

§1. Основные понятия.

Проверено  
1958 г.

Перечитан  
1939 г.

Проверено  
1947 г.

Изучая бесконечно-длинное крыло в плоско-параллельном потоке идеальной жидкости, мы видели, что такое крыло испытывает только подъемную силу, и величина этой подъемной силы пропорциональна циркуляции  $\Gamma$  вокруг крыла.

Проверено  
1952 г.

Если взять элемент бесконечно-длинного крыла, имеющий ширину  $dx$ , то приходящаяся на него подъемная сила равна

$$dP = \rho V_0 \Gamma dx \quad (1)$$

Определяя циркуляцию  $\Gamma$  из условия конечности скорости в задней угловой точке профиля, мы нашли для нее величину

$$\Gamma = \pi V_0 t \sin \alpha \quad (2)$$

где  $\alpha$  - угол атаки относительно первой оси профиля, т.е. направления, при движении вдоль которого подъемная сила обращается в нуль, а  $t$  - некоторая длина, которая практически мало отличается от хорды профиля.

Для малых углов атаки формулу (2) можно заменить более простой формулой

$$\Gamma = \pi V_0 t \alpha \quad (3)$$

причем угол  $\alpha$  должен измеряться в радианах.

Опыты, в которых плоско-параллельное обтекание крыла осуществлено с большим приближением,

Научно-техническая библиотека "ХАН"



kn0003556

К. П. ПЕТУХА  
ХАН

ПЕРЕОБЛІК 2012 р.

ПЕРЕОБЛІК 2012 р.



подтверждают достаточно хорошо приведенные формулы. Эти опыты хотя и дают отличную от нуля, но весьма малую величину лобового сопротивления, а для подъемной силы получается значение, несколько меньшее величины.

$$dP = \pi \rho \cdot V_0^2 \cdot t \cdot \alpha \cdot dx,$$

которую мы получаем с помощью формул (1) и (3).

Источником обоих расхождений можно считать трение воздуха о поверхность крыла, вызываемое вязкостью, которая при выводе формул (1) и (2) не учитывалась.

Лобовое сопротивление, приходящееся на элемент бесконечно-длинного крыла, можно представить в виде

$$dQ_p = C_p \cdot S \cdot V_0^2 \cdot t \cdot dx \tag{4}$$

где  $C_p$  - некоторый числовой коэффициент, который в большинстве случаев определяют опытным путем, и который называют коэффициентом правильного сопротивления.

Для хороших профилей

$$C_p \cong 0,004$$

Формула (4) вносит первую поправку на поверхностное трение в найденный нами ранее закон сопротивления для бесконечно-длинного крыла.

Чтобы внести вторую поправку на поверхностное трение, заменим формулу (3) формулой

$$\Gamma = k \cdot V_0 \cdot t \cdot \alpha \tag{3 bis}$$

где  $k$  - некоторый коэффициент, близкий к  $\pi$  и всегда меньший  $\pi$ . Коэффициент  $k$  зависит от профиля крыла и обычно находится опытным путем, на чем мы остановимся ниже.

Переходя от плоско-параллельных течений к обтеканию реального крыла, имеющего конечный размах, мы



должны сразу отметить два важных факта, установленных всеми опытными исследованиями крыльев: во-первых лобовое сопротивление реального крыла значительно превышает ту величину, которую можно было бы рассматривать (в соответствии с приведенным значением коэффициента  $C_p$ ), как результат трения воздуха о поверхность крыла; во-вторых, за крылом конечного размаха в потоке обтекающей его жидкости имеются вихри, которые тянутся от заднего края крыла назад, образуя приблизительно плоскую полосу.

Независимо от того или иного объяснения процесса образования вихревой пелены за крылом совершенно ясно, что на это вихреобразование тратится часть энергии, расходуемой на движение крыла, а это значит, что при движении крыла возникает сопротивление, связанное с указанным вихреобразованием. Следовательно, приведенные нами два экспериментальных факта между собою связаны, и естественно возникает предположение, что учет вихревого поля за крылом должен дать возможность найти, то дополнительное лобовое сопротивление, которое крыло конечного размаха испытывает.

Мы увидим ниже, что это предположение полностью оправдывается.

Лобовое сопротивление, вызываемое образованием вихрей за крылом, называют индуктивным сопротивлением. Теория индуктивного сопротивления в настоящее время разработана хорошо, чем наука обязана Л. Прандтлю.

Впрочем, лежащие в основе теории индуктивного



сопротивления идеи высказывались задолго до Прандтля-Ланчестером, а Н. Жуковский даже пользовался ими в своей теории гребного винта.

2. Покажем прежде всего, что существование вихревой пелены за крылом конечного размаха непосредственно из факта существования подъемной силы. Действительно, пусть на крыло действует некоторая подъемная сила. Тогда под крылом мы будем иметь некоторое повышение давления, а над крылом некоторое понижение давления.



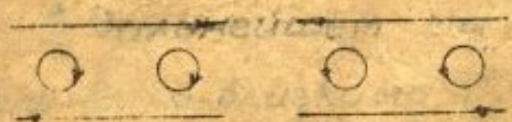
Благодаря такой разнице давлений воздух у концов крыла стремится двигаться из области под крылом

в область над крылом. В силу этого линии течения непосредственно за крылом получают отклонения: они сближаются над крылом и раздвигаются под крылом.



Черт 2

Но это означает, что за крылом начинается поверхность разрыва скорости, а такая поверхность эквивалентна ряду параллельных вихрей, которые начинаются у задней кромки и тянутся назад в направлении потока.



Черт 3

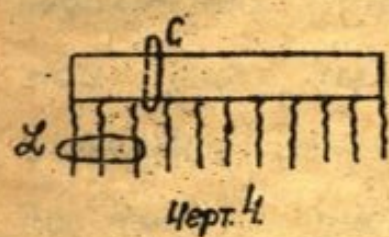
3. Направим ось  $X$ -ов вдоль размаха крыла, а за начало координат примем середину

размаха.

Взявши сечение крыла, отвечающее некоторой абсциссе

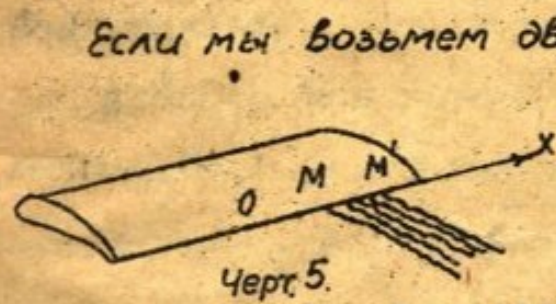


$x$ , рассмотрим ту вихревую полосу, которая опирается на участок нашего крыла между абсциссами  $-\frac{c}{2}$  и  $x$ . Напряжение этой вихревой полосы является, очевидно, некоторой функцией от  $x$ , которую мы обозначим через  $\Gamma(x)$ . Это напряжение равно циркуляции по контуру  $\mathcal{L}$ , охватывающему нашу вихревую полосу (черт. 4). Но контур  $\mathcal{L}$  можно перевести с помощью непрерывной деформации в контур  $\mathcal{C}$ , охватывающий крыло в сечении с абсциссой  $x$ . А так как при этой деформации контура  $\mathcal{L}$  мы не пересекаем ни крыла ни вихрей, то циркуляции вдоль  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{C}$  в силу теоремы Стокса равны.



Таким образом мы приходим к выводу, что циркуляция вокруг крыла в сечении с абсциссой  $x$  имеет ту же величину  $\Gamma(x)$ , что и циркуляция вокруг вихрей, которые опираются на часть крыла слева (или справа) от точки с абсциссой  $x$ .

