ШУН М. С.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА

Как известно [см. (1), (2), (3)], имеет место следующее асимптотическое представление Лапласа для полиномов Лежандра:

$$P_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin\theta}}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{\delta_n}{\sqrt{n}}, \tag{1}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n = 0.$

Представление Лапласа имеет место для интервала $(\varepsilon, \pi-\varepsilon)$, где ε — фиксированная, положительная постоянная.

С другой стороны, имеет место соотношение Mehler'a [см. (4), стр. 180]:

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(\cos\frac{z}{n}\right) = J_0(z). \tag{2}$$

Принимая во внимание известную асимптотическую формулу:

$$J_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\cos\left(\frac{\pi z}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{z}\right)\right],$$

ясно, что можно ожидать хорошей аппроксимации полинома Лежандра Бесселевой функцией для интервала $(0, \pi-\varepsilon)$.

Для этого воспользуемся методом акад. Стеклова [2].

Рассмотрим диференциальное уравнение полиномов Лежандра:

$$(1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P'_n(x) = 0 \tag{3}$$

$$P_n(1) = 1, \quad P'_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{3_1}$$

Положим:

$$x = \cos t, \quad P_n(\cos t) = v_n(t)\sqrt{\csc t}. \tag{4}$$

Тогда уравнение (3) примет вид:

$$v''_n(t) + \left(\lambda_n^2 + \frac{1}{4t^2}\right)v_n(t) = \varphi(t)\,v_n(t), \tag{5}$$

где

$$\lambda_n = n + \frac{1}{2}, \quad \varphi(t) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2}\right) = -\frac{1}{12} + 0(t^2),$$

причем $\varphi(t)$ функция регулярная в круге $|t| < \pi$ и, следовательно, $|\varphi(t)| < c$ для $|t| < \pi$.

Уравнение (5) может быть заменено эквивалентным интегральным уравнением Вольтерра:

$$\Delta(\tau)\,v_n(t) = t^{\frac{1}{2}}J_0(\lambda_n t)M_1(\tau) + t^{\frac{1}{2}}N_0(\lambda_n t)M_2(\tau) + J(t,\tau). \tag{5_1}$$

Здесь:

$$M_1(\tau) = P_n(\cos\tau)\cdot\sin^{\frac{1}{2}}(\tau)\frac{d}{d\tau}[\tau^{\frac{1}{2}}N_0(\lambda_n\tau)] -$$

$$-\tau^{\frac{1}{2}}N_0(\lambda_n\tau)\left[\frac{\cos\tau}{2\sqrt{\sin\tau}}P_n(\cos\tau) - \sin\tau\cdot P'_n(\cos\tau)\right]$$

$$M_2(\tau) = -P_n(\cos\tau)\cdot\sin^{\frac{1}{2}}\tau\frac{d}{d\tau}[\tau^{\frac{1}{2}}J_0(\lambda_n\tau)] +$$

$$+\tau^{\frac{1}{2}}J_0(\lambda_n t)\left[\frac{\cos\tau}{2\sqrt{\sin\tau}}P_n(\cos\tau) - \sin\tau\cdot P'_n(\cos\tau)\right]$$

$$\Delta(\tau) = w[\tau^{\frac{1}{2}}J_0(\lambda_n\tau), \tau^{\frac{1}{2}}N_0(\lambda_n\tau)] = \frac{2}{\pi} \tag{6}$$

$w(y_1, y_2)$ — определитель Вронского

$N_0(z)$ — функция Неймана

$$J(t,\tau) = \int_\tau^t \delta(u,t)\varphi(u)v_n(u)\,du$$

$$\delta(u,t) = \begin{vmatrix} u^{\frac{1}{2}}J_0(\lambda_n u), & u^{\frac{1}{2}}N_0(\lambda_n u) \\ t^{\frac{1}{2}}J_0(\lambda_n t), & t^{\frac{1}{2}}N_0(\lambda_n t) \end{vmatrix}.$$

