§1. Простейшие понятия

1. <u>Гидродинамикой</u> называют отдел механики, посвященный изучению движения жидкостей (капельных или газообразных) и тех сил, которые вызывают движение жидкостей или во время этих движений возникают. Так как всякая материя имеет молекулярное строение, то для исследования вопросов гидродинамики, строго говоря, было бы необходимо составить дифференциальные уравнения движения для всех отдельных молекул. В настоящее время подобный подход к делу является еще невозможным, т.к. внутримолекулярные силы имеют в высшей степени сложный характер и полностью еще не изучены. К тому же такое „идеальное" изучение движения жидкостей в большинстве случаев и не нужно, поскольку обычно достаточно знать лишь суммарные эффекты, вызываемые весьма большим числом молекул. Иначе говоря, обычно нас интересуют лишь некоторые средние величины и состояния. Например истинное движение молекулы есть некоторое „беспорядочное" ее движение вокруг какого-то среднего положения, а это последнее уже как-то „правильно перемещается в пространстве. При этом движение среднего положения или среднее движение будет почти одинаковым у двух соседних частиц, чего нельзя сказать о налагающемся на него дополнительном движении молекулы (достаточно вспомнить известное читателю из элементов физики броуновское движение).

Отбрасывая рассмотрение внутримолекулярных сил, мы можем не учитывать расстояний между отдельными молекулами, из которых состоит жидкость, и можем принять, что <u>жидкость непрерывно заполняет весь за</u>
<u>т.е. что жидкость есть сплошная среда.</u>

В дальнейшем мы встретимся еще и с другими упрощающими положениями, которые в гидродинамике делаются относительно реальных жидкостей.

Заменяя с помощью этих предположений рассмотрение реальных жидкостей рассмотрением их более или менее грубых приближений, мы получаем схемы, значительно легче поддающиеся математическому исследованию.

2. Итак, предположим, что мы имеем сплошную среду заполняющую все пространство или только некоторую область в нем. Возьмем в пространстве прямоугольную систему координатных осей и будем следить за точками нашей сплошной среды, проходящими через некоторую точку пространства $M(x,y,z)$

Обозначим через $\vec{V}$ вектор-скорость точки сплошной среды, проходящей через точку M пространства в момент времени t, и назовем u, v, w проекции вектора $\vec{V}$ на координатные оси. Величины u, v, w суть какие-то функции от независимых переменных x, y, z, t, т.к. в данной точке пространства скорость движущейся точки сплошной среды, вообще говоря, меняется с течением времени, а с другой стороны в данный момент времени проходящие через разные точки пространства точки сплошной среды имеют, вообще говоря, различные скорости.

Обратим теперь наше внимание на определенную точку сплошной среды. Для нее независимой переменной будет уже только t, т.к. координаты x, y, z движущейся точки являются определенными функциями от времени. В момент времени t скорость рассматриваемой точки имеет проекции

$$\frac{dx}{dt},\quad \frac{dy}{dt},\quad \frac{dz}{dt}$$

а так как в момент времени t наша точка сплошной среды проходит через точку пространства, имеющую координаты x, y, z и, значит, ее скорость должна иметь проекции u, v, w, то мы получаем равенства

$$\frac{dx}{dt}=u, \quad \frac{dy}{dt}=v, \quad \frac{dz}{dt}=w \qquad (1)$$

Если мы предположим, что u, v, w нам известны как функции от x, y, z, t, то равенства (1) являются системой дифференциальных уравнений для нахождения координат x, y, z любой точки сплошной среды, как функций от t, и тем самым для нахождения траекторий, описываемых точками сплошной среды. Интегрируя систему (1), мы получим:

$$x=\varphi_1(t,a,b,c), \quad y=\varphi_2(t,a,b,c), \quad z=\varphi_3(t,a,b,c) \qquad (2)$$

где a, b, c представляют произвольные константы интегрирования, которые для каждой точки сплошной среды должны быть определены из начальных условий, т.е. из начального положения точки.

Конечно, нужно иметь ввиду, что точное интегрирование системы (1) не всегда может быть выполнено с помощью элементарных функций, так, что приведенное нами рассуждение показывает лишь принципиальную возможность нахождения траектории точек сплошной среды, когда функции u, v, w известны. Впрочем, излагаемые в курсах математики приближенные (численные) методы интегрирования дифференциальных уравнений дают возможность найти всегда, по крайне мере, приближенное решение системы (1)

Пример 1. Пусть функции u, v, w имеют вид:

$$u=\frac{tx-y}{t^2+1}, \quad v=\frac{x+ty}{t^2+1}, \quad w=\frac{2tz}{t^2+1} \qquad (3)$$

Чтобы найти траектории, составляем систему уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\frac{tx-y}{t^2+1},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{x+ty}{t^2+1},\quad \frac{dz}{dt}=-\frac{2tz}{t^2+1}$$

Из последнего уравнения, которое интегрируется непосредственно, получаем:

$$z=\frac{c}{1+t^2},$$

где C - произвольная постоянная.

Дифференцируя первое уравнение по t и заменяя полученном выражении $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ правыми частями первых двух уравнений, мы найдем, что

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0$$

Следовательно

$$x=a-bt,$$

где a, b - произвольные постоянные.

Найдя x, мы уже без новых интегрировании получим из первого уравнения и y, а именно:

$$y=b+at.$$

Итак, уравнения траекторий имеют вид

$$x=a-bt,\quad y=b+at,\quad z=\frac{c}{1+t^2} \qquad (4)$$

Мы видим, что в рассматриваемом примере постоянные a, b, c просто являются координатами движущейся точки в начальный момент времени ($t=0$); эти величины удобно было бы поэтому обозначить через x_0, y_0, z_0.

3. Знание величин u, v, w как функций от x, y, z, t дает нам, как закон изменения скорости в данной точке пространства (фиксируются x, y, z), так и закон распределения

скоростей в пространстве в данный момент времени (фиксируется t).

Часто для получения наглядного представления о распределении скоростей в пространстве в данный момент времени пользуются линиями и трубками течения.

Линией течения для данного момента времени называют линию, касательная к которой в каждой ее точке имеет направление вектора-скорости в этой точке в рассматриваемый момент времени.

Таким образом, если система линий течения для некоторого момента времени построена, то для этого момента легко геометрически найти направление скорости в каждой точке.

Если мы рассматриваем определенный момент времени $(t=t_0)$, то u, v, w следует считать уже функциями только от x, y, z (вместо входящего явно t подставляется t_0). Чтобы найти дифференциальные уравнения линий течения, нужно записать, что проекции элемента ds линии течения, т.е. величины dx, dy, dz пропорциональны проекциям скорости в точке x, y, z рассматриваемого элемента линии течения, т.е. пропорциональны величинам u, v, w. Итак, искомые дифференциальные уравнения имеют вид:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \qquad (5)$$

Это есть система из двух дифференциальных уравнений, которые следует интегрировать, рассматривая t, как постоянную величину.

При интегрировании системы (5) можно принять одну из переменных x, y, z за независимую переменную. Напр, принимая за независимую переменную x, мы сможем систему (5) переписать в виде:

$$u\frac{dy}{dx}=v, \quad u\frac{dz}{dx}=w$$

Интегрирование даст:

$$f_1(x, y, z, t, A, B)=0, \quad f_2(x, y, z, t, A, B)=0,$$

где A, B - произвольные постоянные.

Изменяя всевозможными способами A и B, мы получим два семейства поверхностей, которые своими пересечениями дают двойное многообразие линий течения.