Если мы возьмем два сечения крыла  $M$  и  $M'$  с абсциссами  $x$  и  $x'$ , то циркуляции, которые им отвечают, будут  $\Gamma(x)$  и  $\Gamma(x')$ , а напряжение вихревой полоски, опирающейся на отрезок крыла  $MM'$ , будет, очевидно, равно:



циссами  $x$  и  $x'$ , то циркуляции, которые им отвечают, будут  $\Gamma(x)$  и  $\Gamma(x')$ ,

$$\Gamma(x') - \Gamma(x)$$

В дальнейшем мы будем предполагать точки  $M'$  и  $M$  бесконечно-близкими ( $x' = x + dx$ ). Мы сможем сказать, что напряжение вихревой полоски в этом случае равно

$$\Gamma(x + dx) - \Gamma(x) = d\Gamma(x)$$

Совершенно ясно, что



$$\Gamma\left(-\frac{\rho}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\rho}{2}\right)$$

Уроме того, очевидно, что благодаря симметрии крыла

$$\Gamma(-x) = \Gamma(x)$$

4. Чтобы найти силы, действующие на крыло конечного размаха, необходимо учесть распределение вокруг крыла добавочных скоростей, которые связаны с вихревой пеленой крыла, или, как принято говорить, индуцируются вихревой пеленой. Ясное дело, что точный анализ вопроса требует учета движения и возможных деформаций самой вихревой пелены. В таком виде наша задача представляет весьма большие трудности.

Мы вынуждены поэтому ограничиться приближенным анализом, который исходит из опытного факта, что средняя индуцированная скорость невелика по сравнению с основной скоростью потока.

Поэтому мы предположим, что:

1. можно пренебречь собственным движением вихревой пелены;

2. вихревые линии, образующие вихревую пелену, прямолинейны и имеют то же направление, что и скорость на бесконечности в относительном течении, т.е. течении относительно осей, неизменно связанных с крылом;

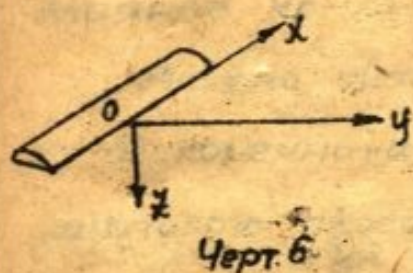
3. если обозначить через  $W(x)$  величину индуцированной скорости в точке крыла с абсциссой  $x$ , то отношение

$$\frac{W(x)}{V_0}$$

есть величина малая, квадратом которой можно пренебречь.



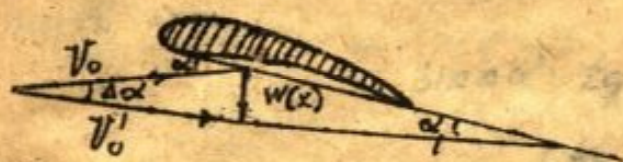
Условимся ось  $y$ -ов направлять вдоль скорости потока на бесконечности перед крылом, а положительное направление оси  $z$ -ов выберем так, чтобы получилась правая система координат (см. чертеж).



Черт. 6

Возьмем теперь элемент крыла между сечениями  $x$  и  $x+dx$ ; ширина этого элемента, следовательно, равна  $dx$ .

В связи с существованием вихревой пелены под выбранным элементом будет некоторая скорость  $W(x)$  (направленная вниз, если  $W(x) > 0$ ), которой мы не имели бы, если бы наш элемент принадлежал бесконечно-длинному крылу в плоско-параллельном потоке.



Черт. 7

В первом приближении можно считать, что появление этой дополнительной скорости вызывает единственное различие

в режиме элемента конечного крыла и элемента соответствующего бесконечно-длинного крыла в плоско-параллельном потоке.

Поэтому мы можем отождествить выбранный нами элемент конечного крыла с элементом бесконечно-длинного крыла, одинакового профиля, но поставленного под углом атаки

$$\alpha_1 = \alpha - \Delta\alpha$$

при скорости на бесконечности

$$V_0' = V_0 \frac{1}{\cos \Delta\alpha}$$

где

$$\operatorname{tg} \Delta\alpha = \frac{W(x)}{V_0}$$



Для учета эффекта, вызываемого вихревой пеленой, мы, стало-быть, изменяем по величине и направлению скорость на бесконечности в потоке, обтекающем соответствующее рассматриваемому элементу бесконечно-длинное крыло.

Можно сказать, что конечное крыло отличается от бесконечно-длинного наличием в каждом сечении некоторого скоса потока  $\Delta\alpha$ .

Угол атаки  $\alpha$  является уже теперь только геометрическим углом атаки элемента, а динамическим (или, как еще говорят, истинным) углом атаки будет

$$\alpha_i = \alpha - \Delta\alpha$$

На основании нашего предположения, мы можем принять, что

$$\sin \Delta\alpha = \operatorname{tg} \Delta\alpha = \Delta\alpha = \frac{W(x)}{V_0}$$

$$\cos \Delta\alpha = 1$$

Поэтому

$$\alpha_i = \alpha - \frac{W(x)}{V_0}$$

$$V_0' = V_0$$

5. Теперь мы можем написать формулу (3). Мы получаем основное уравнение теории индуктивного сопротивления

$$\Gamma(x) = k V_0 t(x) \left[ \alpha - \frac{W(x)}{V_0} \right],$$

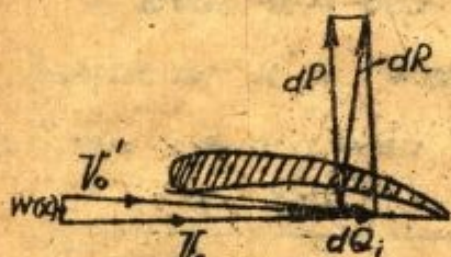
где  $t(x)$  есть хорда крыла в сечении  $x$ ; коэффициент  $k$  и геометрический угол атаки  $\alpha$  также будут, вообще говоря, функциями от  $x$ .

Мы можем далее написать выражение для силы, действующей на наш элемент; эта сила  $dR$  по формуле (1) равна

$$dR = \rho V_0 \Gamma(x) dx$$



и направлена перпендикулярно направлению повернутой скорости  $V_0'$ .



Черт. 8.

Так как эта сила не перпендикулярна к скорости  $V_0$ , то мы получаем не только подъемную силу, но и некоторое лобовое сопротивление, которое мы и называли ранее индуктивным сопротивлением.

Обозначая его через  $dQ_i$ , а подъемную силу по-прежнему через  $dP$ , найдем, что

$$dP = \rho \Gamma(x) V_0 \cos(\Delta \alpha) dx = \rho \Gamma(x) V_0 dx,$$

$$dQ_i = \rho \Gamma(x) V_0 \sin(\Delta \alpha) dx = \rho \Gamma(x) w(x) dx.$$

Чтобы получить полную подъемную силу и полное индуктивное сопротивление, необходимо эти выражения просуммировать по всему размаху. Это дает

$$P = \rho V_0 \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \Gamma(x) dx$$

$$Q_i = \rho \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \Gamma(x) w(x) dx$$

Учитывая профильное сопротивление мы находим для полного лобового сопротивления величину

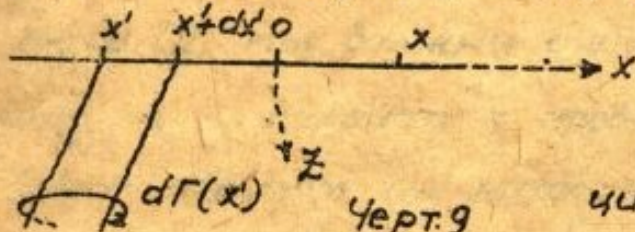
$$Q = Q_i + Q_p = \rho \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \Gamma(x) w(x) dx + \rho V_0^2 \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} t(x) c_p dx.$$



10

## §2. Определение индуцированной скорости при заданном распределении циркуляции.

1. Возьмем два сечения крыла, которым отвечают абсциссы  $x'$  и  $x'+dx'$ . На элемент крыла, ограниченный этими сечениями, опирается вихревая полоска с направлением  $d\Gamma(x')$ .



Будем искать проекцию на ось  $z$ -ов скорости, которую указывает вихревая полоска индуцирует непосредственно под крылом в некоторой точке с абсциссой  $x$ .

