Кинематика механизмов.

К разделу II програмы.

II. Кинематическое исследование механизмов методом диаграмм. Кинематическое исследование механизмов производят методами: экспериментальным, аналитическим и графическим. Аналитический метод, хотя и наиболее точный, применяется лишь в простейших случаях.

В практике встречаются механизмы (механизмы шелкомотальных машин), траэктории точек которых имеют кривые выше 3000 порядка. Ясно, что исследовать движение этих точек аналитическим способом совершенно невозможно.

Граф. еский метод исследования в свою очередь распадается на два: метод планов скоростей и ускорений и метод диаграмм.

Метод планов скоростей и ускорений дает, сравнительно, точные результаты, но, давая картину распределения скоростей и ускорений во всех точках механизма в данный момент, не дает картины изменения скорости и ускорения какой либо одной точки механизма с течением времени.

Метод диаграмм дает именно последние картины.

Рассмотрим построение различных диаграмм на отдельных примерах.

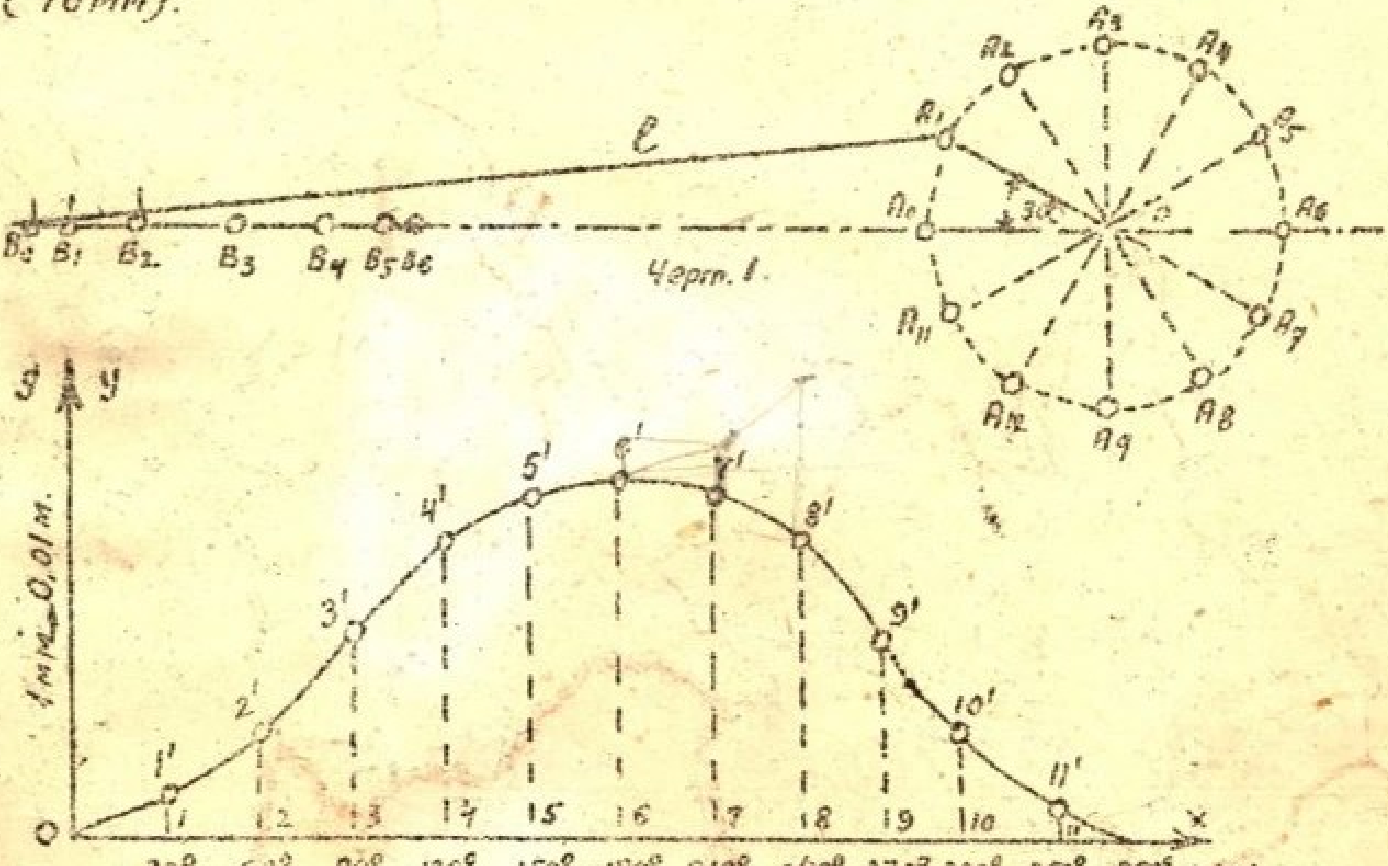
1. Построение диаграммы (S.t).

Так называется диаграмма, выражающая зависимость перемещений точки от времени.

Пусть требуется построить диаграмму перемещений ползуна B, кривошипно-шатунного механизма AOB (черт.1) в зависимости от времени.

Дано: радиус кривошипа r = 200 мм; длина шатуна l = 1000 мм; число оборотов кривошипа n = 250 об/мин.

Для вычерчивания механизма принимает такой масштаб: 1мм. длины чертежа соответствует 0,01 метра натуры (10мм).



Черт. 2   1мм – 0,2 сек.

Следовательно, на нашем чертеже радиус кривошипа выразится отрезком $= \frac{200}{10} = 20$ мм, а длина шатуна отрезком $\frac{1000}{10} = 100$ мм.

Ставя кривошип под разными углами (напр. 0°, 30°, 60° и т.д.) к прямой OB_0, мы одним из способов (способ засечек или способ шаблонов) найдем перемещения точки B, от своего крайнего левого положения: $B_0 B_1$ – перемещение, соответствующее повороту на 30° и т.д. (Перемещения у нас на чертеже определены :

способом засечек).

Для построения диаграммы (S,t) берем координатные оси (чер. 2) и на оси абсцисс будем откладывать времена, а на оси ординат - пути (перемещения). Для определения масштаба времени найдем время поворота кривошипа на угол 30°. Кривошип делает 250 об/мин. или $\frac{250}{60} = \frac{25}{6}$ оборота в секунду. След., один оборот (поворот на 360°) он совершает за $\frac{6}{25}$ секунды; тогда на 30° он повернется за $\frac{6 \cdot 30}{25 \cdot 360} = \frac{1}{50} = 0,02$ секунды.

Примем за масштаб времени 1 мм - 0,2 сек. Тогда время поворота кривошипа на 30° будет выражаться отрезком длиною в 1 см. Отложим по оси абсцисс 12 см., что соответствует периоду полного оборота кривошипа. Проведя ординаты $1-1'$, $2-2'$, $3-3'$, и т.д., отложим на них отрезки соответственно равные B_0B_1; B_0B_2; B_0B_3 и т.д. ($1-1' = B_0B_1$; $2-2' = B_0B_2$).

Соединяя точки $0, 1', 2', 3'$ и т.д. плавной линией, получим диаграмму (S,t), причем перемещения точки B отложены по ординатам в том же масштабе, в каком вычерчен наш механизм, т.е. 1 мм длины ординаты соответствует 0,01 м. действительной величины перемещения.

Масштабы времени и перемещений обозначаются и размещаются так, как показано у нас на черт. 2. В общем виде масштабы эти чаще всего выражаются через через α и τ (1 мм - α м., 1 мм - τ сек. черта заменяет слово „соответствует"). Ясно, что чем меньше α и τ, тем крупнее получится чертеж. Для масштабов существует определенный стандарт.

Таблица стандартных масштабов.

....	....	....
0,001	0,002	0,005
0,01	0,02	0,05
0,1	0,2	0,5
1	2	5
10	20	50
100 и т.д.	200 и т.д.	500 и т.д.

2. Построение диаграммы (v,t).

Так называется диаграмма, выражающая зависимость скорости точки от времени. Эту диаграмму можно построить также, как и диаграмму (S,t), откладывая на ординатах скорости точки B, соответствующие данному времени или данному углу поворота кривошипа, что безразлично, если считать вращение кризвена AO равномерным ($\alpha = cot$, $\omega = const$). Скорости можно вычислять аналитически, или брать из планов скоростей, строя последние для различных положений механизма.

Здесь мы разберем построение кривой (v,t) по заданной кривой (S,t). Построение это наз. графическим дифференцированием. Для примера возьмем построенную нами кривую (S,t).

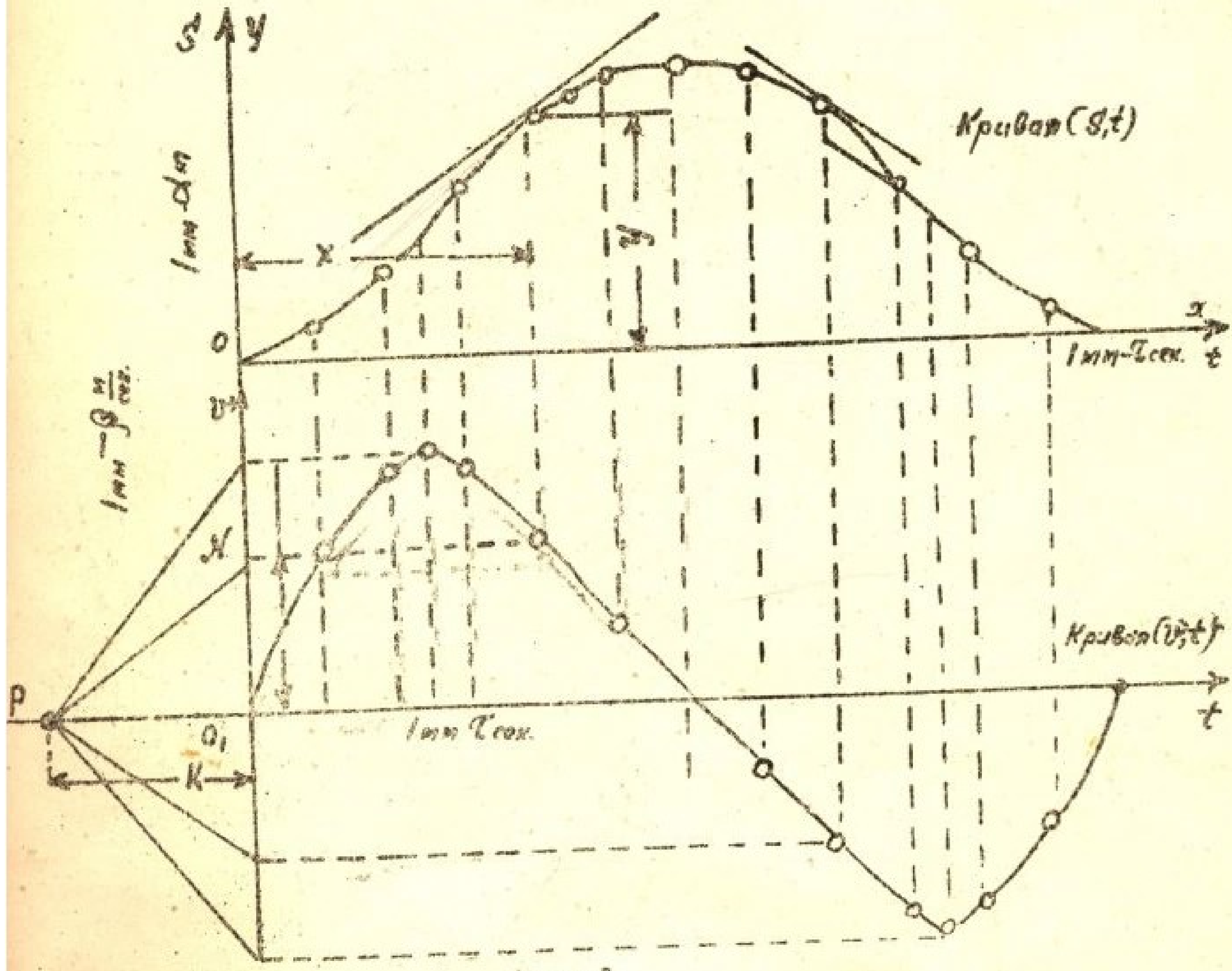
В общем случае кривая эта имеет масштаб перемещений „α", а масштаб времен - „τ" (черт. 3). Для произвольного момента времени t, выражаемого отрезком x, перемещение будет выражаться отрезком y, причем: $S = \alpha y$ и $t = \tau x$; из этих уравнений получаем: $ds = \alpha dy$ и $dt = \tau dx$.

Следовательно, скорость v точки B в рассматриваемый момент имеет величину $v = \frac{ds}{dt} = \frac{\alpha . dy}{\tau . dx}$; проведя на диаграмме (S,t) касательную к кривой в точке B, мы можем заменить $\frac{dy}{dx}$ через $tg\varphi$, где φ - угол, образованный касательною с осью абсцисс.

