

1952 г.

Принято  
1958 г.

629.73  
B-49

# От автора

Данная работа выполнена как социалистическое обязательство, включающее автора в общесоюзное соревнование молодых научных работников, имеющее целью ознаменовать XX годовщину Великой Октябрьской Революции и премирована Украинским Комитетом по Соревнованию.

В работе автор стремится осветить в первую очередь те вопросы, ответы на которые жадно ищет студент в авиационном втузе и расчетчик в конструкторском бюро авиационного завода.

Автор считает своим долгом выразить благодарность за оказанную помощь в большой и трудной его работе: проф. Давыдовичу Б.П. - заместителю директора Харьковского Авиационного Института им Особиахима по учебной и научной работе, инж.-орденоносцу ~~Номану~~ <sup>Номану</sup> И.Г. - руководителю кафедры самолетостроения и его заместителю инж. Кроль, а также преподавателям инж. Клячкину и инж. Шутько.

Своим долгом считаю отметить поддержку и искреннее сочувствие к моей работе со стороны Комитета Комсомола ХАИ и всей аудитории студентов, которым мною читался курс "Расчет на прочность самолетов" в 1936-37 уч. году. Внимание студентов к читаемому мною курсу и их желание видеть работу опубликованной вселяло энтузиазм к работе, усиливало веру в ее практическую целесообразность.

Благодарю за активную помощь студентов Азроновича М.В., Колпа Е.Л., Люльки С.Е., Стрелкова Е.К., Старосельского Н.Б., Грищенко А.А., Водопьянова М.Э., Клеймана И.А., Алексева В.П., Бобко И.Г., Шинкарь Л.

Л.Я. Винокуров.  
735126

Научно-техническая библиотека "ХАИ"



kn0735126

НАУКОВО-ТЕХНІЧНА БІБЛІОТЕКА  
 Національного аерокосмічного університету ім. М.С.Жуковського  
 «Харківський авіаційний інститут»

ХАРКІВСЬКИЙ АЕРОКОСМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
 ІМ. М. С. ЖУКОВСЬКОГО



## ВСТУПЛЕНИЕ

Задача, которая ставится перед курсом расчета самолетов на прочность, должна быть понимаема несколько шире, чем только овладение обучающимся определением усилий и подбором прочных размеров элементов конструкций самолета, т.к. помимо указанного необходимо, чтобы обучающийся овладел методами анализа распределения сил в конструкции, что поможет ему овладеть методами назначения схемы конструкции рациональной и экономной; методами установления расчетной схемы.

Полное решение вопроса о проектировании конструкции применительно как к самолету, так и другим инженерным сооружениям, является в своих исходных положениях решением комплексной задачи; иначе говоря, успех в решении такой задачи тесно связан с тем, насколько широко и правильно инженер, проектирующий сооружение, охватит все детали и удовлетворит всем целям и требованиям, предъявляемым к сооружению в целом.

Так, если речь идет о здании, то очевидно конструкция его будет увязана с архитектурным решением; конструкция будет различной для промышленного и жилого здания. Если речь идет о машине, то конструкция ее будет тесно увязана с назначением машины.

Необходимость тесной связи между проектированием конструкции и ее назначением особо существенна в самолетостроении. Это объясняется тем, что конструкции самолета, помимо общих требований, должны еще удовлетворять условию минимума сопротивления воздушному потоку.



Можно было бы спроектировать много конструкций удобных для перевозки пассажиров и груза по воздушной трассе, прочных, экономных, легких по своему собственному весу и в то же время совершенно негодных как конструкций самолета, если эти конструкции имеют необтекаемую форму и требуют в связи с этим значительной мощности и веса мотора для своей перевозки в воздухе. Очевидно успех в разрешении задачи удачного выбора конструкции самолета зависит от разумного совместного сотрудничества трех отделов науки о самолетостроении:

1. Аэродинамика самолета.
2. Эксплуатация и производство самолета.
3. Прочность конструкций самолета.

Об этом важно напомнить лишний раз в связи с тем, что во ВТУЗ'е эти науки проходятся отдельно и у обучающегося может сложиться ложное впечатление. В инженерной же практике вышеуказанные науки переплетаются.

Поэтому, инженеру, решающему вопросы прочности конструкции самолета, нельзя упускать и остальных характеристик самолета. В противном случае будут получаться однобокие, неудачные, неприемлемые решения.

Таким образом, курс расчета самолета на прочность должен быть построен в тесной увязке с остальными соприкасающимися дисциплинами. Помимо указанного, необходимо учесть быстрое развитие самолетостроения. Это обстоятельство требует сообщить будущему инженеру такую подготовку, которая позволяла бы ему не только не отставать от нововведений, но и самому обогащать технику самолетостроения. Эта цель может быть достигнута, если курс не только будет насыщен расчетами конкретных конструкций, но если он обеспечит достаточное удельное место общим теоретическим и экспериментальным основам расчета.

При таком построении курса одновременно достигается экономия времени, т.к. одни и те же понятия не дробятся, и их изложение не повторяется, скажем, в расчете крыла фюзеляжа, хвостового оперения и т.д.

Вышеизложенная точка зрения легла в основу построения предлагаемого курса, в разработке которого мы придерживались по возможности максимальной систематичности и последовательности, что является элементарным требованием, предъявляемым к учебному курсу.



## Глава I. Принципы расчета.

### § 1. Коэффициент безопасности и два принципа расчета конструкции.

Вопросы, которые мы освещаем в данном параграфе, и родственные им вопросы, освещаемые нами в ближайших последующих параграфах, не имеют еще в технической литературе окончательно установившегося решения. Они находятся в стадии исследовательских изысканий и дискуссии. Тем не менее мы сочли необходимым эти вопросы подвергнуть рассмотрению с тем, чтобы создать подготовку к критическому восприятию и пониманию принципа расчета, принятого в самолетостроении.

К требованиям, которые предъявляются к правильно спроектированному инженерному сооружению, следует отнести

- а) Экономичность сооружения (в широком понимании)
- б) Удобство и пригодность его для эксплуатационных целей
- в) Прочность сооружения на определенный период его службы.

Последнее требование предопределяется коэффициентом запаса конструкции. Этот коэффициент необходимо отличать от коэффициента запаса сечения.

Установим основную характеристику указанных двух коэффициентов, оставив место для последующей критики.

Коэффициент запаса сечения. Этот коэффициент определяется по формуле  $n_1 = \frac{b_{\text{в}}}{b_{\text{доп}}}$  ..... (1) или  $n_2 = \frac{b_{\text{р}}}{b_{\text{доп}}}$  ..... (2), где  $b_{\text{в}}$  — временное сопротивление и  $b_{\text{р}}$  — предел текучести, определяемые в лаборатории при испытании



бруска на растяжение. В формуле 1 (и аналогично в формуле 2) известной является лишь величина  $\sigma_f$ .

Величина  $\sigma_{доп}$  определяется из формулы 1, когда задан коэффициент безопасности  $\underline{K}_1$ . При назначении этого коэффициента исходят из следующих соображений:

1. Опыт и теория показывают, что наши расчетные напряжения обнимают не все напряжения.

Полная сумма напряжений  $\underline{R}$  может быть представлена в виде:  $\underline{R} = R_0 + R_d + R_m + R_n \dots (3)$ , где

$R_0$  — основные напряжения

$R_d$  — дополнительные напряжения

$R_m$  — местные напряжения

$R_n$  — начальные напряжения.

Расчетом охватываются только напряжения  $R_0$  и коэффициентом запаса необходимо перекрыть остальные неучитываемые напряжения.

Отсюда еще и до сих пор существует мнение, и оно отображено в некоторых нормах, что если в расчете учитываются напряжения кроме основных, то коэффициент запаса может быть уменьшен (см. проф. Стрелецкий, Проект и Стандарт N 193). Такое мнение, разумеется, неверно с точки зрения запаса конструкции в целом.

2. Для того, чтобы предотвратить разрушение всей конструкции, необходимо предотвратить от разрушения опасное сечение.

Если коэффициент запаса будет назначен так, что максимальные напряжения в опасном сечении будут иметь известный запас по отношению к пределу текучести, то этим самым обеспечена работа всей



конструкции в пределах упругости.

Требование же работы конструкции в пределах упругости является чрезвычайно важным, так как появление остаточных деформаций может повести к расстройству сооружения, особенно в машиностроении.

В самолетостроении большая деформируемость конструкции видоизменяет кроме того воздействие воздушной нагрузки на части самолета.

Коэффициент запаса конструкции. Этот коэффициент определяется по формуле  $n = \frac{P_{кр}}{P_{дон}}$  ..... (4), где:

$P_{кр}$  - нагрузка, вызывающая критическое состояние конструкции, т.е. такое состояние, которое характеризует потерю работоспособности конструкции,

$P_{дон}$  - допускаемая или действующая нагрузка на конструкцию.

С определением коэффициента запаса по формуле 4 мы встречаемся в частности в расчете стоек на продольный изгиб. В этом случае коэффициент  $n$  носит название коэффициента запаса устойчивости. Критической силой для сжимаемой стойки является та, которая непосредственно граничит с силой, вызывающей неустойчивое равновесие стойки.

Если исключить вопросы устойчивости и иметь в виду лишь вопросы прочности, то необходимо условиться, что понимать под критическим состоянием конструкции и соответствующей ему критической нагрузкой.

Под предельной нагрузкой можно понимать такую нагрузку, при которой конструкция приобретает некоторую предельную величину остаточного прогиба,



т.е. теряет свою эксплуатационную пригодность (проф. Горбунов). Такой критерий предельной нагрузки (деформативный), очевидно, приведет к усложнению расчета.

Значительных упрощений в расчете можно достигнуть, если под предельным состоянием конструкции понимать такое состояние, когда конструкция становится геометрически изменяемой и, стало быть, выходит из строя. Схему конструкции, которая непосредственно предшествует геометрически изменяемой, будем называть основной схемой. Эту схему необходимо отличать от той основной схемы, которая имеет место в расчете статически-неопределимых систем, так как первая схема является единственной, а для второй можно наметить несколько вариантов.

Максимальная нагрузка, которая выдерживается конструкцией, вычисляется применительно к основной схеме. Применительно к последней определяется и коэффициент запаса. Этот коэффициент берется больше единицы с тем, чтобы застраховать себя от возможных аварий, которые могут быть следствием плохого знания нагрузки, действующей на конструкцию, недостаточно правильного выявления основной системы и не точного расчета ее. Кроме того необходимо обеспечить работу конструкции без остаточных деформаций и вообще без больших деформаций, а также обеспечить безаварийную работу конструкции на определенный срок.

Из двух понятий о коэффициентах безопасности правильным следует признать понятие об этом коэффициенте, как о коэффициенте запаса конструкции, так как



последнее исходит из действительной работы конструкции в целом, а не из отождествления этой работы с работой бруска в лабораторных условиях, которое имеет место в понятии о коэффициенте безопасности как о коэффициенте запаса сечения. Только в статически определенной системе (например, в балке на двух опорах), если одно сечение выходит из строя, то и вся конструкция выходит из строя. Для статически же неопределимых систем это неверно.

Стало бытть, только для статически определенных систем коэффициент запаса сечения совпадает с коэффициентом запаса конструкции, для статически же неопределимых систем это совершенно разные величины.

Нельзя кроме того согласиться с назначением величины коэффициента запаса, исходя из необходимости перекрыть напряжения, не учитываемые расчетом. Так как, например, то обстоятельство, что в некоторых местах местные напряжения превзойдут пределы текучести, не является опасным для работы конструкции в целом.

Для самолетостроения более приемлимым является понятие о коэффициенте безопасности как о коэффициенте запаса конструкции, так как оно может привести к уменьшению веса конструкции.

В тесной связи с двумя понятиями о коэффициенте безопасности стоят и два принципа расчета конструкций.

### Принцип 1<sup>ый</sup> Расчет конструкции по допускаемым напряжениям.

Этот принцип отображает понятие о коэффициенте безопасности, (как о коэффициенте запаса сечения) и характеризуется следующим:



а) расчет ведется по допускаемым напряжениям в упругом состоянии конструкции и на нагрузку, которая задана на конструкцию; и

б) допускаемое напряжение определяют по формуле 1 или 2. При этом исходят из индикаторной диаграммы, рисующей связь между напряжениями и деформациями и определяемой из лабораторных испытаний бруска на растяжение.

Такая диаграмма для мягкой стали представлена на рис 1. На этой диаграмме отмечены такие характерные точки:

- $\sigma_e$  - предел упругости,
- $\sigma_p$  - — " — пропорциональности,
- $\sigma_{\text{нп}}$  - нижний предел текучести,
- $\sigma_{\text{вп}}$  - верхний — " — — " —,
- $\sigma_{\text{в}}$  - временное сопротивление.

в) Размеры поперечных сечений элементов конструкции назначаются так, чтобы не превышать допускаемых напряжений в опасном сечении, т.е. о запасе прочности конструкции судят по напряженному состоянию опасного сечения.

Недостатки рассматриваемого принципа расчета вытекают из того, что запас прочности конструкции в целом остается неизвестным, так как в расчете исходят из действительно напряженного состояния, а не из стадии разрушения. Это обстоятельство влечет за собой такое распределение и использование материала, которое не соответствует необходимым запасам прочности, вследствие чего возможен неправдываемый



перерасход материала.

Принцип 2<sup>ой</sup> Расчет по критическому состоянию конструкции (по разрушающим нагрузкам)

Этот расчет связан с понятием о коэффициенте безопасности, как о коэффициенте запаса конструкции и характеризуется следующим:

а) В расчете исходят из состояния конструкции, которое непосредственно предшествует разрушению.

Что понимать под расчетным критическим состоянием конструкции является предметом специального условия. Так, например, в расчете по пластическим деформациям за критическое состояние принимают состояние, непосредственно предшествующее геометрически изменяемому состоянию, в которое конструкция входит в результате образования так называемых пластических шарниров.

б) В расчете исходят из некоторой условной диаграммы, рисующей связь между напряжениями и деформациями. Так, например, в расчете по пластическим деформациям исходят из диаграммы 2, т.е. материал принимается идеально-пластичным в области растяжения и сжатия (допущение Rankine's).

Диаграмму 2 следует читать так: материал может быть либо в упругом, либо в пластическом состоянии, третьего состояния он не испытывает. Конечно, это является лишь допущением, упрощающим расчет, так как нам известно, что в действительности с переходом площадки текучести сталь, например, приобретает упрочнение.



## §2. Расчет на изгиб стальных балок по пластическим деформациям.

Не задаваясь целью полностью охватить вопрос о расчете по пластическим деформациям (см. Жудин, „Пластичні деформації в сталевих конструкціях“, изд. Укр. Академіи Наук), мы здесь рассмотрим лишь изгиб простейших балок в таком объеме, в каком это необходимо, чтобы ознакомиться с основами метода и использовать это знакомство для оценки принципа расчета, принятого в самолетостроении.

В расчете по пластическим деформациям принимается гипотеза плоских сечений, как в упругой, так и в пластической зонах. Эта гипотеза влечет за собой возможность применения элементарных методов сопротивления материалов.

Раньше, чем перейти в полное пластическое состояние сечение при изгибе переживает последовательно три стадии „а“, „в“ и „с“ показанные на рис. 3.

Состояние а — предельное упругое состояние.

Состояние с — полностью пластическое состояние, которое принимается за расчетное критическое состояние. Когда сечение входит в это состояние, то говорят, что в нем образовался пластический шарнир, так как оно теоретически не сопротивляется вращению.

Состояние в — промежуточное состояние.

Составим расчетную формулу подбора сечения прямоугольного профиля.

Из рис. 3 следует: равнодействующая сжимающих напряжений и равная ей по величине, но обратная по



направлению равнодействующая растягивающих напряжений

$$N_T = \sigma_f \frac{bh}{2} \dots \dots (5) \text{ где } b \text{ размер сечения,}$$

перпендикулярный размеру  $h$  и плоскости действия изгибающего момента. Момент, создаваемый внутренней парой сил.  $N_T$  - так называемый пластический момент.

$$M_T = N_T \frac{h}{2} = \sigma_f \frac{bh^2}{4} \dots \dots (6)$$

Вводим обозначение  $\frac{bh^2}{4} = W_T$  — пластический момент сопротивления; тогда формула  $b$  представляется в таком виде, в каком представляется формула внутреннего момента в упругом состоянии

$$M_T = \sigma_f W_T \dots \dots (7)$$

Из условия равновесия вытекает, что момент внешних сил равен моменту внутренних сил  $M_{вн} = M_T$

Момент внешних сил в расчете по разрушающим нагрузкам определяется от заданной нагрузки, предварительно умноженной на коэффициент безопасности, в условном состоянии разрушения **КОНСТРУКЦИИ**.

Проверка напряжений производится по формуле:

$$\sigma_f = \frac{M_{вн}}{W_T} \dots \dots (8)$$

Размер сечения определяется из формулы:

$$W_T = \frac{M_{вн}}{\sigma_f} \dots \dots (9)$$

Пример 1.

Свободно уложенная металлическая балка постоянного прямоугольного сечения (рис. 4) нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$ . Установить, какую интенсивность  $q$  можно допустить, приняв коэффициент безопасности равным  $n$ .



Решение выполняем по следующему плану:

1. Определение максимального момента от разрушающей нагрузки.

Этот момент для статически определимой балки определяется также как и в расчете в упругом состоянии, т.е. для середины балки  $M_{вп} = \frac{nq \ell^2}{8}$

Стало быть, пластический шарнир образуется прежде всего посредине балки, после чего она станет геометрически изменяемой и по существу перестанет быть несущей конструкцией.

2. Определение допустимой интенсивности  $q$

Так как  $M_{вп} = M_T$ , то из формулы 7 вытекает

$$\frac{nq \ell^2}{8} = \tilde{\sigma}_f \cdot W_T$$

откуда  $q = \frac{8 \tilde{\sigma}_f W_T}{n \ell^2}$ ; так как для прямоугольного сечения

$$W_T = \frac{bh^2}{4}, \text{ то } q = 2 \frac{\tilde{\sigma}_f}{n} \left(\frac{h}{\ell}\right)^2 b$$

положив  $\frac{\tilde{\sigma}_f}{n} = \tilde{\sigma}_{доп}$ , находим  $q = 2 \tilde{\sigma}_{доп} \left(\frac{h}{\ell}\right)^2 b$

Полезно сравнить полученный результат с тем, который вытекает из расчета по допускаемым напряжениям.

В этом случае:

$$W = \frac{bh^2}{6}; \quad \frac{q \ell^2}{8} = \tilde{\sigma}_{доп} \frac{bh^2}{6}, \text{ откуда } q = \frac{4}{3} \tilde{\sigma}_{доп} \left(\frac{h}{\ell}\right)^2 b$$

Таким образом, если расчет вести по разрушающей нагрузке, исходя из стадии разрушения балки, то при всех прочих равных условиях вытекает возможность в рассматриваемом нами примере допустить на балку нагрузку в  $\frac{2.3}{1} = 1.5$  раза большую, чем то вытекает из расчета



по допускаемым напряжениям.

При определении изгибающих моментов статически неопределимой балки исходят из равенства моментов в сечениях, где происходит первое образование пластических шарниров. Это условие заменяет условие деформаций, имеющих место в расчете по допускаемым напряжениям, и упрощает расчет.

Пример 2.

Установить, какую силу  $P$  можно допустить для металлической балки (рис. 5-а) постоянного прямоугольного сечения, приняв коэффициент безопасности равным  $n$

Решение:

1. Установление мест, где в критическом состоянии балки образуются первые пластические шарниры

Эти места в рассматриваемом нами примере симметричной нагрузки могут быть намечены в результате анализа схемы эпюры изгибающих моментов в упругом состоянии (рис. 5-в). Первые пластические шарниры образуются в местах максимальных изгибающих моментов. (Если оставить в стороне вопрос о главных напряжениях - см. проф. Безухов, "Вестник Инженеров и Техников", N 10, 1936 г.) Эти шарниры показаны на рис. 5-в. сплошными точками. В средней трети балки образуется сплошной шарнир.

2. Определение максимальных пластических моментов.

Из условия равенства моментов в опорных и пролетных шарнирах вытекает:  $\frac{P \cdot l}{3} - M_{\pi} = M_{\pi}$  откуда:

$\frac{2}{3} P l$



$$M_T = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_T \cdot l}{3},$$

т.е., когда в статически неопределимой балке сохранены условия симметрии относительно вертикальной оси, проходящей через середину балки, то максимальный пластический момент равен половине изгибающего момента свободно уложенной балки.

### 3. Определение допустимой нагрузки $P_{доп}$ .

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{P_T \cdot l}{3} = \sigma_T W_T$$

Так как разрушающая нагрузка

$$P_T = R \cdot P_{доп}$$

$$\text{и } W_T = \frac{bh^2}{4},$$

$$\text{то: } P_{доп} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sigma_T}{R} \cdot \frac{bh^2}{4} = \frac{3}{2} \cdot \sigma_{доп} \frac{bh^2}{l}$$

Если расчет вести по допускаемым напряжениям, то:

$$\frac{2}{3} \cdot P_{доп} \cdot l = \sigma_{доп} \cdot \frac{bh^2}{4},$$

$$\text{откуда: } P_{доп} = \frac{3}{4} \sigma_{доп} \frac{bh^2}{l},$$

т.е. расхождение на 100%.

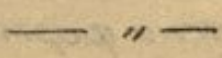
Таким образом, исходя из расчета балки по критическому состоянию, мы в рассматриваемом примере статически неопределимой балки получили допустимую силу в два раза большую, чем из расчета по допускаемым напряжениям. Такой результат является следствием выравнивания моментов в критическом состоянии, что превращает балку как бы в брус равного сопротивления. Такой брус, как известно, является экономичным.

Наряду с этим следует отметить, что вообще говоря расчет не кончается определением допустимой нагрузки; необходимо еще установить запас в отношении деформа-



ции, знание которой весьма существенно в авиационных конструкциях.

Перед дальнейшим развитием теории расчета по пластическим деформациям стоит задача разработать упрощенные методы определения коэффициента запаса в отношении деформаций.



В том случае, когда условия симметрии относительно вертикальной оси, проходящей через середину балки, не сохранены, места максимальных моментов в критическом состоянии должны быть определены из расчета.

На ниже приводимом примере иллюстрируется способ определения места и величины максимального момента в расчете по пластическим деформациям.

ПРИМЕР 3.

Определить допустимую нагрузку на балку (рис. 6-а)

Начинаем с определения расстояния  $x$  где будет иметь место максимальный момент, когда произойдет выравнивание наибольшего опорного и пролетного момента (т.е. в критическом состоянии).

Из рис. 6б следует, что момент в пролете

$$M_x^T = \frac{q_l l}{2} x - \frac{q_l x^2}{2} - M_x^O \cdot \frac{l-x}{l}$$

или  $M_x^T (1 + \frac{l-x}{l}) = \frac{q_l l}{2} x - \frac{q_l x^2}{2}$

откуда  $M_x^T = \frac{(\frac{q_l l}{2} x - \frac{q_l x^2}{2}) \cdot l}{2l-x} \dots \dots \dots (a)$

Найдем то значение  $x$ , при котором  $M_x^T$  достигает экстрема:



$$\frac{dM_x^T}{dx} = \frac{(2l-x)(\frac{q_T l}{2} - q_T x)l - (\frac{q_T l}{2}x - \frac{q_T x^2}{2}) \cdot l(-1)}{(2l-x)^2} = 0$$

$$\text{или: } \frac{q_T x^2}{2} - 2q_T \cdot l \cdot x + q_T l^2 = 0$$

$$\text{откуда: } x = 2l \pm 1,41l \text{ и } x_1 = 3,41l, \quad x_2 = 0,59l$$

Приемлимым остается корень  $x = 0,59l$ ; тогда  $M_x^T$  достигает максимума и согласно формулы a:

$$M_T = 0,0858 q_T \cdot l^2$$

$$\text{откуда: } q_T = 11,66 \frac{M_T}{l^2} = 11,66 \frac{W_T \cdot \sigma_p}{l^2}$$

Для балки прямоугольного сечения:

$$q_T = 11,66 \frac{W h^2}{4} \cdot \frac{\sigma_p}{l^2} = 2,915 \frac{W h^2 \sigma_p}{l^2}$$

Допускаемая интенсивность:

$$q_{\text{доп}} = 2,915 \frac{\sigma_p}{n} \left(\frac{h}{l}\right)^2 W = 2,915 \sigma_{\text{доп}} \left(\frac{h}{l}\right)^2 W$$

Если рассчитывать по допускаемым напряжениям, когда ориентируются на максимальный момент в одном ОПАСНОМ сечении (в данном случае на опоре) то допускаемый момент:

$$M_{\text{доп}} = \frac{q_{\text{доп}} l}{2}$$

$$\text{откуда: } q_{\text{доп}} = \frac{2M_{\text{доп}}}{l^2} = \frac{8W \sigma_{\text{доп}}}{l^2}$$

Для прямоугольного сечения:

$$W = \frac{b h^2}{6} \text{ и } q_{\text{доп}} = 1,333 \sigma_{\text{доп}} \left(\frac{h}{l}\right)^2 b$$

Таким образом из расчета по пластическим деформациям допускаемая нагрузка в рассматриваемом примере получается в 2,187 раза большая, чем из расчета по допускаемым напряжениям.

— " —

Работа двутаврового сечения в пластическом состоянии представляет больший интерес, чем прямоугольное







Положивши в формуле 14  $\Delta = \infty$ , стало  $\frac{\Delta f}{\Delta} = 0$ ,  
 либо, исходя из рис. 84. и равновесия внешнего и внутреннего  
 момента, находим:  $M_T = \frac{3}{2} K M_D \dots \dots \dots (15)$

где:  $K = \frac{h}{12^3} [bh^2 - (b-d)h_1^2]$

Результаты по формулам 15 и 12 расходятся на 5% - 6%  
 Это обстоятельство разрешает приближенно вычислить пла-  
 стический момент по формуле 12, которая более проста, чем  
 формула 15.

Для прямоугольного сечения  $\frac{W_T}{W} = \frac{3}{2}$

Для двутаврового сечения отношение  $\frac{W_T}{W} = \frac{3}{2} K$

и колеблется от 1,085 до 1,19.

Отсюда видно, что для двутавровых сечений расчет по  
 состоянию 2в мало чем отличается по своим результатам  
 от расчета по состоянию 2г т.е. в данном случае расчет  
 по пластическим деформациям для статически определимых  
 балок не дает такого эффекта, какой имел место для балок  
 прямоугольного сечения. Для статически же неопределимых  
 балок эффект остается в силе, так как он не зависит от  
 от профиля сечения, а вытекает из выравнивания макси-  
 мальных опорных и пролетных моментов в критическом  
 состоянии конструкции.

Формулы, вытекающие из расчета по пластическим  
 деформациям, во многих случаях приводятся к формулам,  
 применяемым в расчете по допускаемым напряжениям, т.е.  
 в упругом состоянии (см. Завриев: „Расчетные ф-лы проч-  
 ности в особых случаях“)

Это обстоятельство часто приводит к тому, что мы



на практике пользуемся расчетом по пластическим деформациям не отдавая себе в этом отчета. Например, в упругом состоянии в бруске (рис. 8.) имеется концентрация напряжений возле отверстия (рис. 9.). Несмотря на эту концентрацию в практике принято площадь нетто поперечного сечения бруска

(рис. 8) определять по формуле  $F_{\text{нетто}} = \frac{P_{\text{доп}}}{\sigma_{\text{доп}}} \dots \dots \dots (16)$

что соответствует равномерному распределению напряжений по расчетному поперечному сечению бруска.

Последнее действительно будет иметь место, когда сечение I-I перейдет в пластическое состояние.

Площади  $P_r = F_{\text{нетто}} b_r$  и  $P_{\text{доп}} = \frac{P_r}{n} = F_{\text{нетто}} \frac{b_r}{n_2} = F_{\text{нетто}} b_{\text{доп}}$

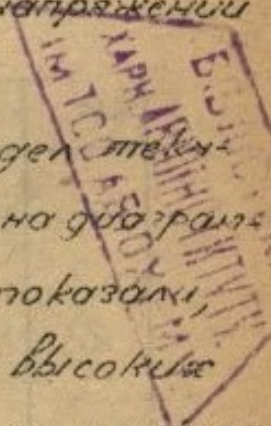
откуда  $F_{\text{нетто}} = \frac{P_{\text{доп}}}{\sigma_{\text{доп}}}$ , что совпадает с формулой (16).

Аналогичное наблюдается при определении напряжений в заклепках заклепочного шва.

В вышеизложенном мы предполагали предел текучести  $b_r$  равным величине  $b_f$ , которая указана на диаграмме рис. 1. Исследования Титт'a и Wunderlich'a показали что текучесть материала наступает при более высоких напряжениях, чем те, которые определяются из расчета по пластическим деформациям. Это обстоятельство объясняют поддерживающим влиянием волокон упругого ядра, которые несколько задерживают быстрое распространение текучести.

Помимо изложенного расчета по пластическим деформациям существует еще расчет, предложенный Maier-Leibnitz'ом. Расчет этот применяется к разрушающим нагрузкам, но в основе

73637  
736126





ко иное определение критического состояния системы. Под последним понимается здесь такое состояние, при котором сечение в местах максимальных усилий находится в предельно упругом состоянии (рис. 3-а). Критическое состояние балки, рассмотренной в примере 2, представляется рис. 10.

Исходя из равенства максимальных опорных и пролетных моментов в критическом состоянии конструкции имеем:

$$M_f = \frac{P_f l}{3} - M_f, \text{ откуда: } P_f = \frac{6M_f}{l} = \frac{6b_f^2 \sigma_f}{l}$$

Для прямоугольного сечения:

$$P_f = \frac{bh^2}{l} \sigma_f; \quad P_{доп} = \frac{P_f}{n} = \frac{bh^2 \sigma_f}{en} = \frac{bh^2}{l} \sigma_{доп}$$

Таким образом мы получили три значения  $P_{доп}$  для балки, рассмотренной в примере 2. Эти значения сведены в нижеприводимую таблицу 1.

ТАБЛИЦА 1.

№	Метод расчета	$P_{доп}$
1	По пластическим деформациям	$\frac{3}{2} \frac{bh^2}{l} \sigma_{доп}$
2.	По допускаемым напряжениям	$\frac{3}{4} \frac{bh^2}{l} \sigma_{доп}$
3.	По Майер-Лейбниц'у	$\frac{bh^2}{l} \sigma_{доп}$

Наилучшие результаты с точки зрения экономии дает расчет по пластическим деформациям. Недостаточное внедрение этого расчета в практику нужно, очевидно, объяснить неудовлетворительной еще теоретической и экспериментальной разработкой метода.

Несомненно, однако, что будущее за расчетом конструкций по критическому состоянию.



### §3. Расчет на изгиб деревянных балок по пластическим деформациям.

Рассмотренный выше расчет металлических балок по пластическим деформациям, вообще говоря, применим к таким материалам, для которых диаграмма напряжений деформаций в области сжатия и растяжения одинакова.

Дерево представляет собой пример такого материала, для которого диаграмма напряжений деформаций в области сжатия и растяжения различна. Диаграмма эта представлена на рис. 11. В расчете по пластическим деформациям взамен диаграммы рис. 11, принимается упрощенная диаграмма рис. 12 (гипотеза Prandtl'а).

Таким образом, площадка текучести предполагается только в сжатой зоне и отсутствует в растянутой зоне. Модули упругости на растяжение и сжатие одинаковы и постоянны до предела текучести (он же и временное сопротивление). Задача будет обобщена, если предположить неодинаковые модули упругости на растяжение и сжатие.

Займемся выводом формулы, например, для прямоугольного сплошного сечения, устанавливающей зависимость между разрушающим моментом и напряжениями  $K_{рос}$ ,  $K_{сж}$ . В критическом (пластическом) состоянии сечения изгибаемого бруса.

Общий случай этого состояния изображен на рис. 13. В частном случае  $h_2 = 0$ . Незвестными являются расстояния:

$$h_1, h_2 \text{ и } h_3$$

Для их определения составляются уравнения геометрического характера:

$$1. \quad h_1 + h_2 + h_3 = h.$$

$$2. \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{K_{рос}}{K_{сж}}.$$



и уравнения статического характера:

$$3. M_T = D_1 \left( \frac{2}{3} h_1 + \frac{2}{3} h_2 \right) + D_2 \cdot \left( \frac{2}{3} h_1 + h_2 + \frac{h_3}{2} \right),$$

где:  $M_T$  - момент внутренних сил относительно точки приложения растягивающей силы  $Z$ .

$$4. D_1 + D_2 - Z = 0$$

$$5. D_1 = \frac{K_{сж} h_2^2 \nu}{2}$$

$$6. D_2 = K_{сж} h_3 \cdot \nu$$

$$7. Z = \frac{K_{рас} h_1 \nu}{2}$$

Результаты совместного решения ур-ний 1-7:

$$h_T = h \cdot \frac{2\eta}{(1+\eta)^2} \dots (17) \quad h_2 = h \cdot \frac{2}{(1+\eta)^2} \dots (18)$$

$$h_3 = h \cdot \frac{\eta^2 - 1}{(1+\eta)^2} = h \cdot \frac{\eta - 1}{1+\eta} \dots (19), \text{ где } \eta = \frac{K_{рас}}{K_{сж}}$$

$$M_T = K_{сж} \int M \cdot \frac{\nu h^2}{6} \dots (20) \quad \text{где } \int M = \frac{3\eta - 1}{2 + 1} \dots (21)$$

Коэффициент  $\int M$  известен также под названием коэффициента Баха, который устанавливал этот коэффициент экспериментальным путем.

Нейтральная ось смещена в сторону распавшихся волокон от центра тяжести сечения на величину:

$$V = \frac{h}{2} \cdot \left( \frac{\eta - 1}{\eta + 1} \right)^2 \dots (22)$$

Имея  $K_{сж}$ ,  $\eta = \frac{K_{рас}}{K_{сж}}$  и внешний момент от разрушающей нагрузки  $M_{внеш} = M_T$ , из формулы 20 находят  $W = \frac{\nu h^2}{6}$ .

Если же размеры сечения даны, а также даны  $K_{сж}$  и  $\eta$ , то по ф-ле 20 проверяют тот, который воспринимается сечением.

В ниже приводимой таблице 2 даны значения  $K_{сж}$  и  $\eta$  для некоторых пород дерева.



## ТАБЛИЦА 2.

Порода	Дуб	Срощ	Клен	Липа	Черешка	Орех	Плс	Ясень	Сосна	Осина	Береза	Тополь	Ясень	
Коэф. $\zeta$	Максим.	2,80	2,28	1,87	1,41	2,14	2,72	1,80	2,70	2,44	3,33	2,30	3,34	2,47
	Миним.	1,71	1,50	1,30	—	1,75	1,85	1,15	1,58	1,27	1,43	1,33	1,63	1,93
$K_{сж} \frac{кг}{мм^2}$	среднее значение.	6,59	6,27	5,88	5,14	5,40	5,68	6,69	7,06	6,05	4,12	5,05	3,71	5,98

В таблице 3 даны значения  $M$ , соответствующие употребительным значениям  $\zeta$ .

## ТАБЛИЦА 3.

$\zeta$	1,2	1,5	1,75	2,0	2,25	2,5
$M$	1,22	1,41	1,55	1,68	1,78	1,91

Таблицы 2 и 3 заимствованы из работы Белянкина „Пластичні деформації і підтримуюча дія при згині дерев'яних балок“. Обозначим  $M \cdot K_{сж} = K_{из}$ ; тогда из ф-лы 20 следует:

$$K_{из} = \frac{M}{W} \dots \dots \dots (23)$$

т.е. ф-ла 20 приобретает общеизвестную форму.

Поскольку  $M > 1$ , то  $K_{из} > K_{сж}$ .

Если не вдаваться в смысл ф-лы 23, то из указанного факта можно было бы сделать заключение, что максимальные сжатые волокна в изгибаемой деревянной балке выдерживают большие напряжения, чем их временное сопротивление на сжатие. Такое заключение сделали американские исследователи, которые данные эксперимента сравнивали с формулой изгиба  $K_{из} = \frac{M}{W}$  и обосновывали это тем, что сжатые волокна в деревянной балке вообще разрушаются не из-за



потери прочности, а из-за потери устойчивости.

В изгибаемой балке устойчивость этих волокон повышается тем, что их поддерживают менее напряженные волокна.

Отсюда американская теория и носит название теории поддерживающего влияния. Вышеуказанное поддерживающее влияние зависит от формы сечения и оценивается коэффициентом формы  $\Phi$ .

Для прямоугольного сечения этот коэффициент принят равным единице. Для любого другого сечения максимальное сжимающее напряжение изгиба, которое выдерживает сечение, определяется по формуле  $K_{из} = K_{из}^0 \Phi \dots (24)$  где:  $K_{из}^0$  — максимальное сжимающее напряжение изгиба балки прямоугольного сечения:

Когда  $\Phi = 1$ , то  $K_{из} = K_{из}^0$

Американские исследователи на основе экспериментальных данных разработали прием определения коэффициента формы. При этом для оправдания экспериментов в поддерживающем влиянии вводится и растянутая зона, что не увязывается с сутью явления поддерживающего влияния в особенности, если сжатая и растянутая зоны не имеют непосредственного соприкосновения, как, например, в коробчатых сечениях лонжерона. Если исходить из теории пластических деформаций (теория Радег'а), оставляя пока в стороне вопрос о поддерживающем влиянии или учитывая его повышением  $K_{сж}$ , то коэффициент формы можно определить аналитически.

Покажем это на примере коробчатого сечения лонжерона (рис. 14).



Расстояния  $h_1, h_2, h_3$  и моменты, который выдерживает сечение, определяются из совместного решения следующих уравнений:

1. Уравнения геометрического характера.

- 1)  $h_1 + h_2 + h_3 = h$
- 2)  $\frac{h_2}{h_1} = \frac{K_{сж}}{K_{рас}} = \eta$
- 3)  $\frac{K'_{рас}}{K_{рас}} = \frac{h_1 - t}{t} *$

2. Уравнения статического характера

4)  $\sum X = 0$  или  $K_{сж} \cdot B \cdot T = \frac{K_{рас} + K'_{рас}}{2} \cdot B \cdot t$

Совместное решение ур-ний 1, 2, 3 приводит к следующим результатам  $h_1 = \frac{2 \cdot t^2}{2(t \cdot 2 - T)} \dots \dots \dots (25)$

$h_2 = \frac{t^2}{2(t \cdot 2 - T)} \dots \dots \dots (26); h_3 = h - (h_1 + h_2) \dots \dots (27)$

5)  $\sum M = 0;$

момент внутренних нормальных сил вычисляем относительно точки приложения равнодействующей нормальных растягивающих сил, тогда

$M_K = K_{сж} \cdot B \cdot T \left( H - \frac{T}{2} - \frac{K_{рас} + 2K'_{рас}}{K_{рас} + K'_{рас}} \cdot \frac{t}{3} \right)$

Введение индекса  $K$  при  $M$  имеет целью отметить, что момент  $M_K$  относится к коробчатому сечению. Учитывая предыдущее равенство, а также, вводя обозначения

$\frac{T}{t} = K, \frac{h_0}{h} = m$

находим  $M_K = K_{сж} \cdot \frac{B h^2}{6} (1-m) \frac{3(1+m) \cdot K^2 + 2(1+2m) \cdot K + (1-m) \cdot t}{(1+K)^2}$

Коэффициент формы определяется из отношения:

\*  $K'_{рас}$  - величина растягивающего напряжения на линии  $a-a$  рис. 14.



$$\phi = \frac{M_n}{M_n} \dots \dots \dots (28)^*$$

где:  $M_n$  - момент, воспринимаемый прямоугольным сечением определяется по формуле 20.

стало быть, 
$$\phi = \frac{1-m^2}{M} \frac{3K^2+2K+2 - \frac{2m(2-K)}{1+m}}{(1+K)^2} \dots \dots (29)$$

Моменты, которые коробчатое сечение воспринимает в предельном состоянии,

$$M_n = \phi \cdot M \cdot K_{сж} W \dots \dots \dots (30)$$

$M$  - коэффициент Баха для прямоугольного сплошного сечения

$W$  - минимальный момент сопротивления прямоугольного сплошного сечения.

$\phi$  - коэффициент формы:

Пример 4.

Определить максимальные нормальные напряжения в сечении рис. 14.

- Данные:
- $h = 44 \text{ см.}$
  - $B = 16$
  - $t = 10$
  - $T = 14$
  - $M = 2149800 \text{ кг. см.}$

А. Расчет по американской теории:

1. Определение относительных размеров полок

$$t_1 = \frac{t}{h} = \frac{10}{44} = 0,227$$

$$T_1 = \frac{T}{h} = \frac{14}{44,5} = 0,315$$

По графику (Шишмарев „Расчет дет.сам“) определяем коэффициент формы

$$\phi = 0,8$$

Определяем коэффициент формы по ф-ле (см. Т.В.Ф. N 11 1935г. и справочник по расчету самолета на прочность изд. 1937г.)

\* Выражение коэффициента формы через отношение моментов принципиально не расходится с выражением коэффициента формы через отношение напряжений, которое вытекает из формулы 24.



$$\varphi = 0,515 + 0,485 K_0$$

$$K_0 = \frac{\varphi - \sin \varphi}{6,82}, \quad \sin \frac{\varphi}{2} = 1 - 3 \frac{\varphi}{h} \quad \text{получаем } \varphi = 0,79$$

принято  $\varphi = 0,8$

2. Определение площади сечения.

$$F = bh - b(h - t - T)$$

$$F = 16 \cdot 44 - 16(44 - 10 - 14) = 384 \text{ см}^2$$

3. Полный статический момент относительно верхнего ребра.

$$S = \frac{bh^2}{2} - b(h - t - T) \frac{h - t + T}{2}$$

$$S = 16 \cdot \frac{44^2}{2} - 16(44 - 10 - 14) \cdot \frac{44 - 10 + 14}{2} = 7808 \text{ см}^3$$

4. Расстояние центра тяжести от верхнего ребра.

$$\bar{z} = \frac{S}{F} = \frac{7808}{384} = 20,33 \text{ см.}$$

$$\bar{z}_1 = 44 - 20,33 = 23,67 \text{ см.}$$

5. Момент инерции сечения относительно нейтральной оси.

$$J = \frac{b}{3} [\bar{z}^3 - (\bar{z} - T)^3 + \bar{z}_1^3 - (\bar{z}_1 - t)^3]$$

$$J = \frac{16}{3} [(20,33)^3 - (20,33 - 14)^3 + 23,67^3 - (20,33 - 10)^3] = 108317 \text{ см}^4$$

6. Момент сопротивления крайнего волокна сжатой полки.

$$W_{сж} = \frac{J}{\bar{z}} = \frac{108317}{20,33} = 5328 \text{ см}^3$$

7. Момент сопротивления крайнего волокна растянутой полки.

$$W_{рос} = \frac{J}{\bar{z}_1} = \frac{108317}{23,67} = 4576 \text{ см}^3$$

$$\tilde{\sigma}_{изг} = \frac{M}{W} = \frac{2149800}{4576} = 469,8 \text{ кг/см}^2$$

$K_{изг}$  для сплошного сечения =  $680 \text{ кг/см}^2$

$$K_{изг} \cdot \varphi = 680 \cdot 0,8 = 544 \text{ кг/см}^2$$

$$469 < 544$$



Имеется небольшой излишек прочности.

В. Расчет по пластическим деформациям.

I сплошное прямоугольное сечение.

За дано:  $h = 44 \text{ см.}$

$$b = 16 \text{ см.}$$

$$K_{\text{рас}} = 680 \text{ кг/см}^2$$

$$K_{\text{сж}} = 350 \text{ кг/см}^2$$

Решение.

1. Определение  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h_3$

$$\eta = \frac{K_{\text{рас}}}{K_{\text{сж}}} = \frac{680}{350} = 1,94$$

$$h_3 = 44 \cdot \frac{1,94 - 1}{1,94 + 1} = 11,5$$

$$h_2 = 2 \cdot 44 \cdot \frac{1}{(1 + 1,94)^2} = 12,0$$

$$h_1 = 2 \cdot 44 \cdot \frac{1,94}{(1 + 1,94)^2} = 20,5$$

2. Определение изгибающего момента, который способен

воспринять данное сечение.

$$M = \frac{3\eta - 1}{\eta + 1} = \frac{3 \cdot 1,94 - 1}{1,94 + 1} = 1,64$$

$$W = \frac{8b^2}{6} = \frac{16 \cdot 44^2}{6} = 5162 \text{ см}^3$$

$$M_n = M \cdot K_{\text{сж}} \cdot W = 1,64 \cdot 350 \cdot 5162 = 2962988 \text{ кг/см}$$

II. Коробчатое сечение

За дано:  $h = 44 \text{ см.}$

$$r = 14 \text{ см.}$$

$$t = 10 \text{ см.}$$

$$K_{\text{сж}} = 350 \text{ кг/см}^2$$

$$K_{\text{рас}} = 680 \text{ кг/см}^2$$

$$b = 16 \text{ см.}$$

$$\eta = 1,94.$$



Решение.

1. Определение  $h_1, h_2$  и  $h_3$  (см. ф-лы 25, 26, 27).

$$h_1 = \frac{1,94 \cdot 10^2}{2(10 \cdot 1,94 - 14)} = \frac{1,94}{10,8} = 18 \text{ см.}$$

$$h_2 = \frac{10}{2(10 \cdot 1,94 - 14)} = \frac{100}{10,8} = 9,25 \text{ см.}$$

$$h_3 = 44 - 18 - 9,25 = 16,75 \text{ см.}$$

2. Определение коэффициента формы.

$$m = \frac{h_0}{h} = \frac{20}{44} = 0,45 \quad \mu = 1,64$$

$$K = \frac{\tau}{\sigma} = \frac{14}{10} = 1,4 \quad \eta = 1,94$$

$$\phi = \frac{1 - 0,45^2}{1,64} \cdot \frac{3 \cdot 1,4^2 + 2 \cdot 1,4 + 1,94 - \frac{2 \cdot 0,45(1,94 - 1)}{0,45 + 1}}{(1,4 + 1)^2} = 0,87$$

3. Определение несущего момента коробчатого сечения в предельном состоянии.

$$M_k = \phi \cdot M \cdot K_{сж} \cdot W = 0,87 \cdot 1,64 \cdot 350 \cdot 5162 = 2 \cdot 577 \cdot 800 \text{ кг/см.}$$

$$\phi = \frac{M_k}{M_n} = 0,87$$

§4. Принцип расчета, принятый в самолетостроении.

В расчете на прочность конструкций самолета исходят согласно норм прочности из разрушающих нагрузок и разрушающих напряжений, продолжая, однако, применять обычные формулы строительной механики и теории упругости, применимые для материала в упругом состоянии; за критическое состояние конструкции принимают критическое состояние сечения.

По обстоятельству, что применяют временное сопротивление в формулах „упругой“ теории, говорит, что действительная диаграмма (рис. 1) (если речь идет о металле) заменена



диаграммой рис 15. Иначе говоря, прямолинейный участок диаграммы рис. 1. продолжен вплоть до временного сопротивления. Принятие диаграммы напряжений-деформаций по рис. 15 сближает принцип расчета, принятый в самолетостроении с принципом Майера-Лейбнитца, но отличается от него тем, что в расчете конструкции самолета не исходят из критического состояния КОНСТРУКЦИИ в целом.

Таким образом на первый взгляд кажется, что принцип расчета, принятый в самолетостроении, нельзя отнести ни к одному из выше рассмотренных принципов. На самом деле это не верно. Этот принцип как таковой (если особое оговорить, эта оговорка имеет в виду коэффициенты редукции и связанные с ними обстоятельства) нужно отнести к принципу расчета по допускаемым напряжениям. Последнее объясняется тем, что в расчете не исходят из критического состояния КОНСТРУКЦИИ, а пользуются диаграммой рис. 15 и (наряду с временным сопротивлением силой, умноженной на коэффициент запаса. Вследствие этого, по существу ничего не меняется по сравнению с расчетом по допускаемым напряжениям, так как писоть

$$F = \frac{P_{доп}}{b_{доп}} = \frac{P_{доп}}{\frac{b_{\sigma}}{n_1}} \dots \dots (31) \text{ или } F = \frac{n_1 \cdot P_{доп}}{b_{\sigma}} = \frac{P_{разруш}}{b_{\sigma}} \dots \dots (32)$$

по существу одно и то же (если иметь в виду, что в расчете не исходят из критического состояния КОНСТРУКЦИИ и пользуются диаграммой рис. 15). Формулы 31 и 32 имеют лишь разную формулировку. В формуле 31 участвует допускаемая сила и допускаемое напряжение, а в формуле 32 разрушающая сила и временное сопротивление.

Таким образом те напряжения, которые определяются в расчете, принятом в самолетостроении, не соответствуют



тем напряжениям, которые получились бы, если исходить из действительного критического состояния КОНСТРУКЦИИ.

Эти напряжения представляют собой допускаемые напряжения, умноженные на коэффициент запаса. Иначе говоря, то, что в расчете на прочность самолета называется 'разрушающей нагрузкой', не соответствует разрушающей нагрузке рассчитываемой конструкции, так как в расчете не исходят из действительного критического состояния КОНСТРУКЦИИ.