Согласно теореме Био-Савара искомая проекция скорости будет равна

$$\frac{1}{4\pi} \frac{d\Gamma(x')}{x-x'} = \frac{1}{4\pi} \frac{d\Gamma}{dx'} \frac{dx'}{x-x'}, \quad (1)$$

если  $x \neq x'$ . Если же  $x = x'$ , т.е. скорость ищется в точке, лежащей непосредственно под выделенным элементом крыла, то индуцированная скорость будет иметь направление, перпендикулярное к оси  $z$ -ов, и значит искомая проекция будет равна нулю.

На основании сказанного мы заключаем, что для нахождения проекции на ось  $z$ -ов полной индуцированной скорости (т.е. происходящей от всей вихревой пелены) в точке с абсциссой  $x$  мы должны выделить из вихревой пелены полоску, ограниченную абсциссами  $x-\epsilon$  и  $x+\epsilon$ , где  $\epsilon$  — некоторое достаточно малое число, а затем оставшуюся часть вихревой пелены разбить на элементы, составить для каждого из них выражение (1) и просуммировать их по всем этим элементам.

Таким путем для искомой проекции скорости мы получим выражение:



$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\rho}{2}}^{x-\varepsilon} \frac{d\Gamma}{dx'} \frac{dx'}{x-x'} + \frac{1}{4\pi} \int_{x+\varepsilon}^{\frac{\rho}{2}} \frac{d\Gamma}{dx'} \frac{dx'}{x-x'} \quad (2)$$

В действительности в точке  $x$  не дает проекции на ось  $Z$ -ов только та скорость, которую индуцирует вихрь, начинающийся непосредственно над точкой  $x$ . Поэтому в выражении (2) мы должны считать  $\varepsilon$  бесконечно-малой величиной и перейти к пределу  $\varepsilon=0$ .

Таким образом мы находим, что

$$w(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{-\frac{\rho}{2}}^{x-\varepsilon} \frac{d\Gamma}{dx'} \frac{dx'}{x-x'} + \int_{x+\varepsilon}^{\frac{\rho}{2}} \frac{d\Gamma}{dx'} \frac{dx'}{x-x'} \right\} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\rho}{2}}^{\frac{\rho}{2}} \frac{d\Gamma}{dx'} \frac{dx'}{x-x'} \quad (3)$$

т.е.  $w(x)$  есть главное значение (по Коши) интеграла

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\rho}{2}}^{\frac{\rho}{2}} \frac{d\Gamma}{dx'} \frac{dx'}{x-x'}$$

Формула (3) позволяет определить  $w(x)$ , если распределение циркуляции известно, т.е. функция  $\Gamma(x)$  задана.

2. При этих вычислениях удобнее всего пользоваться разложениями функций в тригонометрические ряды. С этой целью положим:

$$x = \frac{\rho}{2} \cos \theta$$

Так как  $x$  меняется от  $-\frac{\rho}{2}$  до  $\frac{\rho}{2}$ , то  $\theta$  меняется от  $\pi$  до  $0$ . С помощью сделанного преобразования  $\Gamma(x)$  превращается в функцию от  $\theta$  в интервале  $(0, \pi)$ . Такую функцию, как известно из математического анализа, можно разложить в ряд по синусам и косинусам кратных дуг, причем можно взять одни только синусы или одни только косинусы. Мы возьмем ряд по синусам и для удобства вычислений напомним его в виде:



$$\Gamma = 2V_0 \rho \{ A_1 \sin \theta + A_2 \sin 2\theta + A_3 \sin 3\theta + \dots \} \quad (4)$$

Вспользуемся теперь тем, что

$$\Gamma(-x) = \Gamma(x)$$

так как

$$-x = \frac{\rho}{2} \cos(\pi - \theta)$$

то функция  $\Gamma(x)$  не должна меняться при замене  $\theta$  на  $\pi - \theta$ .

Поэтому

$$\begin{aligned} \Gamma &= 2V_0 \rho \{ A_1 \sin(\pi - \theta) + A_2 \sin(2\pi - 2\theta) + A_3 \sin(3\pi - 3\theta) + \dots \} = \\ &= 2V_0 \rho \{ A_1 \sin \theta - A_2 \sin 2\theta + A_3 \sin 3\theta + \dots \} \end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с выражением (4), мы находим, что все коэффициенты с четными индексами равны нулю, т.е.

$$\Gamma = 2V_0 \rho \{ A_1 \sin \theta + A_3 \sin 3\theta + A_5 \sin 5\theta + \dots \} \quad (5)$$

В соответствии с формулой (3), полагая еще

$$x' = \frac{\rho}{2} \cos \theta',$$

находим, что

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{V_0 \rho}{2\pi} \frac{2}{\rho} \int_0^{\pi} \frac{d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} \{ A_1 \cos \theta' + 3A_3 \cos 3\theta' + \dots \} = \\ &= V_0 \{ A_1 J_1(\theta) + A_3 J_3(\theta) + \dots \}, \end{aligned}$$

где

$$J_k(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos k\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} d\theta'$$

Эти интегралы у нас уже встречались в теории тонкого профиля. Мы видели там, что

$$J_k(\theta) = \frac{\sin k(\theta)}{\sin \theta}$$

Таким образом мы нашли

$$w(x) = \frac{V_0}{\sin \theta} \{ A_1 \sin \theta + 3A_3 \sin 3\theta + 5A_5 \sin 5\theta + \dots \} \quad (6)$$

если

$$\Gamma(x) = 2V_0 \rho \{ A_1 \sin \theta + A_3 \sin 3\theta + A_5 \sin 5\theta + \dots \} \quad (5)$$



причем

$$x = \frac{\rho}{2} \cos \theta$$

3. Формула (5) показывает, что скорость будет во всех точках размаха постоянна в том и только в том случае, когда

$$A_3 = A_5 = A_7 = \dots = 0;$$

иначе говоря, тогда, когда,

$$\Gamma(x) = 2V_0 \rho A \sin \theta$$

Обозначая величину  $\Gamma(0)$  через  $\Gamma_0$  и замечая, что

$$\Gamma_0 = 2V_0 \rho A,$$

и

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{4x^2}{\rho^2}},$$

мы приходим к выводу, что постоянная по размаху скорость  $W(x)$  получается только в том случае, когда

$$\Gamma(x) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \frac{4x^2}{\rho^2}}$$

Эта зависимость между  $\Gamma$  и  $x$  может быть также представлена в виде

$$\frac{\Gamma^2}{\Gamma_0^2} + \frac{x^2}{\left(\frac{\rho}{2}\right)^2} = 1$$

и, следовательно, соответствует тому случаю, когда циркуляция распределяется по размаху по эллиптическому закону.

Ниже мы еще вернемся к этому распределению циркуляции.

### §3. Сводка формул и уравнений для расчета крыла

В предыдущем параграфе мы выразили в виде тригонометрических рядов функции  $\Gamma(x)$  и  $W(x)$ . С помощью этих рядов можно определить одну из этих функций,



если известна другая.

Но когда речь идет о том или ином крыле ни одна из этих функций неизвестна.

Мы знаем только связь между  $\Gamma(x)$  и  $w(x)$ , даваемую уравнением

$$\Gamma(x) = k V_0 t(x) \left[ \alpha - \frac{w(x)}{V_0} \right]$$

Подставим теперь в это уравнение разложения (5) и (6) предыдущего параграфа.

Мы получим тогда уравнение:

$$A_1 \sin \theta + A_3 \sin 3\theta + \dots = \frac{k t(x)}{2l} \left\{ \alpha - A_1 - 3A_3 \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} - \dots \right\} \quad (1)$$

которое должно выполняться во всех точках размаха. Это уравнение и служит для нахождения коэффициентов

$$A_1, A_3, A_5, \dots$$

Ниже мы дадим способы для его приближенного решения, а пока предположим, что все коэффициенты  $A_1, A_3, A_5, \dots$  нам известны и выразим через них подъемную силу  $P$  и индуктивное сопротивление  $Q_i$  нашего крыла.