Для построения диаграммы (v,t) продолжим ось y вниз и через точку O, взятую на продолжении, проведем ось времен. Влево от точки O, отложим отрезок $O,P = K$ мм и через точку P проведем линию PN, параллельную касательной в точке B. Отрезок $O,N = y' = K\, tg\, \varphi$ мм, а потому $v = \frac{\alpha . y'}{\tau . K}\ \frac{м}{сек}$. Следовательно, скорость точки B в рассматриваемый момент будет пропорциональна отрезку y', выраженному в тех же единицах, в каких выражен отрезок K.

Коэффициент пропорциональности $\frac{\alpha}{\tau . K} = \beta\ \frac{м}{сек.мм}$ будет масштабом скорости т.е. $v = \beta . y'\ \frac{м}{сек}$. Проведя на диаграмме (S,t) касательные к различным точкам кривой, а через точку P проводя параллели этим касательным до пересечения с осью „y", мы будем отсекать на ней отрезки, выражающие в масштабе β скорости, соответствующие данным моментам времени.

Отрезки эти сносим горизонтальными прямыми на соответствующие ординаты и полученные точки соединяем плавной кривой, как показано на чертеже



Черт. 3.

Отрезок K нужно выбрать такой длины, чтобы β получилось округленное число (для удобства вычислений величин скоростей по диаграмме) и чтобы диаграмма не вышла за допустимые пределы чертежа. Очевидно чем больше взято K, тем диаграмма (v,t) получится крупнее.

Аналогичным способом можно по диаграмме (v,t) построить диаграмму (W,t).

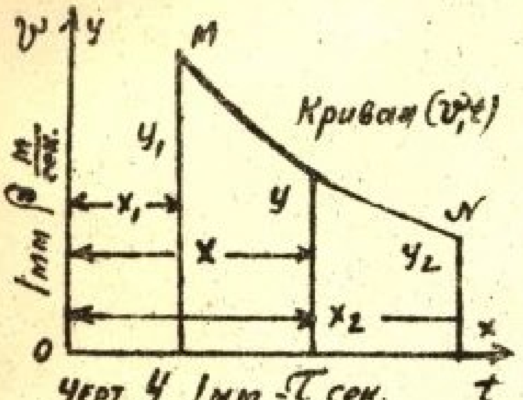
Имея диаграммы (S,t), (v,t) и (W,t) можно сделать кинематический анализ механизма, т.е. можно сказать, каковы будут перемещения, скорости и ускорения ползуна „B" при любом положении кривошипа, когда ползун имеет максимальные и нулевые скорости и ускорения.

Практически иногда необходимо знать скорости и ускорения точки в зависимости от ее перемещения.

Такую зависимость дают диаграммы (S,v) и (S,W).

Построение этих диаграмм по заданным диаграммам (S,t), (v,t) и (W,t) мы разберем ниже.

<u>3. По данной диаграмме (v,t) построить диаграмму (S,t)</u> - задача обратная только что рассмотренной и наз. графическим интегрированием.



Черт. 4 1мм - τ сек.

Возьмем координатные оси XOY (чер. 4). Пусть кривая MN изображает диаграмму (v,t); масштаб скоростей: 1мм - $\beta \frac{м}{сек.}$; масштаб времени 1мм - τ сек. (размерность $\beta \frac{м}{сек.мм}$; размерность $\tau - \frac{сек}{мм.}$)

Если отрезком „x" обозначим произвольный момент времени „t", а соответствующая ордината „y" будет выражать скорость v в этот момент, то $t = x\tau$ сек и $v = y\beta \frac{м}{сек}$. Соответственно с этим $t_н = x_1\tau$ и $t_к = x_2\tau$, где $t_н$ - начальный момент времени, $t_к$ - конечный момент времени.

Тогда на основании формулы $v = \frac{ds}{dt}$, будет иметь: $ds = vdt$ и $S_к - S_н = \int_{t_н}^{t_к} v.dt$; где $S_н$ - начальное расстояние точки; $S_к$ - конечное.

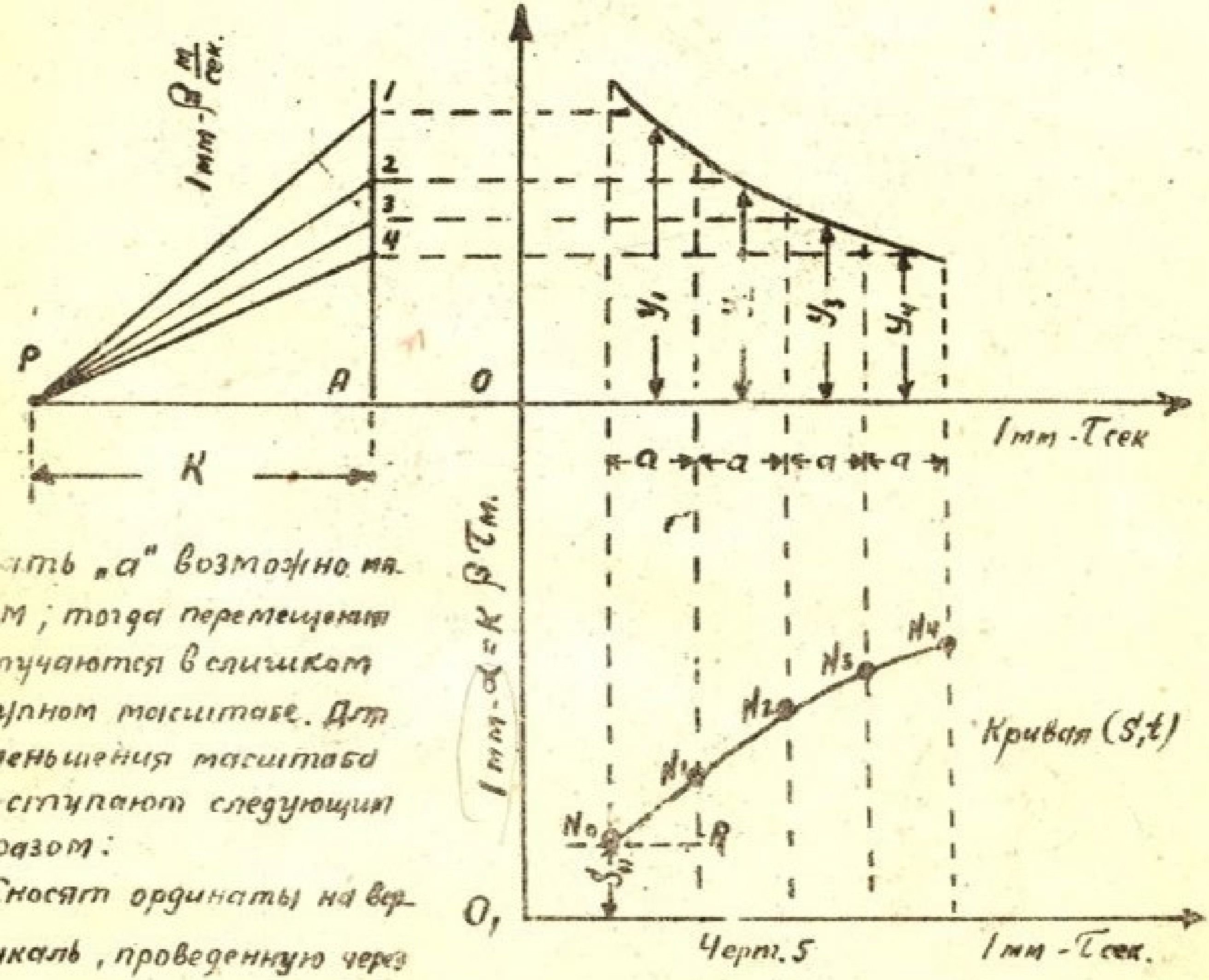
Обозначив разность $S_к - S_н$ сокращенно через $S_{кн}$ ($S_{кн}$ - путь, пройденный точкой за время $t_к - t_н$) и имея в виду, что $v = \beta.y$, а $dt = \tau \cdot dx$, получим $S_{кн} = \int_{t_н}^{t_к} v.dt = \int_{x_1}^{x_2} \beta.\tau y dx = \beta\tau \int_{x_1}^{x_2} y.dx$.

Интеграл $\int_{x_1}^{x_2} ydx$ представляет собою площадь диаграммы (v,t), ограниченную осью абсцисс, частью кривой и двумя ординатами, которые соответствуют абсциссам X_1 и X_2. Обозначив эту площадь через f_{12} см², получим $S_{кн} = \beta\tau f_{12}$ метр. (1)

Эта зависимость будет справедлива, очевидно, для любого интеграла между двумя точками кривой (v,t). На основании этого, построение кривой (S,t) производится следующим образом (черт. 5).

Делим диаграмму (v,t) равноотстоящими вертикальными линиями на несколько равных частей. Пусть расстояние между ними равно „a" мм. Проводим на каждом участке ординату так, чтобы произведение этой ординаты на a давало площадь этого участка (если a мало, то очертание участка можно с достаточной степенью точности считать за трапецию и необходимая ордината будет средней линией трапеции) Откуда на основании вышесказанного, заключаем, что $y_i\,a\beta\tau$ будет перемещение за время соответствующее этому участку диаграммы. Так как произведение $a\beta\tau$ есть величина постоянная, то ее можно принять за масштаб; тогда соответствующее перемещение выразится отрезком y_i мм (y_i - выражено в мм.)

Для более точного построения кривой перемещений, необходимо



брать „а" возможно малым; тогда перемещения получаются в слишком крупном масштабе. Для уменьшения масштаба поступают следующим образом:

Сносят ординаты на вертикаль, проведенную через

Черт. 5

точку A, взятую на продолжении оси абсцисс. От точки A откладывают отрезок „K" влево, тем больший, чем в меньшем масштабе строится кривая перемещений (отрезок $AP = K$ мм). Точку P соединяют с точками 1, 2, 3 и т.д. (точки пересечения горизонталей, проведенных через концы ординат, с вертикалью, проведенной через точку A). Отрезки P-1, P_2, P_3, и т.д. и дадут направления для соответствующих участков кривой (ломанной) перемещений.

Построение последней производим следующим образом:

На продолжении оси Y берем точку O_1, через нее проводим ось

X-ов (ось времен для кривой S,t). На ординате, соответствующей начальному времени откладываем отрезок, выражающий в масштабе (величина масштаба см. ниже), заданный начальный путь. Получаем точку N_0. Через точку N_0 проводим линию $N_0 N_1 \parallel P\text{-}1$; через точку N_1 - линию $N_1 N_2 \parallel P\text{-}2$; через точку N_2 - линию $N_2 N_3 \parallel P\text{-}3$ и т.д. Таким образом и получим интегральную кривую (ломанную) $N_0 N_1 N_2 N_3$. Ординаты этой кривой будут выражать перемещения в масштабе

$$\alpha = K\beta\tau \text{ метр мм}^{-1}.$$

Действительно: из подобия $\triangle A1P \sim \triangle RN_1N_0$ имеем $\frac{N_1R}{A1} = \frac{N_0R}{RP}$ или $\frac{N_1R}{y_1} = \frac{a}{K}$ откуда $y_1 = \overline{N_1R} \cdot \frac{K}{a}$. Но $S_{12} = y_1 a\beta\tau$ (на основании уравн. 1-го)

Следовательно:

$$S_{12} = \overline{N_1R} \cdot \frac{K}{a} \cdot a\beta\tau = \overline{N_1R} \cdot K\beta\tau,$$

т.е. отрезок N_1R в масштабе $K\beta\tau$ и будет выражать перемещение, соответствующее первому участку кривой (v,t).