Часто, чтобы не нарушить симметрии при интегрировании системы (5), ищут линии течения в параметрической форме. Вводя параметр τ, положим:

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}=d\tau,$$

или

$$\frac{dx}{d\tau}=u, \quad \frac{dy}{d\tau}=v, \quad \frac{dz}{d\tau}=w \qquad (5^{bis})$$

при интегрировании этой системы τ рассматривается, как переменная независимая, в функции от которой надлежит найти x, y и z.

Следует обратить внимание на то, что система (5^{bis}) лишь с внешней стороны похожа на систему (1) для нахождения траекторий, т.к. в правых частях уравнений (5^{bis}) время t считается постоянным, а независимая переменная τ совсем не фигурирует.

Есть, однако, один весьма важный случай, когда интегрирование систем (1) и (5^{bis}) дает одни и те же кривые. Это тот случай, когда движение жидкости стационарно, т.е. когда u, v, w от времени t явно не зависят. Действительно, в этом случае разница между интегрированием системы (1) и интегрированием системы (5^{bis}) будет состоять только в том, что независимая переменная в первом случае обозначена через t, а во втором через τ.

Таким образом, если движение стационарно, то линии течения совпадают с траекториями.

Пример 2. Найдем линии течения для случая, когда функции u, v, w имеют вид (3), рассмотренный в примере 1. Здесь мы имеем систему

$$\frac{dx}{tx-y} = \frac{dy}{x+ty} = \frac{dz}{-2tz} \qquad (6)$$

или

$$\frac{dx}{d\tau} = tx-y, \quad \frac{dy}{d\tau} = x+ty, \quad \frac{dz}{d\tau} = -2tz$$

Дифференцируя первое уравнение по τ, получим:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = t\frac{dx}{d\tau} - \frac{dy}{d\tau},$$

откуда в силу первых двух уравнений

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = t\frac{dx}{d\tau} - x - ty = t\frac{dx}{d\tau} - x + t\frac{dx}{d\tau} - t^2x.$$

или

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - 2t\frac{dx}{d\tau} + (1+t^2)x = 0$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$x = e^{t\tau}(a\cos\tau + b\sin\tau)$$

Отсюда уже без интегрирования (в силу первого уравнения) следует, что

$$y = -e^{t\tau}(b\cos\tau - a\sin\tau)$$

Третье уравнение интегрируется непосредственно, и мы получим, что

$$\log z = \log c - 2t\tau$$

или

$$z = ce^{-2t\tau}$$

Легко также проинтегрировать систему (6) без введения вспомогательного параметра. С этой целью заменим систему (6) уравнениями:

$$\frac{dx}{tx-y}=\frac{dy}{x+ty}$$

$$\frac{xdx+ydy}{x(tx-y)+y(x+ty)}=\frac{dz}{-2tz}$$

Второе из полученных уравнений имеет вид:

$$\frac{d(x^2+y^2)}{2t(x^2+y^2)}=\frac{dz}{-2tz}$$

или

$$\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=-\frac{dz}{z}$$

и дает

$$z(x^2+y^2)=A,$$

где A- произвольная постоянная.

Первое уравнение перепишем в виде:

$$xdx+ydy+t(ydx-xdy)=0$$

или

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}+t\,\frac{\dfrac{ydx-xdy}{x^2}}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}=0$$

Его интегрирование дает

$$\log\sqrt{x^2+y^2}-t\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}=B,$$

где B- вторая произвольная постоянная.

Предоставляем читателю получить эту систему двух уравнений исключением τ из ранее найденной системы трех уравнений.

4. Если через все точки некоторой замкнутой линии проведем линии течения для некоторого момента времени,

то мы получим трубку течения для этого момента. Ниже мы увидим, что знание трубок течения дает наглядное представление уже не только о направлении скорости в различных точках, но также и о ее величине.

5. Возьмем какую нибудь функцию $f(x, y, z, t)$ от переменных x, y, z, t.

Если нас интересует, как с течением времени изменяется эта функция в данной точке пространства, то мы должны считать в ней x, y, z постоянными, обращая наше внимание только на ее зависимость от четвертого аргумента. В этом случае производную от нашей функции по t называют локальной и обозначают через $\frac{\partial f}{\partial t}$.

Может, однако, случиться, что функция $f(x, y, z, t)$ выражает некоторое свойство движущейся точки сплошной среды. Тогда мы должны иметь в виду, что x, y, z уже будут функциями от t. В этом предположении производную по t от $f(x, y, z, t)$ обозначают через $\frac{df}{dt}$ и называют субстанциальной производной по времени.

Покажем, как найти $\frac{df}{dt}$. Пусть t получило приращение Δt; тогда x, y, z получат приращения $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, которые отвечают движению точки вдоль ее траектории и которые, следовательно, с точностью до бесконечно-малых высшего порядка равны

$$\Delta x = u\Delta t, \quad \Delta y = v\Delta t, \quad \Delta z = w\Delta t.$$

Приращение функции

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t+\Delta t) - f(x, y, z, t) =$$

по теореме о конечном приращении равно:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \varepsilon = \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial f}{\partial x}u\Delta t + \frac{\partial f}{\partial y}v\Delta t + \frac{\partial f}{\partial z}w\Delta t + \delta,$$

где ε - есть бесконечно малая относительно $|\Delta t| + |\Delta x| + |\Delta y| + |\Delta z|$, а δ - относительно Δt.

Отсюда мы и получаем выражение для субстанциальной производной

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w.$$

Найдем, например, выражения для проекций на координатные оси ускорения точки сплошной среды. Для этого нужно найти производные по времени от величин u, v, w. Ясно, что нам придется брать производные субстанциальные. Обозначая искомые проекции ускорения через j_x, j_y, j_z, мы поэтому найдем, что

$$j_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w$$

$$j_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \qquad (7)$$

$$j_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w$$

§2. Анализ движения элемента сплошной среды

1. Возьмем в некоторый момент времени t какую-нибудь точку $M\ (x, y, z)$ сплошной среды, и пусть в рассматриваемый момент времени ее скорость имеет проекции u, v, w. Если M' есть точка сплошной среды близкая к точке M, то ее координаты удобно представить в виде:

$$x' = x + h, \quad y' = y + k, \quad z' = z + l$$

где h, k, l суть те приращения, которые нужно дать координатам точки M, чтобы получить координаты точки M'. Пользуясь теоремой о конечном приращении функции от многих переменных, мы можем представить проекции на координатные оси скорости точки M' для выбранного момента t в виде:

$$u' = u + \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k + \frac{\partial u}{\partial z} l$$

$$v' = v + \frac{\partial v}{\partial x} h + \frac{\partial v}{\partial y} k + \frac{\partial v}{\partial z} l \qquad (1)$$

$$w' = w + \frac{\partial w}{\partial x} h + \frac{\partial w}{\partial y} k + \frac{\partial w}{\partial z} l$$

Строго говоря, величины $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots\ldots \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$ должны быть вычислены для некоторых промежуточных между M и M' точек, но при достаточной близости этих точек, т.е. при рассмотрении ближайшей окрестности точки M мы сделаем малую погрешность, если будем вычислять величины $\frac{\partial u}{\partial x}$, просто для точки M.

Выделим мысленно в сплошной среде небольшой объем, заключающий внутри себя точку M. Назовем этот объем элементом или частицей сплошной среды, а точку M – центром этого элемента.

Тогда формулы (1) дают нам выражения проекций на оси скорости в момент t переменной точки элемента сплошной среды, в виде функций первой степени от переменных h, k, l, определяющих положение переменной точки M' относительно центра элемента M.