Однако, пользоваться нагрузкой, 'которая в какой бы то ни было мере напоминает разрушающую нагрузку, в практике самолетостроения удобно тем, что при этом результаты статических испытаний имеют возможность быть непосредственно сравнены с расчетными результатами. Статические же испытания конструкций самолета играют колоссальную роль, имея в виду отдаленность расчетов от действительной работы конструкции и ответственность этой конструкции, эксплуатируемой в воздухе. Статические испытания предписываются нормами. Кроме того, измерять напряжения в стадии разрушения доступнее, чем в упругом состоянии.

Принятие диаграммы рис. 15. вплоть до временного сопротивления обосновано тем, что конструкции самолета часто разрушаются от потери устойчивости еще до того, как элементы конструкции достигнут предельных напряжений. В отношении назначения коэффициентов запаса для конструкций самолета необходимо отметить, что в этих конструкциях мы встречаемся с такими отдельными агрегатами, которые помимо восприятия нагрузок работают как механизм (как, например, шасси).

При назначении коэффициента запаса для такого



агрегата критическое состояние его необходимо характеризовать не только прочностью, но и работой его, как механизма.

Необходимо назначить такой коэффициент запаса, который бы обеспечил с известным запасом работу конструкции как механизма. Это может случиться, что шасси, имея достаточный запас прочности, теряет свою работоспособность как механизм до того, когда будет исчерпана прочность шасси как конструкции (см. статью в газете ЦАГИ 1935).

### § 5. Увязка подбора прочных размеров элементов конструкции самолета с авиационными требованиями, предъявляемыми к ним. Авиационный вес.

В качестве критерия удачно подобранного материала или профиля поперечного сечения элемента принимаются вес элемента и производственные затраты на его выполнение в увязке с компоновкой конструкции. Для элементов авиационных конструкций этот критерий недостаточен, ибо для этих конструкций не малую (а иногда и решающую) роль играют вопросы габарита элемента и его сопротивление движущемуся потоку, если элемент входит в непосредственное соприкосновение с этим потоком. Такой элемент мы называем открытым.

В связи с этим требование о минимальном весе элемента при сохранении необходимой прочности преломляется применительно к авиационным конструкциям в виде требования минимального авиационного веса, если речь идет об открытых элементах.

Приступим к знакомству с этим понятием.

В дальнейшем мы будем пользоваться уравнениями полета:



$$G = C_y \cdot \rho \cdot S \cdot v^2 \dots \dots \dots (33)$$

$$Q = C_x \cdot \rho \cdot S \cdot v^2 \dots \dots \dots (34)$$

сила тяги  $T = Q \dots \dots \dots (35)$

и уравнением мощности винта:

$$N = T \cdot v = Q \cdot v = C_x \cdot \rho \cdot S \cdot v^3 \dots \dots \dots (36)$$

Коэффициент полезного действия мотора примем равным единице (в целях упрощения рассуждений); тогда мощность мотора  $HP$  (в лошадиных силах) на валу равна мощности винта.

$$HP = N \dots \dots \dots (37)$$

Пусть произошло изменение веса самолета  $G$ ; тогда в целях сохранения равенства (33) должно произойти соответствующее изменение правой части этого равенства.

Из возможной вариации четырех переменных в этой части равенства мы подвергнем вариации только две переменные  $\rho$  и угол атаки (или  $C_y \cdot C_x$ ). Изменению  $\rho$  равносильно изменению высоты полета, ибо с изменением высоты полета меняется плотность воздуха. Изменение угла атаки равносильно изменению  $C_y, C_x$  при той же высоте полета.

Приращение веса самолета обозначим через  $g$  в первом варианте, когда меняется  $\rho$ , а  $C_y$  и  $C_x$  не меняются, стало быть, — приращение веса самолета происходит за счет приращения веса скрученных элементов (уравнения 33 и 36 переписываются в виде:

$$G_1 = G + g = C_y (\rho + \Delta \rho) \cdot S \cdot v^2 \dots \dots \dots (38)$$

$$N_1 = N + \Delta N = C_x (\rho + \Delta \rho) \cdot S \cdot v^3 \dots \dots \dots (39)$$

Из уравнений 33, 36, 38, 39 следует:

$$\frac{N}{G} = \frac{N_1}{G_1} = \frac{C_x}{C_y}$$

Так как  $C_y, C_x$  (согласно оговоренному выше условию) принимают



постоянными, то

$$\frac{N}{G} = \frac{N_1}{G_1} = K \dots \dots \dots (40)$$

где:  $K$  — некоторое постоянное число.

Из ур-ния 40 следует, что мощность мотора возрастает пропорционально нарастанию веса самолета, т.е., если

$$G = n g, \text{ то и } N = n \cdot \Delta N; \text{ тогда } \frac{N}{G} = \frac{\Delta N}{g}$$

$$\text{откуда: } \Delta N = g \frac{N}{G} \text{ или } \Delta N = g \frac{N^2}{G^2} \dots \dots \dots (41)$$

Рассмотрим теперь второй вариант, когда изменению подвергается  $C_y$  и  $C_x$  (что соответствует прибавлению веса за счет добавления наружной детали) при неизменной высоте и неизменной скорости полета.

Тогда, из ур-ний 33 и 35 следует:

$$G_1 = G + g = C_y' \cdot \rho \cdot l \cdot G^2 \dots \dots \dots (42)$$

$$N_1 = N + \Delta N = C_x' \cdot \rho \cdot l \cdot G^3 \dots \dots \dots (43)$$

Из ур-ний 42 и 43 следует:

$$\frac{N}{G} = \frac{C_x}{C_y \cdot G};$$

$$\frac{N_1}{G_1} = \frac{C_x'}{C_y' \cdot G}$$

Стало быть в данном случае отношение  $\frac{N}{G}$  неравно отношению  $\frac{N_1}{G_1}$ , вследствие чего мощность не пропорциональна весу. Однако, если  $G_1$  незначительно отличается от  $G$  (т.е., если добавочный груз не велик по сравнению с весом самолета) то  $C_y', C_x'$  незначительно отличаются от  $C_y, C_x$  и можно известной степенью приближенности принять, что  $\frac{N}{G} = \frac{N_1}{G_1} = K$ , т.е., что и в данном случае мощность мотора увеличивается пропорционально нарастанию веса самолета (см. Шишмарев, "Рост деталей самолета")

После установления зависимостей между весом самолета и мощностью мотора переходим к рассмотрению веса



деталей самолета в движущемся потоке воздуха.

Пусть самолет имеет сопротивление  $R_x = C_x(\text{сам}) \rho$

Предположим, что вес этого самолета не изменился, но сопротивление его приросло на величину  $\tau_x$ . Такое обстоятельство может иметь место, когда некоторая деталь изнутри самолета переносится наружу (или когда наружная деталь заменена другой наружной деталью с тем же абсолютным весом, но с другим аэродинамическим сопротивлением).

Если вначале (до приращения сопротивления) мощность винта  $N$  равнялась  $R_x \cdot \rho \cdot G^3$ , то впоследствии эта мощность приросла на величину  $\Delta N = \tau_x \cdot \rho \cdot G^3$  и стала равной

$$N_1 = N + \Delta N = (R_x + \tau_x) \cdot \rho \cdot G^3 = R_x' \cdot \rho \cdot G^3$$

Стало быть  $\frac{N_1}{N} = \frac{R_x'}{R_x}$  при неизменившейся плотности и скорости т.е. нарастание мощности пропорционально нарастанию сопротивления самолета. Таким образом, приращению сопротивления  $\tau_x$  соответствует приращение мощности

$$\Delta N = \tau_x \frac{N}{R_x} \dots \dots \dots (44)$$

с другой стороны из ранее изложенного мы знаем, что:

$$\Delta N = g \cdot \frac{N}{G} \dots \dots \dots (45)$$

Можно подобрать такую величину для веса детали  $g$ , что равенства 44 и 45 будут тождественны при одних и тех же  $N$  и  $G$ . Для этого необходимо решить уравнение  $g \cdot \frac{N}{G} = \tau_x \cdot \frac{N}{R_x}$  относительно  $g$ ; тогда:

$$g_{\text{авиаци}} = \frac{\tau_x}{R_x} G \dots \dots \dots (46)$$

Стало быть чистое увеличение сопротивления самолета на величину  $\tau_x$  равносильно увеличению его веса на величину  $g_{\text{авиаци}}$  по формуле 46, а увеличение веса самолета за счет прибавления некоторой детали весом  $g$  в открытом воздушном потоке равно

$$g + g_{\text{ав}} = g + \frac{\tau_x}{R_x} \cdot G \dots \dots \dots (47)$$



Выражение 47 носит название авиационного веса детали  $G_{ав} = \frac{\gamma_x}{R_x} \cdot G$  - авиационная добавка к абсолютному весу детали. Этот вес зависит не только от веса и сопротивления детали, но и от веса и сопротивления самолета в целом.

Приращению авиационного веса самолета соответствует приращение мощности мотора:

$$\Delta НР = \left( g + \frac{\gamma_x}{R_x} \cdot G \right) \cdot НР = \frac{g}{G} \cdot НР + \frac{\gamma_x}{R_x} \cdot НР \dots \dots \dots (48)$$

Из ур-ния 48 следует: чем мощность мотора  $НР$  больше, тем при прочих равных условиях больше и  $\Delta НР$ , т.е. для быстроходных машин с большой мощностью мотора нужно особенно быть бдительным в части выбора для открытых элементов таких размеров и форм, которые давали бы наименьшие аэродинамические сопротивления.

Например, если речь идет о наружных стойках или подкосах, то они должны быть не длинными и с обтекаемым профилем. Формула 48 подтверждает, что сравнивать две детали нельзя безотносительно и без учета того, к какому самолету они относятся; в формулу эту входят не абсолютные значения  $g$  и  $\gamma_x$ , характеризующие деталь, а их отношения к  $G$  и  $R_x$ , характеризующие самолет.

Ознакомясь с понятием авиационного веса, мы получили некоторую подготовку к более сознательному и критическому подходу при назначении материала и профиля для несущих элементов конструкции самолета.

О критериях выгодности материала и профиля детали нельзя говорить безотносительно к тому, в какой деформации участвует деталь.

Выгодность материала характеризуется его удельной прочностью и удельной жесткостью.



Выгодность профиля характеризуется коэффициентом профиля.

Та и другая величина зависят от того, каким принципом расчета пользуются при их выводе. Мы будем пользоваться тем принципом, который принят в самолетостроении и о котором мы говорили выше.

Переходим к рассмотрению отдельных типов простейших деформаций. Разумеется, что результаты полученные применительно к простейшим деформациям, не могут быть непосредственно перенесены и на сложные деформации.

1. Растяжение или сжатие короткого бруса.

Вес 1 п.м. призматического бруса постоянного сечения определяется по формуле:

$$G = F \cdot \gamma \cdot l \dots \dots \dots (49)$$

где:  $\gamma$  — удельный вес материала,

$F$  — площадь поперечного сечения бруса.

Эта площадь определяется из равенства:

$$F = \frac{P}{K} \dots \dots \dots (50)$$

если не учитывать собственный вес бруса, что обосновано для легких авиационных брусков

$P$  — расчетная разрушающая сила

$K$  — временное сопротивление на растяжение или сжатие.

Если значение  $F$  по ф-ле 50 вставить в формулу 49,

то получим:

$$G = P \frac{\gamma}{K} = \frac{P}{K/\gamma} \dots \dots \dots (51)$$

Величина  $\frac{K}{\gamma}$  носит название удельной прочности на растяжение или сжатие коротких стоек, т.е. прочности, приходящейся на единицу удельного веса материала. Стойкость зрения удельной прочности на растяжение, наиболее вы-



годным материалом является дерево (ясень  $\frac{K_{рас}}{\gamma} = \frac{700}{0,7 \cdot 10^{-3}} = 10 \cdot 10^5$ ); или дюралюминия  $\frac{K}{\gamma} = 13,3 \cdot 10^5$  (см. Ростовцев, "Строительная механика самолета" 21).

Однако, к этому выводу нужно отнестись с достаточной осторожностью, так как характеристика материала по одной удельной прочности без всестороннего учета остальных характеристики детали, как то условия ее выполнения, габариты, авиационный вес и другие, может привести к неправильным выводам.

В отношении дерева в частности необходимо учесть не удовлетворительные условия сопряжения в узлах, габариты детали (что особенно важно для открытых деталей), физические свойства дерева (усыхание и разбухание, гниение).

Сделанную оговорку необходимо иметь в виду и при выборе материала для деталей, работающих на другие виды деформаций

## 2. Плоский изгиб.

Вес 1 м.т. балки постоянного сечения призматической формы определяется по предыдущему по формуле 49. Геометрические размеры поперечного сечения балки без учета ее собственного веса находят из равенства  $M = \frac{M}{K_{из}} \dots \dots (52)$  если размеры сечения определяются по моменту, где:

$M$  — расчетный разрушающий момент

$K_{из}$  — максимальное разрушающее напряжение на изгиб для данного профиля; для деревянных элементов

$$K_{изг} = K_{изг}^0 \phi$$

для металлических сечений:  $K_{изг} = K_{сж}^0$ , когда профиль устойчивый.

Площадь  $F$  можно представить в виде, объединяющем



разные профили:

$$F = \frac{W^{2/3}}{C} \dots \dots \dots (53)$$

Так как  $W$  выражено в  $см^3$ , то возведение его в степень  $2/3$

даст выражение площади в  $см^2$ .

$C$  — некоторый отвлеченный коэффициент, зависящий от профиля поперечного сечения и называемый нами коэффициентом профиля.

Очевидно, чем  $C$  больше, тем  $F$  при одном и том же  $W$  меньше, в связи с чем и вес балки меньше. И, наоборот, чем  $C$  меньше, тем  $F$  больше и вес балки больше.

Рассмотрим несколько примеров профилей и определим для них коэффициент профиля  $C$ .

а) сплошное прямоугольное сечение (рис. 16)

Центр  $Z$  вокруг оси  $Z$

Из ф-лы 53 следует:  $C = \frac{W^{2/3}}{F} \dots \dots \dots (54)$

$W = \frac{bh^2}{6}, F = bh$

примем  $b = \alpha h$

Тогда  $C_{\text{прям}} = \frac{(\alpha \frac{h^3}{6})^{2/3}}{\alpha h^2} = \frac{(\frac{1}{6})^{2/3}}{\alpha^{2/3}}$  или

$$C_{\text{прям}} = \frac{1}{\sqrt[3]{36\alpha^2}} \dots \dots \dots (55)$$

б) Полое прямоугольное сечение (рис. 17)

Центр  $Z$  вокруг оси  $Z$

$$J_z = \frac{b_1 h_1^3}{12} - \frac{b_2 h_2^3}{12}$$

$$W_z = \frac{(b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3) \cdot 2}{12 h_1} = \frac{b_1 h_1^2}{6} \left(1 - \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{h_2^3}{h_1^3}\right)$$

примем:  $b_1 = \alpha_1 \cdot h_1$ ;  $b_2 = \alpha_2 \cdot h_2$ ;  $h_2 = \beta \cdot h_1$ , тогда:

$$F = b_1 h_1 - b_2 h_2 = (\alpha_1 - \alpha_2 \cdot \beta^2) \cdot h_1^2$$

Подставив значения  $W$  и  $F$  в формулу 55 находим:

$$C_{\text{пол}} = \frac{1}{\sqrt[3]{36\alpha_1}} \frac{(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \beta^2)^{2/3}}{1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \beta^2} \dots \dots \dots (56)$$



Отношение площади прямоугольного сплошного сечения к прямоугольному полному сечению при одинаковых  $W$  равно:

$$\psi = \frac{F_{\text{полн}}}{F_{\text{спл}}} = \frac{C_{\text{полн}}}{C_{\text{спл}}} = \left(\frac{\alpha}{\alpha_1}\right)^{1/3} \cdot \frac{(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \beta^2)^{2/3}}{1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \beta^2}$$

Найдем при каком значении  $\alpha$   $\psi = 1$

$$1 = \left(\frac{\alpha}{\alpha_1}\right)^{1/3} \frac{(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \beta^2)^{2/3}}{1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \beta^2} \text{ откуда:}$$

$$\alpha = \alpha_1 \frac{(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \beta^2)^3}{(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \beta^2)^2} \dots \dots \dots (57)$$

Если  $\alpha$  будет больше найденного значения, то  $\psi$  будет больше единицы и, стало бытть, сплошное прямоугольное сечение будет менее выгодно, чем пустотелое прямоугольное сечение.

Наиболее выгодным прямоугольное сечение получается, когда  $\alpha \rightarrow 0$ ; однако, оно становится вместе с этим неустойчивым. С увеличением  $\alpha$  выгодным становится полая поперечное сечение. Увеличение  $\alpha$  вызывается, например, ограниченностью высоты поперечного сечения лонжерона. Для последних широко применяется квадратный профиль.

В тех случаях, когда сравниваются два профиля одинаковой высоты  $h$  удобно площадь поперечного сечения определять по формуле:

$$F = \frac{1}{2} \cdot \frac{2W}{h} \dots \dots \dots (58), \text{ где:}$$

$\eta$  - коэффициент использования профиля

При одних и тех же  $W$  и  $h$ , чем  $\eta$  больше, тем меньше  $F$ , тем, стало бытть, лучше использован материал в данном профиле.

Для идеального профиля, состоящего из двух тонких полок без вертикальных стенок,  $\eta = F \cdot (\frac{h}{2})^2$ ;  $W_x = \frac{F_x}{h/2} = F \cdot \frac{h}{2}$

$$\text{и } \eta = \frac{2W}{hF} = \frac{F \cdot h}{F \cdot h} = 1$$

Для тонкостенного кольца:  $\eta = 0,50$ ,

для сплошного круга:  $\eta = 0,25$



для катаных двутавровых балок  $\gamma = 0,7-0,75$

После сделанного отступления в отношении выбора профиля переходим к определению удельной прочности на изгиб.

Подставив значение  $F$  по ф-ле 53 в формулу 49, находим:

$$G = W^{2/3} \frac{\sigma}{\epsilon} = M^{2/3} \frac{\sigma}{\epsilon \cdot K_{из}} = M^{2/3} \cdot \frac{1}{\epsilon \cdot K_{из}^{3/2}}$$

Для подобных профилей (т.е. для профилей, имеющих одинаковый коэффициент  $\epsilon$ ) удельная прочность равна:

$$\frac{K_{из}^{2/3}}{\sigma} \dots \dots \dots (59)$$

чем эта величина больше, тем материал выгоднее в работе на изгиб.

Если воспользоваться ф-лой 58, то:

$$G = F \cdot \sigma = \frac{2W}{2 \cdot h} \cdot \sigma = \frac{2M}{2 \cdot h \cdot K_{из}} \cdot \sigma$$

Для профилей, имеющих одинаковую высоту  $h$ , выгодность материала и профиля характеризуется величиной  $\frac{2 \cdot K_{из}}{\sigma}$ , а выгодность материала величиной:

$$\frac{K_{из}}{\sigma} \dots \dots \dots (60)$$

последняя в этом случае и есть удельная прочность на изгиб.

### 3. Кручение.

Формулы прочности на кручение подобны ф-лам прочности на изгиб; поэтому все, что было сказано в отношении изгиба, можно повторить и в отношении кручения с заменой  $M_{из}$  на  $M_{кр}$ ,  $K_{из}$  на  $K_{кр}$ ,  $W_{из}$  на  $W_{кр}$ .

### 4. Продольный изгиб.

Вес 1 п.м. призматической стойки постоянного сечения, определяет по формуле 49.

Пологая применимость формулы Эйлера, площадь  $F$  определим из формулы  $P_{кр} = \frac{\pi^2 E J}{l^2}$ ; так как  $F$  можно представить в виде  $F = \frac{1}{\beta} \sqrt{J}$ , где  $\beta$  - коэффициент, характеризующий



профиль, то:  $F = \sqrt{\frac{P_{кр} \cdot l}{\pi^2 \cdot E \cdot B}} = \frac{l}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{P_{кр}}{E \cdot B}}$  и  $G = \frac{l}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{P_{кр}}}{\sqrt{B \cdot E}}$

При постоянных  $l$  и  $P_{кр}$  вес стойки функция  $\frac{\sqrt{B \cdot E}}{\delta}$  стало быть величина  $\frac{\sqrt{B \cdot E}}{\delta}$  характеризует качество профиля и материала.

Для профилей, имеющих одинаковый коэффициент  $\beta$

$$\frac{\sqrt{E}}{\delta} \dots \dots \dots (61)$$

выражает удельную жесткость.

Чем эта величина больше, тем материал выгоднее в работе на продольный изгиб. Важно отметить, что для элементов, работающих на продольный изгиб, материал подбирается не по признакам прочности, а по признакам жесткости.

Вообще, во всех тех случаях, когда исходным является не прочность материала, а его деформируемость, место удельной прочности занимает удельная жесткость.

Выше было указано что при подборе выгодного профиля и материала, необходимо учитывать, по возможности все-сторонне условия работы, проектируемого элемента. В частности (применительно к авиационным профилям) особое внимание привлекает вопрос устойчивости формы, поскольку эти профили полые тонкостенные и полые, а также положение центра жесткости ввиду несимметричности профилей. (Подробнее о центре жесткости будет изложено ниже).

## ГЛАВА 2.<sup>ая</sup> ИЗГИБ

### § 6. Определение упругой линии графоаналитическим методом.

На рис. 18 представлена эпюра  $\frac{M}{EY}$ . Так как:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EY} \dots \dots \dots (62)$$



то кривая  $\underline{A}$  изображает изменение кривизны упругой линии балки.

Интегрируя уравнение  $\underline{62}$  получаем уравнение углов поворота.

$$\varphi = \frac{d\psi}{dx} = \int \frac{m \cdot dx}{EY} + C_1 \dots \dots \dots (63)$$

$\int \frac{m \cdot dx}{EY} = \underline{Z}$  есть эпюра моментов площадей, представленная на рис.

19, где построение выполнено, уда от точки  $\underline{C}$  к точке  $\underline{A}$ .

Эта эпюра отличается от действительной эпюры углов поворота  $\varphi$  на некоторую постоянную величину  $\underline{C}_1$ , имеющую размерность углов поворота и зависящую от начальных условий деформации. Если  $\underline{C}_1$  известно, то следует только сдвинуть эпюру  $\underline{Z}$  на эту величину и тогда получится действительная эпюра углов поворота  $\varphi$ . Эта эпюра показана пунктиром на рис. 19.

Интегрируя уравнение  $\underline{63}$ , находим:

$$y = \int \underline{Z} dx + C_1 \cdot x + C_2 \dots \dots \dots (64)$$

$\underline{C}_2$  - имеет размерность прогибов.

$\int \underline{Z} dx + C_1 = \underline{t}$  представляет собой эпюру площадей, ограниченную пунктирной кривой  $\varphi$  (рис. 19.) и прямой  $\underline{ABC}$ . Если кривую  $\varphi$  сдвинуть на величину  $\underline{C}_2$ , (определяемую из начальных условий деформации, (то мы получим кривую прогибов  $y$  (рис. 20)

Теперь займемся определением постоянных интегрирования  $\underline{C}_1$  и  $\underline{C}_2$ . Последние определяются из условий, что прогибы на опорах  $\underline{A}$  и  $\underline{B}$  равны нулю.

Начало координат помещаем в точке  $\underline{C}$ , тогда:

$$\text{при } x = \underline{c} \quad y_A = \int \underline{Z} dx + C_1 \cdot \underline{c} + C_2 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{и при } x = \underline{z} \quad y_B = \int \underline{Z} dx + C_1 \cdot \underline{z} + C_2 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Вводим обозначения  $\int_0^{\underline{c}} \underline{Z} dx = F_0$  и  $\int_0^{\underline{z}} \underline{Z} dx = F_x$ , где  $F_0$  и  $F_x$  площади, ограниченные соответственно кривой  $\underline{Z}$  и прямой  $\underline{BC}$  и кривой  $\underline{Z}$  и прямой  $\underline{AB}$  рис. 19.



Решая уравнения 1 и 2, находим:

$$C_1 = \frac{F_2 - F_2}{l - e} \dots \dots \dots (65)$$

т.е.  $C_1$  — есть среднее значение площади, ограниченной кривой  $Z$  и прямой  $AB$ , приходящейся на единицу длины — отрезка  $AB$ .

$$C_2 = \frac{F_2 \cdot l - F_2 \cdot e}{l - e} \dots \dots \dots (66)$$

т.е.  $C_2$  — есть среднее взвешенное значение площади, ограниченной кривой  $Z$  и прямой  $AB$ , приходящейся на единицу длины — отрезка  $AB$ .

Однако, к определению постоянной  $C_2$  по формуле 66 не следует прибегать. Достаточно определить  $C_1$  по ф-ле 65 и интегрировать кривую  $\varphi$ , поместив начало координат в точке  $B$  и идя, стало быть от  $A$  к  $C$ .

Тогда из условия  $\varphi_A = 0$  при  $x = 0$  имеем:

$$0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0, \text{ откуда } C_2 = 0.$$

Если балка двуконсольная (рис. 21) то сначала определяем упругую линию для одноконсольной балки  $ABC$  и, установив угол поворота на опоре  $B$ , переходим к определению упругой линии консоли  $DB$ . Начало координат помещаем в точке  $D$ , постоянные интегрирования определяем из условий при  $x = l, \varphi_A = 0$  и  $\varphi_e = \varphi_A$ , т.е.

$$\int_0^e \frac{x dx}{e} + C_1 \cdot l + C_2 = 0 \dots \dots \dots (3)$$

$$\int_0^e \frac{m dx}{EJ} + C_1 = \varphi_A \dots \dots \dots (4)$$

Решая совместно уравнения 3 и 4 находим:

$$C_1 = \varphi_A - f_e \dots \dots \dots (67)$$

$$C_2 = -(C_1 l + F_e) \dots \dots \dots (68)$$

где  $f_e = \int_0^e \frac{m dx}{EJ}$  т.е. площадь, ограниченная эпарой  $\frac{m}{EJ}$  и отрезком  $DB$ ,  $F_e = \int_0^e x dx$ , т.е. площадь, ограниченная кривой  $Z$  и отрезком  $DB$ .



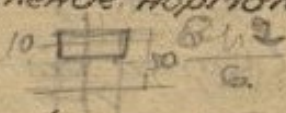
Если учесть замечание, сделанное выше для одноконсольной балки, то отпадает необходимость в вычислении  $\zeta_2$

§7. Многопоясные балки с тонкими стенками до потери устойчивости. Параллельные и не параллельные пояса.

Рассматриваемые балки представляют собой конструкцию двух поясных лонжеронов, выполненных либо в дереве (коробчатое сечение рис. 22а) либо в металле (пояс из труб. рис. 22б).

Двух- и многопоясные балки кроме того представляют собой расчетную схему двух- и многопоясных криволиней, когда расчет ведется на изгиб в плоскости крыла.

Так как стенки многопоясных балок очень тонкие, то нормальные силы, воспринимаемые стенками, пренебрегают по сравнению с нормальными силами, воспринимаемыми поясами, что упрощает расчет (упрощается вычисление нормальных и касательных напряжений).

$\sigma = \frac{M}{W}$    $\sigma = \frac{M \cdot y}{I_z}$

Определение нормальных напряжений производится по обычной формуле изгиба  $\sigma = \frac{M \cdot z}{I}$

В тех случаях, когда пояса имеют незначительную по сравнению с высотой толщину сечения балки, можно в пределах сечения пояса допустить замену трапециoidalного распределения нормальных напряжений на равномерное.

Тогда осевая сила, воспринимаемая поясами двухпоясной балки:

$N = \frac{M}{h_1} \dots \dots \dots (69)$

Методику определения осевых сил в поясах многопоясной балки, осветим на примере четырехпоясной балки симметричного поперечного сечения (рис. 23).

Распределение нормальных напряжений в поперечных сечениях поясов предполагает равномерным; тогда:

$\sigma_1 \cdot F_1 = N_1 \dots \dots (a) \quad \sigma_2 \cdot F_2 = N_2 \dots \dots (б)$



Из элюары нормальных напряжений (рис 24б) вытекает:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{h_{1/2}}{h_{2/2}} = \frac{h_1}{h_2} \dots \dots \dots (8)$$

из равновесия внешнего и внутреннего момента вытекает:

$$N_1 \cdot h_1 + N_2 \cdot h_2 = M \dots \dots \dots (9)$$

совместное решение уравнений а, б, в, г приводит к следующим результатам:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\sigma_1 \cdot F_1}{\sigma_2 \cdot F_2} = \frac{\frac{h_1}{2} \cdot F_1}{\frac{h_2}{2} \cdot F_2} \dots \dots \dots (70)$$

т.е. отношение осевых сил в поясах равно отношению статических моментов площадей поперечных сечений поясов и

$$N_2 = \frac{M}{h_2} \cdot \frac{1}{\frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{F_1}{F_2} + 1} \dots \dots \dots (71)$$

$$N_1 = N_2 \cdot \frac{J_1}{J_2} \dots \dots \dots (72)$$

где  $J_1 = \frac{h_1}{2} \cdot F_1$ ,  $J_2 = \frac{h_2}{2} \cdot F_2$

Следует отметить принципиальную разницу в определении осевых сил по формуле 69 и по формулам 71, 72. В первом случае осевые силы зависят не от положения нейтральной линии и от площади поперечного сечения поясов, а лишь от высоты сечения (такое же положение имеет место в формулах), во втором случае осевые силы зависят от положения нейтральной линии и от поперечного сечения поясов, что является следствием элюары нормальных напряжений (рис. 24б) имеющей место при изгибе балки.

Исследуем закон распределения касательных напряжений в поперечном сечении балки с параллельными поясами. Касательные напряжения в пределах поперечного сечения пояса определяются по общеизвестной формуле:

$$\tau = \frac{\sigma}{\nu} \cdot \frac{J_2}{J_2}$$

и распределяются по параболе в пределах толщины этого пояса



речного сечения.

Закон распределения касательных напряжений в пределах поперечного сечения стенки устанавливается, исходя из следующего: рассматриваем равновесие элемента балки длиной  $dx$  (рис. 25), выделенного с помощью сечений по плоскостям  $m-m$ ,  $n-n$ ,  $k-k$ . Уравнение проециций на ось  $X$   $\Sigma X=0$  представляется в виде:  $N_1 - (N_1 + dN_1) + \tau_{yx} \cdot \delta \cdot dx \cdot 2 = 0$ ,

$$\text{откуда: } \tau_{yx} = \frac{dN_1}{2\delta \cdot dx}$$

Если допустить, что осевая сила в пределах поперечного сечения пояса распределяется равномерно, то:

$$N_1 = b_1 \cdot F_1 = \frac{M \cdot h_1}{J_z} \cdot F_1 = \frac{M \cdot F_1}{J_z} \quad \text{и}$$

$$\tau_{yx} = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{F_1}{J_z \cdot 2\delta} = \frac{Q \cdot F_1}{J_z \cdot 2\delta} \dots \dots \dots (73)$$

Для двупоясной балки, симметричного поперечного сечения, если пренебречь сопротивлением стенок на изгиб (о чем говорилось выше) и моментом инерции поперечных сечений поясов относительно собственной оси:

$$J_z = 2 F_1 \cdot \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 = \frac{F_1 \cdot h_1^2}{2}$$

Учитывая также, что  $F_1 = F_2 \cdot \frac{h_2}{h_1}$ ; из уравнения 73 находим:

$$\tau_{yx} = \frac{Q \cdot F_1 \cdot \frac{h_1}{2}}{F_1 \cdot \frac{h_1^2}{2} \cdot 2\delta} = \frac{Q}{h_1 \cdot 2\delta} \dots \dots \dots (74)$$

Для рассматриваемой нами четырехпоясной балки:

$$J_z = F_1 \cdot \frac{h_1^2}{2} + F_2 \cdot \frac{h_2^2}{2} \quad \text{и}$$

$$\tau_{yx} = \frac{Q}{\left[1 + \frac{F_2}{F_1} \cdot \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2\right] 2\delta} \dots \dots \dots (75)$$

Стало быть касательные напряжения  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  в пределах участка  $d_1$  (рис. 24с) распределяются по закону прямой. Каналогичному выводу мы придем, исследуя участок  $d_2$  (рис. 24а).



Действительно, рассмотрим равновесие элемента балки длиной  $dx$  (рис. 26), выделенного с помощью сечений по плоскостям  $m-m_1$ ,  $n-n_1$ ,  $K_1-K_2$  (см. рис. 23).

Уравнение проецируй на ось  $X$ ,  $\sum X = 0$  представляется в виде:  $[N_1 - (N_1 + dN_1)] + [N_2 - (N_2 + dN_2)] + \tau_{yx} \cdot 2\delta \cdot dx = 0$   
или:  $-(dN_1 + dN_2) + \tau_{yx} \cdot 2\delta \cdot dx = 0$ , откуда:

$$\tau_{yx} = \frac{dN_1 + dN_2}{2\delta \cdot dx}$$

Учитывая, что  $N_1 = \sigma_1 \cdot F_1 = \frac{m \cdot h_1}{J_x} \cdot F_1 = \frac{m F_1}{J_x}$

и  $N_2 = \sigma_2 \cdot F_2 = \frac{m \cdot h_2}{J_x} \cdot F_2 = \frac{m F_2}{J_x}$ , находим:

$$\tau_{yx} = \frac{dm}{dx} \cdot \frac{F_1 + F_2}{J_x \cdot 2\delta} = \frac{Q(F_1 + F_2)}{J_x \cdot 2\delta}$$

(76)

Так как:  $F_1 = F_1 \frac{h_1}{2}$      $F_2 = F_2 \frac{h_2}{2}$      $J_x = F_1 \frac{h_1^2}{2} + F_2 \frac{h_2^2}{2}$ , то:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{Q \left( F_1 \frac{h_1}{2} + F_2 \frac{h_2}{2} \right)}{h_1 \left[ F_1 \frac{h_1^2}{2} + F_2 \frac{h_2^2}{2} \right] \cdot 2\delta} \dots \dots \dots (77)$$

Эти касательные напряжения в поперечном сечении четырехпоясной деревянной балки коробчатого сечения с толстыми полками представлена на рис. 24с. Расчетными напряжениями являются касательные напряжения в стеночке.

При проектировании многопоясных балок (а, стало быть, в частности и при проектировании кривлебов) следует учитывать следующее статическое свойство поперечного сечения многопоясных балок. Это статическое свойство представляет собой одно из проявлений парадокса Эмерсона в том смысле, что не всякое наращивание многопоясных балок (увеличение количества поясов) повышает их сопротивляемость (см. Беляев, ЦАГИ, вып. 165). В этом легко убедиться, хотя бы на сравнении двух- и четырехпоясной балки.



Для двухпоясной балки (рис. 22)  $W_{z'} = \frac{J_z}{h_1}$ , если говорить о моменте сопротивления центра тяжести поперечного сечения пояса;  $J_z = F_1 \frac{(h_1)^2}{2}$  Стало быть,  $W_{z'} = F_1 \cdot h_1$

Для четырехпоясной балки момент сопротивления центра тяжести поперечного сечения крайнего пояса:

$$W_{z''} = \frac{J_z}{h_{1/2}} = \frac{F_1 \cdot h_1^2 + F_2 \cdot h_2^2}{h_1} \dots \dots \dots (78)$$

Чтобы установить, когда именно наращивание балки (т.е. увеличение количества поясов), приводит к невыгодным результатам, найдем с помощью формулы 78, при каких значениях  $h_2$ ,  $W_{z''}$  достигает минимума.

Пользуясь общими принципами анализа устанавливаем:

$$\frac{dW_{z''}}{dh_1} = \frac{2h_1 \cdot F_1 \cdot h_1 - (F_1 \cdot h_1^2 + F_2 \cdot h_2^2)}{h_1^2} = 0$$

или  $F_1 \cdot h_1^2 - F_2 \cdot h_2^2 = 0$ , откуда:

$$h_1 = h_2 \cdot \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} \dots \dots \dots (79)$$

после чего  $N_{z''} = \frac{F_1 \cdot h_2^2 \cdot \frac{F_2}{F_1} + F_2 \cdot h_2^2}{h_2 \cdot \sqrt{\frac{F_2}{F_1}}} = \frac{2F_2 \cdot h_2}{\sqrt{\frac{F_2}{F_1}}}$

$$\frac{W_{z''}}{W_{z'}} = \frac{2F_2 \cdot h_2}{\sqrt{\frac{F_2}{F_1}} \cdot F_2 h_2} = \frac{2}{\sqrt{\frac{F_2}{F_1}}}$$

Из формулы 79 следует:  $\sqrt{\frac{F_2}{F_1}} = \frac{h_1}{h_2}$

Стало быть:  $\frac{W_{z''}}{W_{z'}} = 2 \frac{h_2}{h_1} \dots \dots \dots (80)$

Только в том случае из анализа формулы 80 вытекает:  $W_{z''} > W_{z'}$ , когда  $\frac{h_1}{2} < h_2$ ; только в этом случае наращивание приведет к увеличению момента сопротивления центра тяжести поперечного сечения крайнего пояса.

Переходим к определению осевых сил в поясах и ка-



отдельных напряжений в поперечном сечении двухпоясной балки наклонными поясами (рис. 27)

Возьмем произвольное поперечное сечение  $\alpha-\alpha$  и рассмотрим равновесие левой отсеченной части балки (рис. 28):

$$\sum x=0; N_B \cos \beta_1 + N_H \cos \beta_2 = 0 \dots \dots \dots (a)$$

$$\sum y=0; N_B \sin \beta_1 - N_H \sin \beta_2 + Q_x(ст) - Q_x = 0 \dots \dots \dots (b)$$

$$\sum M_x=0; N_B \cos \beta_1 h_x - M_x = 0 \dots \dots \dots (в)$$

В уравнениях  $a, b, в$  приняты следующие обозначения:

$N_B$  — осевое усилие в верхнем поясе;

$N_H$  — осевое усилие в нижнем поясе;

$Q_x(ст)$  — перерезывающая сила в стенке в сечении  $\underline{x}$ ;

$Q_x$  и  $M_x$  — перерезывающая сила и изгибающий момент

в сечении  $\underline{x}$  от внешних сил.

Из совместного решения уравнений  $a, b, в$  вытекает:

$$\boxed{N_B = \frac{M_x}{h_x \cos \beta_1}} \dots \dots \dots (81)$$

$$\boxed{N_H = \frac{M_x}{h_x \cos \beta_2}} \dots \dots \dots (82)$$

$$Q_x(ст) = Q_x - N_B \sin \beta_1 + N_H \sin \beta_2 \text{ или } \boxed{Q_x(ст) = Q_x - \frac{M_x}{h_x} (\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2)} \dots (83)$$

Из анализа формул 81, 82, 83 вытекает:

1) Осевые силы в поясах в балке с непараллельными поясами поучаются большими, чем в соответствующем случае (при той же высоте  $h_x$ ) для балки с параллельными поясами.

Такой результат получается вследствие того, что поперечное сечение балки не нормально к наклонным осям поясов.

2) Срезающая сила в стеночке уменьшается за счет осевых сил в наклонных поясах.



$$3) \text{ Когда } \beta_2 = \beta_1 = \beta, \quad Q_x(\text{см}) = Q_x - 2 \frac{M_x}{I_x} \cdot \text{tg } \beta \dots \dots \dots (84)$$

$$N_s = (N_n) = \frac{M_x}{I_x \cdot \cos \beta} \dots \dots \dots (85)$$

Эпюра касательных напряжений в поперечном сечении стеночки определяется так же как и для балки с параллельными поясами.

Само собой разумеется, что полученные нами формулы не зависят от статической схемы балки и в одинаковой мере относятся как к консольным, так и к двухопорным балкам.

§ 8. Факторы, вызывающие потерю устойчивости тонкой стенки двухпоясной балки.

Двухпоясные балки являются рациональными конструкциями в смысле использования материала (материал, воспринимающий нормальные напряжения, сконцентрирован вдали от нейтральной оси); коэффициент использования профиля  $\eta$  приближается к единице (см. § 6). Слабым местом в двухпоясных балках являются тонкие стенки, которые сравнительно легко теряют устойчивость.

Эта потеря устойчивости вызывается следующими напряжениями:

1. Касательные напряжения.

Пусть пластина (рис. 29) толщиной  $\delta$  подвержена действию чистого сдвига касательными напряжениями  $\tau$ . Выясним напряжения на наклонном сечении  $\alpha-\alpha$ . Рассмотрим равновесие левой отсеченной части (рис. 30). Из условия, что сумма проекций сил на направление  $\beta_\alpha$  равна нулю, находим:

$$-\beta_\alpha \cdot \frac{b}{\sin \alpha} \delta + \tau h \delta \cos \alpha + \tau h \delta \cdot \text{ctg } \alpha \cdot \sin \alpha = 0$$

откуда  $\beta_\alpha = \tau \cdot \sin 2\alpha \dots \dots \dots (86)$

Из условия, что сумма проекций сил на направление  $\tau_\alpha$  равна нулю, находим:



$$\tau_{\alpha} \cdot \frac{h}{\sin \alpha} \cdot \delta + \tau \cdot h \cdot \delta \cdot \sin \alpha - \tau \cdot \delta \cdot h \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos \alpha = 0$$

откуда  $\tau_{\alpha} = \tau \cdot \cos 2\alpha \dots \dots \dots (87)$

Из уравнений 86 и 87 следует, что пластина подвержен-  
ная чистому сдвигу, испытывает сжимающие напряжения по на-  
клонным направлениям:

Очевидно, по этим направлениям (или по направлениям близ-  
ким к ним) пластина должна терять устойчивость. Это обстоя-  
тельство подтверждается также и более точными исследовани-  
ями. Когда  $\alpha = 45^{\circ}$ ,  $\sigma_{\alpha}$  достигает максимума,  $\tau_{\alpha} = \tau$ , стало  
быть, элемент пластинки, показанный на рис. 31 подвержен  
чистому растяжению — сжатию.

Когда пластина зажата в рамку, подобно стеночке двух-  
поясной балки, то и после потери устойчивости она не теряет  
работоспособности, превращаясь в так называемое диагонально  
растянутое поле. Иначе говоря, пластина из гладкого состояния  
переходит в волнообразное, гофрированное; отдельные гофры  
этой пластинки представляют собой как бы лентки расчалки, вос-  
принимающие растягивающие напряжения и не воспринимаю-  
щие сжимающих напряжений.

## 2. Радиальные напряжения.

Формулы сопротивления материалов и строительной  
механики получены из рассмотрения действия сил на систему,  
форма которой принимается, такой же, какой она была до де-  
формации системы (если исключить из рассмотрения продоль-  
ный изгиб и сжатие-изогнутые брешья).

Такое допущение приемлемо, покагда имеют место малые  
деформации. С ростом же этих деформаций указанное выше  
допущение приводит к искажению действительных условий рабо-  
ты системы и ее отдельных элементов. В частности в этом



можно убедиться, изучая пределы применимости приближенного дифференциального уравнения упругой линии  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{EJ}$  которое получено в результате допущения  $ds = dx$  (или что то же  $(y')^2 = 0$ ), где  $ds$  — элемент упругой линии, а  $dx$  — элемент первоначальной оси балки.

Если этого допущения не делать, то силы, действующие на поперечное сечение балки, необходимо относить к повернутому положению этого сечения.

Указанное обстоятельство имеет особо важное значение для гибких балок, к каковым можно отнести и двухъярусные балки с тонкой стенкой. Рассмотрим чистый изгиб элемента балки длиной  $dx$  (рис. 32). На рис. 33 представлено деформированное состояние балки и направление осевых сил поясов в этом состоянии, совпадающее с направлением касательной в соответствующей точке изогнутого волокна.

Величина осевых сил  $N$  определяется по формуле  $N = \frac{M}{h_1}$

Равнодействующая  $dR$  сил  $N$  в отдельности в верхнем и нижнем поясе совпадает с радиальным направлением.

Из рис. 33 следует:

$$dR = (N \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2}) \cdot 2$$

Пологая, что  $\sin \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\Delta\varphi}{2}$  (вследствие малости угла  $\Delta\varphi$ ), находим:

$$dR = N \cdot \Delta\varphi$$

Птак как  $\Delta\varphi = \frac{ds}{\rho} = \frac{M \cdot ds}{EJ}$  и  $N = \frac{M}{h_1}$ , то:

$$dR = \frac{M}{h_1} \cdot \frac{M \cdot ds}{EJ} = \frac{M^2 ds}{EJ}$$

Интенсивность радиальной сжимающей силы:

$$q_2 = \frac{dR}{ds} = \frac{M^2}{h_1 \cdot EJ}$$



Радиально сжимающие напряжения:  $\sigma_r = \frac{q_2}{\delta} \dots \dots \dots (89)$

Когда  $\sigma_r \gg \sigma_{кр}$  стенка теряет устойчивость.

$\sigma_{кр}$  — критическое сжимающее напряжение.

Чтобы предохранить стенку от преждевременной потери устойчивости, ее укрепляют вертикальными стойками жесткости

§ 9. Двухпоясные балки с параллельными поясами  
с жесткими параллельными стойками и с тонкой  
стенкой потерявшей устойчивость.

В основу излагаемого расчета положены такие допущения:

1. Напряжения сжатия поперек волн равны нулю;
2. Угол наклона волн  $\varphi$  (рис. 34) во всем поле стенки между двумя стойками постоянный;
3. Ширина и глубина волн (гофра) постоянны вдоль гребня. Постоянно также и нормальное растягивающее напряжение  $\sigma_\varphi$  вдоль гребня.
4. Пояса и стойки абсолютно жесткие, что дает возможность не учитывать влияния упругости этих элементов на усилия в стенке.\*)

Для определения сил, которые воспринимаются поясами и стенкой, произведем сечение  $a-a$  и рассмотрим равновесие правой отсеченной части (рис. 35).

$$1. \Sigma y = 0$$

$$\text{или: } -Q_x + \sigma_\varphi \delta h \cos \alpha \sin \alpha + Q_B - Q_H = 0 \dots \dots \dots (a)$$

В уравнении (a)

$Q_x$  — внешняя поперезывающая сила в сечении  $a-a$ ;

$\sigma_\varphi$  — растягивающее напряжение вдоль гребня волны, которое нормально к направлению  $mn$  (рис. 35)

\*) см. Ромашевский, ЦАГИ, Вып. 206.



$\delta$  — толщина стенки;

$\cos \varphi \cdot \delta \cdot h$  — площадь косо́го сечения тп, к которому отнесе-  
ны напряжения  $b\varphi$ ;

$Q_B$  — перерезывающая сила верхнего пояса;

$Q_H$  — перерезывающая сила нижнего пояса.

Перерезывающие силы в поясах создаются за счет ра-  
стягивающих сил, передающихся от стенки на пояса. Если вы-  
резать стенку в пределах каждой ячейки между двумя стойка-  
ми, то влияние стенки на пояса и стойки необходимо заменить  
силами, показанными на рис. 36.

Стало быть, каркас балки представляет собой рамную  
систему, подобную балке Виренделя (см. курс мостов проф. Стре-  
лецкого).

В целях упрощения отказываются от применения ме-  
тодов расчета рам и рассматривают верхний и нижний по-  
яса, как многопролетные неразрезные балки, а стойки прини-  
мают шарнирно связанными с поясами. Вследствие того, что  
верхний и нижний пояса находятся в симметричных услови-  
ях  $Q_B = Q_H$

В тех случаях, когда эта симметричность не имеет  
места, разность  $Q_B - Q_H$  все же незначительна и ею допустимо  
пренебречь.

Аналогичное замечание относится и к изгибаю-  
щим моментам  $M_B$  и  $M_H$ .

Так как  $Q_B - Q_H = 0$  и  $\cos \varphi \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} \sin 2\varphi$ , то  
из уравнения (а) следует:

$$b\varphi = \frac{2Q_x}{h \cdot \delta \cdot \sin 2\varphi} \dots \dots \dots (90)$$



Стало бытть, растягивающее напряжение  $b_{\psi}$  есть функция перерезывающей силы и угла  $\psi$  наклона волн. Теоретически этот угол находится из условия минимума потенциальной энергии одной ячейки, и величина его колеблется в пределах от  $40^{\circ}$  до  $45^{\circ}$ , что также подтверждается экспериментально.\*)

Если  $\psi = 45^{\circ}$ , то  $b_{\psi} = \frac{2Q_x}{h\delta} = 2\tau$ , где  $\tau$  — то касательное напряжение, которое получается в соответствующем случае в стенке, не потерявшей устойчивости. В отношении полученного результата полезно провести аналогию с фермой (рис. 37), когда сжатый стержень 1 теряет устойчивость и выключится из работы, усилие в стержне 2 увеличится в 2 раза.

Из условия равновесия  $\sum M_{a_1} = 0$  вытекает:

$$N_B \cdot h + X_0 \frac{h}{2} - M_x + M_B - M_H = 0 \dots \dots \dots (8)$$

где  $X_0$  — горизонтальная составляющая растягивающих напряжений по стенке в сечении  $a-a$ .