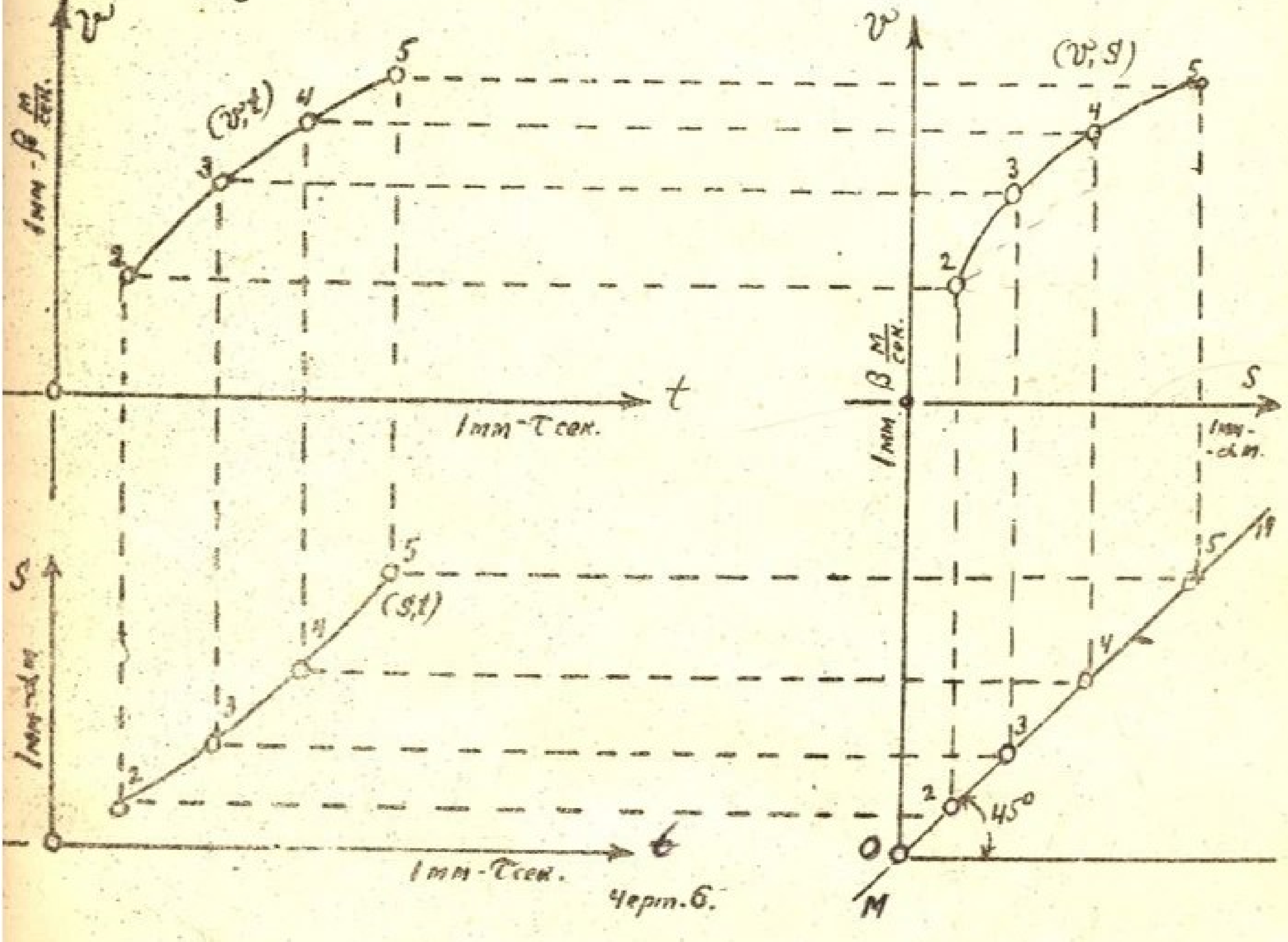
4. <u>По данным диаграммам (S,t) и (v,t) построить диаграмму (v,S). (Исключение общего переменного t).</u>-

Данные диаграммы вычерчиваются одна под другой (чер. 6) Диаграмма (v,S) располагается на продолжении оси t диаграммы (v,t), масштабы α и β остаются без изменения.

Продолжив ось v диаграммы (v,S) до пересечения с осью t диаграммы (S,t) в точке O, проводим через эту точку прямую линию MM под углом 45° к горизонтали (к оси t). Через все точки диаграммы (S,t) проводятся горизонтали и ведутся до пересечения с прямой MM; точки пересечения соответственно нумеруются.

Пересечение вертикалей, проходящих через точки прямой MM, с горизонталями, проходящими через точки диаграммы (v,t), определяет положение точек диаграммы

(v,S); полученные точки соединяются плавной кривой. Совершенно аналогично можно построить диаграммы (W,S) по (W,t) и (S,t), или (W,v) по (W,t) и (v,t). Построенные диаграммы дают возможность получить полное представление о движении системы.



Черт. 6.

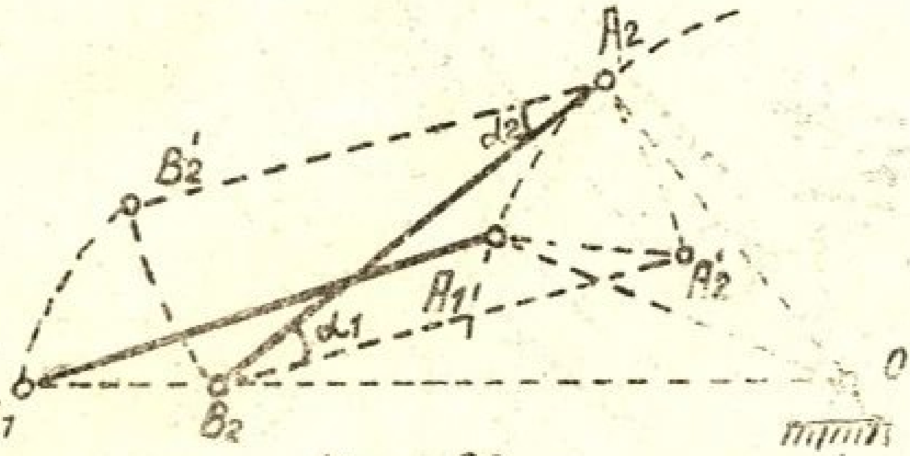
К разделу III програмы.

§24. Определение угловых скоростей звеньев механизма.

Плоское движение можно рассматривать как составное из поступательного вместе с полюсом и вращательного относительно полюса.

Характер поступательного движения зависит от выбора полюса; вращательное движение от этого выбора не зависит.

Шатун (черт. 82) из положения $A_1 B_1$ переместился в положение $A_2 B_2$. Перемещение это можно представить так:



Черт. 82

Возьмем за полюс точку B_1 и шатун из положения A_1B_1 переместим поступательным движением в положение B_2A_2', потом вращением его около точки B_2 на угол α, поставим его в положение A_2B_2. В данном случае поступательное движение было прямолинейное.

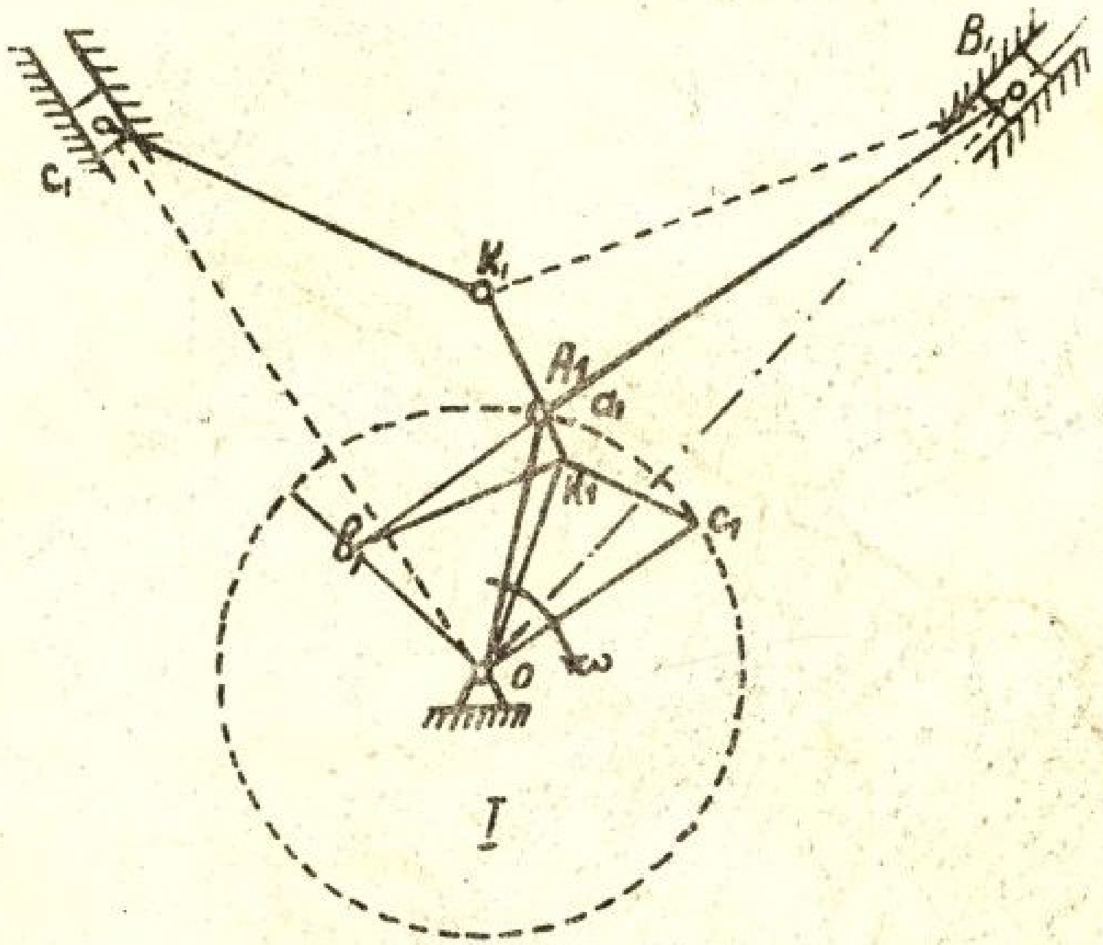
Можно .ять за полюс точку A_1 тогда поступательным движением шатун перемещается из положения A_1B_1 в положение A_2B_2', а затем вращением около A_2 на угол α_2 - в положение A_2B_2. Поступательное движение в этом случае - криволинейное.

Легко видеть из чертежа, что $\alpha_1 = \alpha_2$ и что направления вращений в обоих случаях одинаковы (против часовой стрелки).

Вывод: Для определения угловой скорости звена, совершающего плоское движение, необходимо линейную относительную скорость какой либо точки разделить на расстояние ее от полюса.

Угловая скорость главного шатуна в положении I. (Черт. 80)

$$\omega = \frac{\bar{a_1 b_1}\ \alpha}{A_1 B_1 \alpha}\ \omega = \frac{\bar{a_1 b_1}}{A_1 B_1}\ \omega \ldots \ldots (31)$$



Черт. 80

Для прицепного:

$$\omega_2 = \frac{\overline{K_1C_1}\,\alpha\cdot\omega}{K_1C_1\,\alpha} = \frac{\overline{K_1C_1}}{K_1C_1}\,\omega \quad \ldots\ldots\ (32)$$

Если построить планы скоростей для положений кривошипа через каждые 30° (лучше даже через меньшие промежутки) и для каждого положения определить угловую скорость шатуны по форм. (31), то можно затем построить диаграмму угловой скорости шатуна по времени - диаграмму (ω, t), - отложив полученные результаты на перпендикулярах к абсциссам, соответствующим времени поворота кривошипа на 30°, 60° и т.д.

Для упрощения построения диаграммы можно на указанных перпендикулярах откладывать отрезки $\overline{a_1b_1}$, $\overline{a_2b_2}$ и т.д., выражающие линейную скорость точки B относительно точки A. Совершенно очевидно, что в таком случае масштаб угловой скорости на диаграмме будет:

$1\ мм - \frac{\omega}{AB}\ \frac{Радиан}{сек.}$, где AB - в мм.

§ 26. Построение повернутых планов ускорений. Графическое определение нормального относительного ускорения.

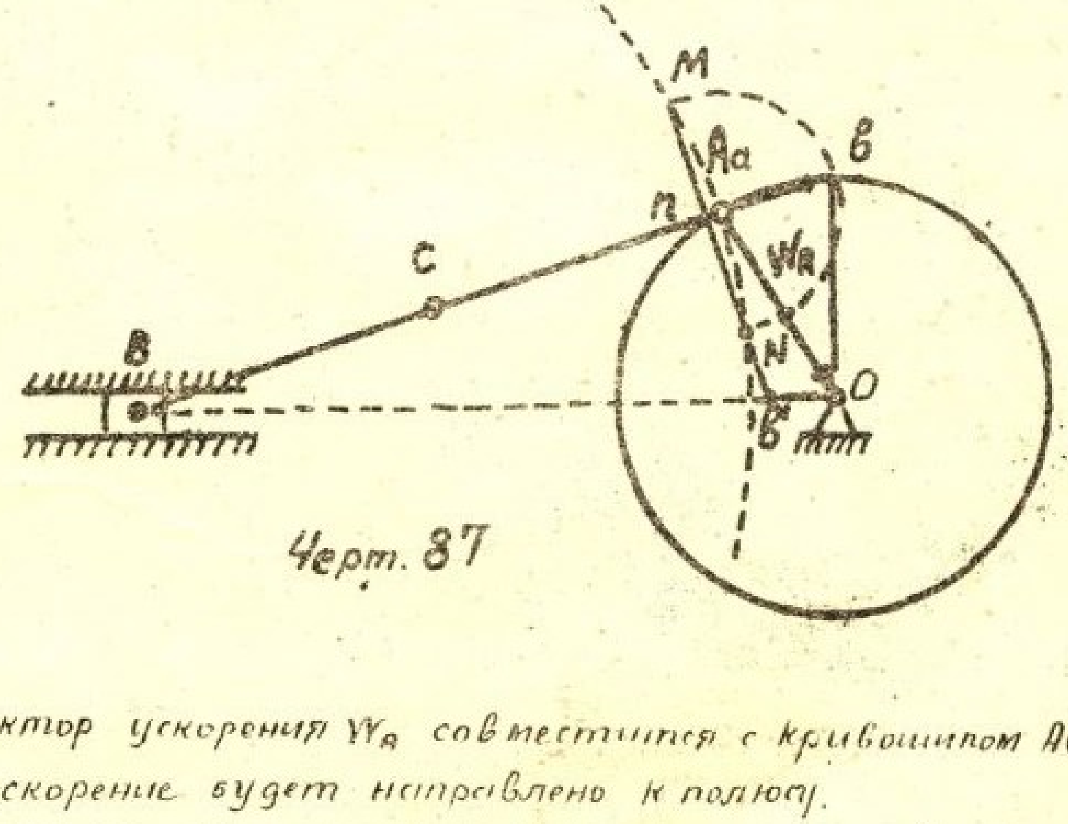
Построение планов ускорений можно значительно упростить если:

а) выбрать соответствующий масштаб ускорений - γ^2;

б) За полюс взять точку, изображающую ось вращения ведущего звена;

в) условиться, что ускорения будут направлены от изображений к полюсу.