2. Введем обозначения

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\alpha_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \alpha_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \alpha_{33} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \alpha_{13} = \alpha_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

Все эти величины точно также как и u, v, w являются для данного элемента сплошной среды определенными числами, т.к. они зависят только от координат x, y, z центра элемента.

Легко проверить, что с помощью введенных обозначений уравнения (1) можно переписать в виде

$$u' = u + (\eta l - \zeta k) + (\alpha_{11} h + \alpha_{12} k + \alpha_{13} l)$$

$$v' = v + (\zeta h - \xi l) + (\alpha_{21} h + \alpha_{22} k + \alpha_{23} l) \qquad (2)$$

$$w' = w + (\xi k - \eta h) + (\alpha_{31} h + \alpha_{32} k + \alpha_{33} l)$$

Эти равенства показывают, что движение элемента сплошной среды в любой момент времени складывается из трех частей.

Во-первых, из поступательного движения элемента как твердого тела со скоростью, имеющей проекции u, v, w.

Затем, из вращательного движения элемента как твердого тела вокруг некоторой проходящей через точку M мгновенной оси с угловой скоростью ω, имеющей составляющие ξ, η, ζ по проходящим через точку M осям X', Y', Z'. Чтобы в этом убедиться, предположим, что элемент вращается с угловой скоростью ξ вокруг оси X'. Величина, получающейся при этом линейной скорости точки M' равна:

$$\xi \sqrt{k^2 + l^2}$$

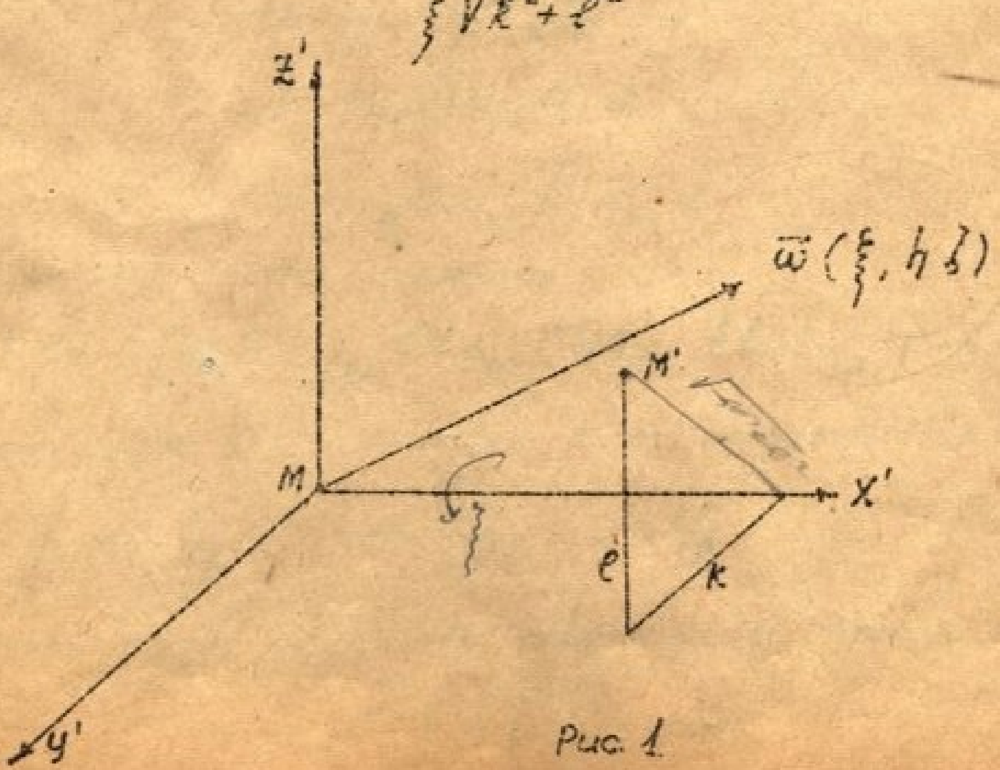


Рис. 1.

а проекции этой линейной скорости на оси, очевидно, будут (см. черт. 1):

на ось X — $\quad 0$

на ось Y — $\quad -\xi\sqrt{k^2+l^2}\cos\alpha = -\xi l$

на ось Z $\quad \xi\sqrt{k^2+l^2}\sin\alpha = \xi k$

Делая то же самое с величинами η и ζ, мы найдем, что вторые члены формул (2) действительно отвечают указанному нами вращению элемента.

Величина получаемой угловой скорости вращения равна:

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},$$

а само вращение можно рассматривать как вектор, направленный по оси вращения и имеющий величину ω. Этот вектор мы обозначим через $\vec{\omega}$.

Наконец, третьей составной частью движения элемента является движение, в котором скорость переменной точки M' элемента имеет проекции.

$$u = \alpha_{11} h + \alpha_{12} k + \alpha_{13} l$$

$$v = \alpha_{21} h + \alpha_{22} k + \alpha_{23} l$$

$$w = \alpha_{31} h + \alpha_{32} k + \alpha_{33} l$$

Если мы введем функцию

$$F(h\, k\, l) = \frac{1}{2}\left\{\alpha_{11} h^2 + \alpha_{22} k^2 + \alpha_{33} l^2 + 2\alpha_{12} hk + 2\alpha_{13} hl + 2\alpha_{23} kl\right\},$$

то выражения u, v, w можно будет представить в виде:

$$u = \frac{\partial F}{\partial h}, \quad v = \frac{\partial F}{\partial k}, \quad w = \frac{\partial F}{\partial l}$$

Рассмотрим семейство поверхностей второго порядка

$$F(h, k, l) = C = const.$$

(в координатах h, k, l), имеющих в качестве центра точку M.

Возьмем ту из поверхностей этого семейства, которая проходит через точку M', для чего следует надлежащим образом выбрать константу C.

Тогда скорость точки M', отвечающая третьей составной части движения элемента, направлена по нормали к указанной проходящей через точку M' поверхности. Это следует из того, что направляющие косинусы нормали к поверхности

$$\varphi(x, y, z) = C$$

в ее точке (x_0, y_0, z_0) пропорциональны величинам

$$\varphi'_x(x_0, y_0, z_0), \quad \varphi'_y(x_0, y_0, z_0), \quad \varphi'_z(x_0, y_0, z_0)$$

Из приведенного описания третьей составной части движения элемента вытекает, что это движение вызывает деформацию элемента. Мы сейчас рассмотрим это движение несколько подробнее.

3. Для некоторого упрощения примем, что первая и вторая составные части движения элемента (благодаря которым элемент перемещается на манер твердого тела) вообще отсутствуют. Это значит, что для выбранной точки $M(x, y, z)$ и выбранного момента t величины $u, v, w, \xi, \eta, \zeta$ равны нулю.

Тогда:

$$u' = \alpha_{11} h + \alpha_{12} k + \alpha_{13} l$$

$$v' = \alpha_{21} h + \alpha_{22} k + \alpha_{23} l$$

$$w' = \alpha_{31} h + \alpha_{32} k + \alpha_{33} l$$

По прошествии бесконечно-малого промежутка времени Δt точка M по прежнему будет иметь координаты

0,0,0, тогда как новые координаты точки M' будут:

$$h^* = h + u'\Delta t = (1+\alpha_{11}\Delta t)h + \alpha_{12}\Delta t . k + \alpha_{13}\Delta t . l$$

$$k^* = k + v'\Delta t = \alpha_{21}\Delta t . h + (1+\alpha_{22}\Delta t)k + \alpha_{23}\Delta t . l$$

$$l^* = l + w'\Delta t = \alpha_{31}\Delta t . h + \alpha_{32}\Delta t . k + (1+\alpha_{33}\Delta t)l$$

где h, k, l - ее старые координаты.