Вследствие того, что  $M_B - M_H = 0$ , из уравнения (8) находим:  $N_B = \frac{M_x}{h} - \frac{X_0}{2} \dots \dots \dots (91)$

Из условия равновесия  $\sum M_{a_2} = 0$  находим:

$$N_H = \frac{M_x}{h} + \frac{X_0}{2} \dots \dots \dots (92)$$

Итак как  $X_0 = b_x \cdot h \cdot \delta \cdot \cos \psi \cdot \cos \psi = b_x \cdot h \cdot \delta \cdot \cos^2 \psi = \frac{Q_x}{\operatorname{tg} \psi}$ , то

$$N_B = \frac{M_x}{h} - \frac{Q_x}{2 \operatorname{tg} \psi} \dots \dots \dots (93)$$

\* В статье Некк и Эвнер "Luftfahrtforschung" 1935г., N 11, приводится следующая формула для определения угла  $\psi$ :  $\sin^2 \psi = \sqrt{\sigma^2 + \sigma^3} - \sigma$ , где:

где:  $\sigma = \frac{1 + \frac{h\delta}{2F_n}}{\frac{t\delta}{F_{cm}} - \frac{h\delta}{2F_n}}$

$F_n$  — площадь поперечного сечения пояса;  
 $F_{cm}$  — площадь поперечного сечения стойки.



$$N_H = \frac{M_x}{h} + \frac{Q_x}{2 \operatorname{tg} \varphi} \dots \dots \dots (94)$$

Из анализа формул 92 и 93 вытекает, что осевые силы в поясах являются функцией момента и перерезывающей силы.

Осевые силы в поясах балки, тонкая стенка которой не потеряла устойчивости, являются функцией только момента. Влияние перерезывающей силы на осевые силы в поясах отображается величиной  $\frac{x_0}{2}$ , а) представляющей собой для крайней левой стойки то давление, которое стойка ввиду сосредоточенных сил передает на пояса, и б) являющейся результатом растягивающих сил, передаваемых от стенки на стойку.

Помимо осевого сжатия-растяжения пояса балки подвергаются изгибу силами натяжения стенки.

Интенсивность этих сил определяется по формуле:

$$q_y = b_y \sin \varphi \dots \dots \dots (95)$$

Расчет на изгиб поясов ведется как для неразрезных балок, опорами которых служат стойки. Такая расчетная схема обосновывается тем, что стойки не имеют поступательных перемещений в вертикальном направлении, вследствие симметричных условий работы верхнего и нижнего пояса. Для многопролетных неразрезных балок, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q_y$ ,  $M_{\max} = \frac{q_y l^2}{12}$ , когда длина всех панелей равна  $l$ .

В тех случаях, когда стенка крепится эксцентрично к поясам, необходимо учитывать внецентренное приложение сил напряжения (вызывающих кручение поясов).

Аналогичное замечание необходимо учесть в отношении стоек.



Усилия в стойках мы определим, рассматрив равновесие произвольного узла, рис. 38, вырезанного из балки замкнутым сечением  $m-m$  (см. рис. 36) Из условия  $\sum Y = 0$  вытекает:

$$N_{cm}^i = P_i - Q_n^i - Q_n^i - b_n^i y \cdot \cos \varphi \sin \varphi + b_n^i y \cdot \delta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi = 0$$

Учитывая формулу 90, находим:

$$N_{cm} = P_i \left(1 + \frac{y}{h}\right) + (Q_n^i + Q_n^i) \dots \dots \dots (96)$$

Помимо осевой деформации стойка испытывает изгиб от сил натяжения стенки. Интенсивность этих сил измеряется величиной  $(b_n^i - b_n^i) \cdot \cos \varphi$ . Когда  $b_n^i = b_n^i$ , стойка испытывает исключительно осевую деформацию. Крайние наружные стойки испытывают изгиб.

Пример 5. Для двухпоясной балки с тонкой стенкой

(рис. 39): 1) построить эпюру осевых сил и определить максимальное нормальное напряжение в поясах, 2) построить эпюру перерезывающих сил и определить максимальное касательное напряжение, полагая, что стенки не потеряли устойчивости.

Установив потерю устойчивости стенки и превращение ее в диагонально-растянутое поле, определить:

- 1) эпюру осевых сил, 2) максимальное растягивающее напряжение в стенке, 3) максимальное напряжение в поясе балки.

Данные:  $\delta = 0,03 \text{ см}$  — толщина стенки;

$h = 40,0 \text{ см}$  — высота стенки (размер между осями пояса);

$F = 1,2 \text{ см}^2$  — площадь поперечного сечения стенки;

$F_n = 5 \text{ см}^2$  — площадь поперечного сечения пояса;

$W_n = 6,285$  — момент сопротивления пояса;

$F_e = 2,0 \text{ см}^2$  — площадь поперечного сечения средней стойки;

$F_c = 4,0 \text{ см}^2$  — площадь поперечного сечения крайней стойки;

$e = 20 \text{ см}$  — расстояние между осями стоек;



$L = 160 \text{ см.}$  — пролет балки;

$P = 1200 \text{ кг}$  — внешняя сила.

Решение:

1. Стенка балки не потеряла устойчивости.

1) Определение реакций опор.

$$A = \frac{P \cdot e}{L} = \frac{1200 \cdot 6 \cdot 20}{160} = 900 \text{ кг},$$

$$B = 1200 - 900 = 300 \text{ кг}.$$

2) Определение эпюры перерезывающих сил.

Эпюра  $Q$  как для двухопорной балки представлена на рис. 40.

Максимальная сдвигающая сила имеет место на опоре  $A$ . На этой опоре и следует определить максимальное касательное напряжение.

3) Определение касательных напряжений.

Изменение касательных напряжений по длине балки следует изменению перерезывающей силы по длине балки. Касательное напряжение на протяжении участков 1 и 2

$$\tau = \frac{A}{\delta \cdot h} = \frac{A}{F} = \frac{900}{1,2} = 750 \text{ кг/см}^2$$

Касательное напряжение  $B$  в пределах участков 3, 4, 5, 6, 7, 8 —

$$\tau = \frac{B}{F} = \frac{300}{1,2} = 250 \text{ кг/см}^2$$

Если рассматривать часть стенки между двумя стойками, как пластину, опертую всеми четырьмя сторонами и находящуюся в состоянии чистого сдвига, то напряжение  $\tau_{кр}$  определится по формуле

$$\tau_{кр} = K \cdot \sigma_3;$$

$\tau_{кр}$  — критическое значение касательного напряжения; если  $\tau > \tau_{кр}$ , то пластина теряет устойчивость;  $\sigma_3$  — Эйлераво нормальное напряжение, определяемое по формуле

$$\sigma_3 = \frac{\pi^2 E \delta^2}{12 B^2 (1 + \mu)}$$



(см. Тимошенко, „Сопротивление материалов“, изд. 1932г, ч II, стр. 212).

В рассматриваемом нами случае  $v$  представляет собой меньший размер пластины  $b=c=20$  см; коэффициент  $K$  определяется из таблицы 22 в вышеупомянутой книге.

Отношению  $\frac{h}{e} = \frac{40}{20} = 2$ , соответствует коэффициент  $K=6,6$

$$b_3 = \frac{10,7 \cdot 10^5 \cdot 0,03^2}{12 \cdot 20^2 \cdot (1 - 0,3^2)} = \frac{6300}{436800} = 1,4 \text{ кг/см}^2$$

$$\tau_{кр} = K b_3 = 6,6 \cdot 0,014 = 9 \text{ кг/см}^2$$

Сравнение полученного значения  $\tau_{кр}$  с определенными выше касательными напряжениями  $\tau$  убеждает нас в том, что стенка рассматриваемой балки потеряла устойчивость во всех отсеках балки.

В целях сравнения усилий в поясах двупоясной балки до и после потери устойчивости стенки, определим осевые силы в поясах двупоясной балки, полагая, что стенка не потеряла устойчивости.

4) Определение эпюры осевых сил в поясах балки, когда стенка не потеряла устойчивости.

Осевые силы определяются по формуле  $N = \frac{M}{h}$

Так как  $h = \text{const}$ , то эпюра  $N$  совпадает с эпюрой  $M$ , если ординаты последней уменьшить в  $h$  раз.

На рис. 41 представлена эпюра  $M$ .

$$\max M = \frac{P \cdot 2e \cdot c}{2} = \frac{12 P e^2}{8e} = 36000 \text{ кг/см}$$

На рис. 42 представлена эпюра  $N$

$$\max N = \frac{\max M}{h} = \frac{36000}{40} = 900 \text{ кг}$$

$$b_{\max} = \frac{N_{\max}}{F_n} = \frac{900}{5} = 180 \text{ кг/см}^2$$



Разрушающее напряжение для дюралюминевой трубы на растяжение и сжатие равно  $3800 \text{ кг/см}^2$  (см. Справочник по расчету самолета на прочность, изд. 1937 г.)

II. Стенка балки потеряла устойчивость и превратилась в диагонально растянутое поле.

1. Определение растягивающих напряжений в стенке

$$\sigma = \frac{2}{\delta h \cdot \sin 2\varphi} \quad \text{Положаем } \varphi = 45^\circ, \text{ тогда}$$

$$\sigma = \frac{2Q}{\delta \cdot h} = 27$$

Стало бытть, удвоив определенные выше значения касательных напряжений, когда стенка не потеряла устойчивости, находим  $\sigma$ .

В пределах отсеков 1 и 2  $\sigma = 2 \cdot 750 = 1500 \text{ кг/см}^2$

В пределах отсеков 3, 4... 8  $\sigma = 2 \cdot 250 = 500 \text{ кг/см}^2$

Разрушающее напряжение равно  $3600 \text{ кг/см}^2$ .

2. Определение эюрбы осевых сил в поясах:

$$\text{В верхнем поясе } N_B = \frac{M_x}{h} + \frac{Q_x}{2 \operatorname{tg} \varphi} = \frac{M_x}{h} + \frac{Q_x}{2}$$

$$N_H = \frac{M_x}{h} - \frac{Q_x}{2}$$

Стало бытть, эюрбы осевых сил  $N_B$  и  $N_H$  могут бытть получены, если на эюрбу  $\frac{M_x}{h}$  (т.е. на эюрбу  $N$ , когда стенка не потеряла устойчивости) наложить соответственно эюрбы сил  $+\frac{Q}{2}$  и  $-\frac{Q}{2}$ , являющихся результатом растягивающих сил стенки, которые вызывают сжатие поясов

Эюрбы  $N_B$  и  $N_H$  представлены на рис. 43 и 44.

3. Определение максимального изгибающего момента в поясах.

В отсеках 1 и 2  $q_y = b_y \sin \varphi = 1500 \frac{\sqrt{2}}{2} = 1500 \cdot 0,707 = 1060,5 \text{ кг/см}$

В отсеках 3, 4... 8  $q_y = b_y \sin \varphi = 500 \cdot 0,707 = 353,5 \text{ кг/см}$



Элюра  $Q_y$  представлена на рис. 45.

Для определения изгибающего момента на опоре С при-  
нимаем во внимание лишь пролеты 1, 2, 3, 4 и 5.

Из таблиц Менша (см. "Справочная книга по бетону  
и железобетону", проф. Астафьев) для расчета неразрезных  
балок устанавливаем:

$$M_c = 0,079 \cdot q_y \cdot l^2 + 0,054 \cdot 2q_y \cdot l^2 - 0,018 \cdot 2q_y \cdot l^2 = 0,151 q_y \cdot l^2 \text{ или}$$

$$M_c = 0,151 \cdot 353,5 \cdot 20^2 = 21351,4 \text{ кг/см.}$$

Максимальные нормальные напряжения в поясах в сече-  
нии С:

$$\text{Верхний пояс } \sigma = \frac{N_B}{F_n} + \frac{M_c}{W_n} = \frac{1350}{5} + \frac{21351,4}{6,285} = 270 + 3397 = 3667 \text{ кг/см}^2$$

$$\text{Нижний пояс } \sigma = \frac{N_H}{F_n} + \frac{M_c}{W_n} = \frac{750}{5} + \frac{21351,4}{6,285} = 3547,8 \text{ кг/см}^2$$

### § 10. Определение деформаций двухпоясных балок

Вычисление деформаций двухпоясных балок нам потре-  
буется не только применительно к конструкции, представля-  
ющей собой двухпоясную балку, но также и в тех случаях,  
когда двухпоясная балка представляет собой элемент слож-  
ной конструкции (например, коробки, подверженной кручению).

Определение перемещений удобно производить, поль-  
зуясь универсальной аналитической формулой Мора.

Тогда перемещение любого узла двухпоясной балки со  
стенкой, не потерявшей устойчивости, определяется по фор-  
муле:

$$\delta_{mk} = \sum \int_0^l \frac{N_m N_k dS}{E F_n} + \sum \int_0^l \frac{Q_m Q_k dx}{G F_{cm}} \dots \dots \dots (97)$$

где:  $N_m$  и  $N_k$  — осевые силы в поясах соответственно в  
 $m$ -ом и  $k$ -ом состояниях;

$Q_m$  и  $Q_k$  — перерезывающие силы в стенке соответственн о



В  $M^{\text{ог}}$   $K^{\text{ог}}$  состоянии;

$F_n$  - площадь поперечного сечения пояса;

$F_{\text{ст}}$  - площадь поперечного сечения стенки.

В качестве примера, иллюстрирующего пользование формулой (97), рассмотрим определение прогиба конца консольной двухпоясной балки с наклонными не параллельными поясами, нагруженной силой  $Q$  на свободном конце.

Решение выполняется в следующем порядке.

1. Определение уравнений осевых сил и внутренних срезающих сил.

Внутренние срезающие силы в стеночке и осевые силы в поясах определяются соответственно по формулам:

$$Q_x = Q \left[ 1 - \frac{x}{h_x} (\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2) \right] \dots \dots \dots (83)$$

$$N_B = \frac{Q_x}{h_x \cos \beta_1} \dots \dots \dots (81) \quad N_H = \frac{Q_x}{h_x \cos \beta_2} \dots \dots \dots (82)$$

Из геометрических соотношений вытекает

$$h_x = h_0 + x (\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2) \dots \dots \dots (98)$$

Подставив значение  $h_x$  по формуле 98 в формулы 83, 81 и 82, находим:

$$Q_x = Q \left[ 1 - \frac{x}{h_0} \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2} \right] \dots \dots \dots (99)$$

$$N_B = Q \frac{x}{[h_0 + x (\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2)] \cos \beta_1} \dots \dots \dots (100)$$

$$N_H = Q \frac{x}{[h_0 + x (\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2)] \cos \beta_2} \dots \dots \dots (101)$$

2. Определение прогиба под силой  $Q$

Для определения прогиба рассматриваем два состояния: в первом состоянии балка подвержена действию силы  $Q$ , во втором



постоянной балка подвержена действию силы  $Q=1$ .

Согласно Мору:

$$\delta_{1P} = \int_0^e \frac{N_B \bar{N}_B dx}{E_B F_B} + \int_0^e \frac{N_H \bar{N}_H dx}{E_H F_H} + \int_0^e \frac{Q_x \bar{Q}_x dx}{G F} \quad \text{или}$$

$$\begin{aligned} \delta_{1P} = & \frac{Q}{\cos^2 \beta_1 (\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2)^2} \cdot \frac{1}{E_B F_B} \int_0^e \frac{x^2 dx}{\left[ \frac{h_0}{\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2} + x \right]^2} + \\ & + \frac{Q}{\cos^2 \beta_2 (\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2)^2} \cdot \frac{1}{E_H F_H} \int_0^e \frac{x^2 dx}{\left[ \frac{h_0}{\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2} + x \right]^2} + \\ & + \frac{Q}{G F} \int_0^e \left( 1 - \frac{x}{\frac{h_0}{\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2} + x} \right)^2 dx \dots \dots \dots (\alpha) \end{aligned}$$

Для решения интегралов, входящих в равенство  $\alpha$  применяем метод замены переменных; тогда:

$$\delta_{1P} = \frac{Ql}{\cos^2 \beta_1 (\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2)} \cdot \frac{1}{E_B F_B} A \dots \dots$$

$$\text{где } A = \left\{ 1 - \frac{2}{\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2} \cdot \frac{h_0}{e} \left[ \frac{e}{\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2} + 1 \right] - \ln \frac{h_0}{\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2} \right\} -$$

$$- \left( \frac{h_0}{e} \right)^2 \left[ \frac{1}{\frac{h_0}{e} + 1} - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2} \right]$$

$$\cdot \left[ 1 + \left( \frac{\cos \beta_1}{\cos \beta_2} \right)^2 \frac{E_B F_B}{E_H F_H} \right] + \frac{E_B F_B}{G F} \cdot \cos^2 \beta_1 (\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2)$$

$$\left[ 2 - \left( \frac{h_0}{e} \right)^2 \left( \frac{1}{\frac{h_0}{e} + 1} - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2} \right) \right] \dots \dots \dots (110)$$

Перемещение любого узла двухъярусной балки со стенкой, потерявшей устойчивость, определится по формуле:



$$\delta_{mk} = \sum_1^i \frac{b_k b_m l_i}{E_{стен}} F_{стен} + \sum_0^3 \frac{N_m N_n d_s}{E_n F_n} + \sum_0^n \frac{N_m^{cm} N_k^{cm} dh}{E_{ст.} F_{ст.}} \quad (103)$$

В формуле 103 индекс "ст" приписан величинам, относящимся к стойке; "стен" относится к стенке; индекс "п" относится к поясам.

Член  $\sum_1^i \frac{b_k b_m l_i}{E_{стен}} F_{стен}$  отображает влияние растягивающих напряжений в стенке, которые предполагаются постоянными в пределах одной панели (между двумя стойками).

Выражение  $\sum_1^i \frac{b_k b_m l_i}{E_{стен}} F_{стен} \dots \dots \dots (103a)$

найдено в результате следующих соображений: заменим одну ячейку бочки длиной  $l_i$  рис. 46 б параллелограмом высотой  $h$  и с площадью, равной площади ячейки  $i$  (рис. 46 в).

В этом параллелограмме длина волн постоянна и равна  $\frac{h}{\sin \alpha}$ . Представим себе стенку, состоящей из ряда параллельных полос (лент) протяженностью  $dx$  в направлении  $x$  и длиной  $\frac{h}{\sin \alpha}$  в наклонном направлении; площадь поперечного сечения такой полосы равна  $(dx \sin \alpha) \delta$  и  $\frac{N_m^{cm} N_k^{cm} h}{E_{ст.} F_{ст.}}$  в пределах стенки одной ячейки выражается в виде:

$$\int_0^{l_i} \frac{b_m (dx \sin \alpha \delta)^2 b_k \frac{h}{\sin \alpha}}{E_{ст.} dx \sin \alpha \delta} = \frac{b_m b_k h \delta l_i}{E_{ст.}} = \frac{b_m b_k l_i F_{ст.}}{E_{ст.}}$$

а для всех ячеек в виде  $\sum_1^i \frac{b_m b_k l_i}{E_{стен}} F_{стен}$ , что совпадает с первым членом формулы (103)

## § 11. ХАРАКТЕРИСТИКА ЦЕЛОГО ИЗГИБАЕМОГО БРУСА

### ЦЕНТР ЖЕСТКОСТИ.

Поперечное сечение целого изгибаемого бруса характеризуется

Если пренебречь разницей в высотах, измеряемых в свету между поясами и между осями поясов



следующими показателями:

1. Единая нейтральная линия;
2. Единый центр жесткости.

Если конструкция, подверженная изгибу, состоит из системы брусьев, не работающих как единое целое, то каждый из этих брусьев имеет свою нейтральную линию и свой центр жесткости. Если же брусья настолько скреплены связями, что, будучи подвергнуты изгибу, они деформируются как целый брус с общей упругой линией, то поперечное сечение такого бруса есть составное сечение с общей нейтральной линией и с определенным центром жесткости. \*)

Под центром жесткости понимается точка в плоскости поперечного сечения, обладающая следующим свойством: внешняя срезающая сила, проходящая через центр жесткости поперечного сечения, вызывает в нем напряжения только изгиба, иначе говоря, в этом случае отсутствует кручение сечения. Это определение центра жесткости лежит в основу метода его нахождения.

Так как при любой деформации бруса должно иметь место равновесие между внешними и внутренними силами, то линия действия внешней срезающей силы совпадает с линией действия равнодействующей внутренних срезающих сил сечения как в случае изгиба, так и в случае изгиба совместно с кручением.

Поскольку внешняя срезающая сила, проходящая через центр жесткости, вызывает исключительно деформации изгиба, то центр жесткости лежит на линии действия

\*) Имеются и промежуточные положения. Последние наблюдаются в жесткости в рамных конструкциях и в многолонжеронных крыльях.



$$\varphi = \frac{h_0}{h}$$

равнодействующей внутренних срезających сил сечения, вызываемых в нем исключительно изгибом. Отсюда и следует правило для определения положения центра жесткости: центр жесткости определяется как точка пересечения двух равнодействующих внутренних срезających сил сечения, соответствующих изгибу в двух плоскостях, параллельных главным плоскостям сечения.

Рассмотрим несколько примеров определения центра жесткости.

Пример 6. Определить положение центра жесткости сечения призматического бруса постоянного сечения (рис. 47).

Решение. Так как сечение симметрично относительно осей  $y$  и  $z$ , то равнодействующие внутренних срезających сил совпадают с осью  $y$  и  $z$ , когда изгиб происходит соответственно в главных плоскостях  $Uox$  и  $Zox$ .

Стало быть точка, в которой пересекаются равнодействующие внутренних срезających сил от изгиба в главных плоскостях, совпадает с центром тяжести сечения. Отсюда следует, что центр тяжести сечения является и центром жесткости. Этот результат не изменяется, когда рассматриваемое сечение бруса переменено по длине бруса.

Пример 7. Определить центр жесткости не симметричного сечения призматического бруса (рис. 48).

Решение. Так как сечение симметрично оси  $y$ , то равнодействующая внутренних срезających сил совпадает с осью  $z$ , когда изгиб происходит в главной плоскости  $Uox$ . Остается определить положение равнодействующей внутренних срезających сил, когда изгиб происходит в плоскости, параллельной главной плоскости  $Zox$ . Срезającej



илой, воспринимаемой ребром, пренебрегает по сравнению со срезающей силой воспринимаемой полкой. Тогда внутренняя срезаящая сила  $\underline{T}$ , воспринимаемая сечением, когда изгиб происходит в плоскости  $\underline{XOx}$ , проходит через ось  $\underline{I-I}$ , являющуюся осью симметрии полки. Точка  $\underline{e}$  пересечения осей  $\underline{I-I}$  и  $\underline{Y}$  и будет центром жесткости.

Стало быть, когда сечение имеет одну ось симметрии, то центр жесткости лежит на этой оси. Сечение будет подвергаться исключительно изгибу, когда внешняя срезаящая сила будет проходить через точку  $\underline{e}$ .

Пример 8. Определить центр жесткости для сечения балочной системы, состоящей из двух призматических брусьев постоянного сечения (рис. 49).

Решение. Так как ось  $\underline{Z}$  является осью симметрии, центр жесткости лежит на этой оси в точке, в которой равнодействующая  $\underline{T}$  внутренних срезывающих сил от изгиба в плоскости  $\underline{YOx}$  пересекается с осью  $\underline{Z}$ .

Так как сила  $\underline{T}$  есть равнодействующая внутренних срезывающих сил исключительно от изгиба, то ее положение необходимо определить из условия отсутствия кручения рассматриваемого сечения или, что все равно, из условия равенства прогибов брусьев  $\underline{1}$  и  $\underline{2}$ .

Введем обозначения:

$\underline{f}_1$  — прогиб бруса  $\underline{1}$ , когда к центру жесткости сечения этого бруса приложена сила  $\underline{T=1}$ .

$\underline{f}_2$  имеет тот же смысл, что и  $\underline{f}_1$ , но применительно к брусу  $\underline{2}$ . В рассматриваемом нами примере центры жесткости сечений брусьев  $\underline{1}$  и  $\underline{2}$  совпадают с центрами тяжести этих сечений.



$f$  — прогиб бруса 1-2 в целом, когда к центру жесткости сечения этого бруса приложена сила  $T=1$ .

$M_1$  и  $M_2$  — коэффициенты распределения, с помощью которых устанавливается распределение силы  $T$  на брусья 1 и 2. (Таким образом  $M_1 T$  и  $M_2 T$  — силы, приходящиеся соответственно на брусья 1 и 2).

Коэффициенты  $M_1, M_2$  и прогиб  $f$  определяются из следующих уравнений:

1. Уравнение статики.

$M_1 T + M_2 T = Q$ , где  $Q$  — внешняя срезающая сила, совпадающая по направлению и величине с силой  $T$ .

Стало быть:  $M_1 T + M_2 T = T$  или  $M_1 + M_2 = 1$

2. Уравнения деформаций.

$M_1 T f_1 = T f$ , отсюда  $M_1 = \frac{f}{f_1}$  ..... (а)

$M_2 T f_2 = T f$ , отсюда  $M_2 = \frac{f}{f_2}$  ..... (б)

Подставив значения  $M_1$  и  $M_2$  в уравнение 1, находим:

$f = \frac{1}{\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}}$  ..... (в)

После этого по формулам а и б могут быть вычислены  $M_1$  и  $M_2$ .

Формулы а, б, в могут быть распространены на балочную систему из любого количества брусьев. В этом случае

$f = \frac{1}{\sum_1^n \frac{1}{f_n}}$  ..... (104)

и  $M_n = \frac{f}{f_n}$  ..... (105)

Формулы 104 и 105 одинаково применимы как к брусьям постоянного сечения, так и к брусьям переменного сечения.

Так как положение равнодействующей сил  $M_1 T$  и



$M_2 T$  зависит от соотношения этих сил, т.е. от коэффициентов распределения  $\underline{M}_1$  и  $\underline{M}_2$ , то достаточно найти равнодействующую сил  $\underline{M}_1 \cdot 1$  и  $\underline{M}_2 \cdot 1$ , рассматривая  $\underline{M}_1$  и  $\underline{M}_2$  как вектора приложенные в центрах жесткости соответственно брусев 1 и 2.

Можно достигнуть дальнейших упрощений в определении положения внутренней срезающей силы  $T$  от изгиба в плоскости  $\underline{y}$ - $\underline{o}$ - $\underline{x}$ , если учесть, что  $f = K \cdot \frac{1 \cdot e^3}{E J} \dots \dots \dots (106)$

$$f_1 = K \frac{1 \cdot e^3}{E J_1} \dots \dots \dots (a) \quad f_2 = K \frac{1 \cdot e^3}{E J_2} \dots \dots \dots (e),$$

когда пренебрегают влиянием касательных напряжений на прогиб.

В формулах a и e:

$E$  — нормальный модуль упругости материала брусев 1 и 2. Брусья эти предполагаются из одинакового материала.

$K$  — коэффициент, зависящий от статической схемы балки (для консольной балки  $K = \frac{1}{3}$ ). Так как брусья 1 и 2 имеют одинаковые условия опирания, то коэффициент  $K$  не имеет отражения на положение центра жесткости.

Вследствие этого рассуждения удобнее всего вести применительно к консольной балке, независимо от действительных условий опирания бруса; что в дальнейшем и принимается во всех примерах определения центра жесткости.

$J$  — момент инерции всего поперечного сечения составного бруса относительно оси  $\underline{Z}$ .

$J_1$  и  $J_2$  — моменты инерции соответственно брусев 1 и 2 относительно оси  $\underline{Z}$ .

Подставив значения  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$  в формулы (a), (b)

находим:



$$M_1 = \frac{J_1}{y} \dots \dots \dots (107)$$

$$M_2 = \frac{J_2}{y} \dots \dots \dots (108)$$

Пользуясь обычным правилом теоретической механики определяя линии действия равнодействующей параллельно направленных сил, находим:

$$h_1 = M_2 h = h \frac{J_2}{y} \dots \dots \dots (109)$$

$$h_2 = M_1 h = h \frac{J_1}{y} \dots \dots \dots (110)$$

Если представить себе  $J_1$  и  $J_2$  как вектора, приложенные в центрах жесткости соответственно брусьев 1 и 2, то результаты по формулам 109, 110 можно трактовать так: центр жесткости есть центр тяжести моментов инерции  $J_1$  и  $J_2$

Этот вывод верен и для системы из  $n$  брусьев.

Рассмотренные нами примеры подтверждают очень важное свойство центра жесткости, как точки, характеризующей статическое свойство сечения:

центр жесткости не зависит от общей величины срезающей силы изгиба, а лишь от ее распределения по сечению.

Пример 9 Определить центр жесткости в каком-либо сечении, (например, в сечении  $\alpha-\alpha$  балочной системы), когда брусья 1 и 2 имеют переменный момент инерции, неодинаково меняющийся в пределах пролета этих брусьев (от сечения  $\alpha-\alpha$  и до заделки).

Пример такого бруса представлен на рис. 47-а.

Важные в отношении моментов инерции для рассматрива-



этого примера представлены графиками рис. 50-б и в.

Решение. Так как ось  $Z$  является осью симметрии, то центр жесткости лежит на этой оси. Остается определить точку пересечения силы  $T$ , равнодействующей срезающих сил от изгиба в плоскости  $YOZ$ , с осью  $Z$ .

Начинаем с определения прогибов от единичных сил, приложенных в плоскости сечения  $\alpha-\alpha$ .

Применяя графоаналитический метод определения прогибов и ориентируясь на эпюру изгибающих моментов (рис. 50-а) и на изменение моментов инерции (согласно графиков рис. 50-б и в) находим:

$$f_1 = \left[ \frac{\sigma_1^3}{3EJ_1} + \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{(\sigma_1 + \frac{2}{3}\sigma_2)}{EJ_2} + \frac{\sigma_3^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \frac{2}{3}\sigma_3)}{2 \cdot EJ_3} + \right. \\ \left. + \frac{\sigma_4^2}{2} \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \frac{2}{3}\sigma_4)}{EJ_4} + \frac{\sigma_5^2}{2} \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \frac{2}{3}\sigma_5)}{EJ_5} \right] + \\ + \left[ \frac{\sigma_1 \sigma_2}{EJ_2} \left( \sigma_1 + \frac{\sigma_2}{2} \right) + \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) \cdot \sigma_3}{EJ_3} \left( \sigma_1 + \sigma_2 + \frac{\sigma_3}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \sigma_4}{EJ_4} \left( \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \frac{\sigma_4}{2} \right) + \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4) \cdot \sigma_5}{EJ_5} \left( \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \frac{\sigma_5}{2} \right) \right]$$

По аналогичной формуле определяется и прогиб  $f_2$ .

В рассматриваемом нами примере предполагается, что  $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_5 = \sigma$ ; тогда:

$$f_1 = \frac{\sigma^3}{EJ_1} \left[ \left( \frac{1}{3} + \frac{5EJ_2}{6EJ_2} + \frac{8EJ_1}{6EJ_3} + \frac{11EJ_2}{6EJ_4} + \frac{14EJ_1}{3EJ_5} \right) + \right. \\ \left. + \frac{3EJ_2}{2EJ_2} + \frac{5EJ_1}{EJ_3} + \frac{21EJ_2}{2EJ_4} + \frac{18EJ_1}{EJ_5} \right]$$

По аналогичной формуле определяется и  $f_2$ .



Для бруса 1.

$$\frac{EJ_2}{EJ_1} = \frac{1}{2}; \quad \frac{EJ_3}{EJ_1} = \frac{1}{3}; \quad \frac{EJ_4}{EJ_1} = \frac{1}{4}; \quad \frac{EJ_5}{EJ_1} = \frac{1}{5} \quad u$$

$$f_1 = \frac{\sigma^3}{EJ_1} \left[ \left( \frac{1}{3} + \frac{5}{12} + \frac{8}{18} + \frac{11}{24} + \frac{14}{15} \right) + \left( \frac{3}{4} + \frac{5}{3} + \frac{21}{8} + \frac{18}{5} \right) \right] = 11,23 \frac{\sigma^3}{EJ_1}$$

Для бруса 2.

$$\frac{EJ_1}{EJ_2} = \frac{1}{3}; \quad \frac{EJ_1}{EJ_3} = \frac{1}{4}; \quad \frac{EJ_1}{EJ_4} = \frac{1}{5}; \quad \frac{EJ_1}{EJ_5} = \frac{1}{6}$$

$$f_2 = \frac{\sigma^3}{EJ_1} \left[ \left( \frac{1}{3} + \frac{5}{18} + \frac{8}{24} + \frac{11}{30} + \frac{14}{18} \right) + \left( \frac{1}{2} + \frac{5}{4} + \frac{21}{10} + \frac{18}{6} \right) \right] = 9 \frac{\sigma^3}{EJ_1}$$

Определяем коэффициенты распределения согласно формулам 104 и 105:

$$f = \frac{1}{\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}} = \frac{1}{\frac{1 \cdot EJ_1}{11,23 \sigma^3} + \frac{1 \cdot EJ_1}{9 \sigma^3}} = \frac{\sigma^3}{EJ_1} \cdot 5;$$

$$M_1 = \frac{f}{f_1} = \frac{5 \sigma^3 EJ_1}{EJ_1 \cdot \sigma^3 \cdot 11,23} = 0,445;$$

$$M_2 = \frac{f}{f_2} = \frac{5 \sigma^3 EJ_1}{EJ_1 \cdot \sigma^3 \cdot 9} = 0,555;$$

$$M_1 + M_2 = 1$$

Центр жесткости лежит на линии действия равнодействующей сил  $M_1 \cdot 1$  и  $M_2 \cdot 1$ , приходящихся на брус 1 и брус 2, если предположить, что в сечении a-a общая срезающая сила равна единице.

Точку O<sub>2</sub> выбираем за точку моментов; тогда координата

$$Z_{ц.ж} = \frac{M_1 \cdot h}{M_1 + M_2} = M_1 h = 0,445 h$$



Таким образом центр жесткости в сечении  $\alpha-\alpha$  близок к середине сечения.

Пример 10. Определить центр жесткости для сечения  $\alpha-\alpha$  составного бруса (рис. 51.)

Сечение не имеет ни одной оси симметрии. Общая нейтральная ось  $\xi-\xi$  не совпадает в отдельности с нейтральными осями брусков 1 и 2.

Решение данного примера предоставляем читателю выполнить самостоятельно.

Указание.

Центр жесткости определить, как центр жесткости моментов инерции поперечных сечений брусков 1 и 2 относительно общей нейтральной оси  $\xi-\xi$ .

Уместится попытка распространить определение центра жесткости как центра моментов инерции и на сплошное несимметричное сечение (как, например, на сечение представленное на рис. 52-б).

Ординаты кривой  $J$  (рис. 52-а) представляют векторы, изображающие собой моменты инерции элементарных вертикальных полосок сечения (шириной  $dx$ ) относительно оси  $\xi$ . Центр жесткости есть центр тяжести упомянутых моментов инерции или центр тяжести площади кривой  $J$  (рис. 52-а). Стало быть, положение центра жесткости на оси  $\xi$  (координата  $\xi_{ж}$ ) определяется расстоянием

$$\underline{e} = \frac{\int_0^{\xi_1} h^3 dx \cdot \xi + \int_0^{\xi_2} h^3 dx \cdot \xi}{\int_0^{\xi_1} h^3 dx + \int_0^{\xi_2} h^3 dx} \dots \dots \dots (111), \text{ где вместо } h$$

\*) см. "The stresses in Airplane Structures". By H.B. Howard Fellow of the Royal Aeronautical Society.



необходимо подставить выражение  $h$  через  $Z$  ( $h = f(Z)$ ).

Определение центра жесткости как центра моментов инерции для сплошных сечений является приближенным, так как при этом не учитывается сложное распределение касательных напряжений по сечению. Достаточно вспомнить сведения из сопротивления материалов относительно круглого сечения, чтобы представить себе сложность характера распределения касательных напряжений в сложных профилях типа показанного на рис. 52-б.

В тех случаях, когда внешняя срезающая сила не проходит через центр жесткости сечения, последнее подвергается изгибу и кручению. Действительно, пусть пересечение линий  $T-T$  и  $T_1-T_1$  (рис. 53) определяет собой положение центра жесткости  $e$ . Предположим, что внешняя срезающая сила  $Q$  приложена на оси  $Q-Q$ , не проходящей через точку  $e$ . Переносим силу в точку  $e$ . Тогда на рассматриваемое нами сечение будет действовать сила  $Q$  и крутящий момент  $M_{кр} = Q \cdot a$ . Сила  $Q$ , будучи разложена в точке  $e$  на направления  $T-T$  и  $T_1-T_1$ , будет вызывать исключительно изгиб в силу свойств линий  $T-T$  и  $T_1-T_1$ . Эти линии представляют собой линии действия равнодействующих внутренних срезающих сил исключительно от изгиба в плоскостях, параллельных соответствующим главным плоскостям сечения. Момент  $M_{кр} = Q \cdot a$  будет вызывать исключительно кручение.

Помимо рассмотренных нами выше сложных брусков, составленных из брусков сплошного сечения, в авиаконструкциях имеют применение система, отдельные



„брусья“ которой представляют собой фермы.

Распределение внутренней сжимающей силы по отдельным фермам и в этом случае определяется с помощью формул 104 и 105. Прогибы  $f_n$  для ферм следует вычислять, применяя аналитическую формулу Мора и учитывая работу стержней ферм на растяжение — сжатие.

В конструкциях самолета имеют применение такие системы, которые состоят из связанных между собой брусев, однако, связанных не настолько жестко, чтобы можно было эту систему квалифицировать как целый брус. Примером такой системы может служить двухлонжеронное крыло с нежесткой обшивкой. Отдельные лонжероны этого крыла связаны между собой нервюрами и обшивкой не настолько жестко, чтобы два лонжерона превратились в единый составной брус, характеризующийся одной упругой линией, одной нейтральной линией и одним центром жесткости. В крыле нейтральные линии поперечных сечений отдельных лонжеронов несколько отклоняются от общей нейтральной линии, которая имеет место для поперечного сечения целого бруса. Упругая линия каждого из лонжеронов также несколько отклоняется от положения той упругой линии, которая имеет место для соответствующего целого бруса. Однако, указанные отклонения и не таковы, какие имеют место для двух совершенно раздельно работающих брусев. В крыле создается некоторое промежуточное положение, которое можно характеризовать равенством кривизны упругих линий отдельных лонжеронов в каждом данном поперечном



сечении кривла.

Эта характеристика более обща, чем характеристика целого бруса. Последняя является частным случаем первой. В этом нетрудно убедиться из ниже приводимых рассуждений.

Пусть мы имеем систему связанных брусков, обладающих равенством кривизны упругих линий в каждом данном поперечном сечении, когда последняя подвергается воздействию внешней нагрузки.

Так как кривизна упругой линии  $K = \frac{1}{\rho}$  связана с внутренним изгибающим моментом, то условие равенства кривизны упругих линий отдельных брусков приводит к соответствующему распределению внутренних моментов между поперечными сечениями брусков. Придерживаясь того же пути, какой был использован для определения коэффициентов распределения в решении примера 8 и заменяя  $Q$  на  $M$  и  $f$  на  $K$ , мы придем к следующим формулам для определения коэффициента распределения момента и кривизны общей упругой линии системы если последнюю рассматривать как целый брус:

$$M_n = \frac{K}{K_n} \dots \dots \dots (112)$$

$$K = \frac{1}{\sum_1^n \frac{1}{K_n}} \dots \dots \dots (113)$$

В тех случаях, когда отдельные брусья сложной системы совершенно одинаковы или геометрически подобны, результаты от применения формулы 112 и 105 совпадают. Действительно, когда деформации малы, кри-



Визна приближенно определяются по формуле:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EJ}$$

Прогибы определяются из уравнения:

$$y = \iint \frac{M}{EJ} dx^2 + C_1 x + C_2$$

Стало бытть, если кривизны упругих линий одинаковы, то прогибы этих линий могут не совпасть только лишь за счет несовпадения постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$ . Эти постоянные зависят:

1. от статических условий опирания брусков;
2. от закона изменения момента инерции поперечных сечений брусков и
3. от характера распределения нагрузки на брусках.

Первое и третье условия одинаковы для всех брусков рассматриваемой нами системы. В том случае, когда и второе условие для всех брусков одинаково, — т.е. когда все бруска геометрически подобны — равенство кривизн упругих линий отдельных лонжеронов приводит и к равенству прогибов. В противном случае последнее не имеет места.

Пример 11. Определить распределение изгибающего момента в сечениях  $\alpha-\alpha$  и  $\beta-\beta$  балочной системы (рис. 49-а).  
Данные в отношении брусков 1 и 2 взять из примера 9.

Решение.

1. Определение кривизн упругой линии в сечении  $\alpha-\alpha$  и  $\beta-\beta$  брусков 1 и 2.

Брус 1.

Сечение  $\alpha-\alpha$ :  $K_1^a = \frac{M_a}{EJ_1}$

Сечение  $\beta-\beta$ :  $K_1^b = \frac{M_b}{EJ_2} = \frac{M_b}{2EJ_1}$



Брус 2.

Сечение а-а  $K_2^a = \frac{M}{EJ_1}$

Сечение в-в  $K_2^b = \frac{M_c}{EJ_2} = \frac{M_c}{3EJ_1}$

2. Определение коэффициентов распределения моментов в сечениях а-а и в-в

Кривизна упругой линии в сечении в-в в целом

$$K_0 = \frac{1}{\frac{1}{K_1^a} + \frac{1}{K_2^a}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{M_a}{EJ_1} + \frac{1}{\frac{M_a}{3EJ_1}}} = \frac{M_a}{2EJ_1}}$$

Кривизна упругой линии в сечении с-с в целом

$$K_0 = \frac{1}{\frac{1}{K_1^b} + \frac{1}{K_2^b}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{M_b}{2EJ_1} + \frac{1}{\frac{M_b}{3EJ_1}}} = \frac{M_b}{5EJ_1}}$$

Коэффициенты распределения момента в сечениях а-а и в-в

В сечении а-а

$$M_1^a = \frac{K_0}{K_1^a} = \frac{M_a \cdot EJ_1}{2EJ_1 \cdot M_a} = \frac{1}{2};$$

$$M_2^a = \frac{K_0}{K_2^a} = \frac{M_a \cdot EJ_1}{2EJ_1 \cdot M_a} = \frac{1}{2}; \quad M_1^a + M_2^a = 1$$

В сечении в-в

$$M_1^b = \frac{K_0}{K_1^b} = \frac{M_b \cdot 2EJ_1}{5EJ_1 \cdot M_b} = \frac{2}{5} = 0,4;$$

$$M_2^b = \frac{K_0}{K_2^b} = \frac{M_c \cdot 3EJ_1}{5EJ_1 \cdot M_b} = \frac{3}{5} = 0,6;$$

$$M_1^b + M_2^b = 1$$

Сравним срезывающие силы в пределах участка а<sub>1</sub>, полученные в результате решения данного примера и примера 9, исходя из равенства прогибов.

В рассматриваемом нами (11) примере срезывающая сила в пределах участка а<sub>1</sub> равна  $Q_1 = \frac{M_1^a \cdot M}{a_1} = \frac{1}{2} \frac{M}{a} = \frac{1}{2} Q$



(предполагаем, что в пределах участка  $Q_1$  момент линейно нарастает от нуля до величины  $M_1^B \cdot M$ ).

Согласно данным примера  $Q_1 = M_1 Q = 0,445 Q$

Имеем расхождение в  $\frac{0,5 - 0,445}{0,5} \cdot 100 = 1\%$ .

§12. Определение касательных напряжений изгиба палых тонкостенных брусков незамкнутого односвязного профиля. Определение центра жесткости того-же профиля

Область называется односвязной, если любой разрез, проведенный от одной точки ее границы до другой, разбивает область на две самостоятельные части. Например, область показанная на рис. 54 - односвязная область, так как сечением  $m-m$ , проведенным от точки  $a$  до точки  $b$  на границах области, контур разбивается на две самостоятельные части  $I$  и  $II$ .

Область называется многосвязной, когда для разбивки ее на отдельные самостоятельные части требуется произвести много сечений. Если для превращения данной области в односвязную требуется провести  $m$  - разрезов, то говорят, что область  $(m+1)$ -связная или что ее связность равна  $m+1$ . Так область, показанная на рис. 55, является двухсвязной; для превращения ее в односвязную требуется произвести один разрез  $m-m$ . Область, показанная на рис. 56, является трехсвязной, так как для превращения ее в односвязную требуется произвести минимум два разреза, например,  $m-m$  и  $m_1-m_1$ .

Займемся определением касательных напряжений изгиба в поперечном односвязном сечении бруска



(рис. 57). Поперечно срезающая сила  $Q$  проходит через центр жесткости  $e$ . Рассмотрим изгиб от составляющей  $Q_y$  параллельной оси  $Y$ . Двумя плоскостями, параллельными главной плоскости  $XOY$  на взаимном расстоянии  $\delta x$ , а также плоскостью, перпендикулярной к касательной в точке  $m$  и проходящей через ось  $X$ , вырезаем элемент бруса, который представлен на рис. 58. На этом же рисунке показаны силы, действующие на рассматриваемый элемент:

$N$  — равнодействующая нормальных напряжений изгиба  $\sigma_x$ ;

$\tau_1$  — касательные напряжения, совпадающие по направлению с касательной к оси сечения;

$\tau_2$  — касательные напряжения, совпадающие по направлению с линиями, перпендикулярными плоскости поперечного сечения.

Вследствие малой толщины  $\delta$  стенок сечения предполагается, что напряжения в пределах этой толщины распределены равномерно. Напряжениями, перпендикулярными к поверхности бруса, пренебрегаем как незначительными по сравнению с вышеперечисленными напряжениями.

$N = \int_F \sigma_x dF$ , где  $F$  площадь  $AB$ ; или, считая применимыми элементарные формулы изгиба, находим:

$$N = \int_F \frac{M \cdot y}{I_z} dF = \frac{M}{I_z} \int_F dF \cdot y \quad \text{и} \quad N + dN = \frac{M + dM}{I_z} \int dF \cdot y$$

Из условия равновесия элемента (рис. 58) (сумма проекций равна нулю) вытекает:

$$N - (N + dN) + \tau_2 \delta dx = 0 \quad \text{или:}$$



$$-\frac{dM}{J_z} \oint_F dF \cdot y + \tau_2 \delta dx = 0, \text{ откуда:}$$

$$\tau_2 = \frac{dM}{dx} \frac{1}{J_z} \oint_F dF \cdot y \dots \dots \dots (a)$$

В формуле (a)  $\frac{dM}{dx} = Q_y$ ;  $\oint_F dF \cdot y$  можно вычислить как произведение площади AB на координату y центра тяжести этой площади, которая лежит по одну сторону от точки m, имеющей координаты x, y и в которой определяется касательное напряжение. Обозначаем

$\oint_F dF \cdot y = J_x$  и переписываем формулу a в следующем виде:

$$\tau_2 = \frac{Q_y J_x}{J_z \cdot \delta} \dots \dots \dots (114)$$

Из закона парности касательных напряжений вытекает

$$\tau_2 = \tau_1 = \tau$$

Если обе части формулы 114 помножить на  $\delta$ , то мы получим интенсивность  $q_y$  внутренней срезающей силы, т.е. срезающей силы, приходящейся в данной точке на единицу длины оси сечения:

$$q_y = \frac{Q_y J_x}{J_z} \dots \dots \dots (115)$$

Если изгиб элемента  $dx$  бруска происходит от составляющей  $Q_z$  параллельной оси  $z$ , то для интенсивности внутренней срезающей силы имеем формулу, подобную формуле 115:

$$q_z = \frac{Q_z J_y}{J_z} \dots \dots \dots (116)$$

Поскольку положение центра жесткости не зависит от величины срезающей силы, а лишь от распределения ее по сечению, то удобно при определении положения центра жесткости в формулах 115 и 116 положить  $Q_y = J_z$  и  $Q_z = J_y$

Тогда:

$$q_y = J_z \dots \dots \dots (117) \quad q_z = J_y \dots \dots \dots (118)$$



Если длину  $\underline{C}$  контура поперечного сечения разбить на ряд участков длиной  $\underline{\Delta c}$ , то произведения  $Q_{y\text{ ср.}} \cdot \Delta c = \Delta T_y$  и  $Q_{z\text{ ср.}} \cdot \Delta c = \Delta T_z$  представляют собой элементарные внутренние сдвигающие силы;  $Q_{y\text{ ср.}}$  и  $Q_{z\text{ ср.}}$  — средние интенсивности сдвигающей силы в пределах участка  $\underline{\Delta c}$ . Точка пересечения равнодействующих элементарных сдвигающих сил  $\Delta T_y$  и  $\Delta T_z$  определяет собой положение центра жесткости сечения. Линия же действия равнодействующей силы  $\Delta T_y$  (и аналогично  $\Delta T_z$ ) или что то же координата  $Z_M$  аналогично координата  $\underline{y}$  центра жесткости определяется по обычным правилам теоретической механики; определяется моментом

сил  $\Delta T_y$  относительно выбранной точки моментов и полученный результат делится на равнодействующую этих сил:

$$T_y = Q_y = T_z$$

Пример 12. Для тонкостенного профиля (рис. 59) имеющие постоянные размеры по длине бруса определить:

- 1) эпюру касательных напряжений от изгиба в плоскостях, параллельных главным плоскостям  $\underline{YOX}$  и  $\underline{ZOK}$  и
- 2) координаты центра жесткости.

Решение.

1. Изгиб в плоскости параллельной  $\underline{YOX}$  силой  $Q_y$ , когда эта сила проходит через центр жесткости.