Для построения плана ускорений нормального кривошипно-шатунного механизма (черт. 87) выберем масштаб ускорений $\gamma^2 = \alpha\omega_1^2$ тогда, на основании уравнения (36)[x], ускорение точки A будет выражаться вектором $= \bar{A0}$. Если же взять за полюс точку 0,



Черт. 87

то вектор ускорения W_A совместится с кривошипом $A0$, причем ускорение будет направлено к полюсу.

Нормальное относительное ускорение пойдет вдоль шатуна AB. Величину его определяем по формуле (38)[xx], а длина вектора

---

x) Ур-ние (36): $W \quad r\omega^2 = \bar{oA}.\alpha\omega$

xx) Ур-ние (38) . . . $W^{n}_{B(A)} = \frac{v^2_{B(A)}}{AB.\alpha} = \frac{\bar{ab}^2\alpha^2\omega^2}{AB\alpha} = \frac{\bar{ob}^2\alpha\omega^2}{AB.}$

выражающего его в принятом масштабе $\gamma = \alpha\omega^2$, будет.

$$\pi a = \frac{W^n_{B(A)}}{\gamma} = \frac{\bar{ab}^2 \alpha\omega^2}{AB\,\alpha\omega^2} = \frac{ab^2}{AB} \quad . . . (46)$$

Формула (46) показывает, что в данном случае нормальное относительное ускорение легко определить графически так:

Разделим шатун AB пополам точкой C и радиусом CA из центра C опишем дугу. Из центра A (он же „a"-изображение точки A на плане скоростей) сделаем засечки этой дуги радиусом „ab".

Хорда, соединяющая засеченные точки, пересекается с шатуном в точке π.

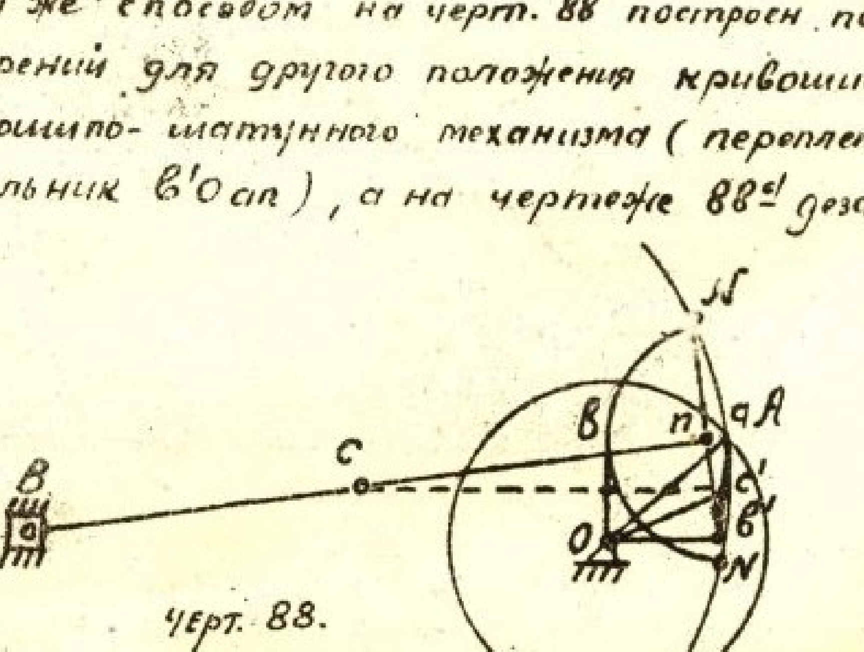
Очевидно, длина отрезка πa будет удовлетворять уравнению (46). Продлим проведенную хорду до пересечения (если она раньше не пересекла) с линией BO в точке b'.

Четырехугольник $b'Oa\pi$ и будет повернутый план ускорений. Его называют повернутым потому, что на нем вектора ускорений направлены от изображений к полюсу.

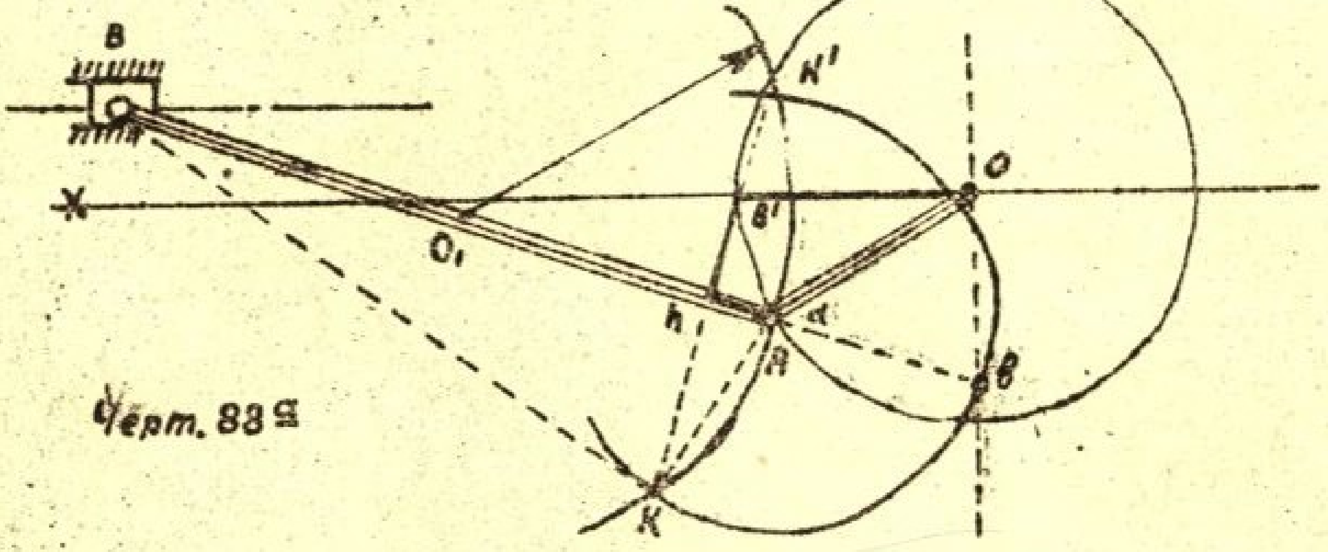
Подчеркиваем, что на повернутом плане ускорений, ускорения имеют действительные направления в то время, как на повернутом плане скоростей скорости повернуты на 90°.

На повернутом плане ускорений изображение точки A, ведущего кривошипа OA, совпадает с самой точкой.

Таким же способом на черт. 88 построен повернутый план ускорений для другого положения кривошипа нормального кривошипно-шатунного механизма (переплетенный четырехугольник $b'Oa\pi$), а на чертеже 88-а дезаксиального



Черт. 88.



Черт. 88а

Линия, соединяющая точки а и в', представляет изображение шатуна АВ на повернутом плане ускорений. (Она же выражает полное ускорение точки В относительно А в принятом масштабе).

Пользуясь повернутым планом ускорений, легко найти ускорение какой угодно точки в системе шатуна АВ. Например, для определения ускорения точки С (черт. 88) необходимо провести через точку С линию, параллельную ВО, до пересечения с ав'. Точка пересечения и будет изображением взятой точки на плане ускорений.

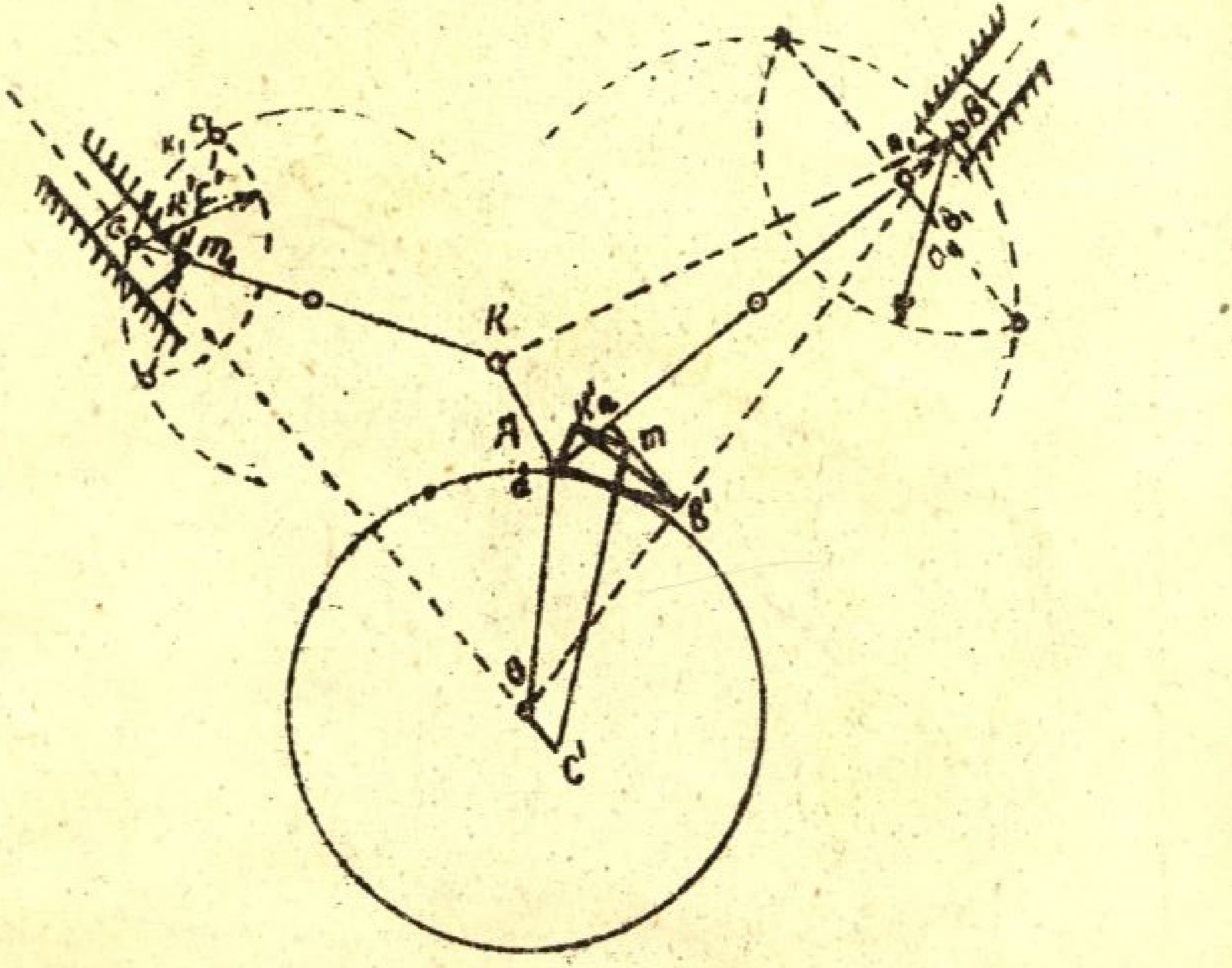
Ускорение точки С будет выражаться вектором, соединяющим изображение с полюсом О.

На черт. 88: $Cc' \parallel BO$

и $\bar{W}_c = c'O \cdot \omega^2 \; \frac{м}{сек.}$

Если точка лежит не на линии АВ, то для определения ее ускорения пользуются теоремой о подобии.

На черт. 89 таким способом построен повернутый план ускорений кривошипно-шатунного механизма



Черт. 89

С прицепным шатуном для положения, обозначенного на черт 80]
(механизм на обоих чертежах в одном масштабе)

Для ясности чертежа вектора нормальных относительных ускорений найдены построением около других концов шатунов, а потом перенесены в соответствующие места: $a'n \# bn_1$; $k'm \# Cm$,
Изображение точки K – k' найдено построением $\Delta a'b'k' \sim \Delta ABK$.