Мы имеем формулы

$$P = \rho V_0 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(x) dx,$$

$$Q_i = \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(x) w(x) dx$$

Подставляя в них выражения (5) и (6) §2 и производя замену

$$x = \frac{l}{2} \cos \theta,$$

найдем, что

$$P = \rho V_0 \frac{l}{2} \cdot 2 V_0 l \int_0^\pi \sin \theta \cdot \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k-1} \sin(2k-1)\theta \cdot d\theta = \frac{\pi}{2} A_1 \rho l^2 V_0^2, \quad (2)$$



$$Q_1 = \rho \cdot 2V_0 \rho \cdot \frac{\rho}{2} V_0 \int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k-1} \sin(2k-1)\theta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) A_{2n-1} \sin(2n-1)\theta d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2} \rho e^2 V_0^2 (A_1^2 + 3A_3^2 + 5A_5^2 + \dots) \quad (3)$$

так как интеграл

$$\int_0^{\pi} \sin k\theta \cdot \sin n\theta d\theta$$

где  $k, n$  целые положительные числа, равен  $\frac{\pi}{2}$ , если  $k=n$ , и равен 0, если  $k \neq n$ .

Формулы (2) и (3) позволяют найти  $P$  и  $Q_1$ , если известны все коэффициенты  $A_n$ . Мы видим, что  $P$  зависит только от первого коэффициента  $A_1$ . Введем теперь в рассмотрение аэродинамические коэффициенты подъемной силы ( $C_y$ ) и индуктивного сопротивления ( $C_{xi}$ ). Они определяются равенствами

$$P = C_y \rho S V_0^2, \quad Q_1 = C_{xi} \rho S V_0^2,$$

где  $S$  - площадь крыла.

В силу формул (2) и (3) мы получаем, что

$$C_y = \frac{\pi}{2} A_1 \lambda \quad (4)$$

$$C_{xi} = \frac{\pi}{2} (A_1^2 + 3A_3^2 + 5A_5^2 + \dots) \quad (5)$$

где

$$\lambda = \frac{e^2}{S}$$

Эта величина носит название удлинения крыла и в случае крыла прямоугольного ( $S=tc$ , представляет отношение размаха  $k$  хорде (в других случаях она является отношением размаха  $k$  средней хорде, т.к. средней хордой естественно назвать отношение  $k$  размаху площади крыла).

Введем еще обозначение

$$\delta = 3 \left( \frac{A_3}{A_1} \right)^2 + 5 \left( \frac{A_5}{A_1} \right)^2 + \dots \quad (6)$$



и преобразовывая (5) с помощью (4) и (6), представим коэффициент индуктивного сопротивления в виде:

$$C_{xi} = \frac{2}{\pi \lambda} (1 + \delta^2) C_y^2 \tag{7}$$

Величины  $C_y$  и  $C_{xi}$  зависят от угла атаки крыла. Что же касается величины  $\delta^2$ , то она во многих случаях\* от  $\alpha$  не зависит. В этих случаях уравнение (7) графически представляет некоторую параболу, которую принято называть параболой индуктивного сопротивления.

Если циркуляция изменяется по эллиптическому закону, то  $\delta = 0$ , и мы получаем для параболы индуктивного сопротивления уравнение

$$C_{xi} = \frac{2}{\pi \lambda} C_y^2$$

Так как из вида выражения (6) следует, что  $\delta$  всегда неотрицательно, а свое наименьшее значение (нуль) принимает только при распределении циркуляции по эллиптическому закону, то при заданной подъемной силе (фиксируется  $C_y$ ) индуктивное сопротивление ( $C_{xi}$ ) будет минимумом в том и только в том случае, когда циркуляция меняется по эллиптическому закону. Крыло, вокруг которого циркуляция меняется по эллиптическому закону, является поэтому в определенном смысле наиболее выгодным.

Эта теорема была впервые найдена Мунком.

Обратимся к уравнению (1) и посмотрим, во что оно превращается в случае эллиптического распределения циркуляции.

Так как  $A_3, A_5, \dots$  равны нулю, то уравнение (1) будет содержать один только неизвестный коэффициент, который

\* Об этом см. далее.



мы легко сможем определить.

Мы получим, что

$$A_1 = \frac{kt(x)\alpha}{2l \left[ \sin \theta + \frac{kt(x)}{2l} \right]}$$

и эта величина не должна зависеть от  $x$ .

Рассмотрим тот случай, когда  $\alpha$  имеет одно и то же значение во всех сечениях (незакрученное крыло). В этом случае  $A_1$  не будет зависеть от  $x$  тогда и только тогда, когда

$$\frac{kt(x)}{2l} = C \cdot \sin \theta$$

где  $C$  - некоторая константа.

Если профиль крыла имеет одну и ту же форму во всех сечениях, то  $k$  не зависит от  $x$  и значит

$$t(x) = t_0 \sin \theta,$$

т.е. хорда меняется по эллиптическому закону.

Такое крыло имеет в плане форму эллипса или, более обще, форму фигуры, состоящей из двух полуэллипсов.



Черт. 10.

и значит

Поэтому

Рассмотрим более подробно этот случай.

Площадь крыла  $S$ , очевидно, равна

$$S = \pi \frac{t_0}{2} \frac{l}{2}$$

$$t_0 = \frac{4S}{\pi l}$$

$$A_1 = \frac{k \cdot 4S \cdot \alpha}{\pi l \cdot 2l \left[ 1 + \frac{k \cdot 4S}{\pi l \cdot 2l} \right]}$$

или

$$A_1 = \frac{2k\alpha}{\pi l \left( 1 + \frac{2k}{\pi l} \right)}$$





В силу формулы (4) мы получим, что для нашего эллиптического крыла с удлинением  $\lambda$ :

$$C_y = \frac{K}{1 + \frac{2}{\pi\lambda} K} \alpha$$

На основании § 1 этой главы для бесконечно-длинного крыла с рассматриваемым профилем мы имеем формулу

$$C_y = k \alpha$$

Теперь для эллиптического крыла с удлинением мы получим формулу

$$C_y = m \alpha$$

где

$$m = \frac{K}{1 + \frac{2}{\pi\lambda} K} \quad (8)$$

Коэффициент  $k$  очень трудно найти с помощью непосредственного эксперимента. Но зато легко определить коэффициент  $m$ . Для этого нужно только продуть эллиптическое крыло данного удлинения  $\lambda$ . Если же  $m$  найдено, то по формуле (8) найдется и  $k$ . Эту зависимость удобно представить в виде:

$$\frac{1}{m} = \frac{2}{\pi\lambda} + \frac{1}{k} \quad (9)$$

Такое определение коэффициента  $k$  является наиболее точным. К сожалению, эллиптические крылья редко применяются в лабораториях, где обычно экспериментируют с прямоугольными моделями. Для определения  $k$  через  $m$  в случае прямоугольных крыльев служат приближенные формулы, найденные с помощью приближенных расчетов прямоугольных крыльев. Одна из таких формул имеет вид:

$$\frac{1}{m} = \frac{0,66}{\lambda} + 1,04 \frac{1}{k} \quad (10)$$

и, как видим, незначительно отличается от формулы (9).



Здесь  $m$  - определяется из соотношения

$$C_y = m \alpha$$

для прямоугольного крыла с удлинением  $\lambda$ , имеющего во всех сечениях постоянный профиль, для которого коэффициент  $k$  требуется найти.

Ясно, что для любого незакрученного крыла величины  $A_k$  будут пропорциональны  $\alpha$  (и значит  $\delta$  будет константой).

Формула (4) поэтому может быть переписана в виде:

$$C_y = \frac{\pi}{2} \frac{A_1}{\alpha} \lambda \cdot \alpha,$$

где, следовательно

$$\frac{\pi}{2} \frac{A_1}{\alpha} \lambda = m \quad (11)$$

Эта величина будет меньше, чем  $k$

При заданном  $C_y$  угол атаки конечного крыла должен, следовательно, быть больше, чем у бесконечно-длинного крыла в плоско-параллельном потоке. Необходимое увеличение угла атаки равно:

$$\alpha - \alpha_\infty = C_y \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{k} \right)$$

При эллиптическом распределении циркуляции на основании (8)

$$\alpha - \alpha_\infty = \frac{2}{\pi \lambda} C_y$$

Для других крыльев мы положим

$$\alpha - \alpha_\infty = \frac{2}{\pi \lambda} (1 + \tau) C_y$$

Чтобы найти  $\tau$  примем во внимание формулу (11).