Касательные напряжения определяем по формуле

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_z}{J_z \cdot \delta}, \text{ а интенсивность сдвигающей силы по формуле}$$

$$Q_y = \tau \delta = \frac{Q_y \cdot S_z}{J_z}$$

В целях упрощения вычислений принимаем  $Q_y = T_z$ ; тогда  $Q_y = S_z$ . Интенсивность  $Q_y$  от действительного значения  $Q_y$ , равного  $m T_z$ , определится по формуле

$$Q_y \text{ действ.} = m T_z \cdot S_z$$



Эпюру  $S_z$  определяем, обходя контур от точки 1 по часовой стрелке. В точке 1  $S_1 = 0$ ; в точке 2  $S_2 = b \cdot \delta \cdot y_2$ , в точке 3:  $S_3 = S_2$ ; в точке 0:  $S_0 = S_2 + \frac{H}{2} \cdot \delta \cdot y_0$

Направление касательных напряжений в разных точках контура легко установить из рассмотрения равновесия элементов стенок поперечного сечения, имеющих длину  $dx$  в направлении оси  $x$ .

Такие элементы показаны на рис. 60-а и 60-в. Направления нормальных сил  $N$  вытекают из предположения, что верхние волокна балки сжаты, а нижние волокна растянуты и нарастание изгибающего момента идет в направлении к опоре балки. Из равновесия вышеупомянутых элементов всегда можно убедиться в циркуляции касательных напряжений (см. рис. 60-с.)

Эпюра  $S_z = Q_y$  представлена на рис. 61.

Координату  $z_{ц.ж}$  определяем, беря сумму моментов элементарных срезающих сил  $\Delta T_y$  относительно точки 0.

Срезающая сила в пределах полки 1-2  $\Delta T_{1-2}^y$  равна площади эпюры  $S_z$  в пределах полки 1-2.

Момент срезающей силы в пределах стенки 2-3 относительно точки 0 равен нулю, так как указанная срезающая сила проходит через точку 0. Момент срезающей силы в пределах полки 1-2 относительно точки 0 равен моменту срезающей силы в пределах полки 3-4 и противоположен ему по направлению.

Таким образом полный момент от внутренней срезающей силы  $T_y$  относительно точки 0 равен нулю, что возможно когда сила  $T_y$  проходит через точку 0.



Отсюда следует, что  $Z_{ц.ж} = 0$

2. Узлоб в плоскости  $ZOX$  силой  $Q_2$ , когда эта сила проходит через центр жесткости.

Повторяя рассуждения, подобные предвдущим, мы придем к выводу, что  $Y_{ц.ж} = 0$ , т.е., что центр жесткости совпадает с центром тяжести сечения. Направление касательных напряжений и эюра  $Q_2$  показаны на рис. 62.

Пример 13. Определить центр жесткости профиля (рис. 63).

Пусть перерезывающая сила действует снизу вверх. (сжатие над нейтральной линией).

Эюра интенсивностей срезающей силы в поперечном сечении представлена на рис. 64.

Срезающие силы по участкам

$$1) T_1 = \int_0^a \frac{Q}{\gamma \delta} \delta y \delta \left( \frac{H}{2} + a - y + \frac{y}{2} \right) \cdot dy \quad \text{или}$$

$$T_1 = \frac{Q \cdot \delta \cdot a^2}{2\gamma} \cdot \left( \frac{H}{2} + \frac{2}{3} \cdot a \right)$$

$$2) T_2 = \left( \tau_{\max}^{(1)} + \tau_{\max}^{(2)} \right) \cdot \frac{b \cdot \delta}{2}$$

$$\tau_{\max}^{(1)} = \frac{Q \cdot a \cdot \delta}{\gamma \cdot \delta} \left( \frac{a}{2} + \frac{H}{2} \right) = \frac{Q \cdot a \cdot (a+H)}{2\gamma}$$

$$\tau_{\max}^{(2)} = \frac{Q}{\gamma \cdot \delta} \left[ a \cdot \delta \left( \frac{a}{2} + \frac{H}{2} \right) + b \cdot \delta \cdot \frac{H}{2} \right] = \frac{Q \left[ a^2 + H(a+b) \right]}{2\gamma}$$

$$T_2 = \frac{Q \cdot \delta \cdot b}{4\gamma} (2a^2 + 2aH + bH)$$

$$3) T_3 = \tau_{\max}^{(2)} \cdot H \cdot \delta + \tau_{\max}^{(3)} \cdot H \cdot \delta \cdot \frac{2}{3}$$

$$\tau_{\max}^{(3)} = \frac{Q}{\gamma \cdot \delta} \cdot \frac{H}{2} \cdot \delta \cdot \frac{H}{4} = \frac{QH^2}{8\gamma}$$



$$T_3 = \frac{Q[\alpha^2 + H(\alpha + \beta)] \cdot H \cdot \delta}{2\gamma} + \frac{QH^2}{8\gamma} \cdot H \cdot \delta \cdot \frac{2}{3} \quad \text{или}$$

$$T_3 = \frac{QH\delta}{2\gamma} \left[ \alpha^2 + H(\alpha + \beta) + \frac{H^2}{6} \right]$$

Исходя из анализа элементов стенок бруса длиной  $dx$ , выделенных сечениями (1'-1')-(1-1); (1-1)-(2-2); (2-2)-(3-3); (4-4)-(5-5) (см. рис. 65, 66, 67, 68), мы устанавливаем направления касательных напряжений по поперечному сечению (см. рис. 63). Направления эти таковы, что непрерывность „циркуляций“ касательных напряжений сохраняется.

Момент сил рис. 69. относительно центра жесткости  $e$  равен нулю, так как сила  $Q$  проходит через точку  $e$ .

Стало быть,

$$2T_2 \cdot \frac{H}{2} - 2T_1(\beta + d) - T_3 \cdot d = 0, \quad \text{откуда } d = \frac{T_2 \cdot H - 2T_1 \cdot \beta}{2T_1 + T_3} \quad \text{или}$$

$$d = \beta \frac{\frac{H^2}{2}(\alpha + \frac{\beta}{2}) - \frac{2}{3}\alpha^3}{H[\alpha^2 + \frac{\alpha}{2}(\alpha + H) + \frac{H}{2}(\beta + \frac{H}{2}) + \frac{2}{3}\alpha^3]}$$

Координата  $d$  центра жесткости является функцией исключительно геометрических размеров профиля.

### § 13. Узлы брусьев из неоднородного материала.

В авиационных конструкциях мы встречаемся с применением материалов, имеющих разные модули упругости в пределах одного и того же поперечного сечения. Например, в крыле пояса лонжеронов выполняются из стали, а обшивка из дюралюминия. Нормальный модуль упругости для стальных труб  $E_{ст} = 2.1 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$ , а нормальной упругости дюралюминия  $E_{дюр} = 7 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$ . Если исходить из гипотезы плоских сечений, то очевидно при одной и той же деформации точки поперечного сечения, выполненные из стали и дюрала и находящиеся на одинаковом расстоянии



от нейтральной линии, должны получить разные напряжения.

При этом предполагается, что сечение, хотя и составлено из разных материалов, является монолитным, т.е. материалы прочно связаны и совместно работают.

Рассмотрим произвольное поперечное сечение (рис. 70а) в общей массе поперечного сечения с модулем упругости  $E_0$  включены элементы 1, 2, ..., n, имеющие различные модули упругости:  $E_1, E_2, \dots, E_n$ .

На рис. 70-в представлена эюра  $\epsilon$  относительных удлинений волокон в рассматриваемом сечении. Удлинения волокон в точках поперечного сечения на расстоянии  $y$  от нейтральной линии  $Z$  при длине волокон  $l$  равны:

$$\Delta l_0 = l \cdot \epsilon_{y,0} = \frac{l \cdot b_0}{E_0}; \quad \Delta l_1 = l \cdot \epsilon_{y,1} = \frac{l \cdot b_1}{E_1}; \quad \Delta l_2 = l \cdot \epsilon_{y,2} = \frac{l \cdot b_2}{E_2}$$

Так как поперечное сечение остается плоским, то

$$\Delta l_0 = \Delta l_1; \quad \text{или} \quad \frac{b_0}{E_0} = \frac{b_1}{E_1}; \quad \text{откуда} \quad b_1 = \frac{E_1}{E_0} b_0; \quad \Delta l_0 = \Delta l_2$$

$$\text{или} \quad \frac{b_0}{E_0} = \frac{b_2}{E_2} \quad \text{откуда:} \quad b_2 = \frac{E_2}{E_0} b_0 \quad \text{и вообще:}$$

$$\boxed{b_n = \frac{E_n}{E_0} b_0} \dots \dots \dots (119)$$

Положение нейтральной линии может быть установлено двумя путями: либо исходя из эюры относительных удлинений (рис. 70 в), либо исходя из геометрических размеров поперечного сечения и материалов, из которых выполнено поперечное сечение.

В первом случае положение нейтральной линии определяется из соотношения:

$$\frac{h_B}{h_N} = \frac{\epsilon_B}{\epsilon_N} = \frac{b_0^B/E_0}{b_0^N/E_0} = \frac{b_0^B}{b_0^N}$$



Во втором случае положение нейтральной линии определяется как линия, проходящей через центр тяжести сечения, относительно которой статические моменты элементов площади поперечного сечения равны нулю. При этом следует иметь в виду, что положение центра тяжести определяется для однородного сечения или для сечения, приведенного к однородному. Если мы площади элементов  $1, 2, \dots, n$  заменяем равноценной площадью из основного материала  $Q$ , то очевидно эти площади необходимо умножить на отношение  $\frac{E_n}{E_0}$ , так как в этом случае сохраняется равенство:

$$F_n \cdot b_n = F_0 \frac{E_n}{E_0} \cdot b_0$$

Это же замечание следует иметь в виду и при определении моментов инерции. В этом случае также необходимо материал элементов  $1, 2, \dots, n$  привести к основному материалу.

#### §14. Определение изгибающих моментов в рамной системе, состоящей из стержней, резко различных по своим геометрическим размерам.

Чтобы конкретизировать все излагаемое ниже, мы будем относить свои рассуждения к примеру рамы, представленной на рис. 71-в и заимствованной из конструкции хвостового горизонтального оперения (рис. 71-а). Расчетная схема представлена на рис. 71-б. Стержень 1 представляет собой лонжерон стабилизатора. Подвесками 2, 3, 4, 5 лонжерон крепится к шпангоуту фюзеляжа. Конструкция симметрична относительно средней вертикальной и горизонтальной осей. Рис. 71-в достаточно рельефно изображает резкое расхождение в размерах



поперечного сечения лонжерона и подвесок. Это обстоятельство является источником недоразумений, к которым приводят результаты расчета, если применить обычные методы расчета рамы, не пересматривая тех допущений, которые положены в основу этих методов.

В рассматриваемом нами случае, очевидно, не может быть принято допущение, что в расчетах как статически определимых так и статически неопределимых систем нагрузку заданную и реактивную считают приложенной к осям стержней.

Фактически нагрузка (как заданная, так и реактивная) приложена к поверхности стержней. Уложенное допущение в совокупности с гипотезой плоских сечений (следствием которой является то обстоятельство, что волокна в балке параллельные до деформации остаются параллельными и после деформации и избегают так же как ось балки) приводит к возможности действительно конструкцию заменить в расчете геометрической схемой, определяемой осями стержней конструкции. Такая замена очевидно допустима, пока геометрические размеры стержней, составляющих раму, не очень разнятся. В противном случае бросается в глаза резкое расхождение в длине стержня (например стержня 2, измеряемого от точки опоры до оси лонжерона и в длине того же стержня, измеряемого от точки опоры до поверхности лонжерона) От длины же стержня зависит его погонная жесткость, которая чувствительно отображается на величину избегающего момента воспринимаемого стержня. Кроме того, если иметь в виду, что срезающая сила от подвески переда-



ется на поверхность лонжерона, а не на его ось, что необходимо учесть внецентренное приложение указанной срезающей силы по отношению к оси лонжерона. Это обстоятельство, когда имеется высокий лонжерон, чувствительно влияет на распределение между лонжероном и подвесками изгибающего момента, приложенного в сечении. Ниже излагается метод исправления вышеуказанных недостатков, которые вытекают из допущений расчета статически-неопределимых систем. При этом следует оговорить, что исправления мы будем производить, не прибегая к методам теории упругости, иначе говоря, мы полагаем, что изучаемая система допускает применение приемов строительной механики с приемлемой для практики точностью.

Необходимая цель достигается в результате выполнения следующих операций.

### 1. Установление схемы эпюры изгибающих моментов в подвесках 2, 3, 4, 5.

Предполагаемая схема эпюры изгибающих моментов в подвесках изображена на рис. 72, где через  $X_2$  и  $X_3$  обозначены моменты, воспринимаемые подвесками 2 и 3. Моменты, воспринимаемые подвесками 4 и 5, устанавливаются из соотношений  $X_2 = X_4$ ;  $X_3 = X_5$ , имеющих место в силу симметрии системы относительно оси  $Y$ .

Эпюра срезающих сил на подвесках 2 и 3 представлена на рис. 73.

### 2. Установление системы сил, передающейся от подвесок на грани АВ и ВС лонжерона.

Производим сечения 2-2, 3-3, 4-4, 5-5; воздействие



подвесок в этих сечениях на грани лонжерона представляются силами, показанными на рис. 74.

Силы, действующие на поверхность лонжерона, переносим на его ось.

3. Установление схемы эпюры изгибающих моментов в лонжероне.

Так как система симметрична относительно оси  $Y$  и лонжерон кроме моментов в узлах I и II другой нагрузки не несет, то лонжерон испытывает чистый изгиб. Схема эпюры изгибающих моментов в лонжероне представлена на рис. 72, где через  $X_1$  обозначен момент, воспринимаемый лонжероном.

4. Определение в узле I изгибающих моментов  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$ , воспринимаемых соответственно лонжероном, подвеской 2 и подвеской 3.

Уравнения для определения вышеперечисленных моментов вытекают из следующих условий:

а) Условие равновесия  $\sum M = 0$  или:

$$X_1 + X_2 + X_3 + \frac{3}{2} \frac{X_2}{e_2} \frac{H}{2} + \frac{3}{2} \frac{X_3}{e_3} \frac{H}{2} = M \dots \dots (a)$$

На рис. 75 показаны силы, действующие на элемент лонжерона вблизи узла I и вошедшие в уравнение (a).

Вводим обозначения:  $X_1 = \mu_1 M$ ,  $X_2 = \mu_2 M$ ,  $X_3 = \mu_3 M$ .

Коэффициенты  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и  $\mu_3$  являются коэффициентами распределения момента  $M$  на стержни 1, 2, 3.

Подобные коэффициенты широко применяются в расчете рам по методу фокусов.

Тогда:

$$\mu_1 + \mu_2 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{H}{e_2}\right) + \mu_3 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{H}{e_3}\right) = 1$$



б). Условие совместности угловой деформации  
стержней 1, 2 и 3 в узле I.

Так как мы исходим из гипотезы плоских сечений, то изгиб волокон лонжерона на поверхности в сечениях 2-2 и 3-3 такой же, как и изгиб осевого волокна.

Поворот касательной к изогнутым волокнам  $AB$  и  $BC$  в сечениях 2-2 и 3-3 такой же, как и поворот сечения лонжерона в узле I.

Вследствие того, что поворот касательной к изогнутому волокну  $AB$  в сечении 2-2 в то же время является и поворотом сечения 2-2 подвески 2 (также как и поворот касательной к изогнутому волокну  $BC$  — в то же время является поворотом поперечного сечения 3-3 подвески 3), то в узле I имеет место совместность угловой деформации стержней сходящихся в этот узел.

Из указанной совместности угловой деформации вытекает:

$$M_1 \cdot M \cdot \epsilon_1 = M \cdot \epsilon \quad \text{или} \quad M_1 \cdot \epsilon_1 = \epsilon \dots \dots \dots (a)$$

$$M_2 \cdot M \cdot \epsilon_2 = M \cdot \epsilon \quad \text{или} \quad M_2 \cdot \epsilon_2 = \epsilon \dots \dots \dots (b)$$

$$M_3 \cdot M \cdot \epsilon_3 = M \cdot \epsilon \quad \text{или} \quad M_3 \cdot \epsilon_3 = \epsilon \dots \dots \dots (c)$$

где  $\epsilon$  — угол поворота узла I от единичного момента, приложенного к этому узлу,

$\epsilon_1$  — угол поворота поперечного сечения лонжерона в узле I, если в эпюре изгибающих моментов (рис. 72) положить  $X_1 = 1$ .

$\epsilon_2$  — угол поворота поперечного сечения 2-2 подвески 2, если в эпюре изгибающих моментов (рис. 72) положить  $X_2 = 1$ .

$\epsilon_3$  — угол аналогичный углу  $\epsilon_2$ , но отнесенный к подвеске 3.

Из равенств (a), (b) и (c) вытекает:



$$M_1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \dots \dots \dots (\alpha)$$

$$M_2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2} \dots \dots \dots (\beta)$$

$$M_3 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_3} \dots \dots \dots (\gamma)$$

Полученные значения  $M_1, M_2, M_3$  подставляем в уравнение (а); тогда:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{H}{e_2}\right) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_3} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{H}{e_3}\right) = 1,$$

откуда: 
$$\varepsilon = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{H}{e_2}\right) + \frac{1}{\varepsilon_3} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{H}{e_3}\right)} \dots \dots \dots (120)$$

Если не учитывать внецентренного приложения срезающих сил подвелок к лонжерону (т.е. если принять  $H=0$ ), то:

$$\varepsilon = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_3}}$$

Подобное выражение для  $\varepsilon$  широко применяется в расчете рам по методу фокусов.

### 5. Определение углов поворота $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и $\varepsilon_3$ .

Из схемы эпюры изгибающих моментов рис. 72 вытекает:

$$\varepsilon_1 = \frac{1 \cdot e_1}{2E_1 J_1} \dots \dots (g); \quad \varepsilon_2 = \frac{1 \cdot e_2}{4E_2 J_2} \dots \dots (e); \quad \varepsilon_3 = \frac{1 \cdot e_3}{4E_3 J_3} \dots \dots (ж)$$

Равенства  $\alpha, \beta, \gamma, 120$  совместно с равенствами  $g, e, ж$  решают задачу о расчете рамы (рис. 71), так как этими равенствами мы находим коэффициенты распределения  $M_1, M_2, M_3$ , а затем и моменты  $X_1, X_2$  и  $X_3$ .

После этого обычным путем определяются срезающие силы и осевые силы в элементах рамы.



## Глава III.

### Кручение.

#### § 15. Кручение простейших брусьев вдали от заделки. Формулы Сен-Венана и Грасгофа. Формула Бредта.

Впервые правильные основы теории кручения были разработаны Сен-Венаном. До него пользовались в расчете на кручение исследованиями Кулона и Навье. Последний в своих работах исходил из тех же гипотез, из которых он исходил в теории изгиба; Навье предполагал, что сечение при кручении также как и при изгибе, остается плоским.

Такая гипотеза не согласуется с самыми элементарными наблюдениями; из этой гипотезы, например, вытекает, что жесткость на кручение прямоугольного сечения возрастает с ростом отношений сторон, и она больше жесткости на кручение круга при той же площади сечения; между тем хорошо известно, что рейшина прямоугольного вытянутого сечения значительно легче скручивается, чем цилиндрическая палка круглого сечения.

Сен-Венан исследовал кручение сплошных сечений некоторых профилей (эллипс, круг, прямоугольник, треугольник, кольцо и др.), базирываясь на строгих основах теории упругости, и установил ошибочность теории Навье.

Теория дает правильные результаты применительно к цилиндру сплошного круглого и коль-



цеобразного сечения.

В этих случаях сечение остается плоским.

Помимо точной теории кручения Сен-Венаном предложена приближенная формула для определения жесткости на кручение<sup>\*)</sup>, основанная на замене постоянного сечения данного вала эллиптическим сечением, имеющим ту же площадь сечения и тот же полярный момент инерции, что и сечение заданного вала. Таким образом жесткость на кручение стержня постоянного сплошного сечения определится по формуле

$$C = \frac{G \cdot F^4}{40 J_p} \dots \dots (121).$$

Формула (121) дает неудовлетворительные результаты для следующих сечений:

1. Полюс сечения, для которых формулу (121) применять ни в коем случае нельзя;
2. Угловое сечение, если длины сторон уголка велики в сравнении с их толщиной;
3. Крестообразные сечения  $\perp$ , для которых получаются совершенно неправильные результаты;
4. Двутавровое сечение с широкими полками.

Для последнего случая жесткость на кручение по формуле 121 получается почти в два раза больше действительной жесткости<sup>хх)</sup>

Хорошие результаты получаются от применения формулы 121 для определения  $C$  нормального двутавра

\*) Под жесткостью на кручение понимают величину обратную отношению к углу закручивания от момента равного единице, т. е. жесткость на кручение  $C = \frac{1}{\theta}$ , где  $\theta$  — относительный угол закручивания от  $M_{кр} = 1$ .

хх) См. Фреппль, „Сила и деформация“, ч. II.



таврового сечения.

Угол закручивания круглого и эллиптического сечения может быть определен также по формулам Грасгофа:  $\theta = \frac{M_{кр}}{C}$ ,

$$\text{где } C = \frac{J_p}{G \cdot 4 J_y \cdot J_z} \dots (122); \quad J_p = J_y + J_z$$

Для указанных сечений имеется совпадение с результатами, получаемыми от применения формулы Сен-Венана.

Применение формулы Грасгофа для других сечений дает результаты, расходящиеся с теми, которые получаются от применения приближенной формулы Сен-Венана.

Помимо исследований Сен-Венана большую услугу изучению вопросов кручения сказала гидродинамическая аналогия и анализ Прандтля, т.е. аналогия с мембраной. Особенно ценны результаты применения этой аналогии к тонкостенным пустотелым цилиндрическим стержням постоянного сечения, когда распределение касательных напряжений по толщине стенок принимается равномерным.

Кручение трубчатых стержней с постоянным двухсвязным тонкостенным сечением было изучено методами сопротивления материалов инж. Бредтом в 1896 г. Формулы кручения, разработанные этим инженером, известны под названием формул Бредта и вытекают из следующих соображений: пусть тонкостенный трубчатый стержень произвольного профиля закручивается моментом  $M$  (рис. 76). Так как стенки рассматриваемого нами стержня очень тонкие, допустимо положить  $\tau = \text{const}$ . в пре-



угла: толщины стенок. Кроме того принимается, что интенсивность срезающей силы  $q = \tau \delta$ , т.е. что срезающая сила, приходящаяся на единицу длины контура поперечного сечения, <sup>также</sup> является постоянной величиной.

Такое допущение согласуется с исследованиями, основанными на гидродинамической аналогии.

Произведем сечение  $m-m$  (см. рис. 76) и рассмотрим равновесие внешних и внутренних сил. Последние создают крутящий момент. Элемент этого момента  $dM_{\text{внутр}} = q \cdot d \cdot d$  (см. рис. 77), где  $d$  — перпендикуляр, опущенный из точки  $O$  (точка моментов) на направление срезающей силы  $q \cdot d$ , имеющей место на протяжении дуги  $dc$ , принимаемой за прямолинейный отрезок  $dc$ .

Если концы этого отрезка соединить с точкой  $O$ , то получится треугольник  $Oab$ , имеющий своим основанием отрезок  $dc$ . Тогда произведение  $d \cdot dc$  представляет собой ничто иное как двойную площадь  $2dF$  треугольника  $Oab$ .

Полный внутренний момент  $M_{\text{внутр}} = \int_c d \cdot M_{\text{внутр}}$   
 $= \int_c q \cdot d \cdot dc = \int_c q \cdot 2dF$ ; так как  $q = \text{const}$ , то  
 $M_{\text{внутр}} = 2q \cdot F$ .

Из условия равновесия  $\Sigma M = 0$  вытекает  $M_{\text{внутр}} = M$  или  $M = 2qF$  откуда

$$\boxed{q = \frac{M}{2F}} \dots \dots (123) \quad \text{и} \quad \boxed{\tau = \frac{q}{\delta} = \frac{M}{2F\delta}} \dots (124)$$

Угол закручивания  $\theta$  на единицу длины стержня определяем из условия равенства работ внешних и внутренних сил, т.е.



-5-

$$\frac{M\theta}{2} = \frac{1}{2} \int_0^c \frac{(qdc)^2}{G \cdot dc \cdot d} \quad \text{или} \quad M\theta = \int_0^c \frac{q^2 dc}{Gd}$$

Так как  $q = \frac{M}{2F}$ , то  $\theta = \frac{M}{4F^2} \int_0^c \frac{dc}{Gd} \dots (125)$

К формуле 124 можно прийти, пользуясь также методом Мора. Для этой цели поверхность стержня разделяем на ряд полос шириною  $dc$  и длиной единица. Одна из таких полос показана заштрихованной на (рис. 76). Эти полосы подвержены чистому срезу вследствие чего угол закручивания определится из формулы

$$\theta = \int_0^c \left[ \int_0^1 \frac{(d\varphi)^2 dx}{G \cdot dc \cdot d} \right] = 1 \cdot \int_0^c \frac{(qdc)^2}{G \cdot dc \cdot d} = \int_0^c \frac{q^2 dc}{Gd};$$

а так как  $q = \frac{M}{2F}$ , то:  $\theta = \frac{M}{4F^2} \int_0^c \frac{dc}{Gd}$ ,

что совпадает с формулой 125.

Вводим обозначение:  $C = \frac{4F^2}{\int_0^c \frac{dc}{Gd}}$ , тогда  $\theta = \frac{M}{C} \dots (126)$

Когда модуль сдвига  $G = \text{const}$ , то  $C = GJ_{кр}$

где  $J_{кр} = \frac{4F^2}{\int_0^c \frac{dc}{d}} \dots (127)$

Если считать верной гипотезу  $Td = q = \text{const}$  и для того случая, когда отдельные полосы стенки трубы (рис. 76) потеряли устойчивость и превратились в диагонально растянутую поверхность, то, применяя те же рассуждения, что и выше для трубы с обшивкой, не потерявшей устойчивость, мы придем к следующим формулам для определения растягиваю-



щих напряжений по волне и угла закручивания:  
Из формулы 90 следует  $b_{\varphi} = \frac{2Q}{h \cdot \delta \cdot \sin 2\varphi} = 2 \frac{\tau}{\sin 2\varphi}$

откуда  $\varphi = \tau \delta = \frac{b_{\varphi} \cdot \delta \cdot \sin 2\varphi}{2} \dots \dots (128).$

Присоединяя к формуле 128 формулу 123 находим:

$$b_{\varphi} = \frac{M}{\delta \cdot F \cdot \sin 2\varphi} \dots \dots (129).$$

Если в формулу 103а представить  $\nu_i = 1$ ,  $F_{отен} = dc \cdot \delta$  знак  $\Sigma$ , то она выразит работу нормальных сил одной полосы трубы в первом состоянии на соответствующие перемещения во втором состоянии.

При определении относительного угла закручивания в первом состоянии приложен к трубе момент  $M$ , во втором состоянии  $M = 1$ .

Тогда:  $b_k = \frac{M}{\delta F \sin 2\alpha}$ ,  $b_m = \frac{1}{\delta F \sin 2\alpha}$  и  $\theta = \int_c \frac{M \cdot \delta \cdot dc}{E \cdot (\delta F \sin 2\alpha)^2}$

или:  $\theta = \frac{M}{E F^2 \sin 2\alpha} \int_c \frac{dc}{\delta}$

Вводим обозначение  $\mathcal{K} = \frac{E \sin^2 2\alpha}{4}$

тогда:  $\theta = \frac{M}{4 F^2 \mathcal{K}} \int_c \frac{dc}{\delta} \dots \dots (130).$

Полагая  $\mathcal{K}_{кр} = \frac{4 F^2}{\int_c \frac{dc}{\delta}}$  и  $C' = \mathcal{K} \mathcal{K}_{кр}$ , мы прихо-

дим к формуле, подобной формуле 126

$$\theta = \frac{M}{C'} \dots \dots (130)$$



Если обшивка трубы потеряла устойчивость не по всей длине контура сечения, и так, что в пределах  $C_1$  длины контура (измеряемой по кривой оси поперечного сечения) имеется обшивка, потерявшая устойчивость и в пределах длины  $C_2$  контура имеется обшивка, не потерявшая устойчивость, то

$$\theta = M \left( \frac{1}{4F^2} \int_{C_1} \frac{dc}{G\delta} + \frac{1}{4F^2} \int_{C_2} \frac{dc}{G\delta} \right) \dots (132)$$

или

$$\theta = M \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C_1} \right) \dots (132a).$$

Когда зона, потерявшая устойчивость отсутствует, то формула 132а переходит в формулу 126.

В том случае, когда труба подвергается скручиванию моментом, распределенным по длине трубы, то формулу для определения полного угла закручивания  $\varphi$  можно установить, исходя из следующих рассуждений: двумя сечениями  $m-m$  и  $m_1-m_1$  (см. рис. 78) нормальными к оси трубы на взаимном расстоянии  $dx$  вырезаем элемент (рис. 79).

Такой элемент находится под действием двух моментов  $M_x$  и  $M_x + dM_x$ , приложенных к концам элемента, и момента  $dM$ , представляющего собой равнодействующую внешних крутящих моментов, распределенных на длине  $dx$ . Так как расстояние  $dx$  очень мало, то можно допустить, что момент  $dM_x$  смещен непосредственно влево от сечения  $m-m$ . Тогда да



из равновесия элемента (рис. 79) вытекает, что приращение момента  $M_x$ ,  $dM_x$  в сечении  $m_1-m_1$  равно нулю, т.е. что элемент  $dx$  скручивается двумя равными и противоположными моментами  $M_x$ .

Пользуясь формулой 132а, находим приращение угла закручивания на длине элемента  $dx$ :

$$d\varphi = M_x \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \right) dx$$

Полный угол закручивания трубы длиной  $l$

$$\varphi = \int_0^l M_x dx \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \right) \dots \dots (133).$$

Если жесткости на кручение  $C$  и  $C'$  являются переменными, то интегрирование в формуле 133 удобно произвести графоаналитическими методами (подобными тем, которые в соответствующем случае применяются для определения прогибов изгибаемой балки с переменным моментом инерции).

Применение формулы 133 к трубе с переменной жесткостью следует оговорить, так в данном случае не учитываются явления, имеющие место в переходах устойчивой зоны в зону диагонально растянутого поля и в местах резкого изменения сечения трубы (в частности не учитываются появляющиеся при этом нормальные напряжения).



§ 16. Кручение, когда одно из сечений бруса остается плоским (кручение вблизи заделки). „Сростки Шухоба“. Кручение треугольной коробки.

Формулы Сен-Венана, Грасгофа и Брегта предполагают свободное искажение плоскости поперечного сечения бруса и верны до тех пор, пока отсутствуют причины, задерживающие указанное искажение. Учет не свободного искажения плоскости поперечного сечения существенен для брусьев вблизи заделки и для брусьев переменного сечения.

В самолете мы встречаемся с такими конструкциями (как например, крыло, фюзеляж), у которых поперечное сечение в плоскости заделки при кручении принимается плоским. Учет влияния этой заделки на работу элементов крыла и фюзеляжа вблизи заделки является существенным. Характер распределения напряжений и их величину, когда сечение остается плоским, при кручении можно изучить, исходя из следующих элементарных соображений.

Пусть поперечное сечение бруса (рис. 80) скреплено с неподвижным телом рядом заклепок  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  и подвержено кручению моментом  $M$ , который стремится эти заклепки срезать.

Рассуждая так же, как и при исследовании кручения круглого цилиндрического стержня (см., например, Тимошенко, „Сопротивление



материалов"), мы установим линейную зависимость напряжений в заклепках  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , т.е. в отдельных точках сечения от расстояния  $y$  центра заклепок  $a_1, a_2, \dots, a_n$  до точки  $Q$ , где напряжение от кручения равно нулю.

Линейную зависимость напряжений от расстояния  $y$  следует всегда ожидать, когда применяется гипотеза плоских сечений и закон Гука.

Пусть площадь заклепок  $a_1, a_2, \dots, a_n$  равна  $\Delta F$ , и напряжение среза в них определяется по формуле:

$\tau = k y_n \dots (a)$ , где  $k$  — некоторый коэффициент пропорциональности, подлежащий определению.

Сила среза, воспринимаемая площадкой  $\Delta F$ , равна

$$dQ = \tau \Delta F = k y_n \cdot \Delta F.$$

Элементарный момент кручения, создаваемый этой силой среза относительно точки  $Q$ , равен

$$dM = dQ y_n = k y_n^2 \cdot \Delta F.$$

Так как здесь имеет место равновесие между суммой внутренних элементарных моментов  $dM$  и внешним моментом  $M$ , то

$$M = \sum dM = k \sum_1^n y_n^2 \cdot \Delta F,$$

откуда:

$$k = \frac{M}{\sum_1^n y_n^2 \cdot \Delta F}$$



Подставляя найденное значение  $K$  в уравнение (а), находим:

$$\tau = M \frac{y_n}{\sum_n y_n^2 \cdot \Delta F} \dots \dots (134)$$

Заклепки  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  носят в литературе название „сростков Шухова“.)

Введя обозначение  $\sum_n y_n^2 \cdot \Delta F = J_p$  где  $J_p$  — полярный момент инерции, переписываем формулу 134 в следующем виде

$$\tau = \frac{M y_n}{J_p} \dots \dots \dots (135).$$

В таком виде формула известна для цилиндрического бруса круглого постоянного сечения. Если модули сдвига заклепок  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  различны, то  $\tau = K G_n y_n$ ;

$$dM = K G_n y_n^2 \cdot \Delta F; \quad K = \frac{M}{\sum G_n y_n^2 \cdot \Delta F} \dots \dots (136)$$

Момент, воспринимаемый одной заклепкой

$$dM_n = M \frac{G_n y_n^2 \cdot \Delta F}{\sum G_n y_n^2 \cdot \Delta F} = MK \dots \dots (137)$$

Так как сечение вблизи заделки не имеет возможности свободно искажаться, то помимо напряжений среза в нем появляются нормальные напряжения.

Это обстоятельство иллюстрируется рис. 81, где стрелками обозначены силы, необходимые для того, чтобы искривленную поверхность сечения

х) см. Беляев, расчет свободно-несущего крыла, ЦАГИ вып. 165.



(линия этой поверхности показана на рисунке пунктиром) возвращаются в плоское состояние.

Полное исследование кручения брусьев сплошного сечения вблизи заделки довольно сложно и выходит за пределы наших задач.

Элементарно изучить кручение брусьев полого сечения можно, в виде коробок. Результаты этого изучения затем непосредственно применяются к расчету на кручение крыла и фюзеляжа. Кручение полых коробок треугольного, прямоугольного и трапециoidalного профиля с учетом нормальных сил рассматривается в последующих параграфах.

В данном параграфе в качестве примера кручения коробки без учета нормальных сил мы рассмотрим кручение треугольной коробки (рис. 82), предполагая, что сечение ее остается плоским на протяжении всего пролета коробки и что обшивка работает только на чистый срез, не воспринимая нормальных напряжений.

Из равновесия части бруса длиной  $x$  (рис. 83) вытекает:

$$\sum Y = 0 \text{ или } Q_1 - Q_2 \sin \alpha - Q_3 \sin \beta = 0 \dots (a)$$

$$\sum Z = 0 \text{ или } Q_2 \cos \alpha - Q_3 \cos \beta = 0 \text{ откуда}$$

$$Q_2 = Q_3 \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \dots (b)$$

$$\sum M_x = 0 \text{ или } -M + Q_1 \cdot d = 0 \text{ откуда}$$

$$Q_1 = \frac{M}{d} \dots (138).$$

Условия  $\sum X = 0$ ,  $\sum M_y = 0$  и  $\sum M_z = 0$  выполняются тождественно. Совместное решение уравнений а, б и 138 приводит к следующим результатам:



$$Q_2 = \frac{M}{d \cos \alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$$

$$Q_3 = \frac{M}{d \cos \beta} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$$

Вводим обозначение  $\Psi_1 = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$ ,

тогда:

$$Q_2 = \frac{M}{d \cdot \cos \alpha} \Psi_1 \dots \dots \dots (138a)$$

$$Q_3 = \frac{M}{d \cos \beta} \Psi_1 \dots \dots \dots (139)$$

Касательные напряжения определяются по формуле

$\tau = \frac{Q_n}{F_{cm}^{(n)}} (140)$  где  $F_{cm}^{(n)}$  — площадь поперечного сечения стенок  $n$  ( $n=1, 2, 3$ ).

Угол закручивания коробки  $\theta$  на единицу длины от момента  $M=1$  определяем с помощью формулы Мора, рассматривая коробку как состоящую из трех стенок подверженных частому срезу:

$$\theta_1 = \int_0^1 \frac{Q_1^2 dx}{G_1 F_{cm}^{(1)}} + \int_0^1 \frac{Q_2^2 dx}{G_2 F_{cm}^{(2)}} + \int_0^1 \frac{Q_3^2 dx}{G_3 F_{cm}^{(3)}} \dots \dots \dots (6)$$

$$\theta_1 = \frac{Q_1^2}{G_1 F_{cm}^{(1)}} + \frac{Q_2^2}{G_2 F_{cm}^{(2)}} + \frac{Q_3^2}{G_3 F_{cm}^{(3)}} = \frac{1}{d^2} \left[ \frac{1}{G_1 F_{cm}^{(1)}} + \Psi_1^2 \left( \frac{1}{\cos^2 \alpha G_2 F_{cm}^{(2)}} + \frac{1}{\cos^2 \beta G_3 F_{cm}^{(3)}} \right) \right]$$

или

$$\theta_1 = \frac{1}{d^2 G_1 F_{cm}^{(1)}} \cdot V \dots (140) \text{ где } V = \left[ 1 + \Psi_1^2 \left( \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{G_1 F_{cm}^{(1)}}{G_2 F_{cm}^{(2)}} + \frac{1}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{G_1 F_{cm}^{(1)}}{G_3 F_{cm}^{(3)}} \right) \right]$$

От момента  $M$  угол закручивания на единицу длину коробки  $\theta = M \theta_1 = \frac{M}{d^2 G_1 F_{cm}^{(1)}} \cdot V \dots \dots \dots (141)$



§ 17. Кручение вблизи заделки прямоугольной коробки, подкрепленной брусками в углах. Случай сплошных стенок до и после потери устойчивости. Случай ферменных стенок. Случай коробки из стенок разного типа.

Рассмотрим кручение вблизи заделки прямоугольной коробки (рис. 84). На свободном конце стенок связаны диском  $A$ . Диск этот жесткий в своей плоскости, гибкий из своей плоскости и передает стеночкам крутящий момент  $M$ , приложенный в плоскости диска  $A$ . Предполагаем, что обшивка работает только на срез, а осевые силы воспринимаются брусками 1, 2, 3 и 4. Из равновесия части коробки длиной  $X$  (рис. 85) вытекает:

$$\sum Y = 0 \text{ или } Q_4 - Q_2 = 0 \text{ откуда } Q_2 = Q_4 = Q_{II} \dots (141a)$$

$$\sum Z = 0 \text{ или } Q_1 - Q_3 = 0 \text{ откуда } Q_1 = Q_3 = Q_{II} \dots (141b)$$

$$\sum X = 0 \text{ или } P_1 - P_3 + P_4 - P_2 = 0, \text{ откуда } P_2 - P_4 = P_1 - P_3 \dots (a)$$

$$\sum M_x = 0 \text{ или } Q_{II} 2h + Q_I 2b - M = 0 \dots \dots \dots (b)$$

Обозначаем  $Q_{II} 2h = X_1$ ;  $Q_I 2b = X_2$ .

Из уравнения (б) следует:  $X_2 = M - X_1$ .

Следовательно, пара горизонтальных стенок подвергается действию крутящего момента  $X_1$ ; пара вертикальных стенок подвергается действию крутящего момента  $M - X_1$ .

$$\sum M_z = 0 \text{ или: } -P_1 h - P_3 h + P_2 h + P_4 h = 0 \text{ или: } (P_2 + P_4) - (P_1 + P_3) = 0$$

$$\text{откуда } P_2 + P_4 = P_1 + P_3 \dots \dots \dots (в)$$



Из совместного решения уравнений а и в, вытекает:

$$2R_2 = 2R_1 \text{ или: } R_2 = R_1 = R_I \dots \dots \dots (e)$$

$$-2R_4 = -2R_3 \text{ или: } R_4 = R_3 = R_{II} \dots \dots \dots (g)$$

$$\Sigma M_y = 0 \text{ или: } -R_I 2b + R_{II} 2b = 0; \text{ откуда: } R_I = R_{II}.$$

Таким образом если осевые силы сосредотачиваются исключительно в поясах, а стенки создают исключительно срезающую силу, в любом поперечном сечении прямоугольной коробки постоянного сечения осевые силы равны между собой по абсолютной величине, т.е.  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = N_x$ . (Когда стенка теряет устойчивость, то она создает не только составляющую среза, но и составляющую растяжения. Вследствии этого на данный вывод, сделанный выше не распространяется).

В результате решения рассмотренных нами шести уравнений статики остались еще неопределенными: момент  $X_1$  и осевая сила  $N_x$ . Отсюда мы могли бы заключить, что рассмотренная нами система является дважды статически неопределимой.

В действительности же наша система (как пространственная) лишь однажды статически неопределима. Происходит это из следующего: если освободить закрепления горизонтальных стенок, воспринимающих горизонтальные силы среза, то кручение будет восприниматься только вертикальными стеночками и задача станет статически определимой.

Таким образом совместность работы всех четырех стенок создается совместностью кру



чения, этих стенок в результате чего четыре, двухъярусных балки обращаются в единую пространственную коробку.

Таким образом, по сути дела имеется одно лишнее закрепление, которое придает системе пространственность. Этим закреплением является закрепление, задерживающее сдвиг по направлению сил  $Q_1$  и  $Q_2$  (или, что то же, задерживающее кручение по направлению момента  $X_1$ ).

Как известно, в расчете статически неопределимых систем по методу сил основная система получается из заданной освобождением в ней лишней связи. Полученная на этом принципе основная система изображена на рис. 86. Она представляет собой две пары двухъярусных балок, каждая из которых имеет возможность самостоятельного скручивания.

Пусть стенки этих балок не потеряли устойчивости и воспринимают лишь срез. Тогда из рассмотрения, например, верхней горизонтальной стенки, следует, что осевая сила в поясе 1

$$N_x^n = \frac{X_1 \cdot x}{2h \cdot 2b} \dots \dots \dots (\text{растяжение}).$$

Из рассмотрения левой вертикальной стенки следует, что осевая сила в том же бруске равна

$$N_x^{(b)} = \frac{(M - X_1) \cdot x}{2b \cdot 2h} \dots \dots \dots (\text{сжатие})$$

Так как брусок 1, согласно выбранной основной системе, принадлежит одновременно горизонтальной и вертикальной стенкам, то полная осевая сила в бруске



$$N_x = N_x^{(2)} - N_x^{(3)} = 2 \frac{X_1 \cdot x}{4 \cdot h \cdot b} - \frac{M_x}{4 h b} \dots \dots (142).$$

Уравнение 142 устанавливает зависимость  $N_x$  от  $X_1$  и  $M$ . Момент определяется и канонического уравнения метода сил:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1P} = 0 \dots (143), \text{ отсюда } X_1 = - \frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} \dots (144)$$

В уравнении 143  $X_1$  представляет собой обобщенное неизвестное в виде двух моментов, приложенных к горизонтальной паре и к вертикальной паре стенок и направленных взаимно противоположно. Уравнение 143 вытекает из условия совместности деформаций пары горизонтальных и пары вертикальных стенок, на которые расчленена заданная система. Если горизонтальные стенки будут деформироваться самостоятельно, то образуется угол закручивания  $\varphi_1$  (рис. 87а); от самостоятельной деформации вертикальных стенок образуется угол закручивания  $\varphi_2$  (рис. 87б). В результате линии  $\alpha-\alpha$  и  $\beta-\beta$ , пересекавшиеся до деформации под углом в  $90^\circ$  в плоскости диска  $A$ , после деформации образуют угол  $\varphi_1 + (90^\circ - \varphi_2) = 90 + (\varphi_1 - \varphi_2)$ .

В действительной системе разность  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0 \dots (e)$ , так как линии  $\alpha-\alpha$  и  $\beta-\beta$  в действительной системе до и после деформации сохраняют угол пересечения  $90^\circ$ .

Выражение (e) является отправным условием для составления уравнения 143.



Перемещения  $\delta_H$  и  $\Delta_{1p}$  определяем по формуле Мора. В том случае когда  $M = 0$  и  $X_1 = 1$ , срезающая сила в горизонтальных стенках равна  $\frac{1}{2h}$ , а в вертикальных  $-\frac{1}{2b}$ . Осевые силы в поясах (как следует из формулы 142) равны  $N_1 = \frac{1 \cdot X}{2b \cdot h}$ .

По формуле:  $\delta_H^0 = \sum \int_0^e \frac{Q^2 dx}{GF} + \sum \int_0^e \frac{N_1^2 dx}{E_f}$ ; или

$$\delta_H^0 = \frac{e}{4h^2} \cdot \frac{1}{G_1 F_1} + \frac{e}{4h^2 G_3 F_3} + \frac{e}{4b^2} \cdot \frac{1}{G_2 F_2} + \frac{e}{4b^2} \cdot \frac{1}{G_4 F_4} +$$

$$+ \frac{e^3}{12b^2 h^2} \cdot \frac{1}{E_1 f_1} + \frac{e^3}{12b^2 h^2} \cdot \frac{1}{E_3 f_3} + \frac{e^3}{12b^2 h^2} \cdot \frac{1}{E_2 f_2} + \frac{e^3}{12b^2 h^2} \cdot \frac{1}{E_4 f_4}$$

или

$$\delta_H^0 = \frac{e}{4h^2} \cdot \frac{1}{G_1 F_1} \left( 1 + \frac{G_1 F_1}{G_3 F_3} + \frac{h^2 G_1 F_1}{b^2 G_2 F_2} + \frac{h^2}{b^2} \cdot \frac{G_1 F_1}{G_4 F_4} \right) +$$

$$+ \frac{e^3}{12b^2 h^2} \cdot \frac{1}{E_1 f_1} \left( 1 + \frac{E_1 f_1}{E_3 f_3} + \frac{E_1 f_1}{E_2 f_2} + \frac{E_1 f_1}{E_4 f_4} \right) \dots \dots \text{(ж)}.$$

В выражении (ж)  $G_1 F_1, G_2 F_2, \dots, G_4 F_4$  представляют собой произведения модуля сдвига на площадь поперечного сечения соответствующих стенок.

$E_1 f_1, E_2 f_2, \dots, E_4 f_4$  представляют собой произведения нормального модуля на площадь поперечного сечения соответствующих поясов.

Вводим обозначения:  $n_G = 1 + \frac{G_2 F_2}{G_4 F_4}$

$$m_G = 1 + \frac{G_1 F_1}{G_3 F_3} + \frac{h^2 G_1 F_1}{b^2 G_2 F_2} + \frac{h^2}{b^2} \cdot \frac{G_1 F_1}{G_4 F_4} = 1 + \frac{G_1 F_1}{G_3 F_3} + \frac{h^2}{b^2} \cdot \frac{G_1 F_1}{G_2 F_2} \cdot n_G$$

$$m_E = 1 + \frac{E_1 f_1}{E_3 f_3} + \frac{E_1 f_1}{E_2 f_2} + \frac{E_1 f_1}{E_4 f_4}$$



$$\alpha = \frac{\beta^2}{e^2} \cdot \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1};$$

и переписываем выражение (ж) в следующем виде:

$$\delta_{II} = \frac{e^3}{12\beta^2 h^2} \cdot m_E \frac{1}{E_1 f_1} \left( 3\alpha \cdot \frac{m_E}{m_E} + 1 \right).$$

В состоянии, когда  $X_1 = 0$  и к вертикальным стенкам приложен внешний момент  $M$ , срезающая сила в горизонтальных стенках равна нулю, а в вертикальных стенках  $Q_p = \frac{M}{2b}$

Осевая сила в поясах определяется по формуле

$$N_p = -\frac{M \cdot x}{4\beta h}.$$

По формуле Мора:  $\Delta_{1p} = \sum \int_0^e \frac{Q_1 Q_p dx}{GF} + \sum \int_0^e \frac{N_1 N_p dx}{EF}$  или

$$\Delta_{1p} = -\frac{1}{2b} \cdot \frac{M}{2b} \cdot e \cdot \frac{1}{G_2 F_2} - \frac{1}{2b} \cdot \frac{M}{2b} \cdot e \cdot \frac{1}{G_4 F_4} -$$

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{Me^3}{12\beta^2 h^2} \cdot \frac{1}{E_1 f_1} + \frac{Me^3}{12\beta^2 h^2} \cdot \frac{1}{E_3 f_3} + \frac{Me^3}{12\beta^2 h^2} \cdot \frac{1}{E_2 f_2} + \frac{Me^3}{12\beta^2 h^2} \cdot \frac{1}{E_4 f_4} \right);$$

или

$$\Delta_{1p} = -\frac{Me}{4\beta^2} \cdot \frac{1}{G_2 F_2} \left( 1 + \frac{G_2 F_2}{G_4 F_4} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{Me^3}{12\beta^2 h^2} \cdot \frac{1}{E_1 f_1} \cdot m_E \dots (ж_1).$$

Вводим обозначения  $\beta = \frac{h^2}{e^2} \cdot \frac{E_1 f_1}{G_2 f_2}$  и переписываем выражение (ж<sub>1</sub>) в следующем виде:

$$\Delta_{1p} = -\frac{Me^3}{12\beta^2 h^2} \cdot \frac{1}{E_1 f_1} m_E \left( 3\beta \frac{m_E}{m_E} + \frac{1}{2} \right) \dots (ж_2).$$

Подставив значения  $\delta_{II}$  и  $\Delta_{1p}$  по формулам ж<sub>1</sub> и ж<sub>2</sub> в уравнение 144 находим



$$X_1 = M \frac{3\beta \frac{n_G}{m_E} + \frac{1}{2}}{3\alpha \frac{m_G}{m_E} + 1} \dots \dots \dots (145)$$

или  $X_1 = K \cdot M \dots \dots (146)$ , где

$$K = \frac{3\beta \frac{n_G}{m_E} + \frac{1}{2}}{3\alpha \frac{m_G}{m_E} + 1} \dots \dots \dots (147)$$

или  $K = \frac{3\beta n_G + \frac{m_E}{2}}{3\alpha m_G + m_E} \dots \dots \dots (148)$

$K$  - представляет собой коэффициент, определяющий ту часть внешнего момента, которая воспринимается горизонтальными стенками коробки.