$nb' \perp a'n$; $mc' \perp k'm$ (точка m случайно попала на nb')

Относительные скорости точек B и C (векторы a_1b_1 и K_1C_1) взяты из черт. 80]

Приведенный способ графического определения относительного нормального ускорения может быть осуществлен лишь тогда, когда вектор относительной скорости меньший чем отрезок, изображающий длину соответствующего звена ($ab < AB$)

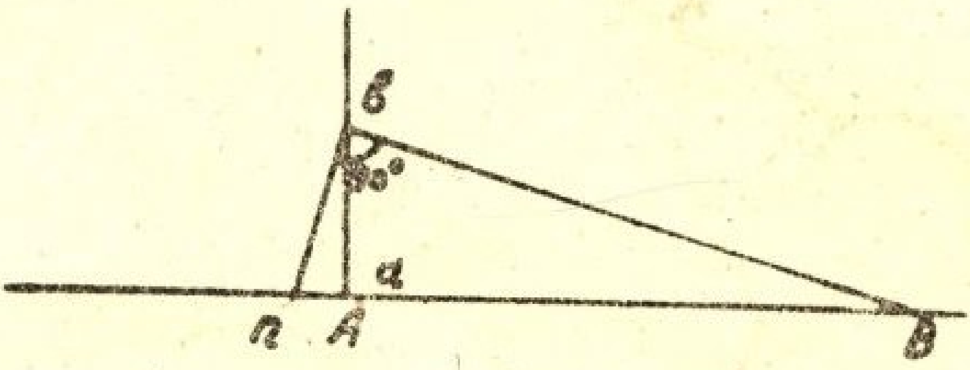
В кривошипно-шатунных механизмах это условие всегда выполняется.

Дадим общий способ определения длины вектора относительного нормального ускорения.

Допустим, что отрезок АВ совершает плоское движение и что для него построен план скоростей в масштабе:

$$1\,мм - \beta\,\frac{м}{сек.}$$

Для определения длины вектора $W^n_{B(A)}$ отложим отрезок АВ. (В случае большой длины откладываем его в масштабе: 1мм - α м.) - Черт. 90.



Черт. 90

Из какого нибудь конца его востанавливаем перпендикуляр, на котором откладываем вектор относительной скорости - $v_{B(A)}$, т.е. ав. Полученную точку „в" соединяем с другим концом отрезка (точка В) и к прямой вВ, из точки в, востанавливаем перпендикуляр до пересечения с продолжением отрезка (точка п).

Отрезок Ап и будет равен длине вектора $W^n_{B(A)}$.

Масштаб ускорения: 1мм - $\beta^2\,\frac{м}{сек}$, если отрезок АВ отложен в натуральную величину, или:

$1\,мм - \frac{\beta^2}{\alpha}\,\frac{м}{сек.^2}$, если отрезок АВ отложен в масштабе: 1мм - α м.

Действительно: $\overline{Ап} = \frac{\overline{ав}^2}{AB}$

или (если АВ отложен в натур. вел.):

$$\overline{Ап}\cdot\beta^2 = \frac{\overline{ав}^2\beta^2}{AB} = \frac{v^2_{B(A)}}{AB} = W^n_{B(A)}$$

Подчеркиваем, что приведенный способ графического определения длины вектора нормального ускорения верен лишь при определенном соотношении между масштабом длин, скоростей и ускорений, а именно;

$$\gamma = \frac{\beta^2}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (47)$$

В приведенных примерах:

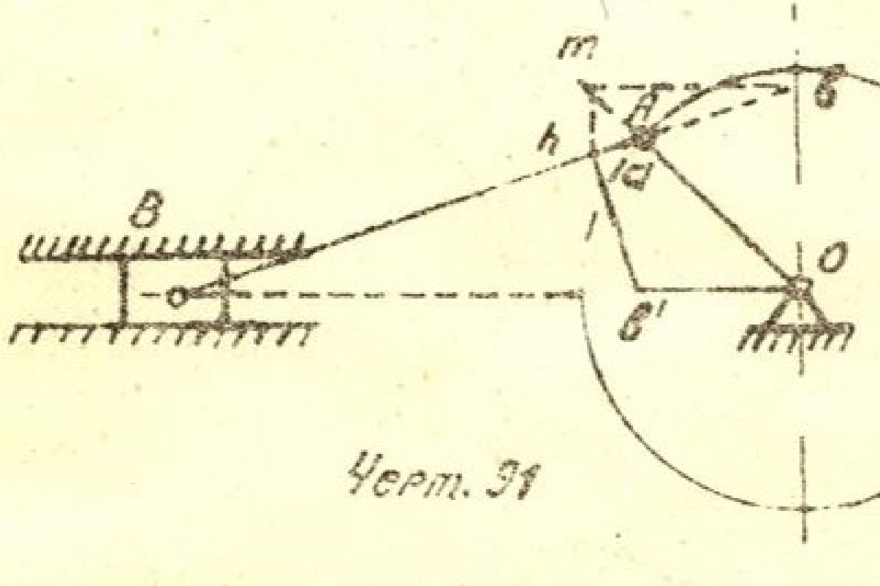
$$\beta = \alpha\omega$$
$$\gamma = \alpha\omega^2$$

поэтому формула (47) превращается в тождество:

$$\alpha\omega^2 = \frac{\alpha^2\omega^2}{\alpha} = \alpha\omega^2$$

§ 27. Способ Мора.

Построение повернутого плана ускорений кривошипно-шатунного механизма можно сделать проще, применяя способ Мора (Черт. 91.)



Черт. 91

Строим повернутый план скоростей аОв; через точку „в" проводим вm ∥ ОВ до пересечения с кривошипом, или его продолжением, в точке m; через точку m проводим mn ∥ ОВ до пересечения с АВ в точке n; из точки n восстанавливаем перпендикуляр к шатуну АВ до пересечения с ОВ в точке в'

Фигура в'Оаn и будет повернутый план ускорений, построенный в масштабе $\gamma = \alpha\omega^2$

Действительно:

$$\Delta\, mав \sim \Delta\, ВАО, \text{ откуда:}$$

$$\frac{ав}{АВ} = \frac{mа}{АО} \quad \ldots\ldots (48)$$

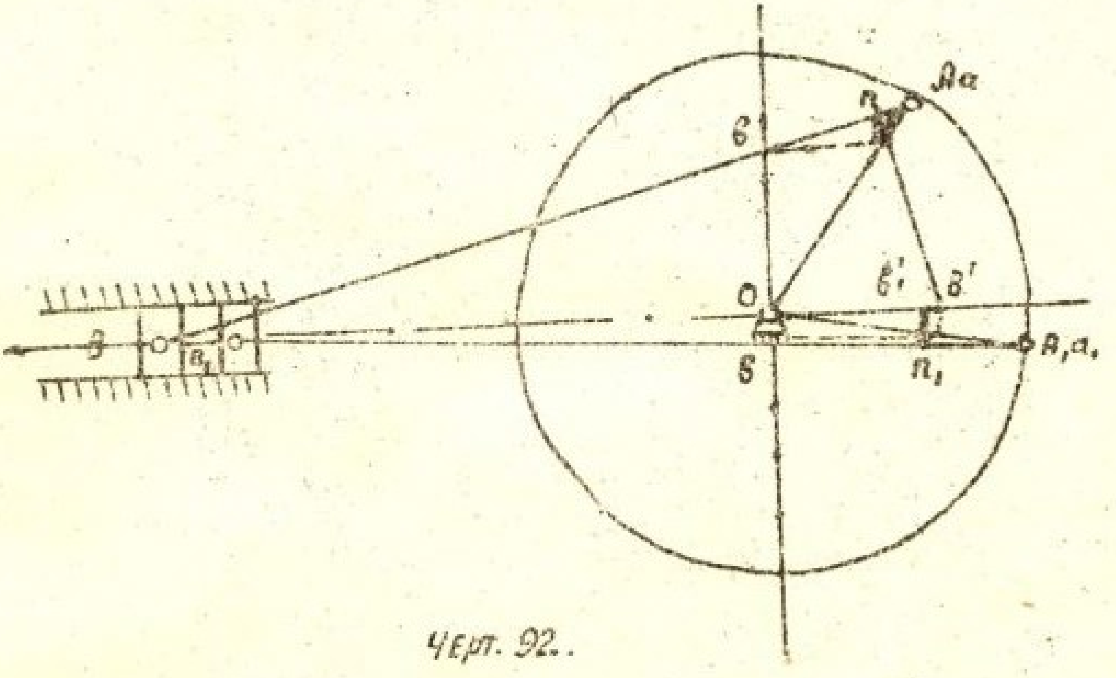
С другой стороны: $\Delta\, mna \sim \Delta\, вAO$, откуда:

$$\frac{ma}{AO} = \frac{an}{aв} \quad \ldots\ldots (49)$$

Из уравнений (48) и (49) находим:

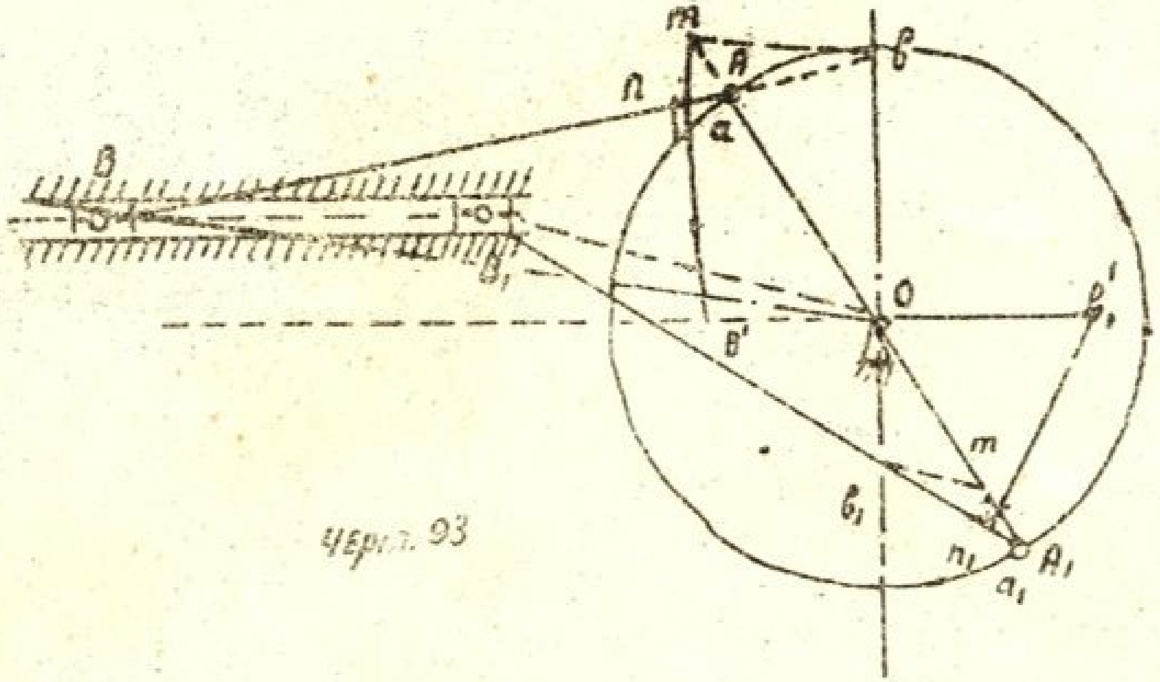
$$\frac{aв}{AB} = \frac{an}{aв}, \quad \text{или} \quad an = \frac{\bar{a}в^2}{AB}$$

Таким образом aO и na в принятом масштабе выражают, соответственно, ускорения W_A и $W^n_{B(A)}$; $в'n$ и $в'O$ направления ускорений $W^t_{B(A)}$ и W_B. Следоват., четырехсторонник $в'Oan$ и есть план ускорений. На черт. 92 построены способом Мора планы ускорений еще для двух положений нормального кривошипно-шатунного механизма (переплетенные четырехсторонними $в'Oan$ и $в'_1Oa_1n_1$



Черт. 92.

На чертеже 93 построены таким же способом планы скоростей и ускорений для двух положений дезаксиального кривошипно-шатунного механизма.



Черт. 93

Построение аналогичное, только необходимо помнить, что вm ∥ OB.

Заметим, что способ Мора не применим для мертвых положений кривошипно шатунного механизма.

§ 28. Определение угловых ускорений звеньев механизма.