Будем отбрасывать величины бесконечно-малые относительно Δt. Так как h^* отличается от h на величину порядка Δt (и то же имеет место относительно k^* и k, l^* и l) то при такой точности мы можем в правых частях написанных выше равенств заменить h, k, l соответственно на h^*, k^*, l^* всюду, где h, k, l множатся на Δt.

Поэтому мы получим, что

$$h^* = h + \Delta t(\alpha_{11}h^* + \alpha_{12}k^* + \alpha_{13}l^*)$$

откуда

$$h = (1-\alpha_{11}\Delta t)h^* - \alpha_{12}\Delta t . k^* - \alpha_{13}\Delta t . l^*$$

и аналогично

$$k = -\alpha_{21}\Delta t . h^* + (1+\alpha_{22}\Delta t)k^* - \alpha_{23}\Delta t . l^*$$

$$l = -\alpha_{31}\Delta t . h^* - \alpha_{32}\Delta t . k^* + (1-\alpha_{33}\Delta t)l^*$$

Эти формулы выражают старые координаты точки M' через новые.

Возьмем сферу

$$h^2 + k^2 + l^2 = a^2$$

в момент времени t. Чтобы узнать, где лежат ее точки в момент времени $t+\Delta t$, мы должны в уравнение сферы подставить вместо h, k, l их выражения через новые координаты. Мы получим уравнение:

$$[(1-\alpha_{11}\Delta t)h^* - \alpha_{12}\Delta t . k^* - \alpha_{13}\Delta t . l^*]^2 + [\ldots\ldots]^2 + [\ldots\ldots]^2 = a^2$$

или, отбрасывая бесконечно-малые второго порядка относительно Δt:

$$(1-2\alpha_{11}\Delta t)h^{*2}+(1-2\alpha_{22}\Delta t)k^{*2}+(1-2\alpha_{33}\Delta t)l^{*2}-2\alpha_{12}\Delta t.h^*k^*-$$
$$-2\alpha_{13}\Delta t.h^*l^*-2\alpha_{23}\Delta t.k^*l^*=a^2.$$

Это есть уравнение эллипсоида, который носит название <u>эллипсоида деформации</u>, т.к. (в первом приближении) деформационное движение переводит сферу в этот эллипсоид. Элементы эллипсоида деформации дают полную характеристику третьей составной части движения частицы сплошной среды.

Возьмём в момент времени t прямоугольный параллелепипед, четыре вершины которого имеют координаты

$$(0,0,0),\ (h,0,0),\ (0,k,0),\ (0,0,l)$$

По прошествии времени Δt эти вершины займут положения:

$$(0,0,0)$$
$$[(1+\alpha_{11}\Delta t)h,\ \alpha_{12}\Delta t.k,\ \alpha_{13}\Delta t.l]$$
$$[\alpha_{21}\Delta t.h,\ (1+\alpha_{22}\Delta t)k,\ \alpha_{23}\Delta t.l]$$
$$[\alpha_{31}\Delta t.h,\ \alpha_{32}\Delta t.k,\ (1+\alpha_{33}\Delta t)l]$$

и мы получим новый параллелепипед, объем которого равен:

$$Q^*=\begin{vmatrix}(1+\alpha_{11}\Delta t)h, & \alpha_{12}\Delta th, & \alpha_{13}\Delta th\\ \alpha_{21}\Delta tk, & (1+\alpha_{22}\Delta t)k, & \alpha_{23}\Delta tk\\ \alpha_{31}\Delta tl, & \alpha_{32}\Delta tl, & (1+\alpha_{33}\Delta t)l\end{vmatrix}=$$

$$=hkl[1+\Delta t(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33})+\ldots\ldots],$$

где пропущенные члены содержат Δt в квадрате и кубе. Старый объем равен $hkl=Q$. Следовательно, относительное увеличение за время Δt параллелепипеда с точностью до бесконечно-малых высшего порядка, равно:

$$\Delta t(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}),$$

а значит относительная скорость объемного расширения есть

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{Q^*-Q}{Q\Delta t}=\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dt}=\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

Если жидкость несжимаема, то эта величина равна нулю.

Выражение

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\operatorname{div}\vec{V} \qquad (3)$$

называют дивергенцией (расхождением).

Аналогичные выражения встречаются и в других отделах математической физики, а именно, если $\vec{A}$ есть некоторый вектор, имеющий проекции A_x, A_y, A_z, то часто (напр. в учении об электричестве), приходится рассматривать величину

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Ее принято называть дивергенцией вектора $\vec{A}$, обозначая это обстоятельство следующим образом:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\operatorname{div}\vec{A}$$

Поэтому выражение (3), которое мы ранее назвали просто дивергенцией следует назвать дивергенцией вектора скорости:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\operatorname{div}\vec{V}$$

Итак, если жидкость несжимаема, то

$$\operatorname{div}\vec{V}=0$$

Вообще же $\operatorname{div}\vec{V}$ дает относительную скорость объемного расширения жидкости. Эта скалярная величина, вообще говоря, зависит от t, x, y, z. Подчеркнем еще раз полученную нами формулу:

$$\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dt}=div\,\vec{V} \qquad (4)$$

§3. Уравнение неразрывности.

Мы видели, что в случае несжимаемой жидкости имеет место равенство:

$$div\,\vec{V}=0$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

В общем случае, когда плотность жидкости ρ не является постоянной, а меняется в пространстве и во времени, также должно существовать какое-то соотношение между проекциями скорости. Действительно, если мы как-нибудь выделим элемент жидкости, то его масса с течением времени должна оставаться постоянной, а значит расширение этого элемента должно определенным образом регулироваться законом изменения плотности.

Выведем это соотношение.

Для этого возьмем бесконечно-малый элемент жидкости и обозначим его объем через Q, так что масса элемента равна:

$$m=\rho Q$$

Так как во время движения масса эта остается постоянной, то должно иметь место равенство:

$$\frac{dm}{dt}=0$$

(речь идет о движущейся частице, и поэтому производная берется субстанциональная) или

$$\rho\frac{dQ}{dt}+Q\frac{d\rho}{dt}=0$$

Припоминая формулу (4) §2, мы можем переписать это уравнение в виде:

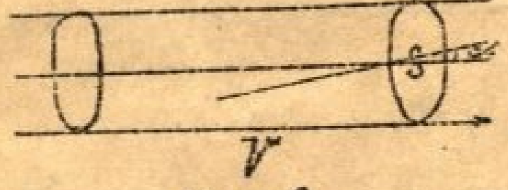
$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0 \qquad (1)$$

Это и есть искомое соотношение. Оно носит название уравнения неразрывности, и в частном случае, когда $\rho = const$, переходит в уравнение несжимаемости

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \qquad (2)$$

2. Можно еще иначе вывести уравнение неразрывности. Для этого мы введем вообще важное для дальнейшего понятие о потоке.

Предположим, что мы имеем равномерное и прямолинейное движение жидкости со скоростью V. Пусть кроме того дана плоская площадка величины S произвольной формы и произвольным образом ориентированная относительно вектора $\vec{V}$.



Черт. 2.

Зададимся определенным направлением нормали k площадке и вычислим объем жидкости, проходящий через площадку за единицу времени в ту сторону, куда указывает нормаль. Этот объем мы должны будем считать, следовательно, величиной положительной, если выбранная нормаль образует острый угол с направлением скорости, и величиной отрицательной, если этот угол тупой. Искомый объем есть объем цилиндра с основанием S и образующей $\vec{V}$ и, очевидно с учетом знака он равен:

$$V \cos\alpha \cdot S = V_n S,$$

где α - угол между направлением скорости и выбранным направлением нормали, а V_n - проекция скорости на нормаль. Полученную величину называют потоком через площадку S в выбранном направлении нормали.