Вертикальные стенки воспринимают момент

$$X_2 = (1-K) \cdot M \dots \dots \dots (149)$$

Подставив значения  $X_1$  и  $X_2$  по формулам 146 и 149 в уравнения 141а, 141б и 142, находим:

$$Q_{II} = Q_1 = Q_3 = \frac{K M}{2h} \dots \dots (150) \quad Q_I = Q_2 = Q_4 = \frac{(1-K) M}{2b} \dots \dots (151)$$

$$N_x = \frac{M_x}{4bh} (2K-1) \dots \dots (152)$$

Напряжения в стенках и в поясах определяются соответственно по формулам  $\tau = \frac{Q}{F_{см}}$

$$\sigma = \frac{N_x}{F}$$

При  $x = l$ , осевая сила  $N_x$  достигает максимума и равна  $N_e = \frac{M_e}{4bh} (2K-1) \dots \dots (153)$ .

Если изучаемая нами коробка закручивается свободно, т.е. если нет препятствий к свободному



искажению плоскости поперечного сечения, то касательные напряжения в стенках определяются по формуле Бредта

$$\tau = \frac{M}{2F\delta}$$

Интенсивность срезающей силы определяется по формуле

$$q = \text{const} = \tau \cdot \delta = \frac{M}{2F}$$

Срезающие силы в стенках равны

$$Q_1 = Q_3 = q \cdot 2b = \frac{M \cdot 2b}{2F}; \quad Q_2 = Q_4 = \frac{M \cdot 2h}{2F}$$

Момент, создаваемый горизонтальными стенками

$$M_2 = q \cdot 2b \cdot 2h = \frac{M}{2F} \cdot 4bh = \frac{M}{2}$$

Момент, создаваемый вертикальными стенками

$$M_b = q \cdot 2h \cdot 2b = \frac{M}{2F} \cdot 4bh = \frac{M}{2}$$

Следовательно, независимо от соотношения  $\frac{b}{h}$  момент  $M$  распределяется поровну на горизонтальные и вертикальные стенки.

Осевая сила в любом из угловых брусков

$$N_x = \frac{Q_1 x}{2b} - \frac{Q_2 x}{2h} = \frac{M \cdot 2bx}{2F \cdot 2b} - \frac{M \cdot 2hx}{2F \cdot 2h} = \frac{Mx}{2F} - \frac{Mx}{2F} = 0$$

Следовательно если сечение закручивается свободно (если, как говорят, имеет место кручение по Бредту), то осевых сил в элементах коробки постоянного сечения не возникает.

К этому же заключению мы пройдем, если в выражениях для  $\alpha$  и  $\beta$  положим  $e = \alpha$ .



Тогда  $\alpha = \beta = 0$  и  $K = \frac{1}{2}$ , т.е. на бесконечном удалении от заделки момент  $M$  распределяется поровну на горизонтальные и вертикальные стенки, и коробка закручивается по Бредту.

В частном случае<sup>\*)</sup>, когда  $E_1 f_1 = E_3 f_3 = E_2 f_2 = E_4 f_4 = E f$ ;

$$G_1 F_1 = G_3 F_3 = G_2 F_2; \quad G_2 F_2 = G_4 F_4 = G_3 F_3 \quad \text{то}$$

$$m_G = 2 + 2 \frac{h^2}{b^2} \frac{G_2 F_2}{G_3 F_3}; \quad m_E = 4; \quad n_G = 2 \quad \text{и}$$

$$K = \frac{3\beta \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{3\alpha \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h^2}{b^2} \frac{G_2 F_2}{G_3 F_3}\right) + 1} = \frac{1 + 3\beta}{2 + 3(\alpha + \beta)} \dots (154)$$

или  $K = \frac{\frac{1}{\beta} + 3}{\frac{2}{\beta} + 3\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)}$ ; так как  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{b^2}{e^2} \cdot \frac{E f}{G_2 F_2} \cdot \frac{h^2}{e^2} \frac{E f}{G_6 F_6} =$

$$= \frac{b^2}{h^2} \cdot \frac{G_6 F_6}{G_2 F_2}.$$

При  $E = \infty$ , т.е. при абсолютно жестких недеформирующихся поясах  $\beta = \infty$  и

$$K = \frac{3}{3\left(1 + \frac{b^2}{h^2} \frac{G_6 F_6}{G_2 F_2}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{b^2}{h^2} \frac{G_6 F_6}{G_2 F_2}} \dots \dots \dots (155)$$

Таким образом, если  $E = \infty$  то коэффициент  $K$  не зависит от длины коробки, а зависит лишь от жесткости стенок. Легко показать, что такое положение соответствует работе коробки в условиях „сростков Шухова“, когда сечение остается плоским не подвергается действию нормальных напряжений и совершенно не поворачивается

<sup>\*)</sup> см. Беляев, „Расчет свободно-несущего крыла“, ЦАГИ, воеп. 165.



из своей плоскости. Действительно из формулы 136 для рассматриваемой коробки без учета угловых брусков находим:

$$K = \frac{2 \cdot G_2 F_2 h^2}{2 \cdot G_2 F_2 h^2 + 2 G_3 F_3 b^2} = \frac{1}{1 + \frac{b^2}{h^2} \cdot \frac{G_3 F_3}{G_2 F_2}}, \text{ что совпа-}$$

дает с формулой 155.

Переходим к определению угла закручивания изучаемой нами прямоугольной коробки. Для этой цели пользуемся формулой Мора.

В заданном состоянии в плоскости диска (А) приложен крутящий момент  $M$  в единичном состоянии  $M=1$ .

Усилия в элементах коробки (как в заданном, так и в единичном состоянии) определяем по формулам 146, 149, 152.

Угол закручивания на длину  $l$  коробки:

$$\theta = \left(\frac{K}{2h}\right)^2 \frac{Ml}{G_1 F_1} + \left(\frac{K}{2h}\right)^2 \frac{Ml}{G_3 F_3} + \left(\frac{1-K}{2b}\right)^2 \frac{Ml}{G_2 F_2} + \left(\frac{1-K}{2b}\right)^2 \frac{Ml}{G_4 F_4} +$$

$$+ \frac{1}{3} \left(\frac{2K-1}{4bh}\right)^2 \frac{Ml^3}{E_1 F_1} + \frac{1}{3} \left(\frac{2K-1}{4bh}\right)^2 \frac{Ml^3}{E_3 F_3} + \frac{1}{3} \left(\frac{2K-1}{4bh}\right)^2 \frac{Ml^3}{E_2 F_2} + \frac{1}{3} \left(\frac{2K-1}{4bh}\right)^2 \frac{Ml^3}{E_4 F_4},$$

или

$$\theta = \left(\frac{K}{2h}\right)^2 \frac{Ml}{G_1 F_1} \left[ 1 + \frac{G_1 E_1}{G_3 F_3} + \frac{h^2}{b^2} \left(\frac{1-K}{K}\right)^2 \frac{G_1 F_1}{G_2 F_2} + \frac{h^2}{b^2} \left(\frac{1-K}{K}\right)^2 \frac{G_1 F_1}{G_4 F_4} \right] +$$

$$+ \frac{1}{3} \left(\frac{2K-1}{4bh}\right)^2 \frac{Ml^3}{E_1 F_1} \left[ 1 + \frac{E_1 F_1}{E_3 F_3} + \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} + \frac{E_1 F_1}{E_4 F_4} \right] \text{ или}$$

$$\theta = \frac{1}{3} \left(\frac{2K-1}{4bh}\right)^2 \frac{Ml^3}{E_1 F_1} \cdot m'_c \left[ 1 + 12 \frac{m'_c}{m_c} \left(\frac{K}{2K-1}\right)^2 \cdot \alpha \right] \dots (156),$$

где

$$m'_c = 1 + \frac{G_1 F_1}{G_3 F_3} + \frac{h^2}{b^2} \left(\frac{1-K}{K}\right)^2 \frac{G_1 F_1}{G_2 F_2} + \frac{h^2}{b^2} \left(\frac{1-K}{K}\right)^2 \frac{G_1 F_1}{G_4 F_4}$$



В частном случае, когда  $G_1 F_1 = G_3 F_3$ ;  $G_2 F_2 = G_4 F_4$

$$m'_G = 2 \left[ 1 + \frac{h^2}{b^2} \left( \frac{1-k}{k} \right)^2 \frac{G_1 F_1}{G_2 F_2} \right] = 2 \left[ 1 + \left( \frac{1-k}{k} \right)^2 \frac{\beta}{\alpha} \right]$$

Если к тому же  $E_1 f_1 = E_3 f_3 = E_2 f_2 = E_4 f_4$ , то  $m'_E = 4$  и

$$\theta = \frac{1}{12} \frac{(2k-1)^2}{b^2 h^2} \frac{M l^3}{E_1 f_1} \left[ 1 + 6 \frac{\alpha + (1-k)^2 \beta}{(2k-1)^2} \right].$$

Вводим обозначения  $\frac{h b}{l} = z$ ;  $\frac{l}{E_1 f_1} = \delta$ ; тогда

$$\theta = \frac{1}{12} \cdot \frac{(2k-1)^2}{z^2} \cdot \delta \cdot \left[ 1 + 6 \frac{k^2 \alpha + (1+k)^2 \beta}{(2k-1)^2} \right] M \dots (157).$$

Когда прямоугольная коробка имеет лишь два пояса, как то, например, показано на рис. 88 (случай коробки с одним лонжероном), указанный единственный лонжерон не подвергается изгибу в вертикальной плоскости и в поясах, следовательно, не появляются осевых сил. Эти пояса подвергаются лишь изгибу в горизонтальной плоскости от сдвигающих сил в горизонтальных стенках. Отсутствие изгиба правого лонжерона в вертикальной плоскости происходит от того, что возникающая в нем при кручении вертикальная сдвигающая сила погашается вертикальной сдвигающей силой на левой вертикальной стенке, передающейся на лонжерон через жесткий диск (А)<sup>х)</sup>

Угол закручивания коробки с односторонним лонжероном от момента  $M=1$  определяется по формуле

$$\theta = \frac{Q_1^2 l}{G_1 F_1} + \frac{Q_2^2 l}{G_2 F_2} + \frac{Q_3^2 l}{G_3 F_3} + \frac{Q_4^2 l}{G_4 F_4} + \int_0^l \frac{M_1^2 dx}{E_1 J_1} + \int_0^l \frac{M_2^2 dx}{E_2 J_2}$$

х) См. Макаров, Самолет №1 и №2 1936 г.



где  $M_1$  изгибающий момент в поясе 1 от срезающей силы  $Q_1$

$$M_1 = Q_1 x$$

$M_2$  - изгибающий момент в поясе 2 от срезающей силы  $Q_3$ ;  $M_2 = Q_3 x$ ;

$J_1$  и  $J_2$  - моменты инерции поясов 1 и 2 относительно вертикальной оси.

Вследствии этого  $M_1 = M_2$

$$Q_1 = Q_3; \quad Q_2 = Q_4.$$

Перерезывающие силы в стенках определяются после того, как определится обобщенное неизвестное  $X_1$ .

Это неизвестное определяется из уравнения 143 при новых  $\delta_H$  и  $\Delta_{1p}$  (так как место осевых сил в поясах занимают изгибающие моменты  $M_1, M_2$ ).

Строго говоря, раньше чем приступить к применению уравнения 143, следовало бы рассмотреть шесть уравнений статики, подобных рассмотренным для коробки с четырьмя поясами; установить зависимость между усилиями элементов коробки и убедиться в ее статической неопределимости относительно обобщенного неизвестного  $X_1$ . Мы указанные операции опустили, полагая, что они само собой разумеются.

$$\delta_H^2 = \frac{e}{4h^2} \frac{1}{G_1 F_1} m_0 + \left(\frac{1}{2h}\right)^2 \frac{e^3}{3E_1 J_1} + \left(\frac{1}{2h}\right)^2 \frac{e^3}{3E_2 J_2}; \text{ или}$$

$$\delta_H^2 = \frac{1}{12h^2} \cdot \frac{e^3}{E_1 J_1} \left[ 1 + \frac{E_1 J_1}{E_2 J_2} + 3 \frac{E_1 J_1 m_0}{G_1 F_1 e^3} \right];$$

$$\Delta_{1p} = - \frac{M e}{4b^2} \cdot \frac{1}{G_2 F_2} \cdot m_0;$$



$$\chi_1 = - \frac{\Delta_1 P}{\delta_{11}} = \frac{M}{e^2} \cdot \frac{h^2}{b^2} \cdot \frac{E_1 J_1}{G_2 F_2} \cdot \frac{n_G}{J_E} \dots \dots (158)$$

$$S_E = 1 + \frac{E_1 J_1}{E_2 J_2} + 3 \frac{E_1 J_1}{G_1 F_1} \cdot \frac{m_G}{e^2};$$

$$K = 3 \frac{1}{e^2} \frac{h^2}{b^2} \frac{E_1 J_1}{G_2 F_2} \cdot \frac{n_G}{S_E};$$

Когда  $G_1 F_1 = G_3 F_3$ ;  $G_2 F_2 = G_4 F_4$ ;  $m_G = 2 + 2 \frac{h^2}{b^2} \frac{G_1 F_1}{G_2 F_2} =$   
 $= 2 \left( 1 + \frac{h^2}{b^2} \frac{G_1 F_1}{G_2 F_2} \right)$

Если  $E_1 J_1 = E_2 J_2$  то  $S_E = 2 + 3 \frac{E_1 J_1 \cdot m_G}{G_1 F_1 e^2}$ ;  $n_G = 2$

$$\theta = \left( \frac{K}{2h} \right)^2 \cdot \frac{e}{G_1 F_1} \cdot m'_G + \frac{K^2 e^3}{h^2 3 E_1 J_1} + \frac{K^2 e^3}{h^2 3 E_2 J_2}; \text{ или}$$

$$\theta = \frac{K^2 e^3}{3 E_1 J_1 h^2} \left[ 1 + \frac{E_1 J_1}{E_2 J_2} + m'_G \frac{E_1 J_1}{G_1 F_1} \cdot \frac{3}{4 e^2} \right]$$

Когда  $E_1 J_1 = E_2 J_2$

$$\theta = \frac{K^2 e^3}{3 E_1 J_1 h^2} \left[ 2 + \frac{3}{4} \frac{m'_G}{e^2} \cdot \frac{E_1 J_1}{G_1 F_1} \right] \dots \dots (159)$$

$$m'_G = 2 \left[ 1 + \frac{h^2}{b^2} \left( \frac{1-K}{K} \right)^2 \cdot \frac{G_1 F_1}{G_2 F_2} \right].$$

Пример 14. Для коробки (рис. 84), подверженной кручению в плоскости (А) моментом  $M$ , определить:

- угла закручивания коробки;
- напряжения в стеночках;
- напряжения в поясах.

Данные: толщина стенок  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0,08 \text{ см.}$

$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 6,9 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$ ;  $G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = 1,4 \cdot 10^5 \text{ кг/см}$



$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 42 \text{ см}^2; \quad 2h = 22,9 \text{ см}; \quad 2b = 94 \text{ см}; \quad l = 30 \text{ см}.$$

$$M = 12700 \text{ кг.см.}$$

Решение.

1. Определение коэффициентов  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , и  $K$ .

$$\alpha = \frac{b^2}{e^2} \cdot \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1} = \left(\frac{94}{2}\right)^2 \frac{1}{30^2} \cdot \frac{6,9 \cdot 10^5 \cdot 4,2}{1,4 \cdot 10^5 (0,08 \cdot 94)} = 6,74$$

$$\beta = \frac{h^2}{e^2} \cdot \frac{E_1 f_1}{G_2 F_2} = \left(\frac{22,9}{2}\right)^2 \frac{1}{30^2} \cdot \frac{6,9 \cdot 10^5 \cdot 4,2}{1,4 \cdot 10^5 (0,08 \cdot 22,9)} = 1,65$$

$$\gamma = \frac{bh}{e} = \frac{94}{2} \cdot \frac{22,9}{2} \cdot \frac{1}{30} = 17,9; \quad \gamma^2 = 320$$

$$\delta = \frac{e}{E_1 f_1} = \frac{30}{6,9 \cdot 10^5 \cdot 4,2} = 1,03 \cdot 10^{-5}$$

$$K = \frac{1 + 3\beta}{2 + 3(\alpha + \beta)} = \frac{1 + 3 \cdot 1,65}{2 + 3(0,74 + 1,65)} = \frac{5,95}{27,17} = 0,2$$

2. Определение угла закручивания.

По формуле 157:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{12} \cdot \frac{(2K-1)^2}{\gamma^2} \cdot \delta \left[ 1 + 6 \frac{K^2 \alpha + (1-K)^2 \beta}{(2K-1)^2} \right] M = \\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{(2 \cdot 0,2 - 1)^2}{320} \cdot 1,03 \cdot 10^{-5} \left[ 1 + 6 \frac{0,2^2 \cdot 6,74 + (1-0,2)^2 \cdot 1,65}{(2 \cdot 0,2 - 1)^2} \right] 12700 = \\ &= 0,0000004. \end{aligned}$$

3. Определение срезающих сил в горизонтальной и в вертикальной стенках.

$$Q_1 = \frac{KM}{2h} = \frac{0,218 \cdot 12700}{2 \cdot \frac{22,9}{2}} = 120,86 \text{ кг.}$$

$$Q_2 = \frac{(1-K)M}{2} = \frac{(1-0,218) \cdot 12700}{2 \cdot \frac{94}{2}} = 105,7 \text{ кг.}$$



Касательные напряжения в горизонтальной стенке:

$$\tau_1 = \frac{Q_1}{F_1} = \frac{120,85}{0,08 \cdot 94} = 16 \text{ кг/см}^2$$

Касательные напряжения в вертикальной стенке:

$$\tau_2 = \frac{Q_2}{F_2} = \frac{103,7}{0,08 \cdot 22,9} = 57,6 \text{ кг/см}^2$$

4. Определение осевых сил в поясах.

$$N_x = \frac{Q_1 x}{2b} - \frac{Q_2 x}{2h} = \frac{K M x}{2b} - \frac{(1-K) M x}{2h} = \frac{K M x}{2b} \left( 1 - \frac{1-K}{K} \cdot \frac{b}{h} \right)$$

Максимальное значение осевой силы в поясе наступает при  $x = l$ .

$$N_{\max} = \frac{K M l}{2b} \left( 1 - \frac{1-K}{K} \cdot \frac{b}{h} \right)$$

При данных в рассматриваемом примере:

$$N_{\max} = \frac{0,218 \cdot 12700 \cdot 30}{2 \cdot \frac{94}{2}} \left( 1 - \frac{0,782}{0,218} \cdot \frac{94}{22,9} \right) = 11850,24 \text{ кг}$$

Максимальное нормальное напряжение в поясе

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{f} = \frac{11850,24}{4,2} = 2821,5 \text{ см}^2$$

Сжатые пояса должны быть проверено на продольный изгиб.

Изложенная выше методика определения усилий в элементах коробки и угла закручивая этой коробки со сплошными стенками распространяется



и на ферменную коробку постоянного и переменного сечения (элемент конструкции, имеющий применение и в крыле и в фюзеляже). Основная система получается разделением ферменной коробки на отдельные плоские фермы, обобщенное неизвестное  $X_1$  определяется из канонического уравнения 143. Применяя формулу Мора к горизонтальным и вертикальным фермам коробки, находим:

$$\delta_{11} = \left( \sum \frac{N_1^2 \mathcal{L}}{E \mathcal{F}} \right)_{\mathcal{H}} + \left( \sum \frac{N_1^2 \mathcal{L}}{E \mathcal{F}} \right)_{\mathcal{B}} \dots \dots (160)$$

$$\Delta_{1p} = -M \left( \sum \frac{N_1^2 \mathcal{L}}{E \mathcal{F}} \right)_{\mathcal{B}} \dots \dots \dots (161)$$

В формулах 160 и 161:  $N_1$  - усилие в стержне фермы, когда к основной системе приложен обобщенный момент  $X_1 = 1$ ;

$\mathcal{F}$  - площадь поперечного сечения стержня;  
 $\mathcal{L}$  - длина стержня.

Выражения, относящиеся к горизонтальным и вертикальным фермам, снабжены соответственно прописками  $\mathcal{H}$  (горизонтальный) и  $\mathcal{B}$  (вертикальный). Коэффициент, определяющий величину момента, воспринимаемого горизонтальной фермой  $K = \frac{X_1}{M}$ .

Вертикальные фермы воспринимают момент  $(1-K)M$ .

Усилия в стержнях горизонтальных ферм определяются по формуле  $\mathcal{L}_2 = X_1 (N_1)_{\mathcal{H}}$ ;

Усилия в стержнях вертикальных ферм определяются по формуле

$$\mathcal{L}_B = -X_1 (N_1)_{\mathcal{B}} + M (N_1)_{\mathcal{B}} = (M - X_1) (N_1)_{\mathcal{B}}^{x)}$$

x) Аналогичные результаты получаются и по методу Вургеся.



Усилия в угловых поясах (т.е. в поясах, находящихся на пересечении горизонтальных и вертикальных ферм) определяются в результате алгебраического суммирования соответствующих усилий от горизонтальных и вертикальных ферм.

В конструкциях крыла (или фюзеляжа) мы встречаемся с коробками смешанного типа (например, когда горизонтальные поверхности этих коробок выполнены из сплошных стенок, а вертикальные поверхности из ферм. Схема такой коробки представлена на рис. 89). В этом случае

$$\delta_H = \frac{e}{4h^2} \cdot \frac{1}{G_1 F_1} + \frac{e}{4h^2} \cdot \frac{1}{G_3 F_3} + \left( \sum \frac{N_i^2 S_i}{E f_i} \right)' + \frac{e^3}{12b^2 h^2} \cdot \frac{1}{E_1 f_1} +$$

$$+ \frac{e^3}{12b^2 h^2} \cdot \frac{1}{E_3 f_3} + \frac{e^3}{12b^2 h^2} \cdot \frac{1}{E_2 f_2} + \frac{e^3}{12b^2 h^2} \cdot \frac{1}{E_4 f_4}.$$

Выражение  $\left( \sum \frac{N_i^2 S_i}{E f_i} \right)'$  относится лишь к стойкам и раскосам вертикальных ферм.

Перемещение  $\delta_H$  представим в следующем виде:

$$\delta_H = \frac{e}{4h^2} \cdot \frac{1}{G_1 F_1} \left( 1 + \frac{G_1 F_1}{G_3 F_3} \right) + \frac{e^3}{12b^2 h^2} \cdot \frac{1}{E_1 f_1} m_E + \left( \sum \frac{N_i^2 S_i}{E f_i} \right)'$$

или

$$\delta_H = \frac{e^3}{12b^2 h^2} \cdot \frac{1}{E_1 f_1} m_E \left[ 1 + 3 \times \frac{n'_E}{m_E} + \left( \sum \frac{N_i^2 S_i}{E f_i} \right)' \cdot \frac{12b^2 h^2}{e^3} \cdot \frac{1}{E_1 f_1} \cdot \frac{1}{m_E} \right]$$

$$\text{где } n'_E = 1 + \frac{G_1 F_1}{G_3 F_3}.$$

Перемещение  $\Delta_{1P}$  для рассматриваемой нами коробки представляется в таком же виде, как и для ферменной коробки:

$$\Delta_{1P} = -M \left( \sum \frac{N_i^2 S_i}{E f_i} \right)''.$$



После того, как определены перемещения  $\delta_H$ ,  $\Delta_{1P}$ , расчет протекает в том же порядке, что и для выше рассмотренных коробок со сплошными и ферменными стенками.

Кроме рассмотренного нами расчета коробки рис. 89 на практике известен также способ расчета той же коробки, основанный на замене каждого раскоса фермы фиктивной стенкой, равной жесткости с помощью так называемой „формулы замены“ (см. Беляев, „Расчет свободонесущих крыльев“, Выпуск Ц.ГИ № 165). После этого коробка рассчитывается как коробка со сплошными стенками. По найденным срезающим силам в вертикальных стенках определяются усилия в раскосах методами расчета плоских ферм.

„Формулу замены“ устанавливает в результате следующих рассуждений:

Пусть раскос (1) рис. 90а, заключенный между узлами  $\underline{A}$  и  $\underline{B}$  жесткой шарнирной рамки  $ACBD$  (в связи с чем стержни этой рамки исключаются при рассмотрении перемещении раскоса), требуется заменить сплошной стенкой (рис. 90б), также заключенной в жесткую рамку  $ABCD$ . Замену необходимо совершить так, чтобы сохранить неизменным прогиб точки  $\underline{A}$ .

Усилие в раскосе (1) равно  $\frac{P}{\sin \alpha}$ ; длина раскоса  $l_1 = \frac{e}{\cos \alpha}$ .

Вертикальное перемещение точки  $\underline{A}$  этого раскоса определяется по формуле Мора:

$$y_1 = P \left( \frac{1}{\sin \alpha} \right)^2 \cdot \frac{e}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{E_1 f_1} = \frac{Pe}{\sin^2 \alpha \cos \alpha} \cdot \frac{1}{E_1 f_1}$$



Вертикальное перемещение точки  $A$  стенки, имея ввиду чистый срез этой стенки (предполагается, что стенка не воспринимает нормальных напряжений, см. изгиб двуреспоясных балок), равно  $y_{cm} = \frac{Pe}{G_{cm} F_{cm}}$ ; из равенства  $y_1 = y_{cm}$  находим:

$$G_{cm} F_{cm} = E_1 \frac{I_1}{l_1} \sin^2 \alpha \cos \alpha \dots \dots \dots (162).$$

Формула 162 и является формулой замены. При помощи этой формулы раскос заменяется стенкой равной жесткости и наоборот.

Не исключена возможность применения коробки, стенки которой представляют фермы с тонкой стенкой (см. Ромашевский, „Исследование работы балочных систем с тонкой стенкой“, ЦАГИ, вып. 206).

В этом случае при определении перемещений  $\delta_{II}$  и  $\Delta_{I,II}$  необходимо обратиться к теории ферм с тонкой стенкой, либо использовать „формулу замены“, заменив раскосы фриктивной стенкой. В результате толщина стенки коробки будет равна  $\delta_{действ.} + \delta_{фркт.}$ ;  $\delta_{действ.}$  — толщина действительной стенки;  $\delta_{фркт.}$  — толщина фриктивной стенки.

Переходим к рассмотрению коробки, когда все или некоторые стенки коробки потеряли устойчивость и превратились в диагонально-растянутое поле.

Рассмотрим общий случай равновесия части коробки длиной  $X$  (рис. 91), в которой стенки  $\underline{1}$  и  $\underline{2}$  потеряли устойчивость и превратились в диагонально растянутое поле. Остальные две стенки устойчивости не потеряли. Стенки, потерявшие устойчивость, создают составляющие двух нап-



равлений: стенка 1 создает составляющие в направлении оси  $X$  и в направлении оси  $Z$ ; стенка 2 создает составляющие в направлении оси  $X$  и в направлении оси  $Y$ . Из равновесия сил, действующих на рассматриваемую часть коробки, вытекает:

$$1. \Sigma X = 0 \text{ или } P_1 - P_2 - P_3 + P_4 - T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \alpha = 0$$

$T_1$  (и аналогично  $T_2$ ) - равнодействующая растягивающих сил, направленных по волнам стенки.

Ввиду того, что стенки постоянной толщины, силы  $T_1$  и  $T_2$  приложены посередине высоты этих стенок

$$2. \Sigma Y = 0 \quad Q_4 - Q_2 - T_2 \sin \alpha = 0$$

$$3. \Sigma Z = 0 \quad Q_1 - Q_3 + T_1 \sin \alpha = 0$$

$$4. \Sigma M_x = 0 \quad (Q_1 + Q_3)h + (Q_2 + Q_4)b + T_1 \sin \alpha \cdot h + T_2 \sin \alpha \cdot b - M = 0$$

$$5. \Sigma M_y = 0 \quad -(P_1 + P_2)b + (P_3 + P_4)b - T_2 \cos \alpha \cdot b = 0$$

$$6. \Sigma M_z = 0 \quad -(P_1 + P_3)h + (P_2 + P_4)h + T_1 \cos \alpha \cdot h = 0$$

В написанных шести уравнениях статики имеются 10 неизвестных. Тем не менее система однажды статически неопределима. Последнее вытекает из того, что к написанным шести уравнениям статики необходимо присоединить следующие три дополнительных статических условия:

1. Осевые силы сосредотачиваются в поясах т.е. в угловых брусках и создаются силами в стенках, пересекающихся на соответствующем поясе.

2. Сила  $T_1$  в стенке 1 есть исключительно функция срезавшей силы  $Q_1$  в стенке 1.

3. Сила  $T_2$  в стенке 2 является функцией исключительно срезавшей силы  $Q_2$  в стенке 2.



Если присоединить перечисленные три условия к шести условиям статики, то система окажется лишь одной статически неопределимой.

Аналогичное будет иметь место и в том случае, когда все стенки коробки потеряют устойчивость и обратятся в диагонально растянутое поле.

Метод решения одной статически неопределимой коробки был нами выше рассмотрен применительно к коробке со стенками до потери устойчивости. Этот же метод распространяется и на коробки, все стенки которых обратились в диагонально растянутое поле или только некоторые и этих стенок перешли в состояние диагонально растянутого поля.

Случай 1: Все стенки коробки потеряли устойчивость.

Пользуясь формулой 103, находим:

$$\delta_{II} = \frac{\sigma_1^2 l}{E_1^{cm}} F_1 + \frac{\sigma_3^2 l}{E_3^{cm}} F_3 + \frac{\sigma_2^2 l}{E_2^{cm}} F_2 + \frac{\sigma_4^2 l}{E_4^{cm}} F_4 + \int_0^l \frac{N_1^2 dx}{E_1 f_1} + \int_0^l \frac{N_4^2 dx}{E_4 f_4} + \int_0^l \frac{N_2^2 dx}{E_2 f_2} + \int_0^l \frac{N_3^2 dx}{E_3 f_3} \dots (A)$$

$E_1^{cm}, E_3^{cm}, E_2^{cm}, E_4^{cm}$  — нормальные модули упругости соответствующих стенок.

Осевые силы  $N_n$  ( $n=1,2,3,4$ ) от  $X_1=1$  в поясах 1, 2, 3 и 4 определяем, пользуясь формулами 93 и 94; нормальные напряжения  $\sigma_n$  ( $n=1,2,3,4$ ) в стенках определяем по формуле 90:

$$N_1 = 2 \frac{1 \cdot x}{4 \cdot b \cdot h} + \left( \frac{1}{2htg\varphi} + \frac{1}{2btg\varphi} \right) = \frac{1}{2bh} \left[ x + \frac{1}{tg\varphi} (b+h) \right]$$



$$N_3 = \frac{1}{2bh} \left( x - \frac{b+h}{\operatorname{tg} \varphi} \right); \quad N_2 = N_3; \quad N_4 = N_1;$$

$$\sigma_1 = \frac{2}{2hF_7 \sin 2\varphi} = \frac{1}{hF_7 \sin 2\varphi}; \quad \sigma_3 = \frac{1}{hF_8 \sin 2\varphi};$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{bF_2 \sin 2\varphi}; \quad \sigma_4 = \frac{1}{bF_4 \sin 2\varphi};$$

После подстановки значения осевых сил  $N_n$  и нормальных напряжений  $\sigma_n$  в уравнение (А) имеем:

$$\begin{aligned} \delta_{11} = & \frac{e}{E_1^{cm} F_1 (h \sin 2\varphi)^2} + \frac{e}{E_3^{cm} F_3 (h \sin 2\varphi)^2} + \frac{e}{E_2^{cm} F_2 (b \sin 2\varphi)^2} + \\ & + \frac{e}{E_4^{cm} F_4 (b \sin 2\varphi)^2} + \left( \frac{1}{E_4 f_4} + \frac{1}{E_1 f_1} \right) \cdot \frac{1}{4b^2 h^2} \left[ \frac{e^3}{3} + \frac{2}{\operatorname{tg} \varphi} (b+h) \frac{e^2}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} (b+h)^2 e \right] + \\ & + \left( \frac{1}{E_3 f_3} + \frac{1}{E_2 f_2} \right) \frac{1}{4b^2 h^2} \left[ \frac{e^3}{3} - \frac{2}{\operatorname{tg} \varphi} (b+h) \frac{e^2}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} (b+h)^2 e \right]; \text{ или} \\ \delta_{11} = & \frac{e}{E_1^{cm} F_1 (h \sin 2\varphi)^2} \left[ 1 + \frac{E_1^{cm} F_1}{E_3^{cm} F_3} + \frac{E_1^{cm} F_1}{E_2^{cm} F_2} \cdot \frac{h^2}{b^2} + \frac{E_1^{cm} F_1}{E_4^{cm} F_4} \cdot \frac{h^2}{b^2} \right] + \\ & + \frac{e^3}{12b^2 h^2} \cdot \frac{1}{E_1 f_1} \cdot m_E + \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{(b+h)e^2}{4b^2 h^2} \cdot \frac{1}{E_1 f_1} m_E + \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{(b+h)^2 e}{4b^2 h^2} \cdot \frac{1}{E_1 f_1} \cdot \\ & \cdot \left[ 1 + \frac{E_1 f_1}{E_4 f_4} - \frac{E_1 f_1}{E_2 f_2} - \frac{E_1 f_1}{E_3 f_3} \right]. \end{aligned}$$

Вводим обозначения:

$$\alpha_1 = \frac{b^2}{e^2} \cdot \frac{E_1 f_1}{E_1^{cm} F_1 \sin^2 2\varphi}; \quad \alpha_2 = \frac{b+h}{e} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}; \quad \alpha_3 = \frac{(b+h)^2}{e^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}$$

$$m'_E = 1 + \frac{E_1 f_1}{E_4 f_4} - \frac{E_1 f_1}{E_2 f_2} - \frac{E_1 f_1}{E_3 f_3};$$



$$n_E = 1 + \frac{E_1^{cm} F_1}{E_3^{cm} F_3} + \frac{h^2}{b^2} \cdot \frac{E_1^{cm} F_1}{E_2^{cm} F_2} + \frac{h^2}{b^2} \frac{E_1^{cm} F_1}{E_4^{cm} F_4}$$

Тогда:

$$\delta_{II} = \frac{e^3}{12b^2 h^2} \cdot \frac{1}{E_1 f_1} \cdot m_E \left[ 12\alpha_1 \frac{n_E}{m_E} + 3 \cdot \left( \alpha_2 + \frac{m'_E}{m_E} \cdot d_3 \right) + 1 \right]$$

Из формулы Мора вытекает:

$$\Delta_{1P} = - \left( \frac{b_2 \cdot b_{p12} \cdot l}{E_2^{cm}} F_2 + \frac{b_4 \cdot b_{p4} \cdot l}{E_4^{cm}} F_4 + \int_0^l \frac{e N_1 \cdot N_{p,1} \cdot dx}{E_1 f_1} + \int_0^l \frac{e N_3 \cdot N_{p,3} \cdot dx}{E_3 f_3} + \int_0^l \frac{e N_2 \cdot N_{p,2} \cdot dx}{E_2 f_2} + \int_0^l \frac{e N_4 \cdot N_{p,4} \cdot dx}{E_4 f_4} \right) \dots \dots \dots (B)$$

$b_2, b_4, N_1, N_2, N_3, N_4$  определяются соответственно по формулам 90, 94 и...

$$b_{p12} = \frac{2M}{2b \cdot F_2 \cdot \sin 2\varphi} ; \quad b_{p4} = \frac{2M}{2b F_4 \sin 2\varphi} ;$$

$$N_{p,1} = \frac{M \cdot x}{4bh} + \frac{M}{2b \operatorname{tg} \varphi} ; \quad N_{p,3} = \frac{Mx}{4bh} - \frac{M}{2b \operatorname{tg} \varphi} ;$$

$$N_{p,2} = N_{p,3} ; \quad N_{p,4} = N_{p,1} .$$

Значения нормальных напряжений и осевых сил подставляем в уравнение (B).

Тогда

$$\Delta_{1P} = - \left[ \frac{M e}{E_2^{cm} F_2 (b \sin 2\varphi)^2} + \frac{M e}{E_4^{cm} F_4 (b \sin 2\varphi)^2} + \left( \frac{1}{2bh} \cdot \frac{M}{4bh} \cdot \frac{e^3}{3E_1 f_1} + \frac{M}{4bh} \cdot \frac{b+h}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{e^2}{2E_1 f_1} \cdot \frac{1}{2bh} + \frac{M}{2b \operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{1}{2bh} \cdot \frac{e^2}{2E_1 f_1} + \frac{1}{2bh} \cdot \frac{M}{2b \operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{b+h}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{e}{E_1 f_1} \right) + \left( \frac{M}{4bh} \cdot \frac{1}{2bh} \cdot \frac{e^3}{3E_3 f_3} - \frac{M}{4bh} \cdot \frac{b+h}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{1}{2bh} \cdot \frac{e^2}{2E_3 f_3} - \frac{M}{2b \operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{1}{2bh} \cdot \frac{e^2}{2E_3 f_3} + \right.$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2bh} \frac{M}{2btg\varphi} \frac{b+h}{tg\varphi} \frac{e}{E_3 f_3} \Big) + \left( \frac{M}{4bh} \frac{1}{2bh} \frac{e^3}{3E_2 f_2} - \frac{M}{4bh} \frac{b+h}{tg\varphi} \frac{1}{2bh} \frac{e^2}{2E_2 f_2} - \right. \\
 & - \frac{M}{2btg\varphi} \frac{1}{2bh} \frac{e^2}{2E_2 f_2} + \frac{M}{2btg\varphi} \frac{b+h}{tg\varphi} \frac{e}{E_2 f_2} \Big) + \left( \frac{1}{2bh} \frac{M}{4bh} \frac{e^3}{3E_4 f_4} + \right. \\
 & \left. + \frac{M}{4bh} \frac{b+h}{tg\varphi} \frac{e^2}{2E_4 f_4} \frac{1}{2bh} + \frac{M}{2btg\varphi} \frac{1}{2bh} \frac{e^2}{2E_4 f_4} + \frac{M}{2btg\varphi} \frac{b+h}{tg\varphi} \frac{e}{E_4 f_4} \right) \Big]
 \end{aligned}$$

или

$$\Delta_{1P} = - \left[ \frac{M e}{E_2^{cm} F_2} \frac{1}{(b \sin 2\varphi)^2} \left( 1 + \frac{E_2^{cm} F_2}{E_2^{cm} F_4} \right) + \frac{M e^3}{24 b^2 h^2} \frac{1}{E_1 f_1} t_E \right]$$

или

$$\Delta_{1P} = - \frac{M e^3}{24 b^2 h^2} \frac{1}{E_1 f_1} t_E (1 + 24 \alpha_4) \dots \dots (B).$$

В формуле (B) приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 t_E = & \left[ 1 + \frac{1}{tg\varphi} \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{b+h}{e} + 3 \frac{h}{e} + \frac{(b+h)h}{e^2 tg\varphi} \right) \right] + \left[ \frac{E_1 f_1}{E_3 f_3} - \frac{1}{tg\varphi} \left( \frac{3}{2} \frac{b+h}{e} + 3 \frac{h}{e} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{(b+h)h}{e^2 tg\varphi} \right) \frac{E_1 f_1}{E_3 f_3} \right] + \left[ \frac{E_1 f_1}{E_2 f_2} - \frac{1}{tg\varphi} \left( \frac{3}{2} \frac{b+h}{e} + 3 \frac{h}{e} - \frac{(b+h)h}{e^2 tg\varphi} \right) \frac{E_1 f_1}{E_2 f_2} \right] + \\
 & + \left[ \frac{E_1 f_1}{E_4 f_4} + \frac{1}{tg\varphi} \left( \frac{3}{2} \frac{b+h}{e} + 3 \frac{h}{e} + \frac{(b+h)h}{e^2 tg\varphi} \right) \frac{E_1 f_1}{E_4 f_4} \right]
 \end{aligned}$$

$$\alpha_4 = \frac{E_1 f_1}{E_2 f_2} \frac{h^2}{e^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 2\varphi} \frac{1}{t_E} \left( 1 + \frac{E_2^{cm} F_2}{E_4^{cm} F_4} \right)$$

Подставив значения  $\Delta_{1P}$  и  $\delta_N$  в формулу 144 находим:

$$X_1 = M \frac{2t_E}{m_E} \frac{1 + 24 \alpha_4}{12 \alpha_1 \frac{n_E}{m_E} + 3 \left( \alpha_2 + \frac{m_E'}{m_E} d_3 \right) + 1}$$

$$K = \frac{X_1}{M} = \frac{2t_E}{m_E} \frac{1 + 24 \alpha_4}{12 \alpha_1 \frac{n_E}{m_E} + 3 \left( \alpha_2 + \frac{m_E'}{m_E} d_3 \right) + 1} \dots (163)$$



В частном случае, когда  $E_1 f_1 = E_4 f_4 = E_2 f_2 = E_3 f_3$  :

$$m'_E = 0; \quad m_E = 4 \quad \text{Тогда:}$$

$$K = \frac{t_E}{2} \frac{1 + 24\alpha_4}{3\alpha_1 n_E + 3\alpha_2 + 1} \dots \dots \dots (164)$$

Умножив коэффициент  $K$  на момент  $M$  и разделив полученное произведение на  $2h$ , находим срезающие силы, воспринимаемые горизонтальными стенками. После этого по формуле 90 находим нормальные растягивающие силы в стенках.

Окончательные осевые силы в поясах находятся по формулам:

$$N_{1\text{оконч}} = N_1 + N_{p,1} = \frac{KM}{2bh} \left[ x + \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} (b+h) \right] - \left( \frac{Mx}{4bh} + \frac{M}{2b\operatorname{tg}\varphi} \right)$$

или

$$N_{1\text{оконч}} = \frac{Mx}{4bh} (2K-1) + \frac{M}{2b\operatorname{tg}\varphi} \left[ \frac{K(b+h)}{h} - 1 \right]$$

$$N_{3\text{оконч}} = N_3 + N_{p,3} = \frac{KM}{2bh} \left( x - \frac{b+h}{\operatorname{tg}\varphi} \right) - \left( \frac{Mx}{4bh} - \frac{M}{2b\operatorname{tg}\varphi} \right)$$

или

$$N_{3\text{оконч}} = \frac{Mx}{4bh} (2K-1) - \frac{M}{2b\operatorname{tg}\varphi} \left( \frac{K(b+h)}{h} - 1 \right);$$

$$N_{2\text{оконч}} = N_{3\text{оконч}}; \quad N_{4\text{ок}} = N_{1\text{ок}}$$

Угол закручивания рассматриваемой нами коробки определяем по формуле Мора:

$$\theta = \sum \frac{\sigma_p \cdot \sigma_i \cdot l}{E \sigma^m} F + \sum \int_0^l \frac{N_p \cdot N_i \cdot dx}{E f}$$

где  $\sigma_p$  — растягивающее напряжение в стеночке



коробки в заданном состоянии, когда к коробке приложен крутящий момент  $M$ .

$\sigma$  — растягивающее напряжение в стенке во втором состоянии, когда к коробке приложен крутящий момент  $M=1$ .

$N_p$  — осевая сила в поясе в заданном состоянии

$N_1$  — осевая сила в поясе во втором состоянии.

$$\theta = \frac{2kM}{2h \cdot 2b \cdot \delta_1 \sin 2\varphi} \frac{2k}{2h \cdot 2b \cdot \delta \sin 2\varphi} \frac{\rho}{E_1^{cm}} F_1 + \left( \frac{1-k}{2b h \delta_2 \sin 2\varphi} \right)^2 \frac{M \rho}{E_2^{cm}} F_2 +$$

$$+ \left( \frac{k}{2b h \delta_3 \sin 2\varphi} \right)^2 \frac{M \rho}{E_3^{cm}} F_3 + \left( \frac{1-k}{2b h \delta_4 \sin 2\varphi} \right)^2 \frac{M \rho}{E_4^{cm}} F_4 +$$

$$+ M \left( \frac{2k-1}{4bh} \right)^2 \frac{\rho^3}{3E_1 f_1} + M \left( \frac{\frac{k(b-1)}{h} - 1}{2b \operatorname{tg} \varphi} \right)^2 \frac{\rho}{E_1 f_1} + 2 \frac{2k-1}{4bh} \frac{\frac{k(b+h)}{h} - 1}{2b \operatorname{tg} \varphi} \frac{M \rho^2}{2E_1 f_1} +$$

$$+ M \left( \frac{2k-1}{4bh} \right)^2 \frac{\rho^3}{3E_3 f_3} + M \left( \frac{\frac{k(b+h)}{h} - 1}{2b \operatorname{tg} \varphi} \right)^2 \frac{\rho}{E_3 f_3} - 2 \frac{2k-1}{4bh} \frac{\frac{k(b+h)}{h} - 1}{2b \operatorname{tg} \varphi} \frac{M \rho^2}{2E_3 f_3} +$$

$$+ M \left( \frac{2k-1}{4bh} \right)^2 \frac{\rho^3}{3E_2 f_2} + M \left( \frac{\frac{k(b+h)}{h} - 1}{2b \operatorname{tg} \varphi} \right)^2 \frac{\rho}{E_2 f_2} - 2 \frac{2k-1}{4bh} \frac{\frac{k(b+h)}{h} - 1}{2b \operatorname{tg} \varphi} \frac{M \rho^2}{2E_2 f_2} +$$

$$+ M \left( \frac{2k-1}{4bh} \right)^2 \frac{\rho^3}{3E_4 f_4} + M \left( \frac{\frac{k(b+h)}{h} - 1}{2b \operatorname{tg} \varphi} \right)^2 \frac{\rho}{E_4 f_4} + 2 \frac{2k-1}{4bh} \frac{\frac{k(b+h)}{h} - 1}{2b \operatorname{tg} \varphi} \frac{M \rho^2}{2E_4 f_4}$$

или

$$\theta = \left( \frac{k}{2b h \delta_1 \sin 2\varphi} \right)^2 \frac{M \rho}{E_1^{cm}} F_1 \left[ 1 + \left( \frac{1+k}{k} \right)^2 \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^2 \frac{E_1^{cm}}{E_2^{cm}} - \frac{F_2}{F_1} + \left( \frac{\delta_1}{\delta_3} \right)^2 \frac{E_1^{cm}}{E_3^{cm}} \frac{F_3}{F_1} + \right.$$

$$\left. + \left( \frac{1-k}{k} \right)^2 \left( \frac{\delta_1}{\delta_4} \right)^2 \frac{F_4}{F_1} \right] + \frac{M \rho^3}{3E_1 f_1} \left( \frac{2k-1}{4bh} \right)^2 m_E + \frac{M \rho}{E_1 f_1} \left( \frac{\frac{k(b+h)}{h} - 1}{2b \operatorname{tg} \varphi} \right)^2 m_E +$$

$$+ \frac{2k-1}{4b^2 h \operatorname{tg} \varphi} \left( \frac{\frac{k(b+h)}{h} - 1}{h} \right) \frac{M \rho^2}{2E_1 f_1} m_E \quad \text{или}$$



$$\theta = \frac{1}{3} \left( \frac{2\kappa-1}{4\beta h} \right)^2 \frac{M e^3}{E_1 I_1} m_E \left[ 1 + 3 \left( \alpha_5 \frac{t'_E}{m_E} + \alpha_6 + \alpha_7 \frac{m'_E}{m_E} \right) \right] \quad (165)$$

где

$$t'_E = 1 + \left( \frac{1-\kappa}{\kappa} \right)^2 \left( \frac{d_1^0}{d_2} \right)^2 \frac{E_1^{cm}}{E_2^{cm}} \frac{F_2}{F_1} + \left( \frac{d_1^0}{d_3} \right)^2 \frac{E_1^{cm}}{E_3^{cm}} \frac{F_3}{F_1} + \left( \frac{1-\kappa}{\kappa} \right)^2 \left( \frac{d_1^0}{d_4} \right)^2 \frac{F_4}{F_1};$$

$$\alpha_5 = 4 \left( \frac{\kappa}{2\kappa-1} \right)^2 \frac{1}{e^2 \sin^2 2\alpha} \frac{E_1 I_1 F_1}{E_1^{cm} d_1^2};$$

$$\alpha_6 = \left( \frac{\frac{\kappa(\beta+h)}{h} - 1}{\operatorname{tg} \varphi} \right)^2 \frac{4}{(2\kappa-1)^2} \frac{h^2}{e^2};$$

$$\alpha_7 = 2 \frac{\frac{\kappa(\beta+h)}{h} - 1}{2\kappa-1} \frac{h}{e} \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

Для самостоятельного упражнения оставляем расчет на кручение коробок в случаях, когда:

- а) стенки 1 и 3 потеряли устойчивость, стенки 2 и 4 устойчивости не потеряли.
- б) стенка 1 потеряла устойчивость, остальные стенки не потеряли устойчивости.
- в) стенка 1 не потеряла устойчивости, все остальные стенки потеряли устойчивость.