Мы найдем, что

$$\frac{2(1+\tau)}{\pi \lambda} = \frac{1}{m} - \frac{1}{k} = \frac{2}{\pi \lambda} \frac{\alpha}{A_1} - \frac{1}{k}$$

и значит

$$\tau = \frac{\alpha}{A_1} - 1 - \frac{\pi \lambda}{2k} \quad (12)$$



#### 4 Приближенные методы расчета крыла

1. Для расчета крыла, как это вытекает из ранее сказанного, должно быть решено уравнение (1) §3:

$$A_1 \sin \theta + A_3 \sin 3\theta + \dots = \frac{kt(x)}{2l} \left\{ \alpha - A_1 - 3A_3 \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} - \dots \right\} \quad (1)$$

Поскольку в него входит бесчисленное множество неизвестных  $A_k$ , то мы можем рассчитывать на такое их определение, при котором это уравнение будет выполняться во всех точках размаха.

Но практически мы можем оперировать лишь с конечным и при том небольшим числом коэффициентов, т. е. мы вынуждены оборвать ряды, входящие в уравнение (1). Ясно, что при этом уже нельзя будет требовать, чтобы уравнение (1) точно выполнялось во всех точках размаха, а придется довольствоваться приближенным выполнением равенства

Положим, что мы оставили  $n$  коэффициентов  $A_1, A_3, \dots, A_{2n-1}$ . Наше уравнение будет иметь вид:

$$f(x; A_1, A_3, \dots, A_{2n-1}) = 0 \quad (2)$$

Желая, чтобы оно приближенно выполнялось в точках крыла, мы можем для определения коэффициентов  $A_1, A_3, \dots, A_{2n-1}$ , воспользоваться каким нибудь из приемов теории приближенных вычислений, которые для этой цели существуют.

Наиболее употребительными приемами являются: интерполяционный способ, способ наименьших квадратов и способ моментов.

Интерполяционный способ состоит в том, что выбирается  $n$  точек  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  и ставится требование, чтобы в этих точках уравнение (2) выполнялось точно.



Это требование дает систему уравнений

$$f(x_i; A_1, A_3, \dots, A_{2n-1}) = 0 \quad (i=0, 1, \dots, n-1)$$

для нахождения искоемых коэффициентов.

В нашем случае интерполяционный способ дает хорошие результаты, если  $n$  не меньше 4.

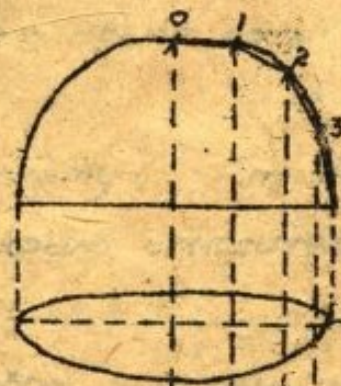
Выпишем подробно относящиеся сюда уравнения, когда  $n=4$ . При этом в качестве точек  $x_i$  примем

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = \frac{\rho}{2} \cos 67^\circ 30'$$

$$x_2 = \frac{\rho}{2} \cos 45^\circ$$

$$x_3 = \frac{\rho}{2} \cos 22^\circ 30'$$



Черт. 11

Заметим, что эти точки можно получить проектируя на диаметр вершины правильного многоугольника, как это показывает чертеж 11.

Обозначим через  $t_0, t_1, t_2, t_3$  хорды крыла в выбранных сечениях через  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  соответствующие углы атаки (они могут быть и одинаковыми) и через  $K_0, K_1, K_2, K_3$  соответствующие значения коэффициента  $K$ , если профиль в выбранных сечениях не одинаков.

Наша система будет иметь вид:

$$A_1 (0,293 + 0,383 \mu_3) + A_3 (0,707 + 2,712 \mu_3) + A_5 (0,707 + 4,619 \mu_3) + \\ + A_7 (0,293 + 2,679 \mu_3) = 0,383 \mu_3 \alpha_3.$$

$$A_1 (1 + 0,707 \mu_2) + A_3 (1 + 2,121 \mu_2) + A_5 (-1 - 3,536 \mu_2) + A_7 (-1 - 4,950 \mu_2) = \\ = 0,707 \mu_2 \alpha_2.$$

$$A_1 (1,707 + 0,924 \mu_1) + A_3 (-0,707 - 1,149 \mu_1) + A_5 (-0,707 - 1,913 \mu_1) + \\ + A_7 (1,707 + 6,467 \mu_1) = 0,924 \mu_1 \alpha_1.$$



$$A_1 (2 + \mu_0) + A_3 (-2 - 3\mu_0) + A_5 (2 + 5\mu_0) + A_7 (-2 - 7\mu_0) = \mu_0 \alpha_0,$$

где

$$\mu_0 = \frac{K_0 t(x_0)}{\rho}, \quad \mu_1 = \frac{K_1 t(x_1)}{\rho}, \quad \mu_2 = \frac{K_2 t(x_2)}{\rho}, \quad \mu_3 = \frac{K_3 t(x_3)}{\rho}$$

Если угол атаки  $\alpha$  вдоль крыла не меняется, то коэффициенты  $A_i$  будут пропорциональны  $\alpha$  и выгодно положить

$$A_1 = B_1 \alpha, \quad A_3 = B_3 \alpha, \quad A_5 = B_5 \alpha, \quad A_7 = B_7 \alpha.$$

В этом случае получается расчет крыла сразу для любого угла атаки.

Если же  $\alpha$  не постоянно, то систему ( ) придется решать для нескольких наклонов крыла относительно набегающего потока.

Второй способ мы назвали способом наименьших квадратов. Он состоит в том, что коэффициенты  $A_i$  ищутся из условий, чтобы интеграл

$$\int_0^\pi f^2(x; A_1, A_3, \dots, A_{2n-1}) d\theta \quad (x = \frac{\rho}{2} \cos \theta)$$

был минимум. Этот интеграл является мерой погрешности, с которой выполняется равенство (2).

Третий способ состоит в том, что требуют выполнения равенств

$$\int_0^\pi f(x; A_1, A_3, \dots, A_{2n-1}) \varphi_i(\theta) d\theta = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

где  $\varphi_i(\theta)$  надлежащим образом выбранные функции.

Можно, например, положить

$$\varphi_i(\theta) = \sin(2i-1)\theta \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Если мы берем менее четырех коэффициентов ( $n < 4$ ), то последние два способа имеют преимущество перед первым.

2. Положим  $n=2$  и выпишем уравнения для определения



$A_1$  и  $A_3$ , которые дает способ моментов. При этом мы будем считать, что  $k$  вдоль размаха постоянно, тогда как  $\alpha$  может быть переменным. Исходим из уравнения

$$A_1 \sin^2 \theta + A_3 \sin \theta \cdot \sin 3\theta = \frac{k t(x)}{2l} \{ [\alpha(x) - A_1] \sin \theta - 3 A_3 \sin 3\theta \}$$