На основании соображений, приведенных в § 26, угловое ускорение звена можно определить, разделив относительное тангенциальное ускорение на расстояние точки до полюса (центр относительного вращения), по формуле:

$$W_t = r\varepsilon \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (50)$$

Так, угловое ускорение главного шатуна, для положения механизма означенного на черт. 89, будет:

$$\varepsilon = \frac{W_B^t(a)}{AB\alpha} = \frac{b'\bar{n} \cdot \alpha\omega^2}{AB \cdot \alpha} = \frac{b'\bar{n}}{AB} \cdot \omega^2 \; . \; . \; . \; . \; (51)$$

Угловое ускорение прицепного шатуна для этого же положения:

$$\varepsilon_1 = \frac{W_C^t(K)}{CK \cdot \alpha} = \frac{c'\bar{m} \cdot \alpha\omega^2}{CK \cdot \alpha} = \frac{c'm}{CK} \omega^2 \; . \; . \; . \; (52)$$

Если построить планы ускорений для разных положений кривошипа через определенные промежутки и для каждого положения найти угловое ускорение шатуна по формуле (51), то мы сможем построить диаграмму угловых ускорений

$(\mathcal{E}, t)$, откладывая полученные результаты на перпендикулярах к абсциссам, соответствующим времени поворота кривошипа на данный угол.

Для упрощения построения диаграммы можно на означенных перпендикулярах откладывать отрезки $b_1' n_1$; $b_2' n_1$; $b_3' n$ и т.д., которые в соответствующих положениях выражают относительное тангенциальное ускорение.

Понятно, что в таком случае масштаб диаграммы углового ускорения будет:

$$1 мм — \frac{\omega^2}{AB} \quad \frac{1}{сек.^2} \quad (A.B. - в\ мм).$$

§ 29. Определение радиусов кривизны траекторий точек механизма.

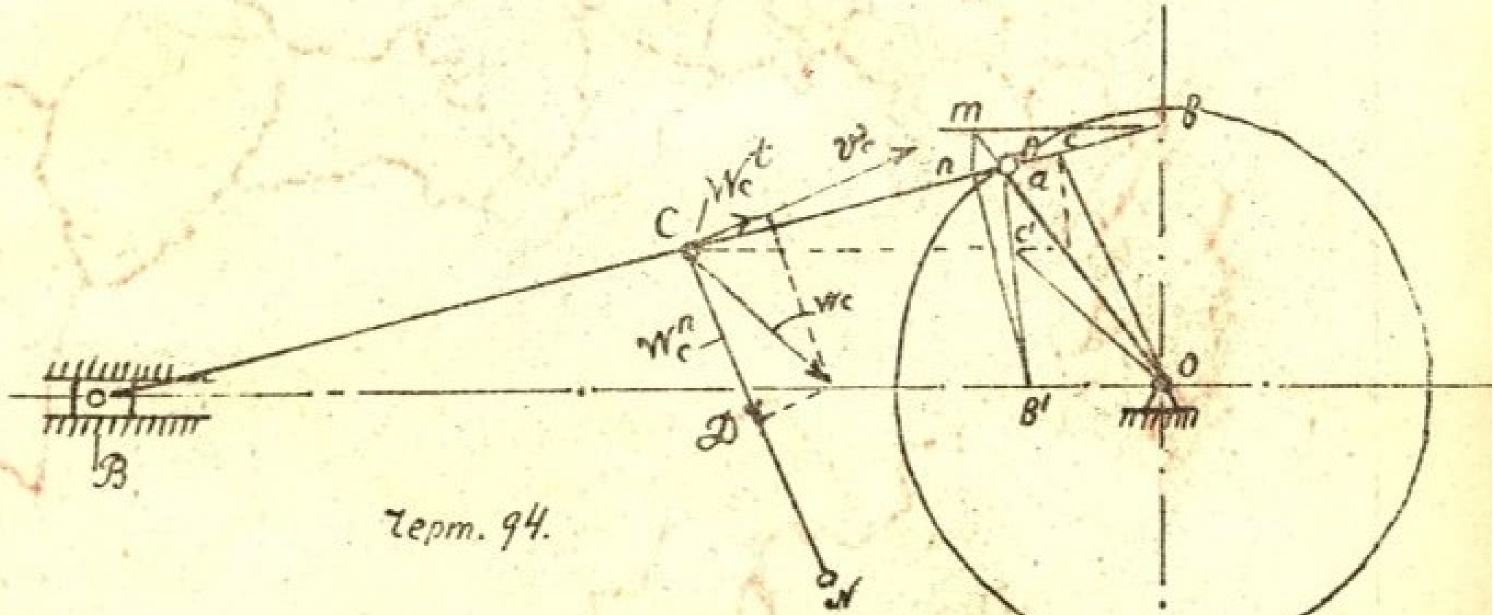
О характере траектории точки можно судить, зная радиусы кривизны ея в разных точках.

Радиус кривизны определяется по уравнению:

$$W^n = \frac{v^2}{\rho}, \quad \ldots\ldots (53)$$

где W^n - абсолютное нормальное ускорение точки.

Определение радиуса кривизны показано на черт. 94.



Черт. 94.

Помощью планов скоростей и ускорений определяется скорость и ускорение точки, траектория которой исследуется.

(на черт. точка C шатуна AB).

Скорость точки C выражается вектором V_c по величине равным Oc, но направленным перпендикулярно к Oc. Ускорение точки C выражается вектором W_c, геометрически равным $c'D$.

Известно, что скорость точки направлена по касательной к ее траектории.

Следоват. радиус кривизны направится по $CN \perp V_c$

Разложив вектор W_c по двум направлениям (направления V_c и CN), получим величину нормального ускорения, умножением отрезка CD на масштаб:

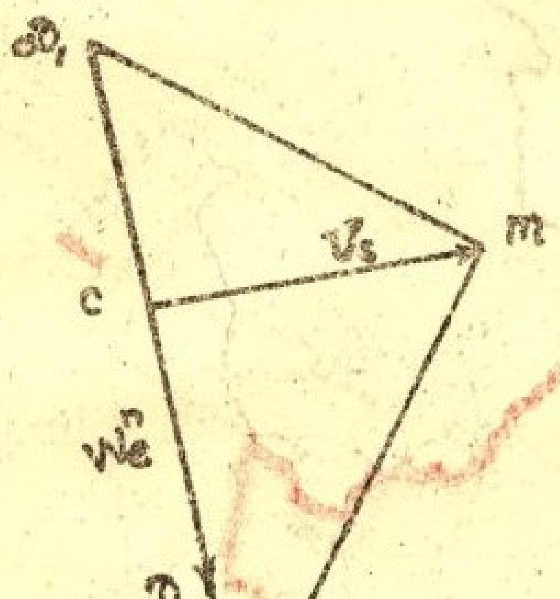
$W_c^n = CD \cdot \alpha\omega \frac{м}{сек^2}$, ($CD$ - в миллиметрах)

а радиус кривизны траектории точки C в данном месте:

$$\rho = \frac{V_c^2}{W_c^n} = \frac{Oc^2 \cdot \alpha^2 \omega^2}{CD \cdot \alpha\omega^2} = \frac{Oc^2}{CD}\alpha \quad \ldots\ldots (54).$$

На основании ур-ия (54) можно легко определить геометрическим построением центр и радиус кривизны траектории точки C для заданного положения.

Для этого необходимо (черт. 94а) на продолжении NC отложить отрезок $CD_1 = CD$, точку D_1 соединить с концом вектора V_c (точка m, причем $Cm = Oc$). Если из точки m восстановить перпендикуляр к mD_1, то он пересечет нормаль к траектории точки C - CN в точке N, которая и будет центром кривизны, а отрезок CN в масштабе длин будет выражать радиус кривизны. Построение простое и пояснений не требует.



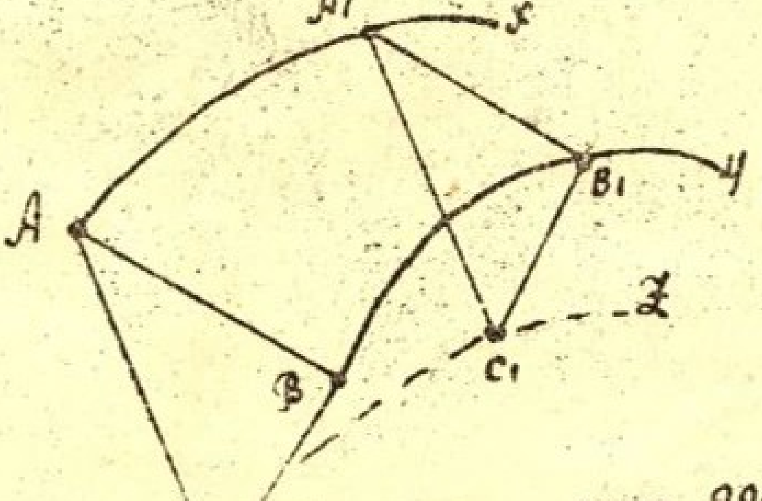
Черт. 94а

§ 30ª Построение планов скоростей и ускорений для механизмов с трехповодковыми группами [Метод ложных положений]

В § 23 было показано (черт. 81⁵) построение плана скоростей для кулиссы Стефенсона (механизм с трехповодковой группой) помощью мгновенных центров вращения. Определение М.Ц.В. требует дополнительных построений и часто сопровождается большими неудобствами (центры получаются вне пределов чертежа.) Метод ложных положений в этом случае является более удобным. Кроме этого, этим методом, сравнительно легко, строятся также планы ускорений для означенной группы механизмов.

Прежде чем приступить к изложению этого метода, остановимся на исходных положениях.

а) Допустим, что плоский n-угольник перемещается так, что его $n-1$ вершин совершают вполне определенное движение, а стороны, изменяя свою величину, остаются параллельными самим себе. Докажем, что и последняя ($n^{ая}$ вершина) будет перемещаться по определенному направлению. Пусть фигура ABC (черт. 99¹) перемещается так, что точки A и B описывают траектории Ax и By. Для каждого положения точки A на ея траектории легко найти положение точек B и C, при чем эти положения будут вполне определенные.



черт. 99²

Например, когда точка A займет положение A_1, точки B и C будут в положениях B_1 и C_1, которые найдутся проведением

$A_1B_1 \parallel BC$ и $A_1C_1 \parallel AC$ до взаимного пересечения.

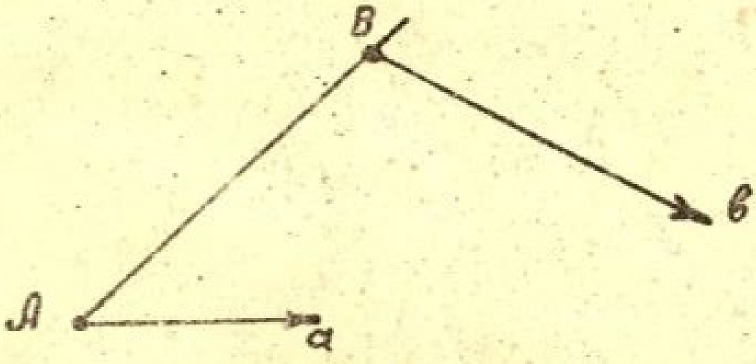
Таким образом траектория точки C будет вполне определенная кривая Cz.

В частном случае, когда Ax и By прямые, то и Cz будет прямая, что легко доказывается на основании элементарной геометрии.

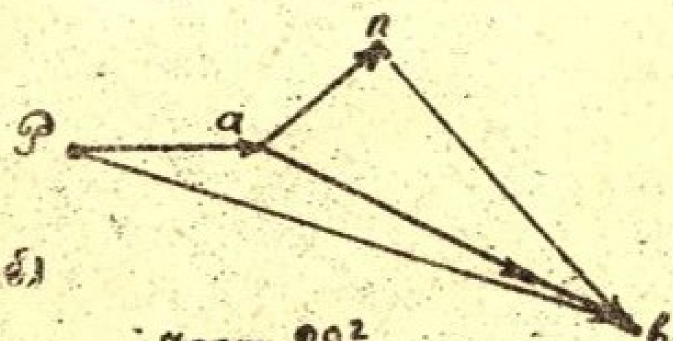
б) Скорости точек подобно изменяемой фигуры, совершающей плоское движение.

Пусть отрезок AB, совершая плоское движение, изменяется также по длине (черт. 99²)

Допустим также, что скорости конечных его точек в данный момент выражаются векторами $\bar{Aa}$ и $\bar{Bb}$



(а)



(б)

черт. 99²

Построим план скоростей у произвольно выбранного полюса P. Отрезок ab будет выражать, очевидно, скорость точки B относительно A.

Разложим вектор относительной скорости по направлению отрезка AB и по перпендикуляру к нему ($an \parallel AB$ и $nb \perp an$)

Получим вектор an, изображающий скорость изменения длины отрезка, и вектор nb, изображающий вращательную скорость точки В относительно А.