В общем случае, когда площадка не является плоской, а поток не равномерен, мы получим для потока величину

$$\iint V_n \, dS \qquad (3)$$

где интегрирование распространяется на всю поверхность, а V_n есть проекция уже переменной скорости на нормаль к поверхности в ее переменной точке, причем из двух направлений нормали должно быть всегда взято то, которое соответствует направлению, в котором требуется вычислить поток.

Не только в гидродинамике, но и в других отделах математической физики (напр. в учении об электричестве) также часто приходится иметь дело с интегралами вида:

$$\iint A_n \, dS,$$

где $\vec{A}$ – некоторый переменный вектор. Эти интегралы по аналогии с гидродинамикой также называют потоками, но говорят уже о потоке вектора $\vec{A}$. Поэтому интеграл (3) можно назвать потоком вектора скорости $\vec{V}$. Аналогично

$$\iint \rho V_n \, dS$$

есть поток вектора количества движения $\rho\vec{V}$.

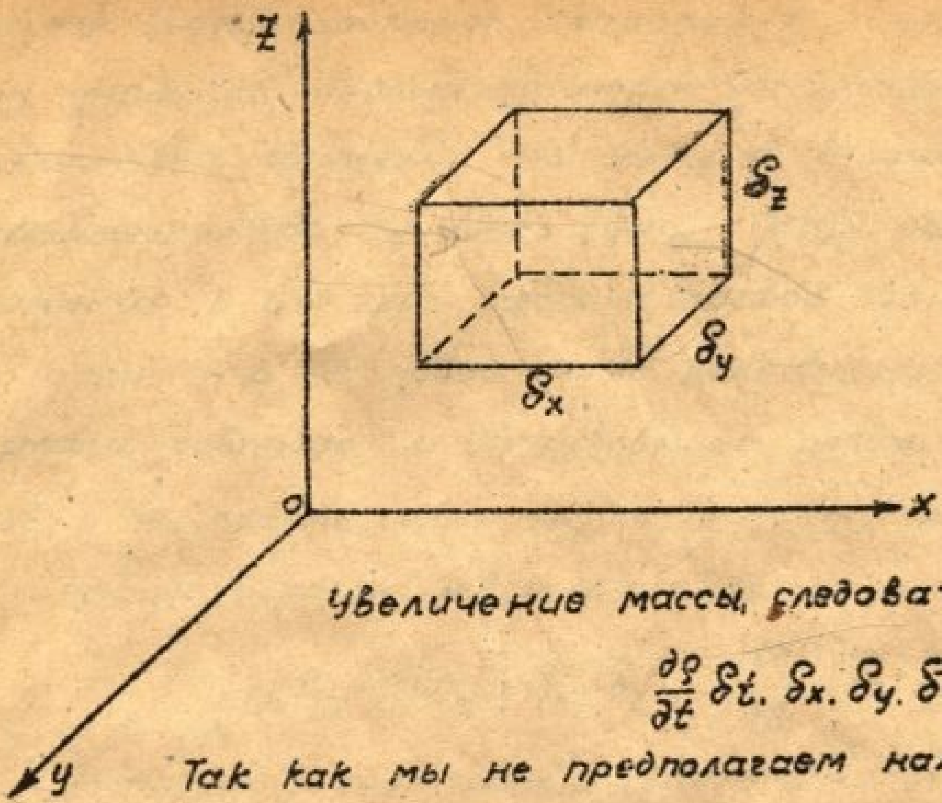
3. Теперь мы можем дать второй вывод уравнения неразрывности.

Выделим в пространстве бесконечно-малый параллелепипед с ребрами $\delta_x, \delta_y, \delta_z$. Масса заполняющей его жидкости в момент времени t равна:

$$\rho\, \delta_x \cdot \delta_y \cdot \delta_z,$$

а в момент времени $t+\delta t$, она будет:

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t}\delta t\right) \delta_x \cdot \delta_y \cdot \delta_z$$



Черт. 3

Увеличение массы, следовательно, есть

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\delta t.\ \delta_x.\ \delta_y.\ \delta_z$$

Так как мы не предполагаем наличия источников (или стоков), то это увеличение массы происходит только за счет вхождения жидкости внутрь параллелепипеда через его стенки. Но за время δt через стенки параллелепипеда войдет масса

$$\delta t \iint \rho V_n \, dS$$

Поэтому

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\delta_x.\delta_y.\delta_z = \iint V_n \, dS \qquad (4)$$

и

Поскольку параллелепипед бесконечно мал, то интеграл в правой части этой формулы можно заменить суммой из шести слагаемых соответственно шести граням параллелепипеда. При этом из двух направлений нормали к каждой грани мы должны брать то, которое идет внутрь параллелепипеда.

Мы получим, что левой грани отвечает слагаемое:

$$(\rho v)_B\,\delta_x.\delta_z = \left[\rho v - \frac{1}{2}\,\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\,\delta y\right]\delta_x.\delta_z,$$

а правой

$$-(\rho v)_{B'}\,\delta_x.\delta_z = -\left[\rho v + \frac{1}{2}\,\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\,\delta y\right]\delta_x.\delta_z,$$

где мы воспользовались теоремой о конечном приращении функции, обозначая через ϱv значение проекции количества движения на ось y-ов в точке M (центр параллелепипеда) и через $(\varrho v)_B$, $(\varrho v)_{B'}$ соответствующие значения в центрах левой и правой граней; кроме того мы учли, что на левой грани направление выбранной нормали совпадает с направлением положительной оси y-ов, а на правой грани прямо противоположно.

Таким образом левая и правая стенки дают

$$\left\{(\varrho v)_B-(\varrho v)_{B'}\right\}\delta_x.\delta_z=-\frac{\partial(\varrho v)}{\partial y}\delta_x.\delta_y.\delta_z$$

Поступая точно также с остальными стенками и складывая полученные выражения, мы найдем, что правая часть формулы (4), т.е. поток внутрь бесконечно малого параллелепипеда вектора количества движения, равняется

$$-\delta_x.\delta_y.\delta_z\left\{\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\varrho w)}{\partial z}\right\}$$

Поэтому формула (4) принимает вид

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\varrho w)}{\partial z}=0$$

Это и есть уравнение неразрывности. То, что оно тождественно с найденным ранее уравнением (1), следует из равенств

$$\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}=\varrho\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varrho}{\partial x}u,$$

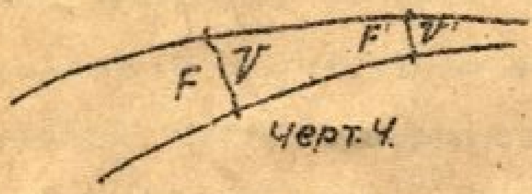
$$\frac{\partial(\varrho v)}{\partial y}=\varrho\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial\varrho}{\partial y}v,$$

$$\frac{\partial(\varrho w)}{\partial z}=\varrho\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial\varrho}{\partial z}w$$

в силу которых

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\varrho w)}{\partial z}=\frac{d\varrho}{dt}+\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

4. Покажем теперь в связи со сделанным ранее замечанием, почему знание трубок течения позволяет получить некоторую информацию относительно величины скорости. Для простоты рассмотрим несжимаемую жидкость.



Черт. 4.