Беря функции  $\varphi_1(\theta) = \sin \theta$ ,  $\varphi_2(\theta) = \sin 3\theta$ , получим такие уравнения для нахождения  $A_1$  и  $A_3$ :

$$\frac{1}{3} A_1 - \frac{1}{15} A_3 = \frac{k}{8l} \int_0^{\pi} t(x) \alpha(x) \sin^2 \theta d\theta - A_1 \frac{k}{8l} \int_0^{\pi} t(x) \sin^2 \theta d\theta -$$

$$- 3 A_3 \frac{k}{8l} \int_0^{\pi} t(x) \sin \theta \cdot \sin 3\theta d\theta.$$

$$-\frac{1}{15} A_1 + \frac{9}{35} A_3 = \frac{k}{8l} \int_0^{\pi} t(x) \alpha(x) \sin \theta \sin 3\theta d\theta - A_1 \frac{k}{8l} \int_0^{\pi} t(x) \sin \theta \sin 3\theta d\theta -$$

$$- 3 A_3 \frac{k}{8l} \int_0^{\pi} t(x) \sin^2 3\theta d\theta$$

Введем обозначения:

$$\frac{1}{8l} \int_0^{\pi} t(x) \sin^2 \theta d\theta = S_1$$

$$\frac{1}{8l} \int_0^{\pi} t(x) \sin \theta \cdot \sin 3\theta d\theta = S_2$$

$$\frac{1}{8l} \int_0^{\pi} t(x) \sin^2 3\theta \cdot d\theta = S_3$$

$$\frac{1}{8l} \int_0^{\pi} t(x) \alpha(x) \sin^2 \theta \cdot d\theta = E_1$$

$$\frac{1}{8l} \int_0^{\pi} t(x) \alpha(x) \sin \theta \sin 3\theta d\theta = E_2$$

В этих обозначениях наши уравнения имеют вид:

$$\frac{1}{3k} A_1 - \frac{1}{15k} A_3 = E_1 - S_1 A_1 - 3 S_2 A_3$$



$$-\frac{1}{15K} A_1 + \frac{9}{35K} A_3 = \epsilon_2 - S_2 A_1 - 3 S_3 A_3$$

Умножая первое уравнение на  $\epsilon_2$ , а второе на  $\epsilon_1$  и складывая, получим:

$$\frac{1}{3K} A_1 (\epsilon_2 + \frac{\epsilon_1}{5}) - \frac{1}{5K} A_3 (\frac{\epsilon_2}{3} + \frac{9}{7} \epsilon_1) = A_1 (\epsilon_1 S_2 - \epsilon_2 S_1) + 3 A_3 (\epsilon_1 S_3 - \epsilon_2 S_2)$$

Откуда

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{\epsilon_2 + \frac{\epsilon_1}{5} + 3K(\epsilon_1 S_2 - \epsilon_2 S_1)}{\frac{\epsilon_2}{5} + \frac{27\epsilon_1}{35} + 9K(\epsilon_1 S_3 - \epsilon_2 S_2)} \quad (I)$$

Первое из уравнений нашей системы дает

$$\frac{1}{3K} - \frac{\epsilon_1}{A_1} + S_1 = \left(\frac{1}{15K} - 3S_2\right) \frac{\epsilon_2 + \frac{\epsilon_1}{5} - 3K(\epsilon_1 S_2 - \epsilon_2 S_1)}{\frac{\epsilon_2}{5} + \frac{27\epsilon_1}{35} + 9K(\epsilon_1 S_3 - \epsilon_2 S_2)} \quad (II)$$

формула (I) позволяет найти  $\sigma$ , а формула (II)  $\tau$ . Для незакрученного крыла найденные формулы упрощаются.

Действительно, для незакрученного крыла

$$\epsilon_1 = \alpha S_1, \quad \epsilon_2 = \alpha S_2$$

и мы получим

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{S_2 + \frac{S_1}{5}}{\frac{S_2}{5} + \frac{27S_1}{35} + 9K(S_1 S_3 - S_2^2)} \quad (I \text{ bis})$$

и

$$\frac{1}{3K} - S_1 \frac{\alpha}{A_1} + S_1 = \left(\frac{1}{15K} - 3S_2\right) \frac{S_2 + \frac{S_1}{5}}{\frac{S_2}{5} + \frac{27S_1}{35} + 9K(S_1 S_3 - S_2^2)} \quad (II \text{ bis})$$

3. Применим метод моментов к прямоугольному незакрученному крылу. В этом случае

$$t(x) = \frac{\rho}{\lambda}, \quad S_1 = S_3 = \frac{\pi}{16\lambda}, \quad S_2 = 0$$

и уравнения (I bis), (II bis) дают

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{1}{\frac{27}{7} + \frac{45\pi}{16} \frac{K}{\lambda}}$$



и

$$\frac{1}{3\kappa} - \frac{\sqrt{\kappa}}{16\lambda} \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\sqrt{\kappa}}{16} = \frac{1}{15\kappa} \frac{1}{\frac{27}{7} + \frac{45\sqrt{\kappa}}{16} \frac{\kappa}{\lambda}}$$

Припоминая формулы (6) и (11) ф.з. находим, что

$$\delta_z = 3 \frac{1}{\left[ \frac{27}{7} + \frac{45\sqrt{\kappa}}{16} \frac{\kappa}{\lambda} \right]^2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2}{\lambda\sqrt{\kappa}} + \frac{32}{3\sqrt{\kappa}^2\kappa} - \frac{32}{15\sqrt{\kappa}^2\kappa \left[ \frac{27}{7} + \frac{45\sqrt{\kappa}}{16} \frac{\kappa}{\lambda} \right]} \quad (4)$$

$$\varphi = \frac{16}{3\sqrt{\kappa}} \frac{\lambda}{\kappa} - \frac{16\lambda}{15\sqrt{\kappa}\kappa \left[ \frac{27}{7} + \frac{45\sqrt{\kappa}}{16} \frac{\kappa}{\lambda} \right]} \quad (5)$$

Когда  $\frac{\lambda}{\kappa}$  меняется в интервале (1, 4) дробь

$$\frac{1}{\frac{27}{7} + \frac{45\sqrt{\kappa}}{16} \frac{\kappa}{\lambda}} \quad (6)$$

можно приближенно представить в виде:

$$a + b \frac{\kappa}{\lambda} \quad (7)$$

Требую, чтобы выражения (6) и (7) имели одинаковые значения при  $\frac{\lambda}{\kappa} = 1$  и при  $\frac{\lambda}{\kappa} = 4$ , найдем уравнение для  $a$  и  $b$ :

$$a + b = \frac{1}{\frac{27}{7} + \frac{45\sqrt{\kappa}}{16}} = 0,079$$

$$a + \frac{b}{4} = \frac{1}{\frac{27}{7} + \frac{45\sqrt{\kappa}}{64}} = 0,165$$

Откуда

$$a = 0,193, \quad b = -0,115$$

Таким путем получаем приближенную формулу

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2}{\lambda\sqrt{\kappa}} + \frac{32}{3\sqrt{\kappa}^2\kappa} - \frac{32}{15\sqrt{\kappa}^2\kappa} \left( 0,193 - 0,115 \frac{\kappa}{\lambda} \right)$$



После упрощений она принимает вид:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1,04}{\kappa} + \frac{0,65}{\lambda}$$

Это и есть формула (10) §3. Она получается также интерполяционным методом.

Для сравнения приведем таблицу значений  $\delta$  и  $\tau$ , вычисленных по формулам (3) и (5) (таблица 1) и по интерполяционному методу для  $n=4$  (таблица 2)<sup>\*)</sup>

Таблица 1.

$\lambda/\kappa$	$\delta$	$\tau$
1,0	0,019	0,10
1,5	0,032	0,14
2,0	0,044	0,18
2,5	0,055	0,21
3,0	0,065	0,24
3,5	0,074	0,27

Таблица 2

$\delta$	$\tau$
0,019	0,10
0,034	0,14
0,049	0,17
0,063	0,20
0,076	0,22
0,088	0,24

### § 5. Пересчет полярны Лиллиенталя с одного удлинения на другое.

Конечной целью теории крыла является нахождение аэродинамических коэффициентов  $C_y$  и  $C_x$  в функции от угла атаки  $\alpha$ . В результате продувки или расчета крыла для этих функций получаются таблицы. Однако в большинстве случаев является более удобным применять вместо таблиц некоторые графики или диаграммы.

Эти графики строятся следующим образом.

Берут прямоугольную систему координатных осей и по оси  $y$ -ов откладывают  $C_y$ , а по оси  $x$ -ов - угол атаки  $\alpha$

<sup>\*)</sup> Таблица 2 заимствована из книги Глауэрта.



