} p_s\right] + \\ &+ \sum_{m+1}^{n} s\, \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z\, \partial p_s}\frac{d\varphi_k}{dx_s} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial z}\frac{\partial f_i}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\frac{\partial f_k}{\partial z}. \end{aligned}$$

Но

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = -\frac{\partial f_i}{\partial z} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} = -\frac{\partial f_k}{\partial z};$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}([\varphi_i, \varphi_k]) &\equiv \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z\, \partial x_i} + \sum_{m+1}^{n} s\, \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z\, \partial x_s}\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_s} + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z^2}\left[f_i + \sum_{m+1}^{n} s\, p_s \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_s}\right] - \sum_{m+1}^{n} s\, \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z\, \partial p_s}\frac{d\varphi_i}{dx_s} - \\ &- \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z\, \partial x_k} - \sum_{m+1}^{n} s\, \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z\, \partial x_s}\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_s} - \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2}\left[f_k + \sum_{m+1}^{n} s\, \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_s} p_s\right] + \sum_{m+1}^{n} s\, \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z\, \partial p_s}\frac{d\varphi_k}{dx_s}. \end{aligned} \tag{9}$$

Сравнивая между собой выражения (8) и (9), заключаем, что

$$X_i\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_t}\right) - X_k\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_t}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial z}([\varphi_i, \varphi_k]).$$

Следовательно,

$$X_i\left(\frac{d\varphi_k}{dx_t}\right) - X_k\left(\frac{d\varphi_i}{dx_t}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x_t}([\varphi_i, \varphi_k]) + p_t \frac{\partial}{\partial z}([\varphi_i, \varphi_k]) \equiv \frac{d}{dx_t}([\varphi_i, \varphi_k])$$

и следовательно

$$X_i\left(\frac{d\varphi_k}{dx_i}\right)-X_k\left(\frac{d\varphi_i}{dx_i}\right)\equiv 0.$$

Итак, система линейных, однородных уравнений

$$([\varphi_i,\ \Phi])=\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}+f_i\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\sum_{m+1}^{n}s\left[\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_s}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_s}+p_s\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)-\frac{\partial\Phi}{\partial p_s}\frac{d\varphi_i}{dx_s}\right]=0 \qquad i=1,\ 2,\ldots m$$

есть система якобиевская.

Она имеет $2n-2m+1$ независимых между собой решений.

§ 3.

Процесс определения полного интеграла системы (A) или эквивалентной ей системы уравнений (B), для которой уравнения

$$[\varphi_i,\ \varphi_j]=0 \qquad i,\ j=1,\ 2,\ldots m$$

есть следствия уравнений самой системы (B), заключается в следующем.

Найдем сначала новое уравнение

$$F_{m+1}=a_{m+1},$$

где F_{m+1} не заключает $p_1\ldots p_m$ и a_{m+1} есть произвольное постоянное, так, чтобы уравнения

$$[\varphi_i,\ F_{m+1}-a_{m+1}]=0 \qquad i=1,\ 2,\ldots m$$

были следствием системы уравнений (B).

Так как $[\varphi_i,\ F_{m+1}-a_{m+1}]=[\varphi_i,\ F_{m+1}]$, то очевидно, что этому свойству должна удовлетворять сама функция $F_{m+1}(x_1\ldots x_n,\ z,\ p_{m+1},\ldots p_n)$, т. е. она должна быть такой, чтобы уравнения

$$[\varphi_i,\ F_{m+1}]=0 \qquad i=1,\ 2,\ldots m$$

обращались в тождества на основании уравнений (B).

Таким образом, искомая функция $F_{m+1}(x_1\ldots x_n,\ z,\ p_{m+1},\ldots p_n)$ должна быть решением системы однородных, линейных уравнений

$$([\varphi_i,\ \Phi])=0 \qquad i=1,\ 2,\ldots m.$$

Эта система по доказанному — якобиевская и имеет $2n-2m+1$ решений, независимых относительно $x_{m+1},\ldots x_n,\ z,\ p_{m+1},\ldots p_n$.

Пусть будет $F_{m+1}(x_1\ldots x_n,\ z,\ p_{m+1},\ldots p_n)$ одно из решений, заключающих $p_{m+1},\ldots p_n$.