### § 18. Кручение вблизи заделки коробки постоянного трапециoidalного сечения, подкрепленной брусками в углах.

Речь идет о кручении коробки постоянного сечения, представленной на рис. 92. Изучение кручения рассматриваемой коробки производится методами, какими в предыдущем параграфе изучалось кручение прямоугольной коробки. Эти <sup>же</sup> методы распространяются



и на изучение кручения треугольной коробки, подкрепленной брусками в углах и имеющей диск  $A$  на свободном конце.

1. Трапециoidalная коробка со сплошными стенками, не потерявшими устойчивость.

Рассмотрим равновесие части коробки длиной  $X$  (рис. 93).

$$1. \Sigma Y = 0 \text{ или } -Q_1 \cdot \sin \beta - Q_2 - Q_3 \sin \alpha + Q_4 = 0$$

$$2. \Sigma Z = 0 \text{ или } Q_1 \cdot \cos \beta - Q_3 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$3. \Sigma X = 0 \text{ или } N_{1,e} - N_{2,e} - N_{3,e} + N_{4,e} = 0 \text{ откуда } N_{4,e} - N_{3,e} = N_{2,e} - N_{1,e} \dots (\alpha)$$

$$4. \Sigma M_x = 0 \text{ или } -Q_2 \cdot d + Q_4 (b+d) - M = 0$$

$$5. \Sigma M_z = 0 \text{ или } -N_{1,e} \cdot h_1 - N_{3,e} \cdot h_2 + N_{2,e} \cdot h_1 + N_{4,e} \cdot h_2 = 0$$

$$6. \Sigma M_y = 0 \text{ или } -N_{1,e} \cdot b_1 - N_{2,e} \cdot b_2 + N_{3,e} \cdot b_1 + N_{4,e} \cdot b_2 = 0,$$

$$\text{откуда } (N_{4,e} - N_{2,e}) \cdot b_2 = (N_{3,e} - N_{1,e}) \cdot b_1 \dots (\delta)$$

В уравнениях  $\underline{1}$ ,  $\underline{2}$  и  $\underline{6}$  силы  $N$  и  $Q$  входят в независимой форме, что имело место также и в соответствующих уравнениях прямоугольной коробки.

Уравнения  $\underline{\alpha}$  и  $\underline{\delta}$  могут быть совместимы лишь в том случае, когда  $N_{4,e} = N_{2,e} = N_{II} \dots \dots (166)$  и

$$N_{3,e} = N_{1,e} = N_I \dots \dots (167)$$

Тогда из уравнения  $\underline{5}$  следует:

$$-N_I (h_1 + h_2) + N_{II} (h_1 + h_2) = 0 \text{ откуда } \frac{N_{II}}{N_I} = \frac{h}{H} \dots \dots (168).$$

В четырех уравнениях  $\underline{1}$ ,  $\underline{2}$ ,  $\underline{4}$ ,  $\underline{168}$  содержится шесть неизвестных ( $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, N_I$  и  $N_{II}$ ), однако, в данном случае, как и в случае прямоугольной коробки, задача является однажды статичевоки неопределимой.



Основную систему выбираем также, как и для прямоугольной коробки, и составляем дополнительное уравнение по методу сил:

$$X_1 \cdot \delta_{11} + \Delta_1 P = 0 \dots \dots \dots (143)$$

В качестве неизвестного  $X_1$  мы выбираем перерезывающую силу  $Q_1$ .

Когда  $X_1 = 1$  и  $M = 0$ , то из уравнений 1, 2 и 4 следует

$$Q_3 = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \dots \dots \dots (169); \quad Q_2 = Q_4 \cdot \frac{b+d}{d} \dots \dots (6)$$

$$-Q_2 + Q_4 = \sin \beta + \cos \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha \dots \dots (2).$$

Присоединяя к уравнению (6) уравнение (2), найдем:

$$Q_4 \cdot \left(1 - \frac{b+d}{d}\right) = \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha), \text{ откуда:}$$

$$Q_4 = -\frac{d}{b} \cdot \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \dots \dots (170) \text{ и}$$

$$Q_2 = -\frac{b+d}{b} \cdot \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \dots \dots (171).$$

Когда  $X_1 = 0$  и  $M \neq 0$ , то из уравнений 1, 2, 4 находим:

$$Q_1 = Q_3 = 0 \dots \dots (172) \quad Q_2 = Q_4 = Q_{II} \dots \dots (173)$$

$$Q_{II} [d + (b+d)] = M, \text{ откуда } Q_{II} = \frac{M}{b} \dots \dots (174).$$

Переходим к определению усилий в стенках и в поясах основной системы в состоянии, когда

$$X_1 = 1.$$

В этом состоянии перерезывающая сила в стенке 1  $Q_1 = X_1 = \underline{1}$ ; в стенках 3, 2 и 4 перере-



вызывающая сила определяется по формулам 169, 170 и 171.

Осевая сила в ребре 1 (и аналогично в остальных ребрах) равна алгебраической сумме осевых сил в ребре 1, вызываемых изгибом стенок 1 и 4, пересекающихся по ребру 1.

$$N_1^{(1)} = \frac{1 \cdot x}{b \cos \beta} + \frac{d}{b} \cdot \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \frac{x}{H} = x \frac{\cos \beta}{b} \left[ 1 + \frac{d}{H} (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \right] \dots \text{(растяж.)}$$

Вводим обозначение  $\cos \beta \left[ 1 + \frac{d}{H} (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \right] = \Psi$ ; тогда

$$N_1^{(1)} = \frac{\Psi x}{b} \dots \dots \dots (175)$$

Из уравнения 167 следует:  $N_1^{(3)} = N_1^{(1)}$ ,  $N_1^{(3)}$  - сжат.

Из уравнения 168 следует:

$$N_1^{(2)} = N_1^{(1)} \cdot \frac{H}{h} = \Psi \frac{H}{h} \cdot \frac{x}{b} \dots (176) \text{ (сжат); } N_1^{(4)} = N_1^{(2)} \dots (177); N_1^{(4)} \text{ (сж.)}$$

когда  $X_1 = 0$  и  $M \neq 0$ , то  $N_p^{(4)} = \frac{M}{b} \cdot \frac{x}{H}$  (сж.)  $\dots (178)$ ;

$N_p^{(3)} = N_p^{(1)} \dots (179)$ ;  $N_p^{(2)} = \frac{M}{b} \cdot \frac{x}{h} \dots (180)$  раст.;

$N_p^{(4)} = N_p^{(2)} \dots (181)$ ;  $N_p^{(4)}$  раст.;  $N_p^{(3)}$  раст.

Перемещение  $\delta_H^2$  определяем по формуле Мора:

$$\delta_H^2 = \sum \int_0^l \frac{e Q_1^2 dx}{G_{cm} F_{cm}} + \sum \int_0^l \frac{e N_1^2 dx}{E \phi} \text{ или}$$

$$\begin{aligned} \delta_H^2 = & \frac{1 \cdot l}{G_1 F_1} + \left( \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right)^2 \cdot \frac{l}{G_3 F_3} + \left[ \frac{b+d}{b} \cdot \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \right]^2 \frac{l}{G_2 F_2} + \\ & + \left[ \frac{d}{b} \cdot \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \right]^2 \frac{l}{G_4 F_4} + \left( \frac{\Psi}{b} \right)^2 \cdot \frac{l^3}{3 E_1 F_1} + \left( \frac{\Psi}{b} \right)^2 \cdot \frac{l^3}{3 E_3 F_3} + \\ & + \left( \frac{\Psi}{b} \cdot \frac{H}{h} \right)^2 \cdot \frac{l^3}{3 E_2 F_2} + \left( \frac{\Psi}{b} \cdot \frac{H}{h} \right)^2 \cdot \frac{l^3}{3 E_4 F_4} \text{ или} \end{aligned}$$



$$\delta_{II} = \frac{\rho}{G_1 F_1} \cdot K_G + \left(\frac{\psi}{b}\right)^2 \cdot \frac{\rho^3}{3E_1 f_1} \cdot K_E, \text{ где}$$

$$K_G = 1 + \left(\frac{\cos \beta}{\cos \alpha}\right)^2 \cdot \frac{G_1 F_1}{G_3 F_3} + \left[\frac{b+d}{b} \cdot \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha)\right]^2 + \\ + \left[\frac{d}{b} \cdot \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha)\right]^2 \cdot \frac{G_1 F_1}{G_4 F_4}$$

$$K_E = 1 + \frac{E_1 f_1}{E_3 f_3} + \left(\frac{H}{h}\right)^2 \cdot \frac{E_1 f_1}{E_2 f_2} + \left(\frac{H}{h}\right)^2 \cdot \frac{E_1 f_1}{E_4 f_4}$$

Вводим обозначение  $\gamma = \frac{1}{\psi^2} \cdot \frac{b^2}{\rho^2} \cdot \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1}$  и представляем перемещение  $\delta_{II}$  в следующем виде:

$$\delta_{II} = \left(\frac{\psi}{b}\right)^2 \cdot \frac{\rho^3}{3E_1 f_1} \cdot K_E \left(1 + \gamma \frac{K_G}{K_E}\right) \dots (182)$$

Переходим к определению перемещения  $\Delta_{IP}$ , пользуясь также формулой Мора:

$$\Delta_{IP} = \sum \int_0^l \frac{Q_1 \cdot Q_P dx}{G_{cm} \cdot F_{cm}} + \sum \int_0^l \frac{N_1 \cdot N_P dx}{E f} \text{ или}$$

$$\Delta_{IP} = - \left[ M \frac{b+d}{b^2} \cdot \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \cdot \frac{\rho}{G_2 F_2} + M \frac{d}{b^2} \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \frac{\rho}{G_4 F_4} \right] -$$

$$- \left( M \frac{\psi}{b^2 H} \cdot \frac{\rho^3}{3E_1 f_1} + M \frac{\psi}{b^2 H} \cdot \frac{\rho^3}{3E_3 f_3} + M \frac{\psi H}{b^2 h^2} \cdot \frac{\rho^3}{3E_2 f_2} + M \frac{\psi H}{b^2 h^2} \cdot \frac{\rho^3}{3E_4 f_4} \right)$$

или

$$\Delta_{IP} = - \frac{M(b+d)}{b^2} \cdot \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \frac{\rho}{G_2 F_2} \left(1 + \frac{d}{b+d} \cdot \frac{G_2 F_2}{G_4 F_4}\right) -$$

$$- M \frac{\psi}{b^2 H} \cdot \frac{\rho^3}{3E_1 f_1} \left(1 + \frac{E_1 f_1}{E_3 f_3} + \frac{H^2}{h^2} \cdot \frac{E_1 f_1}{E_2 f_2} + \frac{H^2}{h^2} \cdot \frac{E_1 f_1}{E_4 f_4}\right)$$

или



$$\Delta_{1P} = -\frac{M \epsilon^3}{3 E_1 f_1} \cdot \frac{\psi}{b^3 H} \cdot K_E \left( 1 + 3 \gamma_1 \frac{K_G^P}{K_E} \right) \dots \dots (183)$$

где  $K_G^P = 1 + \frac{d}{b+d} \cdot \frac{G_2 F_2}{G_4 F_4}$

$$\gamma_1 = \frac{(b+d) \cdot H}{\psi \epsilon^2} \cdot \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \frac{E_1 f_1}{E_2 f_2}$$

Подставив значения  $\delta_{\text{H}}$  и  $\Delta_{1P}$  в уравнение (143), находим:

$$Q_1 = X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{\text{H}}} = M \cdot \frac{1}{\psi H} \cdot \frac{1 + 3 \gamma_1 \frac{K_G^P}{K_E}}{1 + \gamma \frac{K_G}{K_E}} \text{ или } Q_1 = \frac{M}{\psi H} \cdot \alpha_1 \dots (184)$$

где  $\alpha_1 = \frac{1 + 3 \gamma_1 \frac{K_G^P}{K_E}}{1 + \gamma \frac{K_G}{K_E}}$

Окончательные срезывающие силы в стенках коробки и осевые силы в поясах определяются соответственно по формулам:

известным из расчета статически-неопределимых систем

$$Q_n = X_1 \cdot Q_1^{(n)} + Q_p^{(n)}; \quad (n=1, 2, 3, 4).$$

$$N_n = X_1 \cdot N_1^{(n)} + N_p^{(n)}; \quad (n=1, 2, 3, 4).$$

Тогда учитывая уравнения 169, 170, 171, 172, 173 и 174, имеем:

$$Q_3 = Q_1 \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \text{ или } Q_3 = \frac{M}{\psi H} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cdot \alpha_1 \dots (185)$$

$$Q_2 = -Q_1 \frac{b+d}{b} \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) + \frac{M}{b} = \frac{M}{b} \left[ 1 - \frac{b+d}{\psi H} \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \cdot \alpha_1 \right]$$

или



$$Q_2 = \frac{M}{b} \cdot a_2 \dots (186), \text{ где } a_2 = 1 - \frac{b+d}{\psi H} \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \cdot a_1$$

$$Q_4 = -Q_1 \frac{d}{b} \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) + \frac{M}{b} = -\frac{M}{\psi H} a_1 \cdot \frac{d}{b} \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) + \frac{M}{b}$$

$$\text{или } Q_4 = \frac{M}{b} a_4 \dots (187), \text{ где } a_4 = 1 - \frac{d}{\psi H} a_1 \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha)$$

$$N_1 = Q_1 \frac{\psi x}{b} - \frac{M}{b} \cdot \frac{x}{H} = \frac{M}{b} \frac{x}{H} a_1 - \frac{M}{b} \frac{x}{H} \text{ или } N_1 = \frac{M}{b} \frac{x}{H} (a_1 - 1) \dots (188)$$

$$N_3 = N_1 \dots (189); N_2 = N_1 \frac{H}{h} = \frac{M}{b} \frac{x}{h} (a_1 - 1) \dots (190); N_4 = N_2 \dots (191)$$

Переходим к определению угла закручивания коробки от момента  $M=1$ , приложенного в плоскости диска (А) (рис. 92).

Пользуясь формулой Мора, имеем:

$$\theta = \sum \int_0^l \frac{Q^2 dx}{G_{\text{см}} I_{\text{см}}} + \sum \int_0^l \frac{N^2 dx}{E \phi}$$

Значения  $Q$  и  $N$  подставляем по формулам 184-191; тогда:

$$\theta = \left(\frac{a_1}{\psi H}\right)^2 \frac{l}{G_1 F_1} + \left(\frac{1}{b} a_2\right)^2 \frac{l}{G_2 F_2} + \left(\frac{a_1 \cos \beta}{\psi H \cos \alpha}\right)^2 \frac{l}{G_3 F_3} + \left(\frac{a_4}{b}\right)^2 \frac{l}{G_4 F_4} +$$

$$+ \left(\frac{a_1 - 1}{b H}\right)^2 \frac{l^3}{3 E_1 \phi_1} + \left(\frac{a_1 - 1}{b h}\right)^2 \frac{l^3}{3 E_2 \phi_2} + \left(\frac{a_1 - 1}{b H}\right)^2 \frac{l^3}{3 E_3 \phi_3} + \left(\frac{a_1 - 1}{b h}\right)^2 \frac{l^3}{3 E_4 \phi_4} \text{ или}$$

$$\theta = \left(\frac{a_1}{\psi H}\right)^2 \frac{l}{G_1 F_1} \left[ 1 + \left(\frac{a_2 \psi H}{a_1 b}\right)^2 \frac{G_1 F_1}{G_2 F_2} + \left(\frac{\cos \beta}{\cos \alpha}\right)^2 \frac{G_1 F_1}{G_3 F_3} + \left(\frac{a_4 \psi H}{a_1 b}\right)^2 \frac{G_1 F_1}{G_4 F_4} \right] +$$

$$+ \left(\frac{a_1 - 1}{b H}\right)^2 \frac{l^3}{3 E_1 \phi_1} \left[ 1 + \left(\frac{H}{h}\right)^2 \frac{E_1 \phi_1}{E_2 \phi_2} + \frac{E_1 \phi_1}{E_3 \phi_3} + \left(\frac{H}{h}\right)^2 \frac{E_1 \phi_1}{E_4 \phi_4} \right] \dots (191a)$$

Вводим обозначения:

$$K'_G = 1 + \left(\frac{a_2 \psi H}{a_1 b}\right)^2 \frac{G_1 F_1}{G_2 F_2} + \left(\frac{\cos \beta}{\cos \alpha}\right)^2 \frac{G_1 F_1}{G_3 F_3} + \left(\frac{a_4 \psi H}{a_1 b}\right)^2 \frac{G_1 F_1}{G_4 F_4}$$



$$\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1-1} \frac{b}{\psi b}\right)^2 \frac{E_1 F_1}{G_1 F_1} = \gamma' \quad \text{Тогда:}$$

$$\theta = \left(\frac{\alpha_1-1}{bH}\right)^2 \frac{l^3}{3E_1 F_1} K_E \left[1 + 3\gamma' \frac{K_a'}{K_E}\right] \dots \dots (192)$$

2. Трапециoidalная коробка, стенки которой представляют собой фермы.

Рассматриваемая коробка представлена на рис. 94.

Методика, изложенная выше для трапециoidalной коробки со сплошными стенками, остается в силе и для коробки ферменной. Меняются перемещения  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1p}$  в уравнении 143:

$$\delta_{11} = \sum \frac{N_1^2 l}{EF} \dots \dots \dots (193)$$

$$\Delta_{1p} = \sum \frac{N_1 N_p l}{EF} \dots \dots \dots (194)$$

где  $l$  — длина стержня фермы;  $EF$  его жесткость;

$F$  — площадь поперечного сечения стержня.

$N_1$  — осевая сила в стержне, когда  $M=0$ , и  $Q=1$ .

$N_p$  — осевая сила в стержне, когда  $Q=0$  и  $M \neq 0$ .

Осевые силы в стержнях, находящихся на пересечении граней, находятся как алгебраическая сумма соответствующих осевых сил, вызываемых изгибом ферм, для которых указанные стержни являются ребрами пересечения. Угол закручивания  $\theta$  определяется по формуле

$$\theta = \sum \frac{N^2 l}{EF} \dots \dots \dots (195) \quad \text{где } N = N_p + X_1 N_1 \dots \dots \dots (196).$$



Ферменные грани коробки удобно решать, пользуясь принципом независимого действия сил, т.е. рассматривая каждую грань под действием срезающей силы, приходящейся на эту грань, когда срезающие силы в остальных гранях равны нулю. Применение такого принципа часто дает возможность свести расчет пространственной ферменной коробки к расчету четырех плоских ферм.

### 3. Трапециoidalная коробка с односторонним лонжероном.

Рассматриваемая коробка представлена на рис. 95. Лонжерон, имеющий пояса  $\underline{1}$  и  $\underline{2}$ , не подвергается изгибу в вертикальной плоскости, вследствие чего в поясах  $\underline{1}$  и  $\underline{2}$  не возникает осевых сил. Эти пояса лишь изгибаются силами, лежащими в плоскостях стенок  $\underline{1}$  и  $\underline{3}$ . Сказанное объясняется тем, что вертикальные составляющие от срезающих сил на стенках  $\underline{1}$ ,  $\underline{2}$  и  $\underline{3}$  через диск  $\underline{4}$  передаются на стенку  $\underline{4}$ , где они гасятся вертикальной срезающей силой  $Q_4$ .

Не повторяя всего пути исследования, который был выполнен для трапециoidalной коробки с двумя лонжеронами, мы непосредственно приступаем к определению лишнего неизвестного  $X_1 = Q_1$ , пользуясь формулой 144.

При определении перемещений  $\delta_{11}^0$ , необходимо в формуле 182 положить  $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = 0$ ; вместо  $N_1$  ввести  $M_1 = Q_1 \cdot x$  вместо  $E_1 f_1$  ввести  $E_1 J_1$ ; вместо  $E_3 f_3$  ввести  $E_2 J_2$  и вместо  $N_3$  ввести  $M_2 = Q_3 \cdot x$ .

$J_1$  и  $J_2$  — моменты инерции поясов  $\underline{1}$  и  $\underline{2}$  относи-



тельно главных осей поперечных сечений поясов 1 и 2 (пренебрегая влиянием косоуго изгиба)

$$\delta_{II} = \frac{e}{G_1 F_1} \cdot K_G + \frac{1}{E_1 J_1} \frac{e^3}{3} + \frac{\left(\frac{\cos \beta}{\cos \alpha}\right)^2}{E_2 J_2} \frac{e^3}{3} \text{ или}$$

$$\delta_{II} = \frac{e^3}{3 E_1 J_1} \left[ 3 \frac{K_G}{e^2} \frac{E_1 J_1}{G_1 F_1} + \left(\frac{\cos \beta}{\cos \alpha}\right)^2 \frac{E_1 J_1}{E_2 J_2} + 1 \right] \dots (197)$$

При определении перемещения  $\Delta_{1p}$  необходимо учесть лишь влияние сдвигающих сил в стенках 2, 3, так как от момента  $M$  в основной системе  $Q_1 = Q_3 = 0$ , то изгибающие моменты в поясах также равны нулю.

$$\Delta_{1p} = - \frac{M(b+d)}{b^2} \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \frac{e}{G_2 F_2} \left[ 1 + \frac{d}{b+d} \frac{G_2 F_2}{G_4 F_4} \right] \dots (198)$$

Подставив значения  $\delta_{II}$  и  $\Delta_{1p}$  в формулу 144, находим

$$Q = \frac{M}{b} \alpha'_1 \dots \dots \dots (199)$$

где:

$$\alpha'_1 = 3 \frac{b+d}{b} \frac{E_1 J_1}{e^2 G_2 F_2} \frac{\left(1 + \frac{d}{b+d} \frac{G_2 F_2}{G_4 F_4}\right) \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha)}{3 \frac{K_G}{e^2} \frac{E_1 J_1}{G_1 F_1} + \frac{E_1 J_1}{E_2 J_2} \left(\frac{\cos \beta}{\cos \alpha}\right)^2 + 1} \dots \dots \dots (199)$$

После этого остальные сдвигающие силы определяются по формулам 185, 186, 187, а изгибающие моменты  $M_1$  и  $M_2$  - по формулам:

$$M_1 = Q_1 \cdot X \dots \dots (200); \quad M_2 = Q_1 \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cdot X \dots (201)$$

Переходим к определению угла закручивания рассматриваемой коробки, используя формулу



$$(191a) \quad \theta = \left(\frac{a'_1}{b}\right)^2 \cdot \frac{e}{G_1 F_1} \cdot K_G'' + \frac{Q_1^2 e^3}{3 E_1 J_1} + \frac{\left(a_1 \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}\right)^2 e^3}{3 E_2 J_2}$$

или

$$Q = \frac{Q_1^2 e^3}{3 E_1 J_1} \left[ 1 + \frac{E_1 J_1}{E_2 J_2} \cdot \left(\frac{\cos \beta}{\cos \alpha}\right)^2 + 3 \left(\frac{a'_1}{b}\right)^2 \cdot \frac{E_1 J_1}{e^2 G_1 F_1} \cdot K_G'' \right] \quad (202)$$

$$K_G'' = 1 + \left(\frac{a'_2}{a_1}\right)^2 \cdot \frac{G_1 F_1}{G_2 F_2} + \left(\frac{\cos \beta}{\cos \alpha}\right)^2 \cdot \frac{G_3 F_3}{G_4 F_4} + \left(\frac{a'_4}{a_1}\right)^2 \cdot \frac{G_4 F_4}{G_3 F_3}$$

В формулу 202 необходимо вставлять значение  $Q_1$ , когда  $M=1$ .

#### 4. Треугольная коробка, подкреплённая поясами $\underline{1}$ и $\underline{2}$ (рис. 96).

В данном случае для срезающих сил остаются в силе формулы 138, 138а, 139. Пояса не испытывают действия осевых сил, так же как и коробка (рис. 95), они испытывают лишь изгиб в плоскости стенок  $\underline{2}$  и  $\underline{3}$  моментами

$$M_2 = Q_3 \cdot X \quad \text{и} \quad M_1 = Q_3 \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cdot X.$$

Угол закручивания

$$Q_1 = \frac{e}{d^2 G_1 F_1} \cdot V + \frac{Q_3^2}{E_1 J_1} \cdot \frac{e^3}{3} + \frac{\left(Q_3 \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}\right)^2 e^3}{E_2 J_2 \cdot 3}$$

или

$$Q_1 = \frac{Q_3^2}{E_1 J_1} \cdot \frac{e^3}{3} \left[ 1 + \left(\frac{\cos \beta}{\cos \alpha}\right)^2 \cdot \frac{E_1 J_1}{E_2 J_2} + 3 \frac{E_1 J_1}{G_1 F_1} + \frac{V}{d^2 e^2 Q_3^2} \right]$$

Так как при  $M=1$ , согласно формулы 139

$$Q_3 = \frac{1}{d \cdot \cos \beta} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}, \quad \text{то}$$



$$\theta_1 = \frac{1}{E_1 J_1 d^2 \cos^2 \beta (tg \alpha + tg \beta)^2} \cdot \frac{\rho^3}{3} \left[ 1 + \left( \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right)^2 \frac{E_1 J_1}{E_2 J_2} + \right. \\ \left. + 3 \frac{E_1 J_1}{G_1 F_1} \frac{\nu \cdot \cos^2 \beta (tg \alpha + tg \beta)^2}{\rho^2} \right] \dots \dots (203)$$

§ 19. Кручение брусьев с поперечным сечением в виде многосвязного или вообще сложного контура.

В целях придания возможно большей общности выводимым ниже формулам, рассмотрим брус переменного сечения, имеющего многосвязанный профиль (рис. 97). Что касается наружных стенок (обшивки) и внутренних стенок, (стенки ланжетонов) то они могут находиться в состоянии до и после потери устойчивости.

В плоскости диска (А) приложен крутящий момент  $M$ , требуется определить напряжения в стенках бруса и его угол закручивания.

Пусть  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  - коэффициенты распределения момента  $M$  соответственно на контура 1, 2, 3 и 4. Из условия равновесия внешнего момента  $M$  и внутренних моментов следует:

$$\mu_1 M + \mu_2 M + \mu_3 M + \mu_4 M = M \text{ или}$$

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 1 \dots \dots (204)$$

Остальные уравнения равновесия обращаются в тождество.

Стало быть, задача статически неопределима. К уравнению статики (204) присоединяем дополнительные уравнения, вытекающие из того, что



угол закручивания каждого из контуров равен общему углу закручивания всего поперечного сечения вследствие совместного закручивания всех контуров.

Определим угол закручивания контура 1, когда ко всему сечению приложен момент  $M$ . Для этой цели поступаем согласно правилу Мора и рассматриваем два состояния: в первом состоянии ко всему сечению приложен момент  $M$ , а во втором состоянии только к контуру 1 приложен момент  $M=1$ , вызывающий сдвигающие силы по стенкам контура 1. В первом состоянии момент  $M$  распределяем по контурам пропорционально коэффициентам распределения  $\mu$ . Искомый угол закручивания контура 1 складывается из перемещений, вызываемых по направлению момента  $M=1$  моментами  $\mu_1 M, \mu_2 M, \mu_3 M, \mu_4 M$ , т.е.

$$\epsilon_1 = \mu_1 M \delta_{11} + \mu_2 M \delta_{12} + \mu_3 M \delta_{13} + \mu_4 M \delta_{14}.$$

Обозначения перемещений  $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{14}$  являются общепринятыми в расчете статически-неопределимых систем по методу сил.

Угол закручивания всего сечения от момента, равного единице, обозначаем через  $\epsilon$ . Тогда действительный угол закручивания всего сечения равен  $M \cdot \epsilon$ . Вследствие совместного закручивания всех контуров

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= M\epsilon \text{ или } \mu_1 \delta_{11} + \mu_2 \delta_{12} + \mu_3 \delta_{13} + \mu_4 \delta_{14} = \epsilon \\ \epsilon_2 &= M\epsilon \text{ или } \mu_1 \delta_{21} + \mu_2 \delta_{22} + \mu_3 \delta_{23} + \mu_4 \delta_{24} = \epsilon \\ \epsilon_3 &= M\epsilon \text{ или } \mu_1 \delta_{31} + \mu_2 \delta_{32} + \mu_3 \delta_{33} + \mu_4 \delta_{34} = \epsilon \\ \epsilon_4 &= M\epsilon \text{ или } \mu_1 \delta_{41} + \mu_2 \delta_{42} + \mu_3 \delta_{43} + \mu_4 \delta_{44} = \epsilon \end{aligned} \right\} \dots (I)$$



Перемещения  $\delta_{ik}$  определяем по формуле Мора. Для этого представляем обшивку разделенной на ряд элементарных полос протяженностью  $dx$  по оси контура, подверженной действию срезающих сил (чистый сдвиг)

$$\delta_{ik} = \sum \int_0^l \left( \phi \frac{Q_i Q_k}{G d \alpha} \right) dx \dots (205)$$

если  $\phi \frac{Q_i Q_k}{G d \alpha}$  остается постоянным в пределах длины  $l$  то

$$\delta_{ik} = l \sum \phi \frac{Q_i Q_k}{G d \alpha} \dots (206).$$

Вследствие взаимности перемещений

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}.$$

Из формулы 205 следует, что перемещения  $\delta_{13}$ ,  $\delta_{14}$ ,  $\delta_{23}$ ,  $\delta_{24}$  равны нулю, так как произведение  $Q_i Q_k$  не равно нулю лишь для тех контуров, которые имеют общие стеночки. Таким образом, система уравнений (I) превращается в следующую систему уравнений трехчленного типа (подобная система уравнений трех моментов):

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 \delta_{11} + \mu_2 \delta_{12} &= \varepsilon \\ \mu_1 \delta_{21} + \mu_2 \delta_{22} + \mu_3 \delta_{23} &= \varepsilon \\ \mu_2 \delta_{32} + \mu_3 \delta_{33} + \mu_4 \delta_{34} &= \varepsilon \\ \mu_3 \delta_{43} + \mu_4 \delta_{44} &= \varepsilon \end{aligned} \right\} \dots (207).$$



Решение уравнений 207 представляем в таком виде:

$$\mu_1 = \frac{\varepsilon}{\alpha_1} \dots (A); \quad \mu_2 = \frac{\varepsilon}{\alpha_2} \dots (B); \quad \mu_3 = \frac{\varepsilon}{\alpha_3} \dots (C)$$

$$\mu_4 = \frac{\varepsilon}{\alpha_4} \dots (D)$$

В общем случае бруса с  $n$  контурами  $\mu_n = \frac{\varepsilon}{\alpha_n} \dots (208)$

Значения коэффициентов  $\mu_n$  ( $n=1, 2, 3, 4$ ) по формулам  $A, B, C, D$ , подставляем в уравнение 204 после, после чего находим:

$$\varepsilon = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \frac{1}{\alpha_4}}$$

Для сечения с  $n$ -контурами  $\varepsilon = \frac{1}{\sum_1^n \frac{1}{\alpha_n}} \dots (209)$

Формулы 209 и 209 решают задачу о распределении крутящего момента между контурами. В первом приближении можно положить  $\delta_{12} = \delta_{23} = \delta_{34} = 0$ , тогда из уравнений 207 следует:

$$\mu_1 = \frac{\varepsilon}{\delta_{11}}, \quad \mu_2 = \frac{\varepsilon}{\delta_{22}}, \quad \mu_3 = \frac{\varepsilon}{\delta_{33}}, \quad \mu_4 = \frac{\varepsilon}{\delta_{44}}$$

и вообще:  $\mu_n = \frac{\varepsilon}{\delta_{nn}} \dots (210), \quad \varepsilon = \frac{1}{\sum_1^n \frac{1}{\delta_{nn}}} \dots (211)$

$\delta_{nn}$  - угол закручивания контура  $n$ , когда этот контур рассматривается самостоятельно под действием крутящего момента  $M=1$ .

Формулы 210, 211 в применении к профилю крыла дают нередко результаты с точностью,



приемлемой для предварительных расчетов. Напряжения в промежуточных внутренних стенках равны алгебраической сумме напряжений, вычисленных в этих стенках от каждого из соседних контуров в отдельности.

Изложенный нами метод определения крутящего момента, воспринимаемого каждым из контуров сложного бруса, остается верным не только применительно к брусам из сплошной обшивки, но и применительно к форменным и любым смешанным совместно работающим системам.

Конкретные условия задачи отображаются в определении перемещений.

Переменность сечения бруса отображается в определении углов закручивания  $\theta_{np}$  и  $\theta_{ik}$ , рассматриваемых как полный угол закручивания в изучаемом сечении. Такое содержание углов закручивания  $\theta_{np}$  и  $\theta_{ik}$  приводит к необходимости заменить действительную форму бруса ступенчатой, или, как говорят, разбить брус на ряд отсеков каждый из которых имеет постоянное сечение.

Пример 15. Сечение (рис. 98) постоянное по длине бруса подвержено кручению моментом  $M = 26200$  кг/см.

Требуется определить угол закручивания, скалывающие напряжения в обшивке в стенках 1 и 2, полагая, что сечение находится вдали от заделки и при кручении имеет возможность свободно искажаться из своей плоскости.



Данные:  $h = 17 \text{ см}$ ;  $b_1 = 20 \text{ см}$ ;  $b_2 = 65,5 \text{ см}$ ;  $b_3 = 27 \text{ см}$ ;  
 $l = 30 \text{ см}$ .

Толщина стенок  $\delta$  постоянна и равна  $0,05 \text{ см}$ .

$$G = 2,73 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2 = \text{const.}$$

Решение.

1. Определение площадей  $F_1, F_2, F_3$ , ограниченных соответственно контурами I, II и III.

$$F_1 = 17 \cdot 20 = 340 \text{ см}^2$$

$$F_2 = 17 \cdot 65,5 = 1113,5 \text{ см}^2$$

$$F_3 = 17 \cdot 27 = 459 \text{ см}^2$$

2. Определение приведенных длин  $\frac{L_I}{\delta}, \frac{L_{II}}{\delta}, \frac{L_{III}}{\delta}$  периметров каждого из контуров I, II и III.

$$\frac{L_I}{\delta} = \frac{2 \cdot 17 + 2 \cdot 20}{0,05} = \frac{74}{0,05} = 1480$$

$$\frac{L_{II}}{\delta} = \frac{2 \cdot 17 + 2 \cdot 65,5}{0,05} = \frac{165}{0,05} = 3300$$

$$\frac{L_{III}}{\delta} = \frac{2 \cdot 17 + 2 \cdot 27}{0,05} = \frac{88}{0,05} = 1760$$

3. Определение главных перемещений (углов закручивания)  $\theta_{II}, \theta_{22}, \theta_{33}$ .

Так как сечение рассматривается вдали от заделки, то для определения углов закручивания  $\theta_{II}$  применяем формулу Бредта:

$$\theta_{II} = \frac{1 \cdot l}{4 F^2} \oint \frac{ds}{G \delta}$$



В виду того что сечение постоянно по длине бруса, то при определении коэффициентов  $\mu_n$  полагаем  $\nu=1$ , т.е. отыскиваем угол закручивания на единицу длины бруска.

$$\delta_{11} = \frac{1.1}{F_I^2 4} \cdot \frac{L_I}{G\delta} = \frac{1}{4 \cdot 340^2} \cdot \frac{1480}{2,73 \cdot 10^5} = 0,1145 \cdot 10^{-7}$$

$$\delta_{22} = \frac{1.1}{4F_{II}^2} \cdot \frac{L_{II}}{G\delta} = \frac{1}{4 \cdot 113,5^2} \cdot \frac{3300}{2,73 \cdot 10^5} = 0,244 \cdot 10^{-8}$$

$$\delta_{33} = \frac{1.1}{4F_{III}^2} \cdot \frac{L_{III}}{G\delta} = \frac{1}{4 \cdot 459^2} \cdot \frac{1760}{2,73 \cdot 10^5} = 0,77 \cdot 10^{-8}$$

4. Определение побочных перемещений  $\delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{23}$ .

Для определения побочных перемещений применяем формулу 206

$$\delta_{12} = \int_0^h \frac{Q_1 Q_2}{G \delta s \delta} \dots \dots (a)$$

Интегрирование происходит в пределах стенки 1.

Когда к контуру I приложен крутящий момент  $M=1$ , то срезающая сила в пределах дифференциала  $ds$  высоты стенки 1:

$Q_1 = q_{11} \cdot ds$ , где  $q_{11}$  — интенсивность срезающей силы по Бредту

$$q_{11} = \tau \cdot \delta = \frac{1}{2F_I}$$

Когда к контуру II приложен крутящий момент  $M=1$ , то срезающая сила в пределах дифференциала  $ds$  высоты стенки 1:



$$Q_2 = q_2 ds. \text{ По Бредту } q_2 = \frac{1}{2F_{II}}$$

Подставив значения  $Q_1$  и  $Q_2$  в формулу,  $\alpha$ ,  
находим

$$\delta_{12} = \int_0^h \frac{q_1 ds \cdot q_2 ds}{G \cdot \delta ds} = \int_0^h \frac{q_1 q_2 ds}{G \delta}$$

Учитывая, что  $q_1, q_2, G, \delta$  остаются постоянными в пределах высоты  $h$  находим:

$$\delta_{12} = \frac{q_1 q_2 h}{G \cdot \delta} \dots \dots \dots (213)$$

и аналогично:

$$\delta_{23} = \frac{q_2 q_3 h}{G \cdot \delta} \dots \dots \dots (214)$$

$$q_1 = \frac{1}{2F_I} = \frac{1}{2 \cdot 340} = 0,00147$$

$$q_2 = \frac{1}{2F_{II}} = \frac{1}{2 \cdot 1113,5} = 0,00045$$

$$q_3 = \frac{1}{2F_{III}} = \frac{1}{2 \cdot 459} = 0,00108$$

На рис. 99 показано направление интенсивностей в каждом из контуров сечения.

Перемещения  $\delta_{12}$  и  $\delta_{23}$  имеют отрицательный знак, так как соответствующие срезающие силы на стенках 1 и 2 взаимно-противоположны (см. рис. 99).

$$\delta_{12} = \frac{q_1 q_2 h}{G \cdot \delta} = \frac{0,00147 \cdot 0,00045}{2,73 \cdot 10^5 \cdot 0,05} = -0,824 \cdot 10^{-9}$$



$$\delta_{23}^1 = \frac{q_2 q_3 h}{G \cdot \delta^3} = - \frac{0,00045 \cdot 0,00108 \cdot 17}{2,73 \cdot 10^5 \cdot 0,05} = -0,605 \cdot 10^{-9}$$

### 5. Определеице коэффициентов распределения

$\mu_1, \mu_2, \mu_3$ .

Для рассматриваемого нами четырехсвязного контура уравнения 207 переписываются в следующем виде:

$$\mu_1 \cdot \delta_{11}^1 + \mu_2 \delta_{12}^1 = \varepsilon$$

$$\mu_1 \cdot \delta_{12}^1 + \mu_2 \delta_{22}^1 + \mu_3 \delta_{23}^1 = \varepsilon$$

$$\mu_2 \delta_{32}^1 + \mu_3 \delta_{33}^1 = \varepsilon$$

Подставляем вышенайденные значения для перемещений, тогда

$$0,1145 \cdot 10^{-7} \mu_1 - 0,824 \cdot 10^{-9} \mu_2 = \varepsilon$$

$$-0,824 \cdot 10^{-9} \mu_1 + 0,244 \cdot 10^{-8} \mu_2 - 0,605 \cdot 10^{-9} \mu_3 = \varepsilon$$

$$-0,605 \cdot 10^{-9} \mu_2 + 0,77 \cdot 10^{-8} \mu_3 = \varepsilon.$$

Результаты решения уравнений

$$\mu_1 = 129,9 \cdot 10^6 \cdot \varepsilon \dots (\alpha)$$

$$\mu_2 = 495 \cdot 10^6 \cdot \varepsilon \dots (\beta)$$

$$\mu_3 = 177,8 \cdot 10^6 \cdot \varepsilon \dots (\gamma)$$

Угол закручивания  $\varepsilon$  находим из уравнения

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1 \quad \text{или}$$

$$129,9 \cdot 10^6 \cdot \varepsilon + 495 \cdot 10^6 \cdot \varepsilon + 177,8 \cdot 10^6 \cdot \varepsilon = 1, \quad \text{откуда}$$



$$\varepsilon = \frac{1}{129,9 \cdot 10^6 + 495 \cdot 10^6 + 177,8 \cdot 10^6} \quad \text{или}$$

$$\varepsilon = 0,001245 \cdot 10^{-6}$$

Подставляя найденное значение  $\varepsilon$  в равенства  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  находим:

$$\mu_1 = 129,9 \cdot 0,001245 = 0,153$$

$$\mu_2 = 495 \cdot 0,001245 = 0,617$$

$$\mu_3 = 177,8 \cdot 0,001245 = 0,23$$

Проверка  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0,153 + 0,617 + 0,23 = 1,0$ .

Наибольший момент воспринимает средняя коробка, что и следовало ожидать.

При приближенном определении коэффициентов  $\mu_n$  полагаем  $\delta_{12}^0 = \delta_{23}^0 = 0$ , тогда

$$\varepsilon = \frac{1}{\frac{1}{\delta_{11}^0} + \frac{1}{\delta_{22}^0} + \frac{1}{\delta_{23}^0}} = \frac{1}{\frac{1}{1,145 \cdot 10^{-8}} + \frac{1}{0,244 \cdot 10^{-8}} + \frac{1}{0,77 \cdot 10^{-8}}} = 0,0016 \cdot 10^{-6}$$

Полученное значение для  $\varepsilon$  отличается от предыдущего на

$$\frac{0,0016 - 0,001245}{0,001245} \cdot 100 = 2,85\%$$

Приближенное значение коэффициентов  $\mu$

$$\mu_1 = \frac{\varepsilon}{\delta_{11}^0} = \frac{0,0016 \cdot 10^{-6}}{1,145 \cdot 10^{-8}} = 0,14 \quad \text{ошибка} = \frac{0,153 - 0,14}{0,153} \cdot 100 = 9\%$$

$$\mu_2 = \frac{\varepsilon}{\delta_{22}^0} = \frac{0,0016 \cdot 10^{-6}}{0,244 \cdot 10^{-8}} = 0,7 \quad \text{ошибка} = \frac{0,7 - 0,617}{0,617} \cdot 100 = 14\%$$



$$M_3 = \frac{E}{\delta_{33}} = \frac{0,0016 \cdot 10^{-6}}{0,77 \cdot 10^{-8}} = 0,208 \text{ ошибка } \frac{0,23 - 0,208}{0,23} \cdot 100 = 9,5\%$$

### 6. Определение угла закручивания.

Так как найденный нами угол закручивания  $E$  при  $M=1$  относится к единице бруска, то действительный угол закручивания, когда сечение бруска остается постоянным

$$\theta = M \cdot E \cdot l = 26200 \cdot 0,001245 \cdot 10^{-6} \cdot 30 = 0,000983.$$

### 7. Определение касательных напряжений.

Касательные напряжения в каждом из контуров определяем по формуле Бредта

$$\tau_I = \frac{M_1 M}{2 F_I \delta} = \frac{0,153 \cdot 26200}{2 \cdot 340 \cdot 0,05} = 117,9 \text{ кг/см}^2.$$

$$\tau_{II} = \frac{M_2 M}{2 F_{II} \delta} = \frac{0,617 \cdot 26200}{2 \cdot 1110 \cdot 0,05} = 145,63 \text{ кг/см}^2.$$

$$\tau_{III} = \frac{M_3 M}{2 F_{III} \delta} = \frac{0,23 \cdot 26200}{2 \cdot 459 \cdot 0,05} = 131,3 \text{ кг/см}^2.$$

Касательные напряжения в стенке 1:

$$\tau_1 = \tau_{II} - \tau_I = 145,63 - 117,9 = 27,73 \text{ кг/см}^2$$

Касательные напряжения в стенке 2:

$$\tau_2 = \tau_{III} - \tau_{II} = 131,3 - 145,63 = -14,33 \text{ кг/см}^2$$



§ 20. Определение касательных напряжений изгиба моговязных сечений. Определение центра жесткости для этих же сечений.

В порядке постепенного усложнения задачи, рассмотрим сначала произвольное двухсвязное тонкостенное сечение рис. 100а. Пусть обшивка не потеряла устойчивости.

Требуется определить касательные напряжения в обшивке, когда брус подвергается изгибу силой  $Q$ , проходящей через центр жесткости сечения  $e$ . Для решения поставленной задачи силу  $Q$  раскладываем на составляющие  $Q_y$  и  $Q_z$ , параллельные соответственно осям  $y$  и  $z$  и определяем напряжения в обшивке отдельно от составляющих  $Q_y$  и  $Q_z$ . Окончательные напряжения от силы  $Q$  получим на основе принципа независимого действия сил, складывая напряжения от составляющих  $Q_y$  и  $Q_z$ .

Рассматриваем брус, изгибаемый составляющей  $Q_y$ , проходящей через центр жесткости сечения  $e$  (рис. 100б). Когда тонкостенный брус подвергается изгибу, то касательные напряжения определяются по формуле 114, т.е.

$$\tau = \frac{Q_y \cdot J_z}{J_y \cdot \delta} \dots \dots \dots (114)$$

Применение формулы 114 предполагает знание координаты точки, где  $\tau = 0$ . В двухсвязном замкнутом сечении положение точки  $\tau = 0$  в общем случае заранее неизвестно.



В связи с этим в порядке первого этапа решения задачи назначим положение точки  $\bar{C} = 0$  произвольно, например, в точке „а“ (рис. 101а). После этого применяем формулу 114 и строим эпюру интенсивностей  $q_p = \bar{C} \cdot \delta^2$ , идя от точки „а“ по часовой стрелке при вычислении величин  $S_z$ . Эта эпюра схематично представлена на рис. 101в. Так как точка  $\bar{C} = 0$  была намечена произвольно, то эпюра  $q_p$  (рис. 101в) не совпадает с действительной эпюрой интенсивностей срезающих сил. Чем же отличается эпюра  $q_p$  (рис. 101в) от действительной разыскиваемой эпюры  $q$ ?

Тем, что в точке а  $q_p \neq 0$ , а равно некоторой величине  $q_0$ , которая должна быть алгебраически добавлена к каждой ординате эпюры  $q_p$ , как некоторая постоянная начальная величина.

Стало быть, окончательная эпюра интенсивностей срезающей силы определяется по формуле  $q = q_p + q_0 \dots \dots \dots (215)$ . 115 215

В уравнении 215  $q_p$  определяется по формуле 115 в предположении, что  $q = 0$  в точке а и сила  $Q_y$  проходит через центр жесткости, соответствующий распределению срезающих сил, характеризуемому эпюрой  $q_p$ . Поскольку эпюра  $q_p$  не совпадает с действительной эпюрой  $q$ , то и вышеупомянутый центр жесткости не совпадает с действительным т.е.  $Q_y$ , проходящая через центр жесткости, соответствующий эпюре  $q_p$ , составляет плечо с действительным центром жесткости и, стало быть, эпюра  $q_p$  отличается от действительной эпюры  $q$  тем, что эпюра  $q_p$  есть результат от



совместного изгиба и кручения. Только после того, как из эпюры  $Q_p$  будет исключена та интенсивность среза, которая является результатом кручения, останется эпюра  $Q$ , соответствующая исключительно изгибу. Интенсивность  $Q_0$  как раз и является этой интенсивностью срезающей силы от кручения, так как оставаясь постоянной по контуру сечения, она может быть определена лишь как интенсивность кручения.

Теперь встает задача определить тот крутящий момент, который создает интенсивность  $Q_0$ . Метод решения этой задачи следующий: пользуясь формулой Мора, находим угол закручивания  $E_p$ , соответствующий распределению срезающей силы в сечении по эпюре  $Q_p$  (рис. 101б). (Если в частном случае закручивания  $E_p$  окажется равным нулю, то это будет свидетельствовать о том, что эпюра  $Q_p$  является результатом исключительно изгиба, не содержит в себе элементов кручения  $Q_0$ , стало быть, совпадает с искомой эпюрой  $Q$ ).

Так как зависимость крутящего момента  $M$  от угла закручивания известна, то легко установить величину этого момента, когда известен угол  $E_p$ , а после этого и интенсивность кручения  $Q_0$ , которую, очевидно, необходимо со знаком минус подставить в уравнение 215 для получения окончательной интенсивности  $Q$  от изгиба заданного бруса силой  $Q_y$ . Эта же методика остается в силе, когда брус изгибается составляющей  $Q_z$ .

Когда установлено распределение срезающей



силы в сечении от изгиба в двух плоскостях, параллельных главным плоскостям, определение центра жесткости производится так же, как и для односвязного сечения, рассмотренного нами в § 13, т.е. как центр тяжести сил  $Q_z$  и  $Q_y$ .

На основе изложенной общей методики ниже приводится определение касательных напряжений изгиба и центра жесткости в некоторых частных случаях, имеющих место в конструкциях самолета.