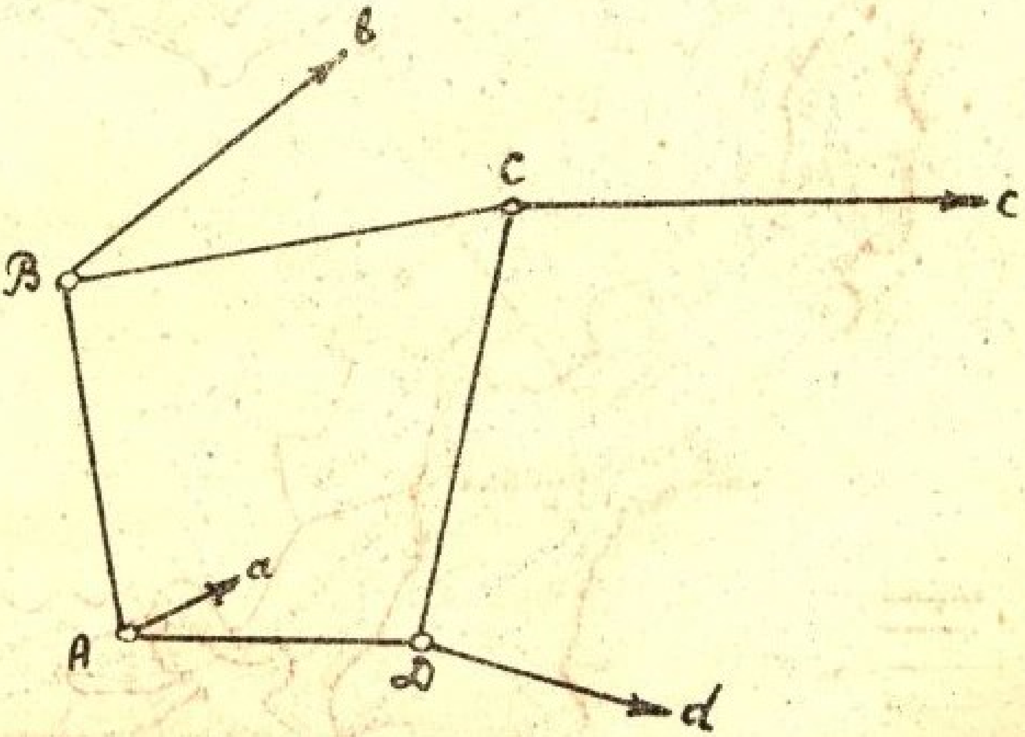
Угловая скорость точки В относительно А равняется

$$\omega_{B(A)} = \frac{\overline{nb} \cdot \rho}{AB\alpha} \quad \frac{1}{сек}.$$

Очевидно, что в случае неизменной длины отрезка, как это мы рассматривали выше, отрезок ав будет перпендикулярный АВ (изображения отрезков на планах скоростей повернуты на 90° относительно самих отрезков) и $an = 0$, а $nb \equiv ab$.

Пусть стороны фигуры ABCD (черт. 99³) совершающей плоское движение, изменяются так, что она остается себе подобной. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы удлинения сторон ея за любой промежуток времени были пропорциональны первоначальным их длины, другими словами, чтобы скорости изменения длин отрезков были пропорциональными самим длинам.

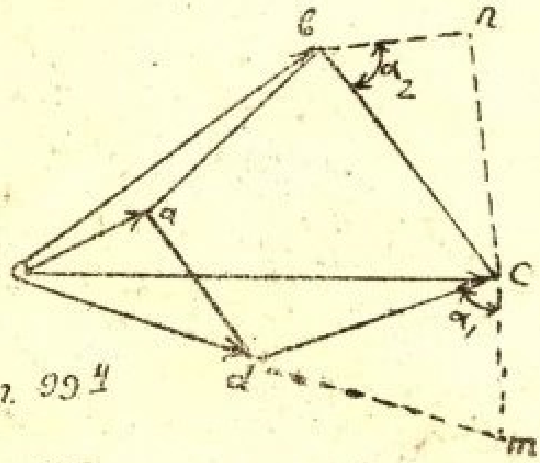
Допустим, что скорости точек А, В, С, D в некоторый момент времени выражаются соответственно векторами: $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$, $\overline{Cc}$, $\overline{Dd}$.



Черт. 99³

Возьмем точку Р за полюс и построим план скоростей (черт. 99⁴)

Отрезки $\bar{ab}$, $\bar{bc}$, $\bar{ca}$, $\bar{da}$ на плане скоростей будут выражать в принятом масштабе ($1мм - \beta \frac{м}{сек}$) относительные скорости.



черт. 99¹

Разложим вектор $\bar{bc}$ на $\bar{bn} \parallel BC$ и $nc \perp BC$, а вектор dc на $\bar{m}d \perp CD$. Вектора $\bar{bn}$ и cm будут выражать скорости изменения длин сторон BC и CD данной фигуры.

Следоват., на основании вышесказанного:

$$\frac{\bar{bn}}{BC} = \frac{cm}{CD}$$

или

$$\frac{\bar{bn}}{cm} = \frac{BC}{CD} \quad \ldots\ldots (75^1)$$

Так как в подобных фигурах углы равны, то относительные угловые скорости точки B относительно C и точки D относительно C должны быть равны, т.е.

$$\omega_{B(c)} = \omega_{D(c)} \quad \ldots\ldots (75^2)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{Но } \omega_{B(c)} &= \frac{\bar{nc}\cdot\beta}{BC} \\ \omega_{D(c)} &= \frac{md\cdot\beta}{CD} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (75^3)$$

Равенства (75^2) и (75^3) дают.

$$\frac{\bar{nc}}{BC} = \frac{\bar{m}d}{CD}, \text{ или } \quad \frac{\bar{nc}}{md} = \frac{BC}{CD} \quad \ldots\ldots (75''$$

Последнее равенство в совокупности с (75^1) даст:

$$\frac{\bar{b}\bar{n}}{cm} = \frac{nc}{ma} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (75^5)$$

Следоват., прямоугольный треугольник bnc подобен прямоугольному $\Delta\ cma$

Откуда: $\frac{\bar{bc}}{ca} = \frac{bn}{cm} = \frac{BC}{CD}$

и $\angle\alpha_1 = \angle\alpha_2$ (векторы относительны. скоростей повернуты относительно направления стержней на один и тот же угол). Аналогично можно доказать пропорциональность:

$$\frac{\bar{a}\bar{b}}{a\,d} = \frac{AB}{AD},$$

а потому $\frac{\bar{a}\bar{b}}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{cd}{CD} = \frac{da}{DA}$, что, в совокупности с равенством углов поворота векторов относительных скоростей относительно направления сторон фигуры приводит к выводу:

<u>Фигура, построенная на концах векторов абсолютных скоростей, подобна в каждый момент самой плоской фигуре и повернута относительно ее на один и тот же угол.</u>

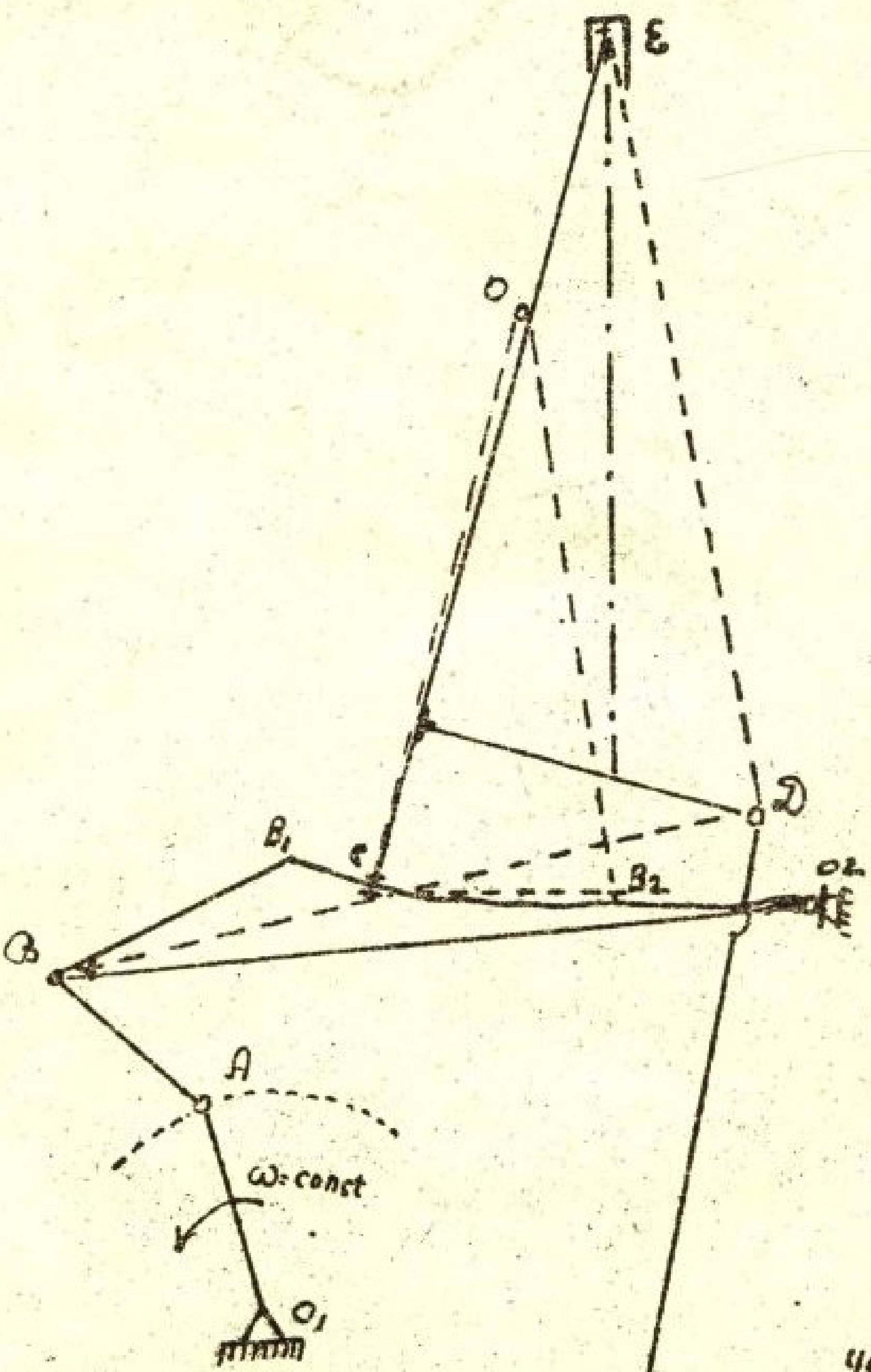
<u>Частный случай:</u>

Если две точки подобно изменяемой фигуры движутся прямолинейно и равномерно, то и все остальные точки также движутся прямолинейно и равномерно.

В самом деле, если точка A и B (черт. 99^3) движутся прямолинейно и равномерно, то вектора $\bar{A}\bar{a}$ и $\bar{B}\bar{b}$ сохраняют все время постоянную величину и направление. Следоват, и $\bar{a}\bar{b}$ (черт. 99^4) будет постоянно по величине и направлению. Поэтому положение фигуры $abcd$ будет неизменно. Откуда делаем вывод. $\bar{P}\bar{c} = const$ и $Pd = const$, что и требовалось доказать.

Основываясь на выводах п.п. а) и б), построим планы скоростей и ускорений для двух механизмов, имеющих трехповодковые группы

<u>Пример 1:</u> Построить планы скоростей и ускорений для топливного насоса авиадизеля Дорнера. Схема механизма дана на черт. 99. [При вычерчивании схемы высшие пары заменены низшими. Чертеж насоса см. В.В. Добровольский „Теория механизмов" ч. I стр. 321]



черт. 99.

Ведущее звено механизма O_1A вращается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω.