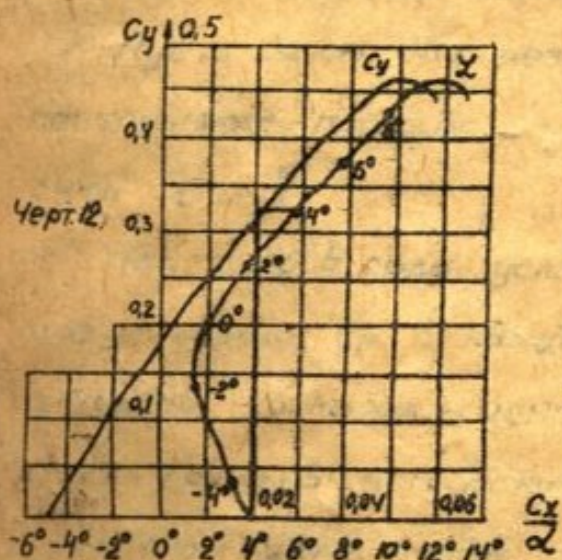
градусах (относительно хорды крыла) или  $C_x$ . Таким путем получают две кривые: кривая, дающая  $C_y$  в функции от угла атаки (кривая подъемной силы), и кривая, дающая  $C_x$  в функции от  $C_x$ . Последнюю кривую называют полярной Лиллиенталя, и она при наличии кривой подъемной силы позволяет найти  $C$  при данном угле атаки, т.е. заменяет кривую лобового сопротивления. Если бы не было профилевого сопротивления, то полярная Лиллиенталя имела бы уравнение:

$$C_x = \frac{2}{\pi \lambda} (1 + \delta) C_y^2$$

т.е. была бы параболой.

Кривая подъемной силы для небольших углов атаки мало отличается от прямой.

На полярной Лиллиенталя часто делают отметки угла атаки, и тогда кривая подъемной силы делается излишней.



Так как  $C_x$  значительно меньше, чем  $C_y$ , то для  $C_x$  берут масштаб в пять раз более крупный, чем для  $C_y$ .

Рекомендуем читателю проследить все эти обстоятельства на чертеже 12.

Жирная ломаная линия, проведенная на этом чертеже, показывает, как с помощью кривой подъемной силы (кривая  $C_y$ ) делаются отметки угла атаки на полярной Лиллиенталя (кривая  $C_x$ ).

Из чертежа видно, что у рассматриваемого крыла угол между первой осью и хордой несколько превышает  $4^\circ$  (он равен примерно  $4^\circ 20'$ ).



2. Если коэффициент  $K$  и коэффициент профильного сопротивления известны для каждого сечения крыла, то на основании изложенной выше теории индуктивного сопротивления поляр Лилленталя крыла может быть построена с помощью одних (правда довольно кропотливых) вычислений

3. В том случае, когда крыло имеет постоянный во всех сечениях профиль и незакручено, существует весьма простой и довольно точный метод построения диаграммы крыла по заданной диаграмме другого незакрученного крыла с тем же профилем.

Так как в лабораториях обычно продувают прямоугольные крылья с удлинением  $b$ , то найдя экспериментальным путем диаграмму такого крыла, мы сможем упомянутым простым приемом построить диаграмму любого крыла с тем же профилем.

Эту операцию часто называют пересчетом диаграммы с одного удлинения на другое.

Пусть даны два незакрученных крыла одного и того же постоянного профиля, и пусть удлинения этих крыльев суть  $\lambda'$  и  $\lambda''$ .

Так как в силу условия коэффициент профильного сопротивления  $C_p$  в каждом сечении и обоих крыльев одинаков, то коэффициенты лобового сопротивления наших крыльев при некотором одинаковом для крыльев истинном угле атаки  $\alpha$ , будут

$$C'_x = C_p + C'_{x1}$$

$$C''_x = C_p + C''_{x1},$$

а соответствующие коэффициенты подъемной силы, если истинный угол атаки одинаков, будут, согласно теории



индуктивного сопротивления, между собою равны и совпадают с коэффициентом  $C_y$  для бесконечно длинного крыла в плоско-параллельном потоке при геометрическом угле атаки  $\alpha_1$ .

Однако, если истинные углы атаки наших крыльев равны  $\alpha_1$ , то геометрические углы атаки, вообще говоря, между собою не равны. Согласно нашей теории они представляются в виде:

$$\alpha'_1 = \alpha_1 + 57,3 \frac{e}{\pi \lambda'} (1 + \tau') C_y,$$

$$\alpha''_1 = \alpha_1 + 57,3 \frac{e}{\pi \lambda''} (1 + \tau'') C_y,$$

где множитель 57,3 введен для того, чтобы углы были выражены в градусах, а не в радианах. При этом  $\tau'$  и  $\tau''$  находятся вычислением равным образом, как и  $\delta'$  и  $\delta''$  в формулах

$$C_{x1}' = \frac{e}{\pi \lambda'} (1 + \delta') C_y^2$$

$$C_{x1}'' = \frac{e}{\pi \lambda''} (1 + \delta'') C_y^2$$

Эти четыре формулы вместе с формулами

$$C_x' = C_p + C_{x1}'$$

$$C_x'' = C_p + C_{x1}''$$

и позволяют сделать нужный пересчет диаграммы.

Повторяем еще раз, что  $C_y$  и  $C_p$  зависят только от  $\alpha_1$ . Поэтому  $C_y$  может быть принято за независимую переменную. Это значит, что мы сравниваем каждый раз те точки, диаграммы наших крыльев, которым отвечает один и тот же коэффициент подъемной силы  $y$  крыльев, т.е. точки, которые имеют одинаковую ординату.



Наша задача будет состоять в том, чтобы по абсциссе точки диаграммы одного крыла найти абсциссу соответствующей точки диаграммы второго крыла.

Для этого удобно взять получающиеся с помощью вычитания формулы

$$\alpha'' - \alpha' = 57,3 \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1+\tau''}{\lambda''} - \frac{1+\tau'}{\lambda'} \right\} C_y$$

или

$$\alpha'' - \alpha' = 36,47 \left\{ \frac{1+\tau''}{\lambda''} - \frac{1+\tau'}{\lambda'} \right\} C_y \quad (1)$$

$$C_x'' - C_x' = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1+\delta''}{\lambda''} - \frac{1+\delta'}{\lambda'} \right] C_y^2 \quad (2)$$

Обозначим для первого крыла известные по условию кривую подъемной силы через  $\lambda'$ , а кривую Лилленталя через  $\mathcal{L}'$ .