I. Определение касательных напряжений изгиба пустотелого тонкостенного бруса постоянного сечения двухсвязного профиля, когда изгиб происходит вдали от заделки (рис. 101а).

Обшивка не потеряла устойчивости.

Необходимая цель будет достигнута в результате выполнения следующих операций:

1. Предварительное назначение точки, где  $q=0$  и определение эпюры интенсивности срезающих сил  $Q_r$ .

В рассматриваемом нами произвольном профиле нет оснований к тому, чтобы отдать предпочтение какой-либо точке контура в смысле назначения в ней  $q=0$ . Поэтому в качестве таковой выбираем произвольную точку  $q$ . В тех же случаях, когда контур симметричный, нулевое значение  $q$  находится на оси симметрии и поэтому, полагая в этой точке  $q=0$  мы сразу получаем точное решение и освобождаемся от даль-



нейших вычислений. На рис. 102а представлен контур симметричный относительно оси  $u$ . От изгиба силой  $Q_y$  эпюра интенсивностей  $q$  представляется схемой рис. 102б. Стало быть, полагая  $q=0$  в точке  $a$  мы сразу получаем точное решение.

Когда назначена точка  $q=0$ , эпюра  $q_p$  определяется по формуле  $q_p = \frac{Q_y \cdot \delta_z}{y_z}$ . Эта эпюра схематично представлена на рис. 101б.

## 2. Определение угла закручивания $E_p$ от силы $Q_y$ , когда распределение срезающей силы по сечению принято по схеме рис. 101б.

Необходимый нам угол закручивания  $E_p$  определяем по формуле Мора. Заданное состояние представляет собой изгиб и кручение силой  $Q_y$ , распределение которой по поперечному сечению характеризуется эпюрой  $q_p$  рис. 101б.

Во втором состоянии к брусу в плоскости  $uoz$  прикладываем крутящий момент  $M=1$ . Интенсивность срезающей силы по сечению во втором состоянии определяется по формуле Бредта:

$q_1 = \frac{1}{2F}$ . Эта интенсивность остается постоянной по контуру и по длине бруса  $q_1 = \text{const}$ .

Всю поверхность бруса разделяем на ряд элементарных полос протяженностью  $ds$  по оси контура (см. рис. 100а). Так как размер  $ds$  очень мал, то интенсивность в пределах расстояния  $ds$  можно считать постоянной, тогда каждая из элементарных полос обшивки подвергается чистому срезу от кручения в первом и во втором состояниях. Стало быть, согласно Мору угол закручивания  $E_p$  определится по формуле:



$$E_p = \int_0^l \left( \oint_c \frac{Q_p Q_1}{G \delta dc} \right) dx \dots \dots \dots (215a)$$

где  $\oint_c$  — есть криволинейный интеграл по контуру;  
 $\delta \cdot dc$  — площадь поперечного сечения элементарной полосы

$Q_p$  — срезающая сила в поперечном сечении полосы в первом состоянии

$$Q_p = q_p \cdot dc$$

$Q_1$  — срезающая сила в поперечном сечении полосы во втором состоянии

$$Q_1 = q_1 \cdot dc$$

Подставив значения  $Q_p$  и  $Q_1$  в уравнение 215a находим

$$E_p = \int_0^l \left( \oint_c \frac{q_1 q_p dc}{G \delta} \right) dx \dots \dots \dots (216)$$

Так как в рассматриваемом нами случае бруса постоянного сечения криволинейный интеграл  $\oint_c \frac{q_1 q_p dc}{G \delta}$  остается постоянным по длине бруса, т. е. не зависит от  $x$ , то он может быть вынесен за знак первого интеграла, тогда

$$E_p = \oint_c \frac{q_1 \cdot q_p dc}{G \delta} \cdot \int_0^l dx = l \oint_c \frac{q_1 q_p dc}{G \delta} \dots (217)$$

Так  $q_1 = \frac{1}{2F_1} = const$  то  $E_p = l \frac{1}{2F_1} \oint_c \frac{q_p dc}{G \delta} \dots (218)$

Интеграл  $\oint_c \frac{q_p dc}{G \delta}$  представляет собой площадь корректированной эпюры  $q_p$ , которая получается



из действительной эпюры  $q_p$ , если предварительно каждую из ординат этой эпюры разделить на жесткость  $G\delta$ .

### 3. Определение крутящего момента $M_{кр}$ , соответствующего углу закручивания $E_p$ .

В виду того, что кручение происходит вдали от заделки и брус постоянного сечения, то для определения крутящего момента  $M_{кр}$  применима формула Бредта.

Из последней вытекает

$$M_{кр} = \theta \frac{4F^2}{\int_c \frac{dc}{G\delta}} \dots \dots \dots (219)$$

В рассматриваемом нами случае место угла закручивания  $\theta$  должен занять угол закручивания  $E_p$ , определяемый по формуле (218), тогда

$$M_{кр} = \frac{E_p}{l} \cdot \frac{4F^2}{\int_c \frac{dc}{G\delta}} = 2F \frac{\int_c \frac{q_p dc}{G\delta}}{\int_c \frac{dc}{G\delta}} \dots \dots (220)$$

Интенсивность срезающей силы от  $M_{кр}$

$$q_0 = \frac{M_{кр}}{2F} = \frac{\int_c \frac{q_p dc}{G\delta}}{\int_c \frac{dc}{G\delta}} \dots \dots \dots (221)$$

### 4. Определение действительной интенсивности срезающей силы $q_y$ от изгиба заданного бруса силой $Q_y$ .

Искомая интенсивность определяется по

х) Полученный результат для двусвязного контура совпадает с результатом, который получается по методу инж. Беляева см. М. В. Фр. №5, 1935г.



формуле:

$$Q_y = Q_p - Q_0 \dots \dots \dots (222)$$

Аналогичным образом определяется интенсивность  $q_z$  от изгиба силой  $Q_z$  в плоскости, параллельной главной плоскости  $XOY$ .

После того, как определены интенсивности срезающих сил  $q_y$  и  $q_z$  центр жесткости определяется обычным способом, рассмотренным в §13, имея в виду, что он лежит на точке пересечения равнодействующей внутренних срезающих сил от изгиба соответственно силами  $Q_y$  и  $Q_z$ .

Пример 16. Определить центр жесткости сечения рис. 103а и максимальное касательное напряжение от изгиба силой  $Q_y$ .

Сечение постоянно по длине бруса и  $G = const$ .

1. Определение момента инерции сечения.

Стеночки полагаем тонкими и поэтому моментом инерции горизонтальных стенок относительно собственной оси пренебрегаем и вместо действительных размеров, пользуемся размерами по осям, тогда

$$J_z = 2bd_1 + \frac{1}{12} d_3^3 H^3 + \frac{1}{12} d_2^3 H^3 = \frac{1}{12} d_3^3 H^3 \left( 6 \frac{bd_1}{d_2 H} + \frac{d_2}{d_3} + 1 \right)$$

2. Предварительное назначение точки, где  $q_y = 0$  и определение эпюры интенсивности  $q_p$ .

Предварительно полагаем, что  $q_y = 0$  в точке  $a$  (см. рис. 103а). Так как центр жесткости не зависит от величины внешней срезающей силы, то в целях облегчения вычислений полагаем  $Q_y = J_z$ . Тогда  $Q_p = J_z^2$



В пределах стенок 1

$$q_p = z \delta_1 \frac{H}{2} \dots (\alpha) \quad \text{при } z = \frac{b}{2} \quad q_p = \frac{b}{2} \delta_1 \frac{H}{2} = \frac{b \delta_1 H}{4}.$$

Вследствие симметрии такое же уравнение остается в пределах стенок 4.

В пределах вертикальной стенок 2.

$$q_p = \delta_2 \left( \frac{H}{2} - y \right) \cdot \frac{\frac{1}{2} H - y}{2} + \frac{b}{4} \delta_1 H = \frac{1}{2} \delta_2 \left( \frac{H}{2} - y \right)^2 + \frac{b \delta_1 H}{4} \dots (\beta)$$

При

$$y = 0 \quad q_p = \frac{H^2 \delta_2}{4} \left( 1 + \frac{b \delta_1}{H \delta_2} \right)$$

В пределах вертикальной стенок 3.

$$q_p = \frac{1}{2} \delta_3 \left( \frac{1}{2} H - y \right)^2 + \frac{b \delta_1 H}{4} \dots (\gamma)$$

При

$$y = 0 \quad q_p = \frac{H^2 \delta_3}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{b}{H} \cdot \frac{\delta_1}{\delta_3} \right).$$

По уравнениям  $\alpha, \beta, \gamma$ , на рис. 103б построена схема эпюры  $q_p$ .

3. Определение угла закручивания от силы  $Q_y = J_{z_2}$  когда распределение срезавшей силы по сечению принято по схеме рис. 103б.

Согласно формулы 218  $E_p = \rho \frac{1}{2F} \oint \frac{q_p ds}{G \delta}$  или

$$E_p = \frac{\rho}{2FG} \left( \frac{2}{\delta_1} \oint_{\delta_1} q_p ds + \frac{1}{\delta_2} \oint_H q_p ds + \frac{1}{\delta_3} \oint_H q_p ds \right).$$

Вследствие обратной симметрии эпюры  $q_p$ , в пределах горизонтальной стенок  $\oint_{\delta_1} \frac{q_p ds}{\delta_1} = 0$

Интеграл  $\oint_H q_p ds$  в пределах стенок 2 и анало-



шчно такой же интеграл в пределах стенок 3 определяется как сумма площадей прямоугольника и площади параболы с максимальной стрелкой  $\frac{1}{4} H^2 \delta_2^0$ .

Площадь прямоугольника равна  $H \cdot \frac{6\delta_1^0 H}{4} = \frac{6\delta_1^0 H^2}{4}$ .

Площадь параболы равна  $\frac{2}{3} H \cdot \frac{H^2 \delta_2^0}{4} = \frac{1}{12} \delta_2^0 H^3$

Стало быть

$$\frac{1}{2} \int_H q_p ds = \frac{1}{\delta_2^0} \left( \frac{6\delta_1^0 H^2}{4} + \frac{H^3 \delta_2^0}{12} \right) = \frac{H^3}{12} \left( 1 + \frac{6}{H} \cdot \frac{\delta_1^0}{\delta_2^0} \right)$$

и

$$\frac{1}{\delta_3^0} \int_H q_p ds = - \frac{H^3}{12} \left( 1 + \frac{36}{H} \cdot \frac{\delta_1^0}{\delta_3^0} \right)$$

В результате

$$E_p = \frac{1}{12} H^3 \left[ \frac{6}{H} \frac{\delta_1^0}{\delta_2^0} \left( 1 - \frac{\delta_2^0}{\delta_3^0} \right) - \frac{1}{2GF} \right] = \frac{H^2 \delta_1^0}{8} \cdot \frac{e}{G.F} \cdot \frac{\delta_1^0}{\delta_2^0} \left( 1 - \frac{\delta_2^0}{\delta_3^0} \right)$$

Если  $\delta_2^0 : \delta_3^0 = 1$ , то  $E_p = 0$ , и эпюра  $q_p$  является окончательной эпюрой от изгиба силой  $Q_y = J_z$ .

Проверкой правильности эпюры  $q_p$  служит равенство равнодействующей вертикальных составляющих внутренней срезающей силы  $T_y$  внешней срезающей силы  $Q_y = J_z$ .

$$\begin{aligned} T_y &= \int_H q_p ds_2 + \int_H q_p ds_3 = \left( \frac{H^3 \delta_2^0}{12} + \frac{6\delta_1^0 H^2}{4} \right) + \left( \frac{H^3 \delta_3^0}{12} + \frac{6\delta_1^0 H^2}{4} \right) = \\ &= \frac{H^3 \delta_3^0}{12} \left( \frac{66\delta_1^0}{H} + \frac{\delta_2^0}{\delta_3^0} + 1 \right) \end{aligned}$$

т.е.  $T_y = J_z$ .

Вторая проверка состоит в контроле равенства нулю „циркуляции“, т.е. при обходе контура величина  $J_z$  в точке  $\alpha$  равна нулю.



4. Определение крутящего момента  $M_{кр}$ , соответствующего углу закручивания  $\epsilon_p$ .

Согласно формулы 2/19.

$$M_{кр} = \frac{\epsilon_p}{\epsilon} \cdot \frac{4F^2}{\phi \frac{dc}{c} \frac{d\sigma}{\sigma}} = \frac{4F^2 H^2 v \epsilon \delta_1}{G F \cdot \delta_2} \left(1 - \frac{\delta_2}{\delta_3}\right) \frac{1}{\left(2 \frac{v}{\delta_1} + \frac{H}{\delta_2} + \frac{H}{\delta_3}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2} F \frac{H^2 v}{2 \frac{v}{\delta_1} \left(1 + \frac{H \delta_1}{v \delta_2} + \frac{H \delta_1}{v \delta_3}\right)} \text{ или } M_{кр} = \frac{F}{4} \frac{H^2 \delta_1}{1 + \frac{H}{v} \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} + \frac{\delta_1}{\delta_3}\right)}$$

Интенсивность срезающей силы от  $M_{кр}$

$$q_0 = \frac{M_{кр}}{2F} = \frac{1}{8} \cdot \frac{H^2 \delta_1}{1 + \frac{H}{v} \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} + \frac{\delta_1}{\delta_3}\right)}$$

Схема эпюры  $q_0$  представлена на рис. 103в.

5. Определение действительной интенсивности срезающей силы  $q_y$  от изгиба заданного бруса силой  $Q_y$ .

$$q_y = (q_p - q_0) n \dots \dots (223) \text{ где } n = \frac{Q_y}{T_z}$$

Стало быть, окончательная эпюра  $q_y$  получается путем вычитания из эпюры  $q_p$  (рис. 103б) эпюры  $q_0$  (рис. 103в) и умножения результата на коэффициент перехода  $n$ .

6. Определение координат центра жесткости.

Ввиду того, что ось  $Z$  является осью симметрии, то центр жесткости лежит на этой оси. Вследствие чего остается определить одну координату  $Z_x$  центра жесткости.

За точку моментов принимаем точку  $O$ .



Срезающие силы в горизонтальных стеночках создают два равных и прямо противоположных момента и поэтому в уравнение моментов не входят.

Момент от срезающей силы на левой вертикальной стеночке

$$M_2 = Q_2 \frac{b}{2} = \frac{1}{12} H^3 \left( 1 + 3 \frac{b}{H} \frac{\delta_1^2}{\delta_2} \right) \frac{b}{2}$$

Момент от срезающей силы на правой вертикальной стеночке

$$M_3 = Q_3 \frac{b}{2} = \frac{1}{12} H^3 \left( 1 + 3 \frac{b}{H} \frac{\delta_1^2}{\delta_3} \right) \frac{b}{2}$$

Координата

$$Z_{ж} = \frac{M_2 - M_3}{Q_y} = \frac{1}{12} H^3 \frac{b}{2} \left[ \left( 1 + 3 \frac{b}{H} \frac{\delta_1^2}{\delta_2} \right) - \left( 1 + 3 \frac{b}{H} \frac{\delta_1^2}{\delta_3} \right) \right] \frac{1}{\frac{\delta_3 H^3}{12} \left( 6 \frac{b}{H} \frac{\delta_1^2}{\delta_2} + \frac{\delta_1^2}{\delta_3} + 1 \right)}$$

$$Z_{ж} = \frac{1}{2} b \frac{3 \frac{b}{H} \left( \frac{\delta_2^2}{\delta_2} - \frac{\delta_1^2}{\delta_3} \right)}{6 \frac{b}{H} \frac{\delta_1^2}{\delta_2} + \frac{\delta_1^2}{\delta_3} + 1}$$

Когда  $\delta_2^2 = \delta_3^2$ ,  $Z_{ж} = 0$  т.е. центр жесткости совпадает с центром тяжести сечения.

## II. Определение касательных напряжений

изгиба тонкостенной коробки постоянного сечения двусвязного профиля, когда изгиб происходит вблизи заделки.

Коробка подкреплена брусками в углах.

Решение рассматриваемой задачи отличается от решения предыдущей задачи лишь в той части, где определяется угол закручивания, крутя-



щий момент и интенсивность срезающей силы от этого крутящего момента.

Срезающие силы в стеночках коробки от крутящего момента  $M=1$  определяются по формулам, установленным в теории кручения коробок вблизи заделки. Интенсивность срезающей силы получаем делением этой силы на соответствующую высоту стеночки.

Угол закручивания  $\epsilon_p$  определяется по формуле Мора, учитывая лишь срез в стеночках. Крутящий момент, соответствующий эпюре  $q_p$  определяется по формуле

$$M_{кр} = \frac{\epsilon_p}{\epsilon} \dots \dots \dots (224)$$

где  $\epsilon$  - угол закручивания коробки от момента, равного единице. Окончательная интенсивность срезающей силы в стеночках коробки определяется либо по формуле (223) либо по формуле

$$q = (q_p - M_{кр} \cdot q_1) \cdot n \dots \dots \dots (225), \text{ где}$$

$q_1$  - интенсивность срезающей силы от крутящего момента  $M=1$ .

Когда имеются окончательные срезающие силы в стеночках коробки, то осевые силы в угловых брусках определяются как алгебраическая сумма осевых сил, возникающих от изгиба соответствующих пересекающихся стеночек коробки, рассматриваемых как двухпоясные балки тонкой стенкой.



III. Определение усилий от изгиба в элементах коробки, рис. 104, все стеночки которой потеряли устойчивость. Определение центра жесткости поперечного сечения этой же коробки.

Рассмотрим изгиб силой  $Q_y$  в вертикальной плоскости, т.е. плоскости параллельной  $UOx$ . Все сказанное относительно этого изгиба аналогичным образом переносится и на изгиб в горизонтальной плоскости.

Когда изгиб происходит в вертикальной плоскости работают лишь вертикальные стеночки; горизонтальные стеночки, превратившись в диагонально растянутое поле (фигурально выражаясь, в систему лент расчалок) не работают от сил в вертикальной плоскости при принятых нами выше допущениях для диагонально растянутого поля (в частности, допущение о малости деформаций и о отсутствии сил сжатия).

Пусть стеночки 2 и 4 воспринимают соответственно силы  $M_2 Q_y$  и  $M_4 Q_y$ . Коэффициенты распределения  $M_2$  и  $M_4$  определяем из следующих уравнений:

1. Уравнение равновесия  $\Sigma y = 0$

$$M_2 Q_y + M_4 Q_y = Q_y \text{ или } M_2 + M_4 = 1 \dots (a)$$

2. Уравнение моментов  $\Sigma M_x = 0$

За точку моментов принимаем точку  $O$ .

Предварительно полагаем, что центр тяжести находится в точке  $O$ , совпадающей с центром тяжести сечения и  $Q_y$  проходит через эту точку, тогда:



$$\sum M_x = M_2 Q \cdot b_1 - M_4 Q \cdot b_2 = 0 \text{ откуда: } \frac{M_1}{M_2} = \frac{b_2}{b_1} \dots \dots (d)$$

Совместное решение уравнений a и d приводит к следующим результатам

$$M_1 = \frac{b_2}{2b} \dots \dots (b) \quad M_2 = \frac{b_1}{2b} \dots \dots (z)$$

Так как в действительности точка O не совпадает с центром жесткости (в общем случае несимметричного сечения коробки), то при найденном распределении сил коробка испытывает не только изгиб, но и кручение. Для определения соответствующего угла закручивания  $\epsilon_p$  и крутящего момента  $M_{кр}$  соответствующего этому углу закручиванию применяем формулу Мора.

В первом состоянии сила  $Q_y$  проходит через точку O и распределение ее на вертикальные стеночки характеризуется коэффициентами распределения  $M_1$  и  $M_2$ .

Во втором состоянии прикладываем к коробке в плоскости диска  $A^x$  крутящий момент  $M=1$

$$\epsilon_p = \sum \frac{b_p b_k}{E_{ст}} F_{ст} + \sum \int_0^b \frac{N_p N_k dx}{E \cdot f}$$

$$M_{кр} = \frac{\epsilon_p}{\epsilon}$$

Операция суммирования  $-\sum \frac{b_p b_k}{E_{ст}} F_{ст}$  распространяется лишь на вертикальные стеночки.

Легко понять, что конечный результат по рассматриваемому нами методу ничем не будет отличаться от результата, получаемого по

х) поскольку в этой плоскости ищется центр жесткости.



методу, рассмотренному в § 12, где мы исходили из равенства прогибов совместно работающих брусьев. Такое следствие объясняется тем, что горизонтальные стеночки не введены в работу на вертикальный изгиб.

Сказанное будет иметь место также и применительно к ферменным прямоугольным коробкам, когда горизонтальные фермы не вводятся в работу на вертикальный изгиб. В тех случаях, когда все фермы коробки принимают участие в работе на вертикальный изгиб (например, трапециевидальная ферменная коробка), результаты по обоим вышеупомянутым методам будут расходиться.

IV. Определение касательных напряжений от изгиба многосвязных тонкостенных сечений, а также определение центра жесткости для этих сечений.

Нижеприводимые рассуждения будем иллюстрировать на примере четырехсвязного контура рис. 105а.

Рассмотрим сначала случай, когда обшивка не потеряла устойчивости. Для определения касательных напряжений от изгиба необходимо представить общий профиль в виде ряда отдельных замкнутых контуров, например, по рис. 105б и предварительно наметить точку, где  $q = 0$  в каждом из вышеупомянутых контуров. После чего можно беспрепятственно применить формулу  $q = \frac{Q_s}{J}$  для определения интенсивности  $q_r$ .

Для определения угла закручивания  $\theta_r$  приме-



няем формулу Мора. Заданное состояние характеризуется эпюрой  $q_p$ ; во втором состоянии к сечению рис. 105а прикладываем момент  $M=1$ , который с помощью коэффициентов распределения  $\mu_1, \mu_2$  и  $\mu_3$  распределяется соответственно по контурам 1, 2 и 3. Интенсивности  $q_1, q_2$  и  $q_3$  срезавшей силы в этих контурах от кручения моментом  $M=1$  определяются по формуле Бредта, если рассматриваемое сечение находится вдали от заделки.

$$q_1 = \frac{\mu_1}{2F_1} \quad q_2 = \frac{\mu_2}{2F_2} \quad q_3 = \frac{\mu_3}{2F_3}$$

Если сечение находится вблизи заделки, то интенсивности срезавшей силы от кручения и коэффициенты распределения  $\mu$  определяются, пользуясь теорией кручения коробок вблизи заделки.

Согласно формулы Мора угол закручивания

$$\varepsilon_p = \oint_{c_1} \frac{q_1 q_p ds}{G_1 \delta_1} + \oint_{c_2} \frac{q_2 q_p ds}{G_2 \delta_2} + \oint_c \frac{q_3 q_p ds}{G_3 \delta_3} \dots (226)$$

Угол закручивания от крутящего момента  $M=1$  определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_3}}; \quad \varepsilon_n (n=1, 2, 3) \text{ угол закручивания контура } n \text{ от приложенного к нему крутящего момента } M=1.$$

Крутящий момент  $M_{кр}$ , соответствующий распределению срезавшей силы, характеризуемой эпюрой  $q_p$ , определяется по формуле



$$M_{кр} = \frac{E_p}{E}$$

Окончательные интенсивности срезающей силы  $q$  в пределах каждого из контуров определяются по формуле

$$q = (q_p - M_{кр} \cdot q_n) \cdot n,$$

где  $q_n$  — интенсивность срезающей силы от крутящего момента  $M=1$  в контуре  $n$  после того как определена эюра  $q_p$  и крутящий момент  $M_{кр}$  центр жесткости определяется так же, как и для ранее рассмотренного двухсвязного сечения.

Следует отметить, что в сечении, где определяют центр жесткости, необходимо вычислить фактический полный угол закручивания. Это замечание имеет важное значение для брусев переменного сечения.

Пример 17. Определить координату  $Z_{ж}$  для профиля крыла рис. 106 вдали заделки. Сечение предполагается постоянным по длине крыла.

При определении центра тяжести сечения, моментов инерции, статических моментов площадь сечения обшивки умножилась на так называемые коэффициенты редукции  $K=1$ . Коэффициенты эти вводятся в расчете на изгиб крыла с тем, чтобы введение этих коэффициентов оправдать применение элементарной формулы изгиба ( $\sigma = \frac{M \cdot y}{J_z}$ ), поскольку к сечению крыла (как к сечению сложной оболочки) неприменима элементарная теория изгиба брусев. (Подробнее о коэффициентах редукции излагается



во второй части данной работы, где также приводится таблица коэффициентов редукции  $K \leq 1$  для элементов крыла, заимствованных из экспериментальной части работы Беляева, Испытания и расчет крыльев с различной обшивкой" Т. В. Ф. № 5, 1935 г.)

Диаметр дюралевых труб поясов лонжеронов:

передний лонжерон  $d_x d_y = 50 \times 47 \text{ мм}$

задний лонжерон  $d_x d_y = 50 \times 48 \text{ мм}$

Толщина дужки  $h_{\text{пер}} = 250 \text{ мм}$

$h_{\text{зад}} = 222 \text{ мм}$ .

Решение:



## 1. Определение центра тяжести сечения.

	$F_{см}^2$	$K$	$F_{np} = FK$	$Z$	$Y$	$Z \cdot F_{np}$	$Y \cdot F_{np}$
1-2	2,4	0,05	0,12	76,5	19,75	8,99	2,37
2-3	2,4	0,05	0,12	100,0	18,25	12,00	2,19
3-4	2,4	0,05	0,12	123,0	16,25	14,75	1,95
4-22	1,5	1,00	1,5	135,0	10,9	22,50	16,35
4-5	2,57	0,05	0,128	147,5	13,5	18,9	1,73
5-6	2,57	0,05	0,128	173,5	10,0	22,2	1,28
6-7	1,42	0,05	0,071	188,5	2,0	13,4	0,142
7-8	2,9	0,30	0,87	177	-5,75	154	-5,00
8-9	2,9	0,30	0,87	147,0	-7,75	127,9	-6,75
9-22	0,9	1,00	0,9	135	-6,1	121,5	-5,49
9-10	1,88	0,60	1,13	123,0	-9,4	134,0	-10,6
10-11	1,88	0,60	1,13	100,0	-10,0	113,0	-11,3
11-12	1,88	0,60	1,13	76	-10,5	86,0	-11,85
12-13	1,88	0,60	1,13	53	-9,4	60,0	-10,6
13-21	0,8	1,00	0,8	41,25	-1,1	33,2	-0,88
13-14	1,45	0,3	0,435	31,2	-8,0	14,81	-3,48
14-15	1,45	0,3	0,435	19,75	-6,25	8,7	-2,74
15-16	1,45	0,3	0,435	6,0	-4,0	2,61	-1,74
16-17	0,525	0,08	0,042	0	-2,0	0	-0,084
17-18	1,5	0,08	0,12	6,0	10	0,72	1,2
18-19	1,5	0,08	0,12	19,75	16	2,35	1,92
19-20	1,5	0,08	0,12	33,7	19	4,05	2,28
20-21	2,0	1,00	2,00	41,25	10,75	82,5	21,5
20-1	2,4	0,05	0,12	53,00	20,5	6,3	2,46
			13,974			1240,33	-15,28

$$Z_{ц.т} = \frac{1240,33}{13,974} \approx 88 \text{ см (от носка)}$$

$$Y_{ц.т} = \frac{-15,28}{13,974} = -1,10 \text{ см (от хорды) (см. рис. 106).}$$



2. Определение моментов инерции сечения относительно прямоугольных осей  $Z$  и  $Y$ , проходящих через центр тяжести сечения.

Экваториальные моменты инерции  $J_z$  и  $J_y$  определены соответственно по формулам:

$$J_z = \frac{\sum \Delta F \cdot y^2}{2}; \quad J_y = \sum \Delta F \cdot z^2.$$

Центробежный момент инерции определен по формуле:  $J_{zy} = \sum \Delta F \cdot zy$ .

Результаты вычислений:

$$J_z = 950,19 \text{ см}^4.$$

$$J_y = 35094,7 \text{ см}^4.$$

$$J_{zy} = -873,2 \text{ см}^4.$$

3. Определение направления главных осей.

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot J_{zy}}{J_y - J_z} = \frac{-2 \cdot 873,2}{35094,7 - 950,19} = 0,0512$$

$$2\alpha = 3^\circ; \quad \alpha = 1,5^\circ.$$

Ввиду малости угла  $\alpha$  величиной последнего пренебрегаем, иначе говоря полагаем, что главные оси совпадают с осями координат  $Y$  и  $Z$ .

Такое допущение, когда угол  $\alpha$  мал, незначительно отражается на величину экваториальных моментов инерции  $J_z$  и  $J_y$  <sup>х)</sup>.

---

х) Одновременно может значительно отражаться на величину ординаты  $y$  точек, весьма удаленных от точки  $O$ .



4. Определение углов закручивания отдельных контуров от единичных моментов.

$$M_1 = 1 \quad M_2 = 1 \quad M_3 = 1$$

Контур 1.

Участок	dc	$\delta$	G	$\frac{dc}{G\delta}$
21-13	8	0,1	$273 \cdot 10^3$	$0,293 \cdot 10^{-3}$
13-14	14,5	0,1	$78,5 \cdot 10^3$	$1,85 \cdot 10^{-3}$
14-15	14,5	0,1	$78,5 \cdot 10^3$	$1,85 \cdot 10^{-3}$
15-16	14,5	0,1	$78,5 \cdot 10^3$	$1,85 \cdot 10^{-3}$
16-17	5,25	0,1	$29,4 \cdot 10^3$	$1,785 \cdot 10^{-3}$
17-18	15	0,1	$60,3 \cdot 10^3$	$2,485 \cdot 10^{-3}$
18-19	15	0,1	$60,3 \cdot 10^3$	$2,485 \cdot 10^{-3}$
19-20	15	0,1	$60,3 \cdot 10^3$	$2,485 \cdot 10^{-3}$
20-21	20	0,1	$273 \cdot 10^3$	$0,733 \cdot 10^{-3}$

$$4F_1^2 \theta_1 = 15,83 \cdot 10^{-3}$$

Контур 2.

Участок	dc	$\delta$	G	$\frac{dc}{G\delta}$
21-20	20	0,1	$273 \cdot 10^3$	$0,733 \cdot 10^{-3}$
20-1	24	0,1	$222 \cdot 10^3$	$1,08 \cdot 10^{-3}$
1-2	24	0,1	$222 \cdot 10^3$	$1,08 \cdot 10^{-3}$
2-3	24	0,1	$222 \cdot 10^3$	$1,08 \cdot 10^{-3}$
3-4	24	0,1	$222 \cdot 10^3$	$1,08 \cdot 10^{-3}$
4-22	15	0,1	$273 \cdot 10^3$	$0,55 \cdot 10^{-3}$
22-9	9	0,1	$273 \cdot 10^3$	$0,33 \cdot 10^{-3}$
9-10	23,25	0,08	$231 \cdot 10^3$	$1,26 \cdot 10^{-3}$
10-11	23,25	0,08	$231 \cdot 10^3$	$1,26 \cdot 10^{-3}$
11-12	23,25	0,08	$231 \cdot 10^3$	$1,26 \cdot 10^{-3}$
12-13	23,25	0,08	$231 \cdot 10^3$	$1,26 \cdot 10^{-3}$
13-21	8	0,1	$273 \cdot 10^3$	$0,293 \cdot 10^{-3}$

$$4F_2^2 \theta_2 = 11,26 \cdot 10^{-3}$$



Контур 3.

Участок	$dc$	$\delta$	$G$	$\frac{dc}{G\delta}$
4-22	15	0,1	273 · 10 <sup>3</sup>	0,55 · 10 <sup>-3</sup>
4-5	25,5	0,1		0,935 · 10 <sup>-3</sup>
5-6	25,5	0,1		0,935 · 10 <sup>-3</sup>
6-7	14	0,1		0,513 · 10 <sup>-3</sup>
7-8	23,25	0,1		0,85 · 10 <sup>-3</sup>
8-9	23,25	0,1		0,85 · 10 <sup>-3</sup>
9-22	9	0,1		0,33 · 10 <sup>-3</sup>

$$4F_3^2 \theta_3 = 4,96 \cdot 10^{-3}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{4F_1^2} \oint_{C_1} \frac{dc}{G_1 \delta_1} = \frac{15,83 \cdot 10^{-3}}{4,875^2} = 5,17 \cdot 10^{-9}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{4F_2^2} \oint_{C_2} \frac{dc_2}{G_2 \delta_2} = \frac{11,26 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 2600^2} = 0,42 \cdot 10^{-9}$$

$$\theta_3 = \frac{1}{4F_3^2} \oint_{C_3} \frac{dc_3}{G_3 \delta_3} = \frac{4,96 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 1000^2} = 1,24 \cdot 10^{-9}$$

Общий угол закручивания всего контура от крутящего момента  $M=1$  по приближенной формуле:

$$\varepsilon = \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} = \frac{1}{\frac{1}{5,17} \cdot 10^9 + \frac{1}{0,42} \cdot 10^9 + \frac{1}{1,24} \cdot 10^9} = 0,296 \cdot 10^{-9}$$

Приближенные значения коэффициентов распределения

$$\mu_1 = \frac{0,296}{5,17} = 0,057 \quad \mu_2 = 0,057$$



$$\mu_2 = \frac{0,296}{0,42} = 0,705$$

$$\mu_2 = 0,705$$

$$\mu_3 = \frac{0,296}{1,24} = 0,238$$

$$\mu_3 = 0,238.$$

5. Определение интенсивностей среза в отдельных контурах от единичного крутящего момента, приложенного ко всему контуру.

Интенсивность срезающих напряжений от кручения определяем по формуле Брегга:

$$q_1 = \frac{\mu_1}{2F_1} = \frac{0,057}{2 \cdot 875} = 3,26 \cdot 10^{-5}$$

$$q_2 = \frac{\mu_2}{2F_2} = \frac{0,705}{2 \cdot 2600} = 13,55 \cdot 10^{-5}$$

$$q_3 = \frac{\mu_3}{2F_3} = \frac{0,238}{2 \cdot 1000} = 11,9 \cdot 10^{-5}$$

6. Точное определение угла закручивания всего контура от момента  $M=1$  и коэффициентов распределения.

$$\delta_{11}^0 = \theta_1 = 5,17 \cdot 10^{-9}; \quad q_1 = 3,26 \cdot 10^{-5}; \quad r_{12} = 28,2 \text{ см}$$

$$\delta_{22}^0 = \theta_2 = 0,42 \cdot 10^{-9}; \quad q_2 = 13,55 \cdot 10^{-5}; \quad r_{23} = 24,0 \text{ см}$$

$$\delta_{33}^0 = \theta_3 = 1,24 \cdot 10^{-9}; \quad q_3 = 11,9 \cdot 10^{-5}; \quad G_{12} = G_{23} = 273 \cdot 10^3.$$

Толщина стенок на границе контуров 1-2 и 2-3 соответственно равны  $(\delta)_{12}^0 = 0,1 \text{ см.}$  и  $(\delta)_{23}^0 = 0,1 \text{ см.}$



$$d_{12}^0 = -\frac{q_1 q_2 h_{12}}{G_{12} (d^0)_{12}} = \frac{3,26 \cdot 10^{-5} \cdot 13 \cdot 55 \cdot 10^{-5} \cdot 28,2}{273 \cdot 10^3 \cdot 0,1} = -4,57 \cdot 10^{-12}$$

$$d_{23}^0 = -\frac{q_2 q_3 h_{23}}{G_{23} (d^0)_{23}} = -\frac{13,55 \cdot 10^{-5} \cdot 11,9 \cdot 10^{-5} \cdot 24}{273 \cdot 10^3 \cdot 0,1} = -14,2 \cdot 10^{-12}$$

Значения перемещений  $d_{ii}^0$  и  $d_{ik}^0$  подставляем в уравнения типа 207 и записываем их в виде:

$$\left. \begin{aligned} 5,17 \cdot 10^{-9} \mu_1 - 4,57 \cdot 10^{-12} \mu_2 &= \varepsilon \\ -4,57 \cdot 10^{-12} \mu_1 + 0,42 \cdot 10^{-9} \mu_2 - 14,2 \cdot 10^{-12} \mu_3 &= \varepsilon \\ -14,2 \cdot 10^{-12} \mu_2 + 1,24 \cdot 10^{-9} \mu_3 &= \varepsilon \end{aligned} \right\} (A)$$

Систему уравнений  $A$  решаем по Гауссу.

	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\varepsilon$	
1	5170	-4,57	0	$\varepsilon$	$\beta_{12} = +\frac{4,57}{5170} = +0,000885$
2	-4,57	420	-14,2	$\varepsilon$	
$+ \beta_{12} \bar{I}$	4,57	-0,00403		0,000885 $\varepsilon$	
$\bar{II}$	0	419,996	-14,2	1,000885 $\varepsilon$	
3	0	-14,2	1240	$\varepsilon$	
$+ \beta_{13} \bar{I}$	0	0	0	0	$\beta_{13} = 0$
$+ \beta_{23} \bar{II}$	0	0	14,2	0,0338 $\varepsilon$	$\beta_{23} = \frac{14,2}{419} = 0,0338$
$\bar{III}$	0	0	1239,52	1,0338 $\varepsilon$	

Из уравнения  $\bar{III}$



$$\mu_3 = \frac{1,0338}{1239,52} \varepsilon = 0,000835 \varepsilon$$

Из уравнения II

$$-14,2 \mu_2 + 1240 \mu_3 = \varepsilon$$

$$\mu_2 = \frac{\varepsilon - 1240}{-14,2} = \frac{\varepsilon - 1240 \cdot 0,000835}{-14,2} = 0,00238 \varepsilon$$

Из уравнения I

$$5170 \mu_1 - 4,57 \mu_2 = \varepsilon$$

$$= \frac{\varepsilon + 4,57 \mu_2}{5170} = \frac{\varepsilon + 4,57 \cdot 0,00238 \varepsilon}{5170} = 0,000195 \varepsilon.$$

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon}{\mu_1} = \frac{\varepsilon \cdot 10^{-12}}{0,000195} = 5,12 \cdot 10^{-9}$$

$$\alpha_2 = \frac{\varepsilon}{\mu_2} = \frac{\varepsilon \cdot 10^{-12}}{0,00238} = 0,42 \cdot 10^{-9}$$

$$\alpha_3 = \frac{\varepsilon}{\mu_3} = \frac{\varepsilon \cdot 10^{-12}}{0,000835} = 1,2 \cdot 10^{-9}$$

Ниже для сравнения приводим значения величин  $\theta_n$  и  $\alpha_n$  ( $n=1, 2, 3$ )

$$\theta_1 = 5,17 \cdot 10^{-9}$$

$$\alpha_1 = 5,12 \cdot 10^{-9}$$

$$\theta_2 = 0,42 \cdot 10^{-9}$$

$$\alpha_2 = 0,42 \cdot 10^{-9}$$

$$\theta_3 = 1,24 \cdot 10^{-9}$$

$$\alpha_3 = 1,2 \cdot 10^{-9}$$

Значения  $\alpha_n$  крайне незначительно отличаются



от  $\theta_n$ .

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{5,12 \cdot 10^{-9}} + \frac{1}{0,42 \cdot 10^{-9}} + \frac{1}{1,2 \cdot 10^{-9}}} = 0,293 \cdot 10^{-9}$$

(приближенное значение  $\underline{\varepsilon} = 0,296 \cdot 10^{-9}$ )

$$\mu_1 = \frac{\underline{\varepsilon}}{\alpha_1} = \frac{0,293 \cdot 10^{-9}}{5,12 \cdot 10^{-9}} = 0,0572 \quad (\text{приближенное значение } \mu_1 = 0,057)$$

$$\mu_2 = \frac{\underline{\varepsilon}}{\alpha_2} = \frac{0,293 \cdot 10^{-9}}{0,42 \cdot 10^{-9}} = 0,6975 \quad (\text{приближенное значение } \mu_2 = 0,705)$$

$$\mu_3 = \frac{\underline{\varepsilon}}{\alpha_3} = \frac{0,293 \cdot 10^{-9}}{1,2 \cdot 10^{-9}} = 0,244 \quad (\text{приближенное значение } \mu_3 = 0,238)$$

Из сравнения полученных значений угла закручивания  $\underline{\varepsilon}$  и коэффициентов  $\mu_n$  с соответствующими приближенными значениями  $\underline{\varepsilon}$  и  $\mu_n$  вытекает, что эти значения почти совпадают. В дальнейшем расчете применены приближенные значения  $\underline{\varepsilon}$  и  $\mu_n$ .

### 7. Определение угла закручивания $\underline{\varepsilon}_p$ от изгиба силой $Q_y$ .

$$\underline{\varepsilon}_p = \sum \int_c \frac{\bar{q} \cdot q_p \cdot dc}{G \cdot \delta} = \int_{c_1} \frac{q_1 q_p dc_1}{G_1 \delta_1} + \int_{c_2} \frac{q_2 q_p dc_2}{G_2 \delta_2} + \int_{c_3} \frac{q_3 q_p dc_3}{G_3 \delta_3} \quad (226)$$

Интенсивность срезающих сил  $q_p$  определяем по формуле

$$q_p = \frac{Q \cdot J_z}{J_z}$$



Так как положение центра жесткости не зависит от внешней силы, то для удобства вычисления принимаем  $Q_y = J_z$ , тогда  $q_p = J_z$ .

Разбивка профиля на участки понятна из рассмотрения рис. 106. Нулевые значения касательных напряжений приняты предварительно в точках  $a$ ,  $b$  и  $b$ .

Вычисления интенсивностей  $q_p$  сведены в нижеприведенную таблицу.

Участки	$Z$	$F.K$	$FK \cdot Z$	$\Sigma FK \cdot Z = q_p$
1-2	-12,5	0,12	-1,5	-1,5
2-3	11,25	0,12	1,35	-0,15
3-4	34,6	0,12	4,15	4
4-22	45,6	1,5	68,0	72
4-5	57,55	0,128	7,5	79,5
5-6	82,0	0,128	10,5	90
6-7	98,5	0,071	7	97
7-8	80,9	0,87	75,5	172,5
8-9	60,0	0,87	52	224,5
9-22	44,45	0,9	40	264,5
9-10	33,2	1,13	37,5	302,0
10-11	11,2	1,13	12,5	314,5
11-12	-12,5	1,13	14,15	300,35
12-13	-36,65	1,13	-41,5	258,85
13-21	-48	0,8	-38,4	220,45
13-14	-58,6	0,435	-24,5	195,95
14-15	-71,2	0,435	-31,0	164,95
15-16	-84	0,435	-36,5	128,45
16-17	-89	0,042	-4	124,45
17-18	-83,3	0,12	-10	114,45
18-19	-69,5	0,12	-8,35	107,1
19-20	-55,55	0,12	-6,65	99,45
20-1	-36,2	0,12	4,35	0,1
20-21	-47,5	2,0	-95	4,45



Вычисление каждого из интегралов в выражении  $E_p$  удобно вести в табличной форме, заменив интегрирование на суммирование.

$$\int_{c_1} \frac{q_1 q_p dc_1}{G_1 \delta_1}$$

Участки	$q_1$	$q_p$	$\frac{dc_1}{G_1 \delta_1}$	$\frac{q_1 q_p dc_1}{G_1 \delta_1}$
21-13	$3,26 \cdot 10^{-5}$	220,45	$0,293 \cdot 10^{-3}$	$0,0021 \cdot 10^{-3}$
13-14	$3,26 \cdot 10^{-5}$	195,95	$1,85 \cdot 10^{-3}$	$0,0118 \cdot 10^{-3}$
14-15	$3,26 \cdot 10^{-5}$	164,95	$1,85 \cdot 10^{-3}$	$0,01095 \cdot 10^{-3}$
15-16	$3,26 \cdot 10^{-5}$	128,45	$1,85 \cdot 10^{-3}$	$0,00774 \cdot 10^{-3}$
16-17	$3,26 \cdot 10^{-5}$	124,45	$1,785 \cdot 10^{-3}$	$0,00724 \cdot 10^{-3}$
17-18	$3,26 \cdot 10^{-5}$	114,45	$2,485 \cdot 10^{-3}$	$0,00927 \cdot 10^{-3}$
18-19	$3,26 \cdot 10^{-5}$	107,1	$2,485 \cdot 10^{-3}$	$0,00868 \cdot 10^{-3}$
19-20	$3,26 \cdot 10^{-5}$	99,45	$2,485 \cdot 10^{-3}$	$0,00806 \cdot 10^{-3}$
20-21	$3,26 \cdot 10^{-5}$	4,45	$0,733 \cdot 10^{-3}$	$0,000707 \cdot 10^{-3}$

$$\int_{c_1} \frac{q_1 q_p dc_1}{G_1 \delta_1} = 0,074847 \cdot 10^{-3}$$

$$\int_{c_2} \frac{q_2 q_p dc_2}{G_2 \delta_2}$$

Участки	$q_2$	$q_p$	$\frac{dc_2}{G_2 \delta_2}$	$\frac{q_2 q_p dc_2}{G_2 \delta_2}$
1-2	$13,55 \cdot 10^{-5}$	-1,5	$1,08 \cdot 10^{-3}$	0,00022
2-3	$13,55 \cdot 10^{-5}$	-0,15	$1,08 \cdot 10^{-3}$	0,000022
3-4	$13,55 \cdot 10^{-5}$	4	$1,08 \cdot 10^{-3}$	0,000585
4-22	$13,55 \cdot 10^{-5}$	72	$0,55 \cdot 10^{-3}$	0,00535
22-9	$13,55 \cdot 10^{-5}$	264,5	$0,33 \cdot 10^{-3}$	0,0118
9-10	$13,55 \cdot 10^{-5}$	302	$1,26 \cdot 10^{-3}$	0,0515
10-11	$13,55 \cdot 10^{-5}$	314,5	$1,26 \cdot 10^{-3}$	0,0535
11-12	$13,55 \cdot 10^{-5}$	300,5	$1,26 \cdot 10^{-3}$	0,0512



12-13	$13,55 \cdot 10^{-5}$	258,5	$1,26 \cdot 10^{-3}$	0,0441
13-21	$13,55 \cdot 10^{-5}$	220,45	$0,293 \cdot 10^{-3}$	0,00875
21-20	$13,55 \cdot 10^{-5}$	4,45	$0,733 \cdot 10^{-3}$	0,000435
20-1	$13,55 \cdot 10^{-5}$	0,1	$1,08 \cdot 10^{-3}$	0,0000184

$$\oint_{C_2} \frac{q_2 q_p dc_2}{G_2 \delta_2^2} = 0,1735 \cdot 10^{-3}$$

$$\oint_{C_3} \frac{q_3 q_p dc_3}{G_3 \delta_3}$$

Участки	$q_3$	$q_p$	$\frac{dc_3}{G_3 \delta_3}$	$\frac{q_3 q_p dc_3}{G_3 \delta_3}$
4-22	$11,9 \cdot 10^{-5}$	72	$0,55 \cdot 10^{-3}$	0,00445
4-5	$11,9 \cdot 10^{-5}$	79,5	$0,935 \cdot 10^{-3}$	0,00885
5-6	$11,9 \cdot 10^{-5}$	90	$0,935 \cdot 10^{-3}$	0,01
6-7	$11,9 \cdot 10^{-5}$	97	$0,513 \cdot 10^{-3}$	0,0059
7-8	$11,9 \cdot 10^{-5}$	172,5	$0,85 \cdot 10^{-3}$	0,0175
8-9	$11,9 \cdot 10^{-5}$	224,5	$0,85 \cdot 10^{-3}$	0,0227
9-22	$11,9 \cdot 10^{-5}$	264,5	$0,33 \cdot 10^{-3}$	0,0104

$$\oint_{C_3} \frac{q_3 q_p dc_3}{G_3 \delta_3} = 0,0798 \cdot 10^{-3}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_p &= \sum \oint \frac{\bar{q} q_p dc}{G \delta} = (0,074847 + 0,1735 + 0,0798) \cdot 10^{-3} = \\ &= 0,32815 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\mu_{кр} = \frac{\epsilon_p}{\epsilon} = \frac{0,328 \cdot 10^{-3}}{0,296 \cdot 10^{-9}} = 1,105 \cdot 10^6$$

Имея коэффициенты  $\mu_n$  легко найти крутящий момент, приходящийся на каждый контур и ин-



тенсивности срезающих сил.

$$M_1 = \mu_1 M = 0,057 \cdot 1,105 \cdot 10^6 = 0,0627 \cdot 10^6$$

$$M_2 = \mu_2 M = 0,705 \cdot 1,105 \cdot 10^6 = 0,7756 \cdot 10^6$$

$$M_3 = \mu_3 M = 0,238 \cdot 1,105 \cdot 10^6 = 0,262 \cdot 10^6$$

Интенсивности по контурам

$$q_1 = \frac{M_1}{2F_1} = \frac{0,0627 \cdot 10^6}{2 \cdot 875} = 25,2 \text{ кг/см}$$

$$q_2 = \frac{M_2}{2F_2} = \frac{0,7756 \cdot 10^6}{2 \cdot 2600} = 14,8 \text{ кг/см}$$

$$q_3 = \frac{M_3}{2F_3} = \frac{0,262 \cdot 10^6}{2 \cdot 1000} = 123,5 \text{ кг/см}$$

### 8. Определение координаты $\bar{z}_{ж}$ .

Координата  $\bar{z}_{ж}$  может быть определена следующими двумя способами:

Способ 1-ый: Найти момент всех срезающих сил относительно любой точки и вычесть из него крутящий момент, а затем разность моментов разделить на  $Q_y = J_z$ , что и даст координату  $\bar{z}$  центра жесткости.