Пусть взята бесконечно тонкая трубка течения. Возьмем два ее нормальных сечения F и F' и пусть, например, $F>F'$. Тогда скорость в сечении F меньше, чем таковая в сечении F', т.е. $V<V'$. Иными словами, сужение трубки сечения свидетельствует об увеличении скорости. Действительно, в силу несжимаемости жидкости поток через F должен равняться потоку через F', т.е.

$$FV=F'V'$$

ибо через боковую поверхность трубки поток равен нулю, а тот объем жидкости, который вошел через F, должен выйти через F', если изменение плотности жидкости невозможно.

5. Просматривая данный в п° 3 настоящего параграфа подсчет потока вектора количества движения внутрь бесконечно-малого параллелепипеда, мы замечаем, что этот подсчет применим не только к полю вектора количества движения, но и вообще к любому векторному полю. А именно, если $\vec{A}$ есть произвольный вектор, проекции которого на оси суть однозначные дифференцируемые функции от координат, то поток вектора $\vec{A}$ внутрь бесконечно-малого прямоугольного параллелепипеда равен:

$$-\delta_x.\delta_y.\delta_z.\operatorname{div}\vec{A}$$

где $\operatorname{div}\vec{A}$ вычисляется для центра параллелепипеда (или, поскольку мы пренебрегаем бесконечно-малыми высшего порядка, для какой-нибудь другой внутренней точки параллелепипеда).

Этот результат содержит в зародыше важную теорему интегрального исчисления, которая гласит: если $\vec{A}$ некоторый вектор, проекции которого на оси суть однозначные дифференцируемые функции и если замкнутая поверхность S ограничивает часть пространства T, то поток вектора $\vec{A}$ внутрь S равен взятому со знаком минус интегралу по T от $div\,\vec{A}$, т.е.

$$\iint_S A_n\,dS = -\iiint_T div\,\vec{A}.\,d\tau,$$

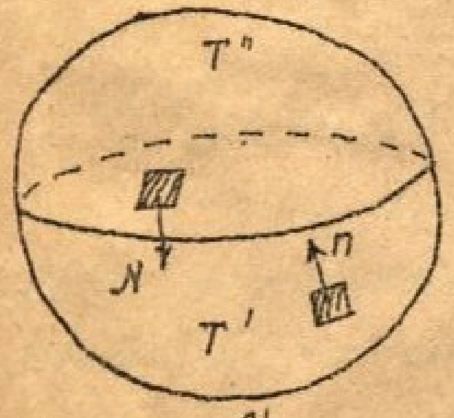
где $d\tau$ - есть элемент объема (в декартовых координатах он равен $dx.dy.dz$).

Эта теорема носит название интегральной теоремы Гаусса, и ее строгое доказательство читатель найдет в большинстве курсов математического анализа.

Не претендуя на строгость, мы можем для обоснования теоремы Гаусса привести следующие эвристические рассуждения.

Положим, что область T разбита на две области T' и T'' с помощью некоторой поверхности σ.

Эта поверхность σ также разобьет поверхность S на две части S' и S'', так, что граница области T' будет состоять из поверхностей S' и σ, а граница T'' - из S'' и σ.



Черт. 5.

Потоки вектора $\vec{A}$ внутрь поверхностей, ограничивающих T' и T'', очевидно будут равны

$$\iint_{S'+\sigma} A_n\,dS = \iint_{S'} A_n\,dS + \iint_{\sigma} A_n\,dS$$

$$\iint_{S''+\sigma} A_n\,dS = \iint_{S''} A_n\,dS - \iint_{\sigma} A_n\,dS,$$

 25

где N - означает нормаль к σ, направленную внутрь T'. Сумма этих потоков, очевидно, равна потоку внутрь S.

Из сказанного немедленно вытекает, что если T разделить на m частей $T_1, T_2, \ldots\ldots T_m$, то поток внутрь S будет равен сумме потоков внутрь поверхностей $S_1, S_2, \ldots\ldots, S_m$, ограничивающих части $T_1, T_2, \ldots\ldots, T_m$ области T.

Будем область T дробить на части с помощью плоскостей, параллельных координатным плоскостям; при этом T будет составляться из полных прямоугольных параллелепипедов и неполных (примыкающих к границе области T). Обозначая одним штрихом суммирование, распространенное на совокупность полных параллелепипедов, а двумя штрихами - на остальные, мы получим, что

$$\iint_S A_n\,dS = \Sigma' \iint A_n\,dS + \Sigma'' \iint A_n\,dS$$

Вторая сумма стремится к нулю, если стремятся к нулю размеры наибольшей из частей, на которые мы разбили область T, а первая сумма стремится к

$$-\lim \Sigma' \operatorname{div}\vec{A}\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z = -\iiint_T \operatorname{div}\vec{A}\cdot d\tau$$

Отсюда и получается, что

$$\iint_S A_n\,dS = -\iiint_T \operatorname{div}\vec{A}\cdot d\tau$$

§4. Вихри, циркуляция, теорема Стокса.

1. В §2 мы связали с каждой точкой занятого сплошной средой пространства некоторый, зависящий также от времени, вектор $\vec{\omega}$, который характеризует мгновенное вращение элемента сплошной среды с центром в рассматриваемой точке.

Вектор $2\vec{\omega}$ называют вектором - <u>вихрем</u> или просто вихрем и пишут

$$2\vec{\omega} = \operatorname{curl} \vec{V}$$

(читается керль $\vec{V}$, по английски curl значит вихрь).

Понятие о вихре, подобно другим рассмотренным нами понятиям, из гидродинамики перенесено в другие разделы математической физики, так что стало обычным называть вектор $\vec{B}$ вихрем вектора $\vec{A}$ и записывать это формулой

$$\vec{B} = \operatorname{curl} \vec{A},$$

если

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

Чтобы получить представление о распределении вихрей в некоторый момент времени, пользуются, так наз. вихревыми линиями. Вихревой линией для момента t называют линию, в каждой точке которой касательная имеет направление вектора-вихря, действующего в этой точке в момент t. Таким образом, понятие о вихревой линии аналогично понятию о линии течения и, вспоминая §1, мы можем написать дифференциальные уравнения вихревых линий в виде

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}$$

Если через все точки некоторой линии провести в момент времени t вихревые линии, то мы получим вихревую поверхность. В том случае, когда указанная линия замкнута, вихревую поверхность называют вихревой трубкой.

Может случиться, что вихрь равен нулю во всех точках некоторой области; в этом случае движение в этой области называется невихревым.

Наблюдая водовороты в реке, а также вращающиеся столбы воздуха, которые осенью поднимают кучи пыли и желтых листьев, мы привыкли в нашей повседневной жизни называть эти явления вихревыми явлениями.

Характерным для этих явлений есть наличие в жидкости областей, где частицы жидкости с большей или меньшей скоростью описывают замкнутые траектории.

Мы покажем вскоре, что наличие таких замкнутых траекторий, вообже говоря, возможно только тогда, когда в рассматриваемой области не всюду равен нулю вектор-вихрь. Тем самым будет показано, что введенное нами чисто формально понятие о вихревом движении соответствует тому представлению о вихревом движении, которое нам известно из опыта.

Для этого мы введем весьма важное понятие о циркуляции.

2. Возьмем в пространстве какую-нибудь кривую линию $\mathcal{L}$, и выберем одно из двух возможных направлений ее пробега за положительное. Обозначая через ds элемент измеряемой в выбранном нами направлении дуги нашей кривой, составим произведение.

$$V \cdot \cos\theta \cdot ds,$$

где V - есть величина скорости жидкости в некоторой точке M элемента кривой, вычисленная для определенного момента времени t, а

θ - есть угол между положительным направлением касательной к кривой $\mathcal{L}$ в точке M.