Присоединяя уравнение $F_{m+1}=a_{m+1}$ к системе уравнений (B), будем иметь новую замкнутую систему уравнений

$$\varphi_i=0;\quad F_{m+1}=a_{m+1} \qquad i=1,\ 2,\ldots m$$

или, решая ее относительно $p_1,\ p_2,\ldots p_m,\ p_{m+1}$, замкнутую систему $m+1$ уравнений

$$\left.\begin{aligned}\varphi_i^{(1)}&=p_i-f_i^{(1)}(x_1,\ x_2\ldots x_n,\ z,\ p_{m+2}\ldots p_n,\ a_{m+1})=0\\ \varphi_{m+1}^{(1)}&=p_{m+1}-f_{m+1}^{(1)}(x_1,\ldots x_n,\ z,\ p_{m+2}\ldots p_n,\ a_{m+1})=0\\ &\qquad i=1,\ 2,\ldots m\end{aligned}\right\}\qquad (B_1)$$

эквивалентную замкнутой системе уравнений

$$\varphi_i=0;\quad F_{m+1}=a_{m+1} \qquad i=1,\ 2,\ldots m.$$

Далее, находим этим же процессом уравнение $F_{m+2}=a_{m+2}$, где F_{m+2} есть функция переменных $x_1\ldots x_n,\ z,\ p_{m+2},\ldots p_n$. Присоединяя его к замкнутой системе (B_1) получим новую замкнутую систему $m+2$ уравнений

$$\varphi_i^{(1)}=0;\quad F_{m+2}-a_{m+2}=0 \qquad i=1,\ 2,\ldots m+1.$$

Решая ее относительно $p_1,\ p_2\ldots p_{m+2}$, получим замкнутую систему $m+2$ уравнений

$$\varphi_i^{(2)}=p_i-f_i^{(2)}(x_1,\ x_2,\ldots x_n,\ z,\ p_{m+3},\ldots p_n,\ a_{m+1},\ a_{m+2})=0 \qquad (B_2)$$

эквивалентную замкнутой системе уравнений

$$\varphi_i = 0; \quad F_{m+1} = a_{m+1}; \quad F_{m+2} = a_{m+2} \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

и так далее.

Продолжая этот процесс далее, мы, наконец, получим замкнутую систему n уравнений

$$\varphi_i^{(n-m)} = p_i - f_i^{(n-m)}(x_1, x_2, \ldots x_n, z, a_{m+1}, \ldots a_n) = 0 \qquad (B_{n-m}),$$
$$i = 1, 2, \ldots n.$$

эквивалентную замкнутой системе уравнений

$$\varphi_i = 0; \quad F_{m+1} = a_{m+1}; \quad \ldots F_n = a_n \qquad i = 1, 2, \ldots m.$$

Определим, наконец, единственное решение $F_{n+1}(x_1 \ldots x_n, z, a_{m+1}, \ldots a_n)$ якобиевской системы уравнений

$$([\varphi_i^{(n-m)}, \Phi]) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots n.$$

Последняя имеет вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + f_i^{(n-m)} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots n.$$

Поэтому

$$\frac{\partial F_{n+1}}{\partial x_i} + f_i^{(n-m)} \frac{\partial F_{n+1}}{\partial z} = 0.$$

Определив z из последнего уравнения $F_{n+1} = a_{n+1}$ найдем полный интеграл $z = \psi(x_1, x_2, \ldots x_n, a_{m+1}, \ldots a_n, a_{n+1})$ замкнутой системы (B), а следовательно, эквивалентной ей системы (A).

В самом деле

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = -\left(\frac{\dfrac{\partial F_{n+1}}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F_{n+1}}{\partial z}} \right)_{z=\psi} = (f_i^{(n-m)})_{z=\psi} \qquad i = 1, 2, \ldots n.$$

Поэтому $z = \psi(x_1, x_2, \ldots x_n, a_{m+1}, \ldots a_n, a_{n+1})$ есть интеграл системы уравнений

$$\varphi_i^{(n-m)} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots n,$$

а следовательно, и системы (B): $\varphi_i = 0 \quad i = 1, 2, \ldots m$.

Он — полный, так как система

$$z = \psi; \quad \frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

эквивалентна системе уравнений

$$\varphi_i = 0; \quad F_{m+1} = a_{m+1}; \quad \ldots F_n = a_n; \quad F_{n+1} = a_{n+1} \quad i = 1, 2, \ldots m$$

и из нее определяются произвольные постоянные

$$a_{m+1}, \ldots a_n, \; a_{n+1}.$$

Резюме

В настоящей работе излагается распространение второго метода Якоби интегрирования на замкнутую систему нелинейных диференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$F_i(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots m.$$

Автор дает в простой форме определение полного интеграла замкнутой системы

$$F_i = 0; \qquad i = 1, 2, \ldots m.$$

5 марта 1935 г.