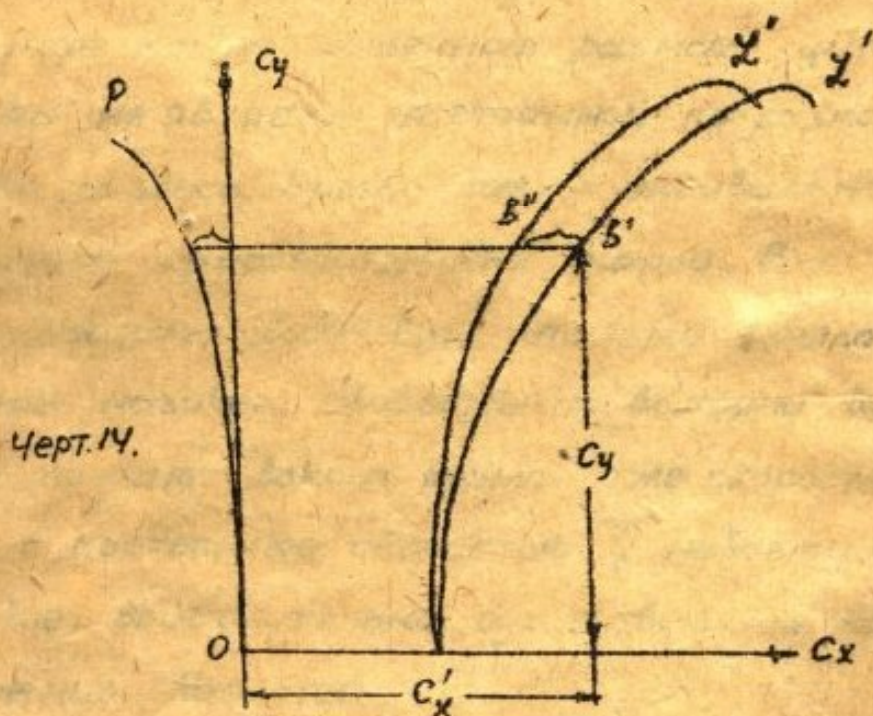
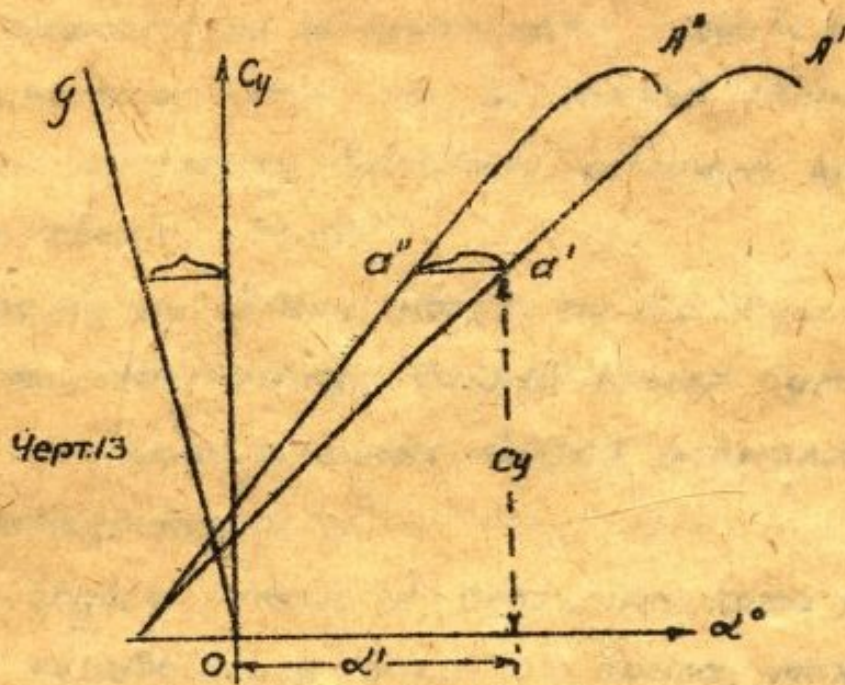
Пусть  $\alpha'$  точка кривой  $\lambda'$ , ей отвечает геометрический угол атаки  $\alpha'$ . Чтобы получить соответствующую точку искомой кривой  $\lambda''$ , необходимо перенести точку  $\alpha'$  параллельно оси абсцисс на отрезок  $\alpha'' - \alpha'$ , определяемый формулой (1). Повторяя эту операцию для других значений  $C_y$ , получим искомую кривую  $\lambda''$ .

Так как величина смещения  $\alpha'' - \alpha'$  пропорциональна  $C_y$ , то графически связь между  $\alpha'' - \alpha'$  и  $C_y$  дается прямой линией. Эту прямую (прямая  $\mathcal{U}$ ) выгодно построить с самого начала (см. чертеж 13), и тогда построение  $\lambda''$  выполняется особенно просто, т.к. проводя прямые параллельные оси абсцисс, мы сразу между  $\mathcal{U}$  и осью ординат будем получать те отрезки, на которые нужно сносить точки  $\alpha'$ .

Аналогично перестраивается кривая  $\mathcal{L}'$ . Здесь только придется вместо прямой  $\mathcal{U}$  построить параболу  $\mathcal{P}$ .



(см. черт. 14).



### §7. Некоторые замечания о присоединенных вихрях

#### крыла конечного размаха.

Изучая бесконечно-длинное крыло в плоско-параллельном потоке, мы видели, что такое крыло эквивалентно некоторой системе вихрей.

Иначе говоря, крыло можно было заменить жидкостью (схема жидкого крыла) с определенным образом распре-



деленными в ней вихрями. Эти вихри, при наличии заданной скорости на бесконечности, создавали такое же скоростное поле, какое при указанной скорости на бесконечности получалось благодаря наличию крыла (как некоторого твердого тела).

Упомянутые вихри носят по Н.Е. Жуковскому название присоединенных вихрей крыла. Суммарное напряжение присоединенных вихрей равно циркуляции  $\Gamma$  вокруг крыла.

Для грубых подсчетов, особенно, когда речь идет об области, находящейся вдали от крыла, можно крыло заменять одним вихревым шнуром напряжения  $\Gamma$ .

В случае крыла конечного размаха циркуляция вокруг него не является постоянной по размаху.

Однако и здесь крыло также эквивалентно некоторой системе присоединенных вихрей. Вместе с вихрями, образующими вихревую пелену крыла, которые мы теперь назовем свободными вихрями, вихри присоединенные создают вокруг крыла поле скоростей, которое слагаясь с постоянной скоростью  $V_0$  невозмущенного потока, и дает действительно существующее вокруг крыла распределение скоростей.

Так как изменение на величину  $d\Gamma(x)$  циркуляции вокруг крыла при переходе от одного сечения к другому вызывает, как мы знаем, появление вихревой полоски [напряжения  $d\Gamma(x)$ ], опирающейся на отрезок крыла, между этими сечениями, то мы должны принять, что свободные вихри суть продолжения вихрей присоединенных (см. черт. 15).

Собственно говоря, иначе и быть не может, если мы



твердое крыло заменяем жидким с определенным распределением в нем вихрей. Ведь в силу теоремы Гельмгольца вихревые линии не могут обрываться в



Черт. 15.

жидкости. Присоединенные вихревые линии и будут замыкать свободные вихревые линии, так что получается некоторая система подковообразных вихрей.

Когда мы рассматриваем область вдали крыла, мы сделаем небольшую ошибку заменяя конечное крыло всего одним подковообразным вихрем с напряжением, равным средней циркуляции вокруг крыла.



Черт. 16

Часто при этом предполагают длину  $l'$  несколько отличной от  $l$ . Этим добиваются того, что полученное по этой схеме индуктивное сопротивление крыла имеет такое же значение, как и в действительности (где мы имеем вихревую пленку).

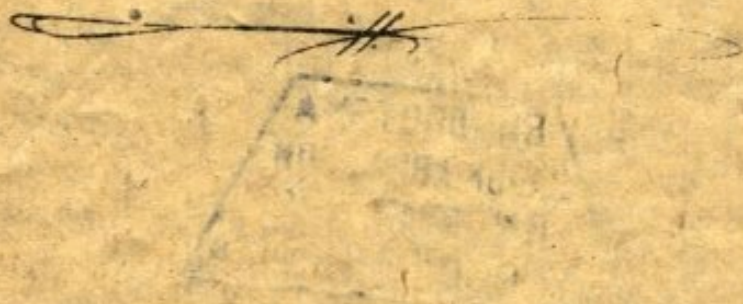
Этой схемой мы будем пользоваться в теории биплана.

Но если суммарные эффекты (индуктивное сопротивление, средний снос потока) при надлежащем выборе и циркуляции и получаются по схеме подковообразного вихря такие же, как и в действительности, то все-таки правильной картины распределения нагрузки вдоль крыла мы таким путем не получим. Так как подъемная сила, действующая на элемент крыла равна



$$dP = \rho \Gamma(x) V_0 dx,$$

то для получения распределения нагрузки, значение которой необходимо для расчета крыла на прочность, необходимо найти функцию  $\Gamma(x)$  (а не только коэффициенты  $\tau$  и  $\delta$ ). А для нахождения функции  $\Gamma(x)$  необходимо воспользоваться изложенной выше теорией, т.е. найти коэффициенты  $A_1, A_3, \dots$  тригонометрического разложения циркуляции  $\Gamma$ . Конечно, чем больше этих коэффициентов мы найдем и чем точнее их вычислим, тем лучше мы будем знать распределение нагрузки. В этом отношении интерполяционный метод расчета при  $n=4$  имеет преимущество перед методом моментов при  $n=2$ .



222