Полагаем, что механизм вычерчен на схеме в масштабе:

$$1\ mm - \alpha\ m.$$

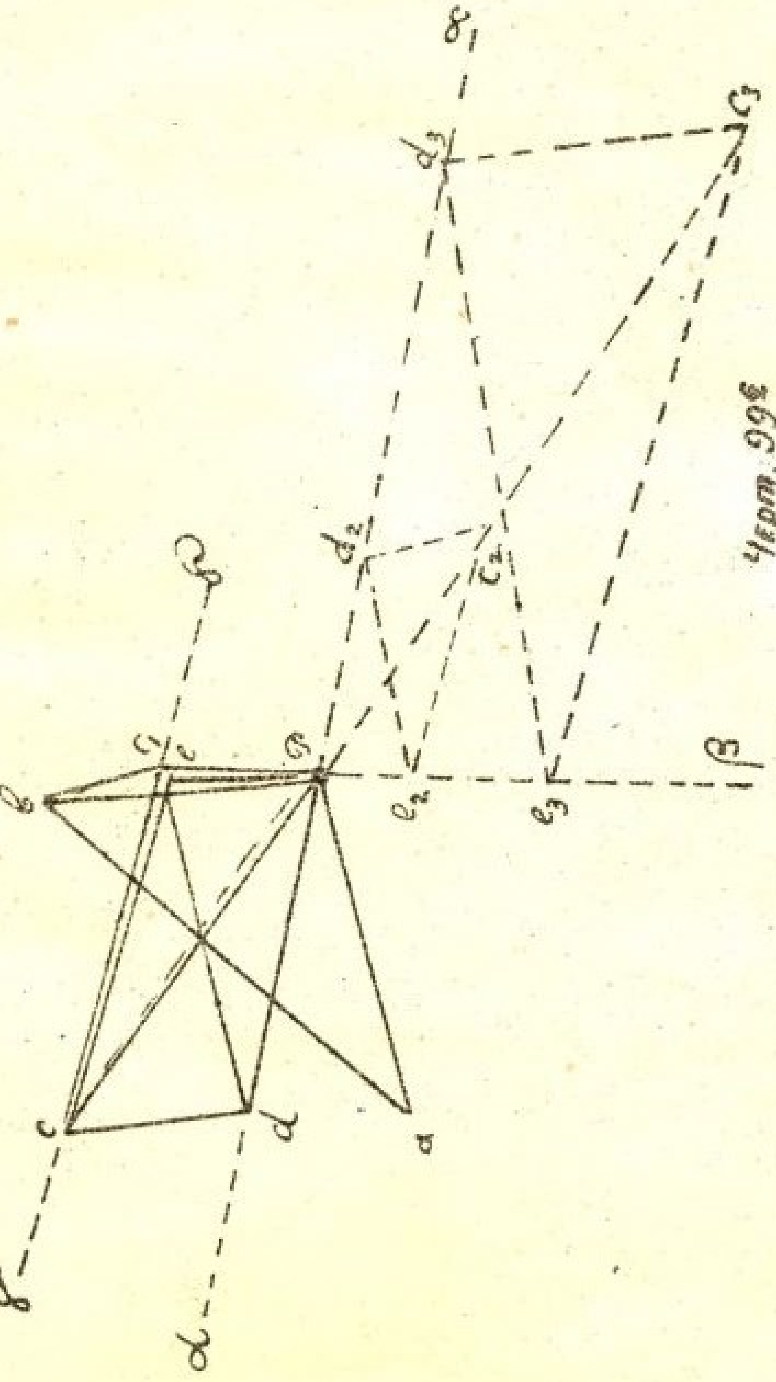
Выберем масштаб для построения плана скор. остей:

$$1\ mm - \beta\ \frac{m}{сек.}$$

Скорость точки A изобразится на плане вектором $\bar{Pa}$ перпендикулярным OA и по величине равным

$$Pa = \frac{O_1A \cdot \omega}{\beta}\ mm\ (черт.\ 99^б)$$

Изображение точки B на плане скоростей находим обычным порядком, проводя через „a" линию $ab \perp AB$, а через полюс P линию $Pb \perp O_2B$. Пересечение этих линий даст искомое изображение „b".



черт. $99^б$

Скорость точки C, принадлежащей рычагу O_2B_1 находим построением на отрезке Pb треугольника $Pbc \sim O_2BC$ (ΔPbc, повернут относительно ΔO_2BC на $90°$)

Вектор $\bar{P_{c_1}}$ изображает скорость точки C_1 если ее рассматривать в системе рычага O_2B.

Если же точку C рассматривать в системе ползунка, то найденный вектор $\bar{P_{a_1}}$ будет изображать переносную скорость [Ось ползунка перемещается по дуге $B_1 B_2$ и вместе с ней вращается вокруг точки O_2], относительная скорость будет направлена по касательной к CO, где O - центр дуги $B_1 B_2$.

Проведем через C_1 линию $\gamma\gamma \perp CO$. На этой линии должен лежать конец вектора абсолютной скорости точки C, рассматриваемой в системе ползуна.

Так как, ни величины относительной скорости, ни направления абсолютной скорости, мы не знаем, то треугольник скоростей построить обычным способом нельзя. Но мы знаем, что абсолютная скорость точки E направлена по линии движения поршня насоса, т.е. по линии $\beta\beta$, а абсолютная скорость точки D (головки коромысла $O_3 D$) направлена по $\alpha\alpha \perp O_3 D$. Следовательно, изображения точек D, E и C должны лежать, соответственно, на прямых $\alpha\alpha$, $\beta\beta$ и $\gamma\gamma$, а треугольник, образованный этими изображениями, должен быть подобен ΔDEC и повернут относительно него на 90°.

Возьмем произвольное положение изображения точки D на прямой $\alpha\alpha$ - точку d_2 и через нее проведем $d_2 e_2 \perp DE$. На отрезке $d_2 e_2$ построим $\Delta d_2 e_2 c_2 \sim \Delta DEC$. Это будет <u>первое ложное положение</u> искомого треугольника.

Аналогично строим <u>второе ложное положение - треугольник</u> $d_3 e_3 c_3$. В нем $d_3 e_3 \perp DE$; $e_3 c_3 \perp EC$; $d_3 c_3 \perp DC$.

На основании п. а) этого параграфа можно заключить, что сколько бы мы не построили таких треугольников, вершины их c_2, c_3 ...... будут лежать на одной прямой. Следовательно, искомое изображение точки C должно лежать также на этой прямой.

Соединив c_2 с c_3 и продолжив эту линию до пересечения с $\gamma\gamma$, получим действительное (уже не ложное) изображение точки C на плане скоростей - точку „c", а $\bar{P_c}$ будет вектор абсолютной скорости точки C в системе ползунка. Она же будет скоростью точки C в системе шатуна CDE.

Скорости точек D и E находятся обычным построением треугольников скоростей Pcd и Pce:

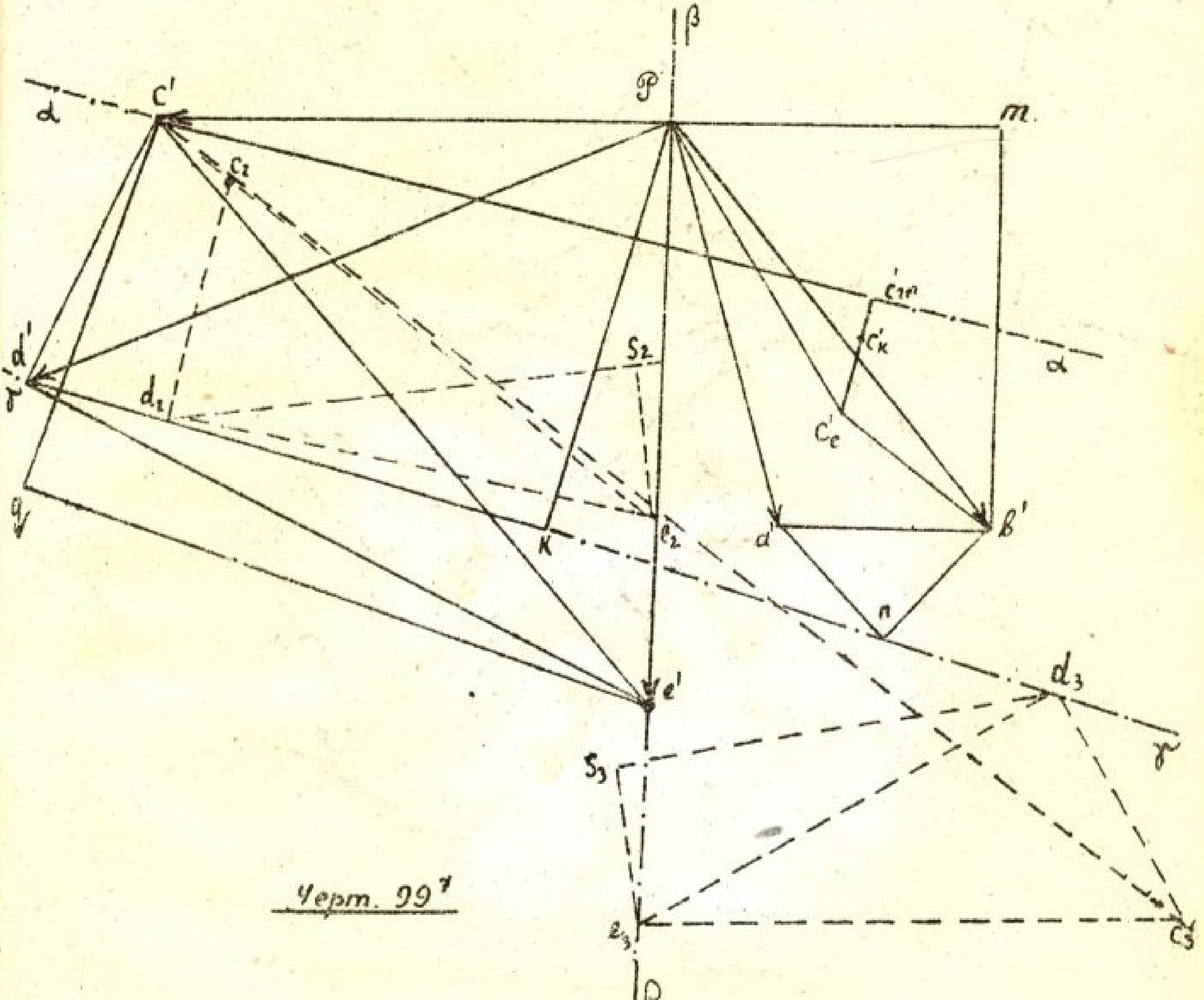
$$cd \perp CD \; ; \; ce \perp CE$$

Для построения плана ускорений выберем полюс P' (черт. 99^7) и проведем отрезок $P'a' \parallel AO_1$

Длина отрезка $P'a'$ определяется из равенства:

$$P'a' = \frac{O_1A \cdot \alpha \cdot \omega^2}{\gamma} \text{ мм.},$$

где γ - масштаб плана ускорений $\left[1 \text{ мм} - \gamma \frac{м}{сек^2}\right]$



Черт. 99^7

Через точку a' проведем линию параллельную AB и отложим на ней отрезок $a'n$, выражающий в принятом масштабе $W^n_{B(A)}$:

$$a'n = \frac{W^n_{B(A)}}{\gamma} = \frac{V^2_{B(A)}}{AB \cdot \alpha \cdot \gamma} = \frac{\overline{ab}^2 \beta^2}{AB \cdot \alpha \cdot \gamma} \text{ мм.}$$

Через точку P' проведем линию параллельную BO_2 и отложим на ней отрезок $P'm$, выражающий в принятом масштабе $W^n_{B(O_2)}$:

$$\mathcal{P}'m = \frac{W^n_{B(O_2)}}{BO_2 \cdot \alpha \gamma} = \frac{\mathcal{P}_B^2 \beta^2}{BO_2 \cdot \alpha \cdot \gamma^2} \text{ мм.}$$

Перпендикуляры, востовленные из концов отрезков $a'n$ и $\mathcal{P}'m$, пересекутся в точке „b'", которая и будет изображением точки B на плане ускорений, при чем:

$$W_B = \mathcal{P}'b' \cdot \gamma \quad \frac{м}{сек^2}$$

$$W^t_B = \bar{m}b' \cdot \gamma \quad -\text{„}-$$

$$W^t_{B(A)} = \bar{n}b' \cdot \gamma \quad -\text{„}-$$

Ускорение точки C, рассматривая ее в системе рычага O_2B, найдем построением $\Delta\, \mathcal{P}'b'C'_e$ подобного $\Delta\, O_2BC$.

Вектор $\mathcal{P}'C'_e$ и будет выражать в принятом масштабе ускорение точки C в системе рычага O_2B, он же будет выражать переносное ускорение точки, если ее рассматривать в системе ползунка. В последнем случае ускорение точки C определяется геометрическим равенством:

$$\bar{W}_e = \bar{W}^n_c + \bar{W}^o_c + \bar{W}^k_c,$$

где W_e – абсолютное ускорение точки C,

W^n_e – переносное —„— —„—

W^o_c – относительное —„— —„—

W^k_c – Кориолисово —„— —„—

Для построения четырехугольника ускорений через конец вектора $\mathcal{P}'C'_e$ изображающего W^n_c, проводим линию параллельную CO (радиус дуги B_1B_2) и на ней откладываем отрезок $C'_eC'_k$, выражающий W^k_c (Кориолисово ускорение будет направлено от C к O, что легко устанавливается на основании известных правил).

Длина отрезка $C'_eC'_k$ определяется из уравнения:

$$C'_eC'_k = \frac{W^k_e}{\gamma} = \frac{2 \cdot V^o_c\, \omega_{BO_2}}{\gamma} = \frac{2 \cdot \bar{c}\bar{c} \cdot \beta \cdot \mathcal{P}_B \cdot \beta}{\gamma \cdot BO_2 \cdot \alpha} = \frac{2\bar{c}\bar{c}\, \mathcal{P}_B \cdot \beta^2}{BO_2 \cdot \alpha \cdot \gamma} \text{ мм}$$

На продолжении отрезка $C'_eC'_k$ откладываем отрезок