Интеграл

$$\int_{\mathcal{L}} V\cos\theta\, ds$$

называют <u>линейным интегралом скорости</u> вдоль $\mathcal{L}$ в момент t.

Этот интеграл напоминает выражение работы силы вдоль кривой, и мы получили бы работу, если бы вместо $\vec{V}$ взяли вектор силу; и подобно тому, как в общем курсе механики выводится выражение для работы через проекции силы на оси, мы без труда можем получить следующее новое выражение для линейного интеграла скорости

$$\int_{\mathcal{L}} (udx + vdy + wdz)$$

Если бы мы изменили направление пробега кривой $\mathcal{L}$, то, очевидно, наш интеграл изменил бы только свой знак; символически это можно записать формулой

$$\int_{\mathcal{L}^{-1}} V\cos\theta ds = -\int_{\mathcal{L}} V\cos\theta ds$$

В том случае, когда $\mathcal{L}$ есть кривая замкнутая или, как мы будем говорить, контур, линейный интеграл скорости называют циркуляцией, или более подробно, циркуляцией по контуру $\mathcal{L}$. Циркуляцию по контуру $\mathcal{L}$ обозначают часто символом $\Gamma_{\mathcal{L}}$, а когда возможность недоразумений исключена, пишут просто Γ. Таким образом

$$\Gamma_{\mathcal{L}^{-1}} = -\Gamma_{\mathcal{L}}$$

Положим теперь, что в жидкости имеются частицы, описывающие замкнутые траектории. Примем для простоты, что течение стационарно и путь C одна из указанных замкнутых траекторий.

Так как вектор $\vec{V}$ направлен всюду по касательной к траектории, то выбирая на C направление пробега, совпадающее с направлением движения частицы, мы найдем, что всюду на C угол θ равен нулю.

А так как $Vds \geqslant 0$, то все элементы интеграла

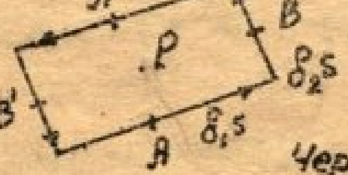
$$\Gamma = \int_{C} Vds$$

положительны и значит $\Gamma > 0$.

Мы видим таким образом, что при наличии вихрей в том смысле, как мы их себе представляем в обыденной жизни, существуют контура, вдоль которых циркуляция не равна нулю, и, очевидно, величина этой циркуляции в некотором смысле является мерой завихренности движения.

3. Не предполагая более, что течение стационарно, и вообще не делая никаких частных предположений о характере потока, покажем теперь, что величина Γ определенным образом связана с величиною и направлением вектора $\vec{\omega}$ в рассматриваемой части пространства, и мост от нашего представления о вихрях к их математическому определению будет переброшен.

Возьмем в качестве $\mathcal{L}$ контур бесконечно-малого параллелограмма Π, произвольным образом расположенного и ориентированного в пространстве. Пусть центр P параллелограмма имеет координаты x, y, z и пусть стороны его $\delta_1 s$, $\delta_2 s$ имеют соответственно проекции $\delta_1 x$, $\delta_2 x$; $\delta_1 y$, $\delta_2 y$; $\delta_1 z$, $\delta_2 z$



Черт. 6.

Обозначая через u, v, w – проекции скорости в точке P, через u_A, v_A, w_A в точке A (для того же момента времени) и т.д. и учитывая бесконечно-малые размеры контура, мы можем для циркуляции написать следующее выражение, состоящее из четырех членов

$$\Gamma = (u_A \delta_1 x + v_A \delta_1 y + w_A \delta_1 z) + (u_B \delta_2 x + \ldots\ldots) - (u_{A'} \delta_1 x + \ldots\ldots) - (u_{B'} \delta_2 x + \ldots.)$$

Пользуясь, как мы это уже не раз делали, теоремой о конечном приращении, получим:

$$u_A = u - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\delta_2 x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta_2 y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta_2 z\right),$$

$$u_{A'} = u + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\delta_2 x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta_2 y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta_2 z\right),$$

. . . .

. . . .

$$u_B = u + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\delta_1 x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta_1 y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta_1 z\right),$$

$$u_{B'} = u - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\delta_1 x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta_1 y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta_1 z\right),$$

. . . .

. . . .

Отсюда следует, что

$$\Gamma = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\delta_1 y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta_1 z\right)\delta_2 x - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\delta_2 y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta_2 z\right)\delta_1 x +$$

$$+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\delta_1 z + \frac{\partial v}{\partial x}\delta_1 x\right)\delta_2 y - \left(\frac{\partial v}{\partial z}\delta_2 z + \frac{\partial v}{\partial x}\delta_2 x\right)\delta_1 y +$$

$$+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\delta_1 x + \frac{\partial w}{\partial y}\delta_1 y\right)\delta_2 z - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\delta_2 x + \frac{\partial w}{\partial y}\delta_2 y\right)\delta_1 z$$

или

$$\Gamma = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\left(\delta_1 y \cdot \delta_2 z - \delta_2 y \cdot \delta_1 z\right) +$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\delta_1 z \cdot \delta_2 x - \delta_2 z \cdot \delta_1 x\right) +$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\delta_1 x \cdot \delta_2 y - \delta_2 x \cdot \delta_1 y\right)$$

Первые множители слагаемых этой суммы суть проекции вектора вихря, вторые множители зависят от размеров и положения параллелограмма. Связь Г с вектором $\vec{\omega}$ таким образом уже получена, но, чтобы в ~~простом виде выразить~~ найденное соотношение, необходимо выяснить, какой смысл имеют вторые множители слагаемых нашей суммы. С этой целью восставим в точке P перпендикуляр к параллелограмму и возьмем на этом перпендикуляре то направление, которое по отношению к направлению обхода границы параллелограмма ведет себя также, как положительное направление оси z по отношению к направлению вращения осих х-ов в сторону оси у-ов; назовем так выбранное направление нормали к параллелограмму соответствующим направлению обхода его границы и обозначим через α, β, γ углы, образованные выбранной нормалью с осями координат.

Спроектируем теперь параллелограмм на плоскость yOz. Проекцией является некоторый параллелограмм, вершины которого имеют координаты:

$$y_1\,,\ z_1$$
$$y_2 = y_1 + \delta_1 y\,,\ z_2 = z_1 + \delta_1 z$$
$$y_3 = y_1 + \delta_1 y + \delta_2 y\,,\ z_3 = z_1 + \delta_1 z + \delta_2 z$$
$$y_4 = y_1 + \delta_2 y\,,\ z_4 = z_1 + \delta_2 z$$

и которого площадь в силу известной формулы аналитической геометрии равна абсолютной величине определителя

$$\begin{vmatrix} y_2 - y_1\,, & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_2\,, & z_3 - z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_1 y\,, & \delta_1 z \\ \delta_2 y\,, & \delta_2 z \end{vmatrix} = \delta_1 y \cdot \delta_2 z - \delta_2 y \cdot \delta_1 z$$

Из аналитической геометрии также известно, что написанный определитель положителен, если направление вращения оси у-ов в сторону оси z-ов совпадает с направлением обхода границы рассматриваемого в плоскости yOz параллелограмма и отрицателен в противном случае.

Учитывая поэтому сделанный нами выбор нормали к параллелограмму Π, мы легко убеждаемся в том, что написанный нами определитель имеет тот же знак, что и $\cos\alpha$.

С другой стороны площадь проекции плоской фигуры равна произведению площади проектируемой фигуры на абсолютное значение косинуса угла между нормалями к плоскости проектируемой фигуры и плоскости проекции.