Проведя предельный переход при $\tau \to 0$, легко найдем:

$$\lim_{\tau\to 0} M_1(\tau) = \frac{2}{\pi}; \quad \lim_{\tau\to 0} M_2(\tau) = 0.$$

Таким образом (5_1) примет вид:

$$v_n(t) = t^{\frac{1}{2}}J_0(\lambda_n t) + \frac{\pi}{2}\int_0^t \delta(u,t)\cdot\varphi(u)v_n(u)\,du. \tag{5_2}$$

Заметим также следующее равенство:

$$\int_0^\pi v_n^2(t)\,dt = \int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}. \tag{6_1}$$

Оценим теперь интегральный член в (5_2).

Имеем:

$$\int_0^t = \int_0^{\lambda_n^{-1}} + \int_{\lambda_n^{-1}}^t = I_1 + I_2$$

$$|I_1| = \left|\int_0^{\lambda_n^{-1}}\right| = \left|\frac{1}{\lambda_n^{3/2}}\int_0^1 \begin{vmatrix} u^{\frac{1}{2}}J_0(u), & u^{\frac{1}{2}}N_0(u) \\ t^{\frac{1}{2}}J_0(\lambda_n t), & t^{\frac{1}{2}}N_0(\lambda_n t) \end{vmatrix} \varphi\left(\frac{u}{\lambda_n}\right)v_n\left(\frac{u}{\lambda_n}\right)du\right| <$$

$$< \frac{1}{\lambda_n^{\frac{3}{2}}}\int_0^1 c\,|v_n|_{\max}\,du < \frac{c}{\lambda_n^{\frac{3}{2}}},$$

так как:

$|v_n(t)| = |\sqrt{\sin t}\cdot P_n(\cos t)| < 1$, а $|x^{\frac{1}{2}}J_0(x)|$ и $|x^{\frac{1}{2}}N_0(x)|$ ограничены.

Для оценки I_2 воспользуемся неравенством Шварца и (6_1).

Тогда:

$$I_2^2 < \int_{\frac{1}{\lambda_n}}^{t} \delta^2(u, t)\,\varphi^2(u)\,du \int_{\frac{1}{\lambda_n}}^{t} v_n^2(t)\,dt = P \cdot Q.$$

Но

$$Q < \int_0^{\pi} v_n^2(t)\,dt = \frac{2}{2n+1} = \frac{1}{\lambda_n}$$

$$P \leqslant \frac{c}{\lambda_n} \int_1^{\lambda_n} \delta^2\left(\frac{u}{\lambda_n}, t\right) du < \frac{c_1}{\lambda_n^2}.$$

Таким образом

$$|I_2| < \frac{\sqrt{c_1}}{\lambda_n^{3/2}}.$$

Поэтому имеем следующую оценку интегрального члена в (5_2):

$$I(t, 0) = 0\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Теперь находим асимптотическое представление полиномов Лежандра:

$$P_n(\cos t) = \sqrt{\frac{t}{\sin t}}\, J_0\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right] + 0\left(n^{-\frac{3}{2}}\right) \tag{7}$$

$$0 \leqslant t < \pi.$$

Положив $t = \frac{z}{n}$ и проведя предельный переход при $n \to \infty$, получим результат Mehler'a.

В случае $t > \varepsilon$, $-\,0(nt) = 0(n)$.

Заменив $J_0\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right]$ асимптотическим разложением, получим формулу Лапласа.

Наконец, заметим, что формула (7) диференцируема для всех t из интервала $0 \leqslant t < \pi$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Frank und Mises. Die Differential- und Integralgleichungen. B. I, SS. 436—437.
[2] Stekloff. Sur les expressions asymptotiques... pp. 21—27.
[3] Курант-Гильберт. Методы математической физики т. I, стр. 506—508.
[4] Уиттекер и Ватсон. Курс современного анализа, т. II.