Следовательно, каков бы ни был угол α

$$\delta_1 y \cdot \delta_2 z - \delta_2 y \cdot \delta_1 z = \sigma \cdot \cos\alpha,$$

где σ - площадь параллелограмма Π.

Повторяя это же рассуждение для других плоскостей, получим, что

$$\Gamma = 2(\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma) = 2\omega_n \cdot \sigma,$$

где ω_n - есть проекция вектора $\vec{\omega}$ на нормаль к Π, направление которой (нормали) соответствует направлению обхода границы параллелограмма Π.

Заметим, что первая часть полученного равенства есть поток вектора вихря через площадку Π в ту сторону, куда направлена нормаль к Π, соответствующая направлению обхода границы Π.

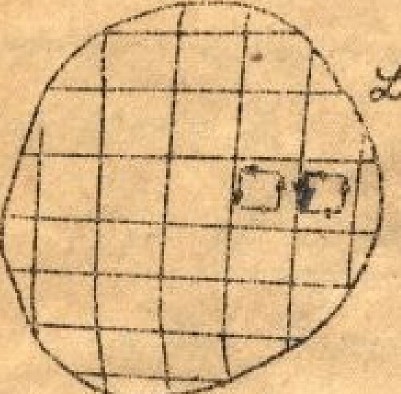
Найденное нами соотношение содержит в зародыше важную теорему Стокса, которая гласит: если функции u, v, w непрерывны и дифференцируемы во всех точках некоторого куска поверхности S, ограниченного контуром $\mathcal{L}$, то

$$\int_{\mathcal{L}}(u dx + v dy + w dz) = \iint_S \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos\beta + \ldots\right\} dS,$$

где α, β, γ углы, образованные с осями координат нормалью к поверхности S, соответствующей направленному контуру $\mathcal{L}$; иначе говоря, циркуляция по $\mathcal{L}$ равна потоку вектора вихря через S.

Для обоснования этого предложения можно рассуждать так же, как мы рассуждали для обоснования теоремы Гаусса. Во-первых, поверхность S можно разбить двумя семействами кривых на бесконечно-малые элементы, которые можно рассматривать, как параллелограммы (частично неполные).

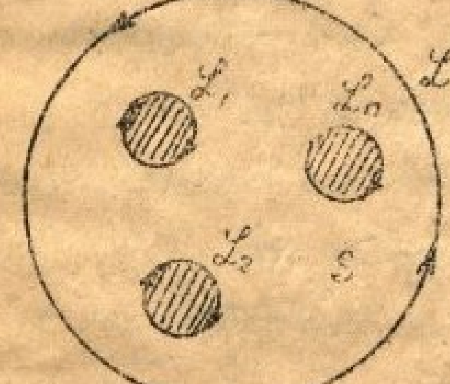
Во-вторых, направление обхода L индуцирует направления обхода границ этих элементов, как это показывает черт. 7.



Черт. 7.

В третьих, сумма циркуляций по всем элементарным контурам, даст циркуляцию по контуру L, т.к. линейные интегралы по отрезкам, принадлежащим границам двух смежных элементов, будут взаимно уничтожаться.

Отсюда и получается без всякого труда формула Стокса, которая, очевидно, остается в силе, каков бы ни был смысл дифференцируемых функций u, v, w и выражает общую теорему интегрального исчисления (имеющую большие применения в электротехнике, где роль функций u, v, w играют проекции вектора магнитного напряжения).



Черт. 8.

Из процесса приведенного нами доказательства вытекает, что для поверхности S, ограниченной направленными контурами L, $L_1, L_2 \ldots\ldots L_m$ (см. черт. 8) справедлива формула:

$$\Gamma_L + \Gamma_{L_1} + \ldots\ldots + \Gamma_{L_m} = 2 \iint\limits_S \omega_n \, dS$$

Нужно только, чтобы выполнялось указанное нами раньше условие дифференцируемости и, чтобы при обходе контуров $L_1, L_2, \ldots, L_m$ поверхность S оставалась с той же стороны, что и при обходе контура L.

Часто приходится применять теорему при следующих условиях: контур L без изменения направления его обхода стягивается непрерывной деформацией в контур L_1, описывая при этом кольцевой кусок поверхности S, тогда:

$$\Gamma_{\mathcal{L}} = \Gamma_{\mathcal{L}_1} + 2\iint\limits_S \omega_n \, ds$$

Это следует из того, что $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_1^{-1}$ образуют границу S, и S остается с одной и той же стороны, как при обходе $\mathcal{L}$, так и при обходе $\mathcal{L}_1^{-1}$.

§5. Первая теорема Гельмгольца

Первая теорема Гельмгольца о вихрях гласит: поток вектора-вихря через любое сечение вихревой трубки одинаков.

На основании теоремы Стокса достаточно показать, что циркуляция по контуру, лежащему на поверхности вихревой трубки и обнимающему вихревую трубку один раз, не изменится, если контур вдоль трубки переместить.

Возьмем два контура C и C' и обозначим отвечающие им циркуляции через Γ_{C_1} и $\Gamma_{C'}$. Выберем теперь на каждом из контуров по две бесконечно-близкие точки: точки $\alpha\,\beta$ на C и точки α', β' на C'. Соединяя точки α, α' и точки β, β' двумя лежащими на трубке бесконечно близкими линиями $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, рассмотрим контур $\beta\gamma\alpha\alpha'\gamma'\beta'\beta$, который лежит на поверхности трубки, и циркуляция по которому на основании теоремы Стокса, очевидно, равна нулю. Таким образом мы имеем равенства:

Черт. 9.

$$\int\limits_{\beta\gamma\alpha} V\cos\theta\, ds + \int\limits_{\alpha\alpha'} V\cos\theta\, ds + \int\limits_{\alpha'\gamma'\beta'} V\cos\theta\, ds + \int\limits_{\beta'\beta} V\cos\theta\, ds = 0$$

Будем теперь приближать линию $\beta'\beta$ к линии $\alpha'\alpha$. В пределе второй и четвертый член написанного равенства взаимно уничтожаются, так как в них интегрирование будет происходить по одной и той же линии в противоположных направлениях.

Первый член в пределе даст

$$\int_{PTP} V\cos\theta ds = \Gamma_C,$$

а второй даст $\Gamma_{C'}$, т.к. во втором интеграле направление контура берется отрицательное.

Итак, мы найдем, что

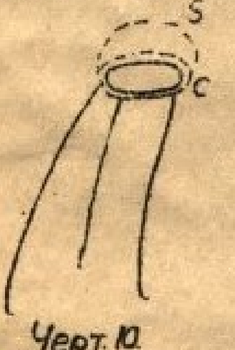
$$\Gamma_C - \Gamma_{C'} = 0$$

т.е

$$\Gamma_C = \Gamma_{C'}$$

В силу доказанной теоремы поток вектора вихря через сечение вихревой трубки есть некоторая константа, характерная для рассматриваемой трубки. Ее называют напряжением вихревой трубки.

Далее, из доказанной теоремы вытекает, что вихревая трубка не может начинаться или заканчиваться внутри жидкости, а, следовательно должна быть либо замкнутой, либо тянуться на бесконечность, либо оканчиваться на поверхности погруженного в жидкость тела. Действительно, если-бы вихревая трубка (см. черт. 10) заканчивалась в жидкости, то по контуру С циркуляция равнялась бы нулю, ибо на контур С можно „одеть" поверхность S, через которую поток вектора вихря равен нулю, а с другой стороны циркуляция по контуру С должна равняться напряжению вихревой трубки.



Черт. 10