Способ 2-ой: Из интенсивности  $q_p$  срезающих сил вычесть в каждом контуре интенсивность от кручения, а затем определить момент внутренних срезающих сил точки моментов и разделить его на  $Q_y = J_z$ .

Проще, конечно, первый путь для определения координаты центра жесткости.



Применение второго пути неизбежно, когда определяют касательные напряжения от изгиба. За точку моментов принята точка  $O$  - центр тяжести сечения.

Плечи элементарных срезающих сил, т. е. срезающих сил в пределах участков  $dc$  ( $\Delta T = q_p \cdot dc$ ) определены непосредственно из рис. 106.

Вычисления момента  $M_0$  срезающих сил  $\Delta T$  относительно точки  $O$  сведено в ниже-приводимую таблицу.

Участки	$dc$	$R$	$q_p$	$R \cdot dc$	$q_p \cdot R \cdot dc$
1-2	24	21,6	-1,5	519	-778
2-3	24	20,7	-0,15	497	-74,5
3-4	24	20,75	4	498	1990
4-22	15	45	72	675	48500
4-3	25,5	21,5	795	574	45600
5-6	25,5	24	90	612	55000
6-7	14	90,125	97,5	1261	122500
7-8	23,25	11,5	172,5	2675	46000
8-9	23,25	10	224,5	2325	523000
9-22	23,25	40	264,5	405	107000
9-10	9	9,15	302	217	65500
10-11	23,25	8,75	314,5	20,55	64600
11-12	23,25	9,25	300,35	217	65200
12-13	23,25	10,25	258,85	206	53500
13-21	23,25	48,25	220,45	386	85500
13-14	8	12	195,95	174	34100
14-15	14,5	13,25	164,95	202	33300
15-16	14,5	30	128,45	435	55800
16-17	14,5	88,5	124,45	465	57800
17-18	5,25	58	114,45	870	99800



18-19	15	38,5	107,1	577,5	61900
19-20	15	25,75	99,45	386	38400
20-21	20	48,25	4,45	965	4300
20-1	24	22,7	0,1	545	54,5
					1194344

$$M_0 = \sum q_p R d c - M = 1194344 - 1,105 \cdot 10^6 = 89344 \text{ кг/см.}$$

$$Z_{ж} = \frac{M_0}{J_z} = \frac{89344}{35094,7} = 2,52 \text{ см.}$$

Расстояние от носка профиля до центра жесткости.

$$l = 88 + 2,52 = 90,52 \text{ см.}$$

В процентах от хорды

$$100 \frac{l}{t} = 100 \frac{90,52}{230} = 39,36 \%$$

Аналогичным образом определяется координата  $y_{ж}$ .

Вычисление этой координаты предлагаем читателю выполнить самостоятельно.



## О расчете по методу сил и по методу деформаций

Из теории кручения двухсвязной прямоугольной и трапециoidalной коробки вытекает, что распределение сдвигающих сил по стеноккам коробки зависит от длины этой коробки, т.к. коэффициент  $K$  (см формулу 147) и величина  $X$ , (см формулу 146) являются функциями отношений  $(\frac{b}{l})^2$  и  $(\frac{h}{l})^2$

Стало бы, располагаться этими величинами как с постоянными допустимо в небольших пределах. За таковые в расчете крыльев принимаются расстояния между нервюрами (а в расчете фюзеляжа расстояния между шпангоутами), что дает достаточную точность для практических целей.

Если длинную коробку рядом промежуточных диафрагм (дисков) (нервюр) разбить на цепь коробок меньших пролетов (схема такой коробки показана на рис. 107), то мы получим коробку, которую мы назовем многопролетной.

Пусть в плоскости диска  $A$  этой коробки приложен крутящий момент  $M$ . Требуется определить усилия в элементах этой коробки. Естественно, что в силу указанных выше свойств коэффициента  $K$  и величины  $X$ , изучению будет подлежать не вся коробка в целом, а каждая ее секция в отдельности. Рассмотрим первый пролет многопролетной коробки рис 107. Прежде всего мы должны себя спросить: можем ли мы основанно применить формулу 147 для определения распределения крутящего момента между горизонтальными и вертикальными стенокками? На этот вопрос мы вынуждены ответить отрицательно, т.к. формула 147 была выведена в предположении абсолютной неподатливости закрепления поясов на нервюре  $B$ .

Из этого предположения были определены перемещения  $b_l$  и  $b_r$ . В коробке же рис 107 пояса на нервюре  $B$  имеют податливое, упругое защемление, т.к. это защемление на растяжение-сжатие поясов осуществляется поясами следующих коробок 2, 3 и т.д. <sup>30)</sup> Так как работой нервюр из своей плоскости пренебрегаем



эти пояса упруги, податливы на растяжение сжатие, то закрепление поясов коробки 1 на нервюре Б является упругим, податливым. Стало быть, перемещение  $f$  точек а, б, в, г складываются из двух перемещений  $f_1$  и  $\Delta f$ .  $f_1$  - перемещение точки а (и аналогично точек б, в, г), вызываемое осевой силой в поясе 1, возникающей от кручения коробки 1, если предположить закрепление в точке а абсолютным.

Перемещение  $\Delta f$  есть поступательное движение пояса 1 за счет упругой податливости опоры а. Перемещение  $f_1$  и  $\Delta f$  можно иллюстрировать на примере бруса рис. 108, стержень 1 имеет в качестве опоры пружину а. Под действием осевой силы Р брус 1 сначала опустится, получит вертикальное поступательное перемещение, равное величине сжатия  $\Delta f$  силой Р пружины а. Когда эта пружина получит свою предельную деформацию  $\Delta f$  и дальше деформироваться не будет, брус 1 получит деформацию сжатия  $f_1$  силой Р. Роль пружины в точке а коробки 1 рис 107 играет пояс последующей коробки.

В статически-определимой коробке (напр. в треугольной коробке) податливость опоры не оказывает влияния на напряжения, в статически же неопределимой коробке податливость опоры играет существенную роль и распределения усилий. Это обстоятельство хорошо известно из расчета статически-неопределимых систем.

Для того, чтобы решить задачу о кручении коробки рис 107 с упруго податливыми закреплениями (на растяжение-сжатие) поясов на нервюрах необходимо знать либо величину  $\Delta f$  податливости смещения опор, либо силы всечения поясов в местах опирания их на нервюры, которые эту податливость вызывают. В многопролетной коробке, которая в расчете рассматривается как система упруго связанных коробок 1, 2 и т.д., неизвестными являются и смещения  $\Delta f$  и силы, которые возникают в поясах на нервюрах Б, В, Г и т.д. \*)

\*) Смещение  $\Delta f$  и соответствующие им осевые силы находятся в функциональной зависимости



Эти величины должны быть определены из расчета. Если в последнем в качестве искомого неизвестного принять смещение  $\Delta f$ , то расчет будет основан на методе деформаций; если за искомые неизвестные принять силы, вызывающие смещение  $\Delta f$ , то расчет на кручение многопролетной коробки будет произведен по методу сил.

В расчете на кручение многопролетной коробки прямоугольного или трапециoidalного одноконтурного (двухсвязного) сечения метод сил и метод деформаций имеют одинаковые основания к применению в смысле количества лишних неизвестных.

В расчете же многопролетной коробки с многоконтурным поперечным сечением, напр. коробки рис. 109, очевидное преимущество имеет метод деформаций. Так как в расчете по методу сил имеется столько лишних неизвестных в пределах одного поперечного сечения, сколько промежуточных контуров имеет это сечение. Так, например, в сечении I рис. 109 имеется три лишних неизвестных сил.

В расчете же по методу деформаций имеется одно неизвестное смещение  $\Delta f$  в пределах одного сечения, независимо от того на сколько контуров это сечение разбивается. Последнее вытекает из того, что в пределах каждого контура (прямоугольного или трапециoidalного) перемещения сечения поясов на промежуточных нервюрах могут быть выражены в функции одного перемещения  $\Delta f$ . В симметричной прямоугольной коробке все пояса имеют разные перемещения. Так как каждая пара соседних контуров связана общим двухпоясным ланжерном, то перемещения  $\Delta f$  этих контуров находятся во взаимной зависимости. Так, например, если все контуры представляют собой прямоугольные симметричные одинаковые сечения, то в пределах каждого контура пояса имеют одно и то же смещение  $\Delta f$ . Так как пояс 2 принадлежит к контуру 2 и контуру 3, то смещение  $\Delta f$  этого пояса является



также смещением всех поясов контура Э.

Таким образом, мы приходим к выводу, что на промежуточной нервюре все пояса, независимо от принадлежности их к контуру, имеют одно и то же смещение  $\Delta f$ .

Приняв за искомое неизвестное смещение  $\Delta f$  нам предстоит определить столько неизвестных, сколько пролетов имеет многопролетная коробка, независимо от степени связанности поперечного сечения. По методу сил, расчет усложняется тем, что количество лишних неизвестных и связанное с ним количество уравнений растет не только с увеличением пролетов коробки, но и с увеличением степени связанности поперечного сечения<sup>\*)</sup>. Еще больших упрощений можно достигнуть, если для расчета многопролетной, многоконтурной коробки применить смешанный метод, приняв за искомую деформацию угол закручивания поперечного сечения, который всегда один независимо от контурности сечения, а за искомые силы-моменты, воспринимаемые отдельными контурами смешанный метод нами и положен в основу излагаемого ниже расчета многопролетной, многоконтурной коробки.

Займемся определением тех усилий, которые возникают в элементах коробки, когда заделки поясов в местах опирания на промежуточные нервюры получают упругое обобщенное смещение  $\Delta f_{обоб}$ . Для конкретности рассуждения свои относим к отсекку I многопролетной коробки рис 107, искомые усилия мы определяем из следующих соображений: смещение  $\Delta f_{обоб}$  есть такой тип воздействия на коробку, когда момент в плоскости диска Я отсутствует, а стенки коробки все же получают перекашивание за счет деформации поясов.

Перекашивание (или сдвиг) стенок совершается срезающими силами, приложенными по контуру коробки в плоскости диска Я.

<sup>\*)</sup> См. метод расчета, предложенный инж. Киселевым. Т. В. 92 л. 1 1936 г.



Силы эти образуют два равных и прямо противоположных крутящих момента, иначе говоря эти силы образуют „самоуравновешивающийся“ момент. Смещению  $\Delta f_{\text{обоб}}$  соответствуют осевые силы в поясах. Пусть эти осевые силы при  $x=e$  равны  $N_e$ . Величина  $x$ , в вышеупомянутых моментах в плоскости диска найдется из условия, что при  $x=e$ ,  $N_x=N_e$ , т.е. из условий статики. Стало быть, коробка в рассматриваемом нами случае, когда заданы силы  $N_e$  является статически определенной. Согласно формулы МЭР (при  $m=0$  и  $x=e$ )  $N_e = \frac{x_1 e}{2bh}$  откуда, зная  $N_e$ , находим

$$x_1 = N_e \frac{2bh}{e} \quad (227)$$

*в балансе*  
Срезаемые силы в горизонтальных и в вертикальных стеночках коробки определяем соответственно по формулам:

$$Q_1 = Q_3 = \frac{x_1}{2h} = N_e \cdot \frac{b}{e} \quad (228)$$

$$Q_2 = Q_4 = \frac{x_1}{2b} = N_e \cdot \frac{h}{e} \quad (229)$$

Осевую силу в поясах на любом расстоянии  $x$  от свободного конца коробки определяем по формуле:

$$N_x = \frac{x_1 x}{2bh} = N_e \frac{x}{e} \quad (230)$$

Переходим к определению перемещения  $\Delta f_{\text{обоб}}$  по направлению сил  $N_e$ . Согласно Мору рассматриваем два состояния: первое состояние - когда в коробке приложены силы  $N_e$  рис. 109а и второе состояние, когда к коробке приложены силы  $N_e = 1$ .

Усилия в элементах коробки в первом состоянии определяются по формулам 228, 229, 230, а во втором состоянии по тем же формулам, если принять в них  $N_e = 1$ . Итак, согласно формулы Мора имеем:

$$\Delta f_{\text{обоб}} = \int_0^e N_e \cdot \frac{b}{e} \cdot \frac{b}{e} \cdot \frac{dx}{G_1 F_1} + \int_0^e N_e \frac{b}{e} \cdot \frac{b}{e} \cdot \frac{dx}{G_3 F_3} + \int_0^e N_e \frac{h}{e} \cdot \frac{h}{e} \cdot \frac{dx}{G_2 F_2} + \int_0^e N_e \frac{h}{e} \cdot \frac{h}{e} \cdot \frac{dx}{G_4 F_4} +$$

$$+ \int_0^e N_e \frac{x}{e} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{dx}{E_1 F_1} + \int_0^e N_e \frac{x}{e} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{dx}{E_2 F_2} + \int_0^e N_e \frac{x}{e} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{dx}{E_3 F_3} + \int_0^e N_e \frac{x}{e} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{dx}{E_4 F_4} \quad \text{или}$$

$$\Delta f_{\text{обоб}} = N_e \frac{b^2}{e^2} \frac{e}{G_1 F_1} m_a + N_e \frac{e}{3E_1 F_1} m_E$$



или

$$\Delta f_{обоб} = N_e \cdot \frac{e \cdot m_E}{3E_1 f_1} \left[ 1 + 3\alpha \frac{m_a}{m_E} \right] \quad (231)$$

Если задано  $\Delta f_{обоб}$ , то из формулы (231) находим

$$N_e = \frac{3E_1 f_1}{e} \cdot \frac{1}{m_E (1 + 3\alpha \frac{m_a}{m_E})} \cdot \Delta f_{обоб} \quad (232)$$

В частном случае, когда

$$E_1 f_1 = E_2 f_2 = E_3 f_3 = E_4 f_4 = E_n f_n \quad \text{и}$$

$$G_1 F_1 = G_3 F_3 = G_2 F_2, \quad G_2 F_2 = G_4 F_4 = G_B F_B, \quad \text{то}$$

$$N_e = \frac{6E_n f_n}{e} \cdot \frac{1}{2+3(\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Delta f_{обоб}}{4} \quad (233)^*$$

(П - пояс; г - горизонтальный; В - вертикальный).

Перемещение  $\Delta f_{обоб}$  есть перемещение по направлению четырех сил  $N_e$  одновременно.

В дальнейшем в расчете по методу деформаций, искомым является перемещение  $\Delta f_{обоб}$ . Определив его, находим  $N_e$  по формуле (232), а затем и остальные усилия по формулам (228), (229), (230), вызываемые смещением  $\Delta f_{обоб}$ . Полные усилия складываются из усилий, вызываемых смещением  $\Delta f_{обоб}$  и внешней нагрузкой.

Переходим к определению угла закручивания коровки, вызываемого смещением  $\Delta f_{обоб}$ .

Для этой цели согласно Мору рассматриваем два состояния: первое от воздействия  $\Delta f_{обоб}$  [в этом состоянии усилия определяются по формулам (228), (229), (230)], второе от воздействия момента  $M=1$  приложенного в плоскости диска А [в этом состоянии усилия определяются по формулам (150), (151), (152)]

$$\begin{aligned} \theta = & \int_0^e N_e \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{x}{4bh} \cdot \frac{2K-1}{E_1 f_1} \cdot dx + \int_0^e N_e \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{x}{4bh} \cdot \frac{2K-1}{E_2 f_2} \cdot dx + \int_0^e N_e \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{x}{4bh} \cdot \frac{2K-1}{E_3 f_3} \cdot 2x + \\ & + \int_0^e N_e \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{x}{4bh} \cdot \frac{2K-1}{E_4 f_4} \cdot dx + \int_0^e N_e \cdot \frac{b}{e} \cdot \frac{\kappa}{2h} \cdot \frac{dx}{G_1 F_1} + \int_0^e N_e \cdot \frac{b}{e} \cdot \frac{\kappa}{2h} \cdot \frac{dx}{G_3 F_3} - \left( \int_0^e N_e \cdot \frac{h}{e} \cdot \frac{1-K}{2b} \cdot \frac{dx}{G_2 F_2} + \right. \\ & \left. + \int_0^e N_e \cdot \frac{h}{e} \cdot \frac{1-K}{2b} \cdot \frac{dx}{G_4 F_4} \right) \quad \text{или} \end{aligned}$$

$$\theta = N_e \left( \frac{e^2}{12bh} \cdot \frac{2K-1}{E_1 f_1} \cdot m_E + \frac{b}{h} \cdot \frac{\kappa}{2} \cdot \frac{1}{G_1 F_1} \cdot D_a \right) \quad (234)$$

\* Полученная формула для рассматриваемого частного случая совпадает с соответствующей формулой в уже упоминавшейся работе инж. Белова УАГИ, Вып. №5



где 
$$D_G = \left(1 + \frac{G_1 F_1}{G_3 F_3}\right) - \frac{h^2}{b^2} \frac{1-\kappa}{\kappa} \left(\frac{G_1 F_1}{G_2 F_2} + \frac{G_1 F_1}{G_4 F_4}\right)$$

М<sub>е</sub> - определяется по формуле (B32), если известно перемещение Δ<sub>гобо</sub>

Полный угол закручивания коробки складывается из угла закручивания, называемого внешним крутящим моментом и угла закручивания, вызываемого смещением Δ<sub>гобо</sub>.

В частном случае, когда  $E_1 \rho_1 = E_2 \rho_2 = E_3 \rho_3 = E_4 \rho_4$  и

$G_1 F_1 = G_3 F_3, \quad G_2 F_2 = G_4 F_4, \quad m_E = 4$

$$D_G = 2 \left(1 - \frac{h^2}{b^2} \cdot \frac{1-\kappa}{\kappa} \cdot \frac{G_1 F_1}{G_2 F_2}\right)$$

Переходим к определению усилий в элементах трапециoidalной коробки и угла закручивания этой коробки от смещения Δ<sub>р</sub>.

Пусть точки 1, 2, 3, 4 коробки (рис. 109б) получили смещение по направлению соответствующих осевых сил, вызвав этим перекашивание стенок и, при наличии нербюр, кручение коробки. Поскольку внешнего крутящего момента не задано, то крутящие моменты, создаваемые срезающими силами в стеночках, взаимно уравновешиваются. Вследствие чего срезающие силы в стеночках коробки могут быть определены по формулам (169), (170) и (171), если умножить правые части этих формул на величину Q<sub>1</sub>, отличную от единицы

$$Q_3 = Q_1 \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \tag{235}$$

$$Q_2 = -Q_1 \cdot \frac{b+d}{b} \cdot \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \tag{236}$$

$$Q_4 = -Q_1 \cdot \frac{d}{b} \cdot \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \tag{237}$$

Осевые силы при x=e определяются по формулам (175), (176), если правые части этих формул умножить на величину Q<sub>1</sub>, отличную от единицы и положить x=e

$N_{1,e} = Q_1 \cdot \frac{\varphi e}{b} \tag{238}$

$N_{2,e} = N_{1,e} \tag{239}$

$N_{2,e} = Q_1 \cdot \frac{\varphi h}{b} \cdot \frac{e}{b} \tag{240}$

$N_{4,e} = N_{2,e} \tag{241}$

$N_{1,x} = N_{1,e} \cdot \frac{x}{e} \tag{242}$

$N_{3,x} = N_{1,x} \tag{243}$

$N_{2,x} = N_{2,e} \cdot \frac{x}{e} \tag{244}$

$N_{4,x} = N_{2,x} \tag{245}$



Если допустить, что  $N_{1,e}$  есть известная величина, то из формулы (238) находим:

$$Q_1 = \frac{N_{1,e} \cdot B}{\varphi \cdot e} \quad (246)$$

Остальные усилия определяются по формулам (235), (245), в которых  $Q_1$  подставляются согласно формулы (246)

$$N_{2,e} = \varphi \cdot \frac{H}{h} \cdot \frac{e}{B} \cdot N_{1,e} \cdot \frac{B}{\varphi e} \quad \text{или}$$

$$N_{2,e} = N_{1,e} \cdot \frac{H}{h},$$

что совпадает с формулой (168).

Для определения перемещения  $\Delta f$  по направлению силы  $N_{1,e}$  рассматриваем два состояния. В первом состоянии коробка нагружена силами  $N_{1,e}$ ,  $N_{2,e}$ ,  $N_{3,e}$ ,  $N_{4,e}$  и соответствующими срезающими силами, приложенными к граням коробки в сечении  $x=0$  (т.е. в плоскости диска  $A$ ). Во втором состоянии по характеру мы имеем то же нагружение, но с тем отличием, что  $N_{1,e} \neq 1$ . После сделанных замечаний, согласно формуле Мора находим:

$$\begin{aligned} \Delta f = & \int_0^e N_{1,e} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{dx}{E_1 I_1} + \int_0^e N_{1,e} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{dx}{E_2 I_2} + \int_0^e N_{1,e} \cdot \frac{H}{h} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{H}{h} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{dx}{E_2 I_2} + \\ & + \int_0^e N_{1,e} \cdot \frac{H}{h} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{H}{h} \cdot \frac{dx}{E_4 I_4} + \int_0^e N_{1,e} \cdot \frac{B}{\varphi e} \cdot \frac{B}{\varphi e} \cdot \frac{dx}{G_1 I_1} + \int_0^e N_{1,e} \left( \frac{B}{\varphi e} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right)^2 \frac{dx}{G_3 I_3} + \\ & + \int_0^e N_{1,e} \left[ \frac{B}{\varphi e} \cdot \frac{B+d}{B} \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \right]^2 \frac{dx}{G_2 I_2} + \int_0^e N_{1,e} \left[ \frac{B}{\varphi e} \cdot \frac{d}{B} \cdot \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \right]^2 \frac{dx}{G_4 I_4} \end{aligned}$$

$$\text{или } \Delta f_{\text{обоб}} = N_{1,e} \cdot \frac{e}{3E_1 I_1} \cdot K_E + N_{1,e} \left( \frac{B}{\varphi} \right)^2 \frac{1}{eG_1 I_1} \cdot K_G \quad \text{или}$$

$$\Delta f = N_{1,e} \frac{e}{3E_1 I_1} \cdot K_E \left[ 1 + 3 \left( \frac{B}{\varphi e} \right)^2 \frac{K_G}{K_E} \right]$$

Если задано  $\Delta f$ , то из формулы 247 находим:

$$N_{1,e} = \frac{3E_1 I_1}{e} \cdot \frac{1}{K_E \left[ 1 + 3 \left( \frac{B}{\varphi e} \right)^2 \frac{K_G}{K_E} \right]} \cdot \Delta f \quad (248)$$

После чего по формулам (246), (235), (245) определяются все остальные усилия в элементах коробки

Тем же путем, что и для прямоугольной коробки, находим угол закручивания от смещения  $\Delta f$  трапециoidalной коробки.



В первом состоянии коробка подвержена действию  $\Delta\varphi$ , во втором состоянии коробка подвержена кручению моментом  $M=1$  в плоскости  $A$ . Усилия в элементах коробки во втором состоянии определяются по формулам 182-191, если в них положить  $M=1$ .

$$\theta = \int_0^e N_{1,e} \frac{x}{e} \cdot \frac{\alpha_1 - 1}{b \cdot h} \cdot \frac{x}{E_1 F_1} \cdot dx + \int_0^e N_{1,e} \frac{x}{e} \cdot \frac{\alpha_1 - 1}{b \cdot h} \cdot \frac{x}{E_3 F_3} \cdot dx + \int_0^e N_{1,e} \frac{h}{h} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{\alpha_1 - 1}{b \cdot h} \cdot \frac{x}{E_2 F_2} \cdot dx +$$

$$+ \int_0^e N_{1,e} \frac{h}{h} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{\alpha_1 - 1}{b \cdot h} \cdot \frac{x}{E_4 F_4} \cdot dx + \int_0^e N_{1,e} \frac{b}{\psi e} \cdot \frac{\alpha_1}{\psi h} \cdot \frac{dx}{G_1 F_1} + \int_0^e N_{1,e} \frac{b}{\psi e} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cdot \frac{\alpha_1}{\psi h} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cdot \frac{dx}{G_3 F_3} -$$

$$- \left( \int_0^e N_{1,e} \frac{b}{\psi e} \cdot \frac{b+d}{b} \cdot \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \cdot \frac{\alpha_2}{b} \cdot \frac{dx}{G_2 F_2} + \int_0^e N_{1,e} \frac{b}{\psi e} \cdot \frac{d}{b} \cdot \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \cdot \frac{\alpha_4}{b} \cdot \frac{dx}{G_4 F_4} \right)$$

или 
$$\theta = N_{1,e} \left( \frac{e^2}{b \cdot h} \cdot \frac{\alpha_1 - 1}{3 E_1 F_1} \cdot K_E \cdot \frac{b}{h} \cdot \frac{\alpha_1}{\psi^2 G_1 F_1} \cdot t_\sigma \right) \tag{249}$$

где: 
$$t_\sigma = 1 + \left( \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right)^2 \frac{G_1 F_1}{G_3 F_3} - \left[ \frac{(b+d) \cdot h}{b^2} \cdot \psi \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \frac{G_1 F_1}{G_2 F_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{d \cdot h}{b^2} \cdot \psi \frac{\alpha_4}{\alpha_1} \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \cdot \frac{G_1 F_1}{G_4 F_4} \right]$$

$N_{1,e}$  - определяется по формуле (248), если известно  $\Delta\varphi$ .

### §23. Расчет на кручение вблизи заделки многопролетной коробки по методу деформаций.

С тем, чтобы усвоить применение этого метода, начнем с расчета многопролетной коробки с прямоугольным (одноконтурным) сечением и перейдем затем к коробкам с постепенно усложняющимся профилем поперечного сечения. В многопролетной коробке рис. 107 за искомое неизвестное принимаем обобщенные перемещения по направлению осевых сил  $N_e$  в сечениях  $B, B, \dots$ . Впоследствии эти сечения названы 1, 2, 3 и 4.

Указанные перемещения соответственно обозначаем через  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  и определяем из канонических уравнений метода деформаций:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 \tau_{11} + Z_2 \tau_{12} + \dots + Z_n \tau_{1n} + \tau_{1p} &= 0 \\ Z_1 \tau_{21} + Z_2 \tau_{22} + \dots + Z_n \tau_{2n} + \tau_{2p} &= 0 \\ Z_1 \tau_{n1} + Z_2 \tau_{n2} + \dots + Z_n \tau_{nn} + \tau_{np} &= 0 \end{aligned} \right\} (A)$$







в поясах от кручения прямоугольной коробки) и поэтому они представляют собой одно обобщенное неизвестное  $P_1$ , которое мы определяем из канонического уравнения метода сил

$$P_1 \delta_{11}^* + \Delta_{1P} = 0 \quad (251)$$

Основная система, представленная на рис. 110б, получена из заданной удалением закреплений 1, 2, 3, 4 и с заменой их воздействия на пояса силами  $P_1$ .

Определим осевые силы в поясах и сдвигающие силы в стеночках в состоянии, когда  $P_1 = 1$ . В этом состоянии внешний крутящий момент отсутствует. Стало быть, сдвигающие силы в горизонтальных и в вертикальных стеночках образуют два равных и прямо противоположных скручивающих момента.

Эти моменты принимаем за обобщенное неизвестное  $X_1$ , которое определяем из канонического уравнения метода сил:

$$X_1 \delta_{11}^* + \Delta_{1P} = 0 \quad (143)$$

Перемещение  $\delta_{11}^*$  не зависит от внешней нагрузки и остается таким же, как и в уравнении:

$$\delta_{11}^* = \frac{e^3}{12H^2B^2} \cdot \frac{m_E}{E_1 f_1} \left( 1 + 3\alpha \frac{m_G}{m_E} \right) \quad (251)$$

Перемещение  $\Delta_{1P}$  определяем по формуле Мора (имея ввиду, что в основной системе рис. 110 сила  $P_1 = 1$  вызывает только осевую силу постоянную по длине пояса и равную  $P_1 = 1$ ).

$$\Delta_{1P} = - \left( \int_0^e \frac{x}{2bh} \cdot \frac{dx}{E_1 f_1} + \int_0^e \frac{x}{2bh} \cdot \frac{dx}{E_2 f_2} + \int_0^e \frac{x}{2bh} \cdot \frac{dx}{E_3 f_3} + \int_0^e \frac{x}{2bh} \cdot \frac{dx}{E_4 f_4} \right)$$

или

$$\Delta_{1P} = - \frac{e^2}{4bh} \cdot \frac{1}{E_1 f_1} \cdot m_E$$

Подставив значения  $\delta_{11}^*$  и  $\Delta_{1P}$  в уравнение (143) находим:

$$X_1 = 3 \frac{bh}{e} \cdot \frac{1}{1 + 3\alpha \frac{m_G}{m_E}} \quad (252)$$

В частном случае, когда  $E_1 f_1 = E_2 f_2 = E_3 f_3 = E_4 f_4 = E_n f_n$ ,

$$G_1 F_1 = G_3 F_3 = G_2 F_2,$$

$$G_2 F_2 = G_4 F_4 = G_8 F_8, \text{ то}$$

$$m_E = 4;$$

$$m_G = 2 \left( 1 + \frac{h^2}{8^2} \cdot \frac{G_2 F_2}{G_8 F_8} \right)$$



$$\alpha m_G = 2(\alpha + \beta); \quad 1 + 3\alpha \frac{m_G}{m_E} = 1 + \frac{3}{2}(\alpha + \beta)$$

Вследствие чего в рассматриваемом частном случае

$$x_1 = 3 \frac{b h}{e} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{2}(\alpha + \beta)}$$

или

$$x_1 = \frac{6 b h}{e} \cdot \frac{1}{2 + 3(\alpha + \beta)} \quad (253)$$

когда  $P_1 \neq 1$ , то  $x_1 = P_1 \cdot \frac{6 b h}{e} \cdot \frac{1}{2 + 3(\alpha + \beta)} \quad (254)^*$

Таким образом в состоянии, когда  $P_1 \neq 1$  усилия в элементах коробки выражаются следующим образом:

Осевые силы в поясах.

$$N_x = P_1 - \frac{Y_1 x}{2 b h} = P_1 - \frac{3}{2} \cdot P_1 \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{1}{1 + 3\alpha \frac{m_G}{m_E}} \quad \text{или}$$

$$N_x = P_1 \left( 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{1}{1 + 3\alpha \frac{m_G}{m_E}} \right) \quad (255)$$

Когда  $P_1 = 1$

$$N_x = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{1}{1 + 3\alpha \frac{m_G}{m_E}} \quad (256)$$

при  $x = e$

$$N_e = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 + 3\alpha \frac{m_G}{m_E}} \quad (257)$$

Срезающие силы в стеночках

$$Q_1 = Q_3 = \frac{x_1}{2h} = P_1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{b}{e} \cdot \frac{1}{1 + 3\alpha \frac{m_G}{m_E}} \quad (258)$$

$$Q_2 = Q_4 = \frac{x_1}{2b} = P_1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{e} \cdot \frac{1}{1 + 3\alpha \frac{m_G}{m_E}} \quad (259)$$

Когда  $P_1 = 1$

$$Q_1 = Q_3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{b}{e} \cdot \frac{1}{1 + 3\alpha \frac{m_G}{m_E}} \quad (260)$$

$$Q_2 = Q_4 = \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{e} \cdot \frac{1}{1 + 3\alpha \frac{m_G}{m_E}} \quad (261)$$

Полученные формулы (252) имели целью подготовить формулы для определения перемещений  $\delta_{II}$  и  $\Delta_{ip}$ , входящих в уравнение (251).

Согласно формулы Мора:

$$\begin{aligned} \delta_{II} = & \int_0^e \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 + 3\alpha \frac{m_G}{m_E}} \cdot \frac{x}{e}\right)^2 \frac{dx}{E_1 F_1} + \int_0^e \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 + 3\alpha \frac{m_G}{m_E}} \cdot \frac{x}{e}\right)^2 \frac{dx}{E_2 F_2} + \int_0^e \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 + 3\alpha \frac{m_G}{m_E}} \cdot \frac{x}{e}\right)^2 \frac{dx}{E_3 F_3} + \\ & + \int_0^e \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 + 3\alpha \frac{m_G}{m_E}} \cdot \frac{e}{x}\right)^2 \frac{dx}{E_4 F_4} + \frac{g}{4} \cdot \frac{b^2}{e G_1 F_1} \cdot \frac{1}{(1 + 3\alpha \frac{m_G}{m_E})} + \frac{g}{4} \cdot \frac{b^2}{e G_3 F_3} \cdot \frac{1}{(1 + 3\alpha \frac{m_G}{m_E})^2} + \frac{g}{4} \cdot \frac{h^2}{e G_2 F_2} \cdot \frac{1}{(1 + 3\alpha \frac{m_G}{m_E})^2} + \\ & + \frac{g}{4} \cdot \frac{h^2}{e G_4 F_4} \cdot \frac{1}{(1 + 3\alpha \frac{m_G}{m_E})^2} \end{aligned}$$



$$\text{или } \delta_{11} = \frac{e}{E_1 f_1} \cdot m_E - \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_d}{m_E}} \cdot \frac{e}{2E_1 f_1} \cdot m_E + \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_d}{m_E}}\right)^2 \frac{e}{3E_1 f_1} \cdot m_E +$$

$$+ \frac{9}{4} \frac{B^2}{EGF_1} \cdot \frac{1}{(1+3\alpha \frac{m_d}{m_E})^2} \cdot m_d \text{ или}$$

$$\delta_{11} = \frac{9}{4} \cdot \frac{e}{E_1 f_1} \cdot \frac{m_E}{(1+3\alpha \frac{m_d}{m_E})^2} \left[ 1 - \frac{2}{3} \left(1+3\alpha \frac{m_d}{m_E}\right) + \frac{4}{9} \left(1+3\alpha \frac{m_d}{m_E}\right)^2 + \alpha \frac{m_d}{m_E} \right] \quad (262)$$

$$\Delta_{1P} = - \left\{ \int_0^e \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_d}{m_E}} \cdot \frac{x}{e}\right) \cdot \frac{M(2K-1) \cdot x}{4bh} \cdot \frac{dx}{E_1 f_1^2} + \int_0^e \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_d}{m_E}} \cdot \frac{x}{e}\right) \cdot \frac{M(2K-1)x}{4bh} \cdot \frac{dx}{E_3 f_3} + \right.$$

$$+ \int_0^e \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_d}{m_E}} \cdot \frac{x}{e}\right) \cdot \frac{M(2K-1)x}{4bh} \cdot \frac{dx}{E_2 f_2^2} + \int_0^e \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_d}{m_E}} \cdot \frac{x}{e}\right) \cdot \frac{M(2K-1)x}{4bh} \cdot \frac{dx}{E_4 f_4} +$$

$$+ \int_0^e \frac{2}{3} \cdot \frac{B}{e} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_d}{m_E}} \cdot \frac{KM}{2h} + \frac{dx}{GF_1} + \int_0^e \frac{3B}{2e} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_d}{m_E}} \cdot \frac{KM}{2h} \cdot \frac{dx}{GF_3} -$$

$$\left. - \left[ \int_0^{3h} \frac{1}{2e} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_d}{m_E}} \cdot \frac{(1-K) \cdot M}{2b} \cdot \frac{dx}{E_2 f_2^2} + \int_0^{3h} \frac{1}{2e} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_d}{m_E}} \cdot \frac{(1-K) \cdot M}{2b} \cdot \frac{dx}{E_4 f_4^2} \right] \right\} \text{ или}$$

$$\Delta_{1P} = \left[ \frac{M(2K-1) \cdot e^2}{4bh} \cdot \frac{1}{2E_1 f_1} \cdot m_E - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_d}{m_E}} \cdot \frac{M(2K-1) \cdot e^2}{4bh} \cdot \frac{1}{3E_1 f_1} \cdot m_E + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2} \cdot \frac{B}{e} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_d}{m_E}} \cdot \frac{KM}{2h} \cdot \frac{e}{GF_1} \cdot D_0 \right] \text{ или}$$

$$\Delta_{1P} = - \frac{M(2K-1)e^2}{8bhE_1 f_1} \cdot m_E \left( 1 - \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_d}{m_E}} + 6 \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_d}{m_E}} \cdot \frac{K}{1-K} \cdot \frac{B^2}{e^2} \cdot \frac{E_1 f_1}{GF_1} \cdot \frac{D_0}{m_E} \right) \text{ или}$$

$$\Delta_{1P} = - \frac{M(2K-1) \cdot e^2}{8bhE_1 f_1} \cdot m_E \left[ 1 + \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_d}{m_E}} \left( 6 \frac{K}{1-K} \cdot \alpha \frac{D_0}{m_E} - 1 \right) \right]$$

Подставив значения  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1P}$  в уравнение (251) находим:

$$P_{1,M} = \frac{1}{18} \cdot \frac{M(2K-1) \cdot e}{bh} \cdot (1+3\alpha \frac{m_d}{m_E})^2 \cdot \frac{1 + \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_d}{m_E}} - \left( 6 \frac{K}{1-K} \cdot \alpha \cdot \frac{D_0}{m_E} - 1 \right)}{1 - \frac{2}{3} \left(1+3\alpha \frac{m_d}{m_E}\right) + \frac{4}{9} \left(1+3\alpha \frac{m_d}{m_E}\right)^2 + \alpha \frac{m_d}{m_E}} \quad (263)$$

Окончательные осевые силы в поясах и перерезывающие силы в стеночках коробки рис. 110, представляются в виде:

$$N_x = \frac{M(2K-1) \cdot x}{4bh} - P_{1,M} \left( 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_d}{m_E}} \right) \quad (264)$$

при  $x=e$

$$N_{e,M} = \frac{M(2K-1) \cdot e}{4bh} - P_{1,M} \left( 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_d}{m_E}} \right) \quad (265)$$



$$Q_1 = Q_3 = \frac{\kappa M}{2h} - P_{1, M} \frac{3B}{2e} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_g}{m_E}} \quad (266)$$

$$Q_2 = Q_4 = \frac{(1-\kappa)M}{2B} + P_{1, M} \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{e} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_g}{m_E}} \quad (267)$$

б) Определение усилий в стеночках и в поясах коробки рис. 110а, когда закрепление поясов на нервюре в испытании обобщенное смещение

$\Delta_{f_{обов}}$ .

Так же, как и предыдущая задача, данная задача внешне статически неопределима. Место внешнего воздействия  $M$  в предыдущей задаче занимает обобщенное смещение  $\Delta_{f_{обов}}$ . Стало быть перемещение  $\delta_{11}$  остается без изменения и определяется по формуле (262).

Перемещение  $\Delta_{1P}$  заменяется перемещением  $\Delta_{1f_{обов}}$ , вызываемым воздействием  $\Delta_{f_{обов}}$  по направлению сил  $P_i$ . Для определения перемещения  $\Delta_{1f_{обов}}$  рассматриваем, согласно Мору, два состояния: в первом состоянии основная система коробки (см. рис. 110б) загружена силами  $P_i = 1$ ; во втором состоянии основная система коробки подвержена воздействию  $\Delta_{f_{обов}}$ . Усилия во втором состоянии определяются по формулам (228)-(232). Усилия в первом состоянии определяются по формулам (255)-(261).

Согласно формуле Мора:

$$\begin{aligned} \Delta_{1f_{обов}} = & - \left\{ \int_0^e \left( 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_g}{m_E}} \cdot \frac{x}{e} \right) N_e \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{dx}{E_1 f_1} + \right. \\ & + \int_0^e \left( 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_g}{m_E}} \cdot \frac{x}{e} \right) N_e \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{dx}{E_3 f_3} + \int_0^e \left( 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_g}{m_E}} \cdot \frac{x}{e} \right) N_e \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{dx}{E_2 f_2} + \\ & + \int_0^e \left( 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_g}{m_E}} \cdot \frac{x}{e} \right) N_e \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{dx}{E_4 f_4} + \int_0^e \frac{3}{2} \cdot \frac{B}{e} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_g}{m_E}} \cdot N_e \cdot \frac{B}{e} \cdot \frac{dx}{G_1 E_1} - \\ & \left. + \int_0^e \frac{3}{2} \cdot \frac{B}{e} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_g}{m_E}} \cdot N_e \cdot \frac{B}{e} \cdot \frac{dx}{G_3 F_3} + \int_0^e \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{e} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_g}{m_E}} \cdot N_e \cdot \frac{h}{e} \cdot \frac{dx}{G_2 F_2} + \int_0^e \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_g}{m_E}} \cdot N_e \cdot \frac{h}{e} \cdot \frac{dx}{G_4 F_4} \right\} \end{aligned}$$



200

или 
$$\Delta_{\text{фобов}} = - \left[ N_e \frac{e}{2E_{1f_1}} \left( 1 - \frac{1}{1+3\alpha} \frac{m_G}{m_E} \right) m_E + \frac{3}{2} N_e \frac{b^2}{e} \cdot \frac{1}{1+3\alpha} \frac{m_G}{m_E} \cdot \frac{1}{G_1 F_1} m_G \right]$$

или

$$\Delta_{\text{фобов}} = - N_e \frac{e}{E_{1f_1}} \cdot \frac{3\alpha \frac{m_G}{m_E}}{1+3\alpha \frac{m_G}{m_E}} \cdot m_E \quad (268)$$

Подставив значения  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{\text{фобов}}$  в уравнение (251) находим:

$$P_{1,f} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3\alpha \frac{m_G}{m_E} \left( 1 + 3\alpha \frac{m_G}{m_E} \right)}{1 - \frac{2}{3} \left( 1 + 3\alpha \frac{m_G}{m_E} \right) + \frac{4}{9} \left( 1 + 3\alpha \frac{m_G}{m_E} \right)^2 + \alpha \frac{m_G}{m_E}} \quad (269)$$

Окончательные осевые силы в полках и перерезывающие силы в стеночках коробки рис. 110а, испытавшей воздействие  $\Delta_{\text{фобов}}$  представляются в виде:

$$N_x = N_e \cdot \frac{x}{e} - P_{1,f} \left( 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_G}{m_E}} \right) \quad (270)$$

$$N_{e,f} = N_e - P_{1,f} \left( 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_G}{m_E}} \right) \quad (271)$$

$$Q_1 = Q_3 = N_e \cdot \frac{b}{e} - P_{1,f} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{b}{e} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_G}{m_E}} \quad (272)$$

$$Q_2 = Q_4 = N_e \frac{h}{e} - P_{1,f} \frac{3h}{2e} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_G}{m_E}} \quad (273)$$

Методика решения задач, рассмотренных в пунктах а и б для коробки прямоугольного сечения, распространяется и на коробку трапециoidalного сечения.

В состоянии, когда  $Q_1 = 1$

$$\begin{aligned} \delta_{11} = & \int_0^e \frac{1 \cdot dx}{G_1 F_1} + \int_0^e \left( \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right)^2 \cdot \frac{dx}{G_3 F_3} + \int_0^e \left[ \frac{b+d}{d} \cos \beta (tg \beta + tg \alpha) \right]^2 \frac{dx}{G_2 F_2} + \\ & + \int_0^e \left[ \frac{d}{b} \cos \beta (tg \beta + tg \alpha) \right]^2 \frac{dx}{G_4 F_4} + \int_0^e \left( \frac{\psi b}{b} \cdot \frac{x}{e} \right)^2 \frac{dx}{E_{1f_1}} + \int_0^e \left( \frac{\psi e}{b} \cdot \frac{x}{e} \right)^2 \frac{dx}{E_3 f_3} + \\ & + \int_0^e \left( \psi \frac{h}{h} \frac{e}{b} \frac{x}{e} \right)^2 \frac{dx}{E_2 f_2} + \int_0^e \left( \psi \frac{h}{h} \frac{e}{b} \frac{x}{e} \right)^2 \frac{dx}{E_4 f_4} \quad \text{или} \end{aligned}$$



$$\sigma_{II} = \left(\frac{\psi e}{b}\right)^2 \cdot \frac{e}{3E_1 f_1} \cdot K_E + \frac{e}{G_1 F_1} \cdot t_G' \quad \text{или}$$

$$\sigma_{II} = \left(\frac{\psi e}{b}\right)^2 \cdot \frac{e}{3E_1 f_1} K_E \left[ 1 + 3 \left(\frac{b}{\psi e}\right)^2 \frac{t_G'}{K_E} \cdot \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1} \right] \quad (274)$$

где

$$t_G' = 1 + \left(\frac{\cos \beta}{\cos \alpha}\right)^2 \frac{G_1 F_1}{G_3 F_3} + \left[ \frac{b+d}{b} \cdot \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \right]^2 \frac{G_1 F_1}{G_2 F_2} + \\ + \left[ \frac{d}{b} \cdot \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \right]^2 \frac{G_1 F_1}{G_4 F_4}$$

Силы, которые возникают в защемлениях поясов на нервюре  $\Lambda$  от внешнего момента в плоскости этой нервюры, находятся в следующей зависимости от силы  $P_1$

в точке 1:  $P_1$

в точке 3:  $P_3 = P_1$

в точке 2:  $P_2 = P_1 \cdot \frac{H}{h}$

в точке 4:  $P_4 = P_1 \cdot \frac{H}{h}$

В состоянии, когда  $P_1 = 1$  в основной системе имеются лишь осевые силы в поясах постоянные по длине поясов

в поясе 1:  $P_1 = 1$

в поясе 3:  $P_3 = 1$

в поясе 2:  $P_2 = \frac{H}{h}$

в поясе 4:  $P_4 = \frac{H}{h}$

В состоянии, когда  $Q = 1$  осевые силы в поясах изменяются по линейному закону и выражаются следующим образом

в поясе 1:  $N_{1,x} = \frac{\psi e}{b} \cdot \frac{x}{e}$

в поясе 3:  $N_{3,x} = N_{1,x} = \frac{\psi e}{b} \cdot \frac{x}{e}$

в поясе 2:  $N_{2,x} = N_{1,x} \cdot \frac{H}{h} = \psi \frac{H}{h} \frac{e}{b} \cdot \frac{x}{e}$

в поясе 4:  $N_{4,x} = N_{2,x} = \psi \frac{H}{h} \frac{e}{b} \cdot \frac{x}{e}$



202

$$\Delta_{1p} = -P_1 \left[ \int_0^e \frac{1 \cdot \varphi e}{B} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{dx}{E_1 f_1} + \int_0^e \frac{\varphi e}{B} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{dx}{E_2 f_2} + \int_0^e \frac{(\frac{H}{h})^2 \cdot e}{B} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{dx}{E_3 f_3} + \right. \\ \left. + \int_0^e \frac{(\frac{H}{h})^2 \cdot e}{B} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{dx}{E_4 f_4} \right] \text{ или } \Delta_{1p} = -P_1 \frac{\varphi e}{B} \cdot \frac{e}{2E_1 f_1} \cdot K_E$$

Подставив значения  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1p}$  в уравнение (143), находим:

$$x_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{3}{2} P_1 \frac{B}{\varphi e} \cdot \frac{1}{1 + 3 \left( \frac{B}{\varphi e} \right)^2 \frac{t'_g}{K_E} \cdot \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1}}$$

Усилия в элементах коробки трапециoidalного сечения от воздействия на нее сил  $P_1, P_2, P_3, P_4$  представляются в следующем виде:

Осевые силы в поясах:

$$N_{1,x} = P_1 - Q_1 \cdot \frac{\varphi e}{B} \cdot \frac{x}{e} = P_1 \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{1 + 3 \left( \frac{B}{\varphi e} \right)^2 \frac{t'_g}{K_E} \cdot \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1}} \cdot \frac{x}{e} \right] \quad (275)$$

при  $x=e$

$$N_{1,e} = P_1 \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{1 + 3 \left( \frac{B}{\varphi e} \right)^2 \frac{t'_g}{K_E} \cdot \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1}} \right] \quad (276)$$

$$N_{3,x} = N_{1,x} \quad (277)$$

$$N_{2,x} = N_{1,x} \cdot \frac{H}{h} \quad (278)$$

$$N_{4,x} = N_{2,x} \quad (279)$$

Срезающие силы в стеночках:

$$Q_1 = \frac{3}{2} P_1 \frac{B}{\varphi e} \cdot \frac{1}{1 + 3 \left( \frac{B}{\varphi e} \right)^2 \frac{t'_g}{K_E} \cdot \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1}} \quad (280)$$

$$Q_3 = Q_1 \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \quad (281)$$

$$Q_2 = -Q_1 \cdot \frac{B+d}{B} \cdot \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \quad (282)$$

$$Q_4 = -Q_1 \cdot \frac{d}{B} \cdot \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \quad (283)$$

Переходим к определению силы  $P_1$  коробки трапециoidalного сечения и сил  $P_2, P_3, P_4$  являющихся функцией силы  $P_1$ .



возникающей в поясе 1 в закреплении на нервюре  $\lambda$  от момента  $B$  в плоскости этой нервюры.

Сила  $P$  определяется из уравнения (251)

Согласно Мору

$$\begin{aligned} \delta_{11} = & \int_0^e \left[ 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 + 3 \left( \frac{B}{\psi e} \right)^2 \frac{t'_G}{K_E} \frac{E, f_1}{G, F_1}} \cdot \frac{x}{e} \right]^2 \frac{dx}{E, f_1} + \\ & + \int_0^e \left[ 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 + 3 \left( \frac{B}{\psi e} \right)^2 \frac{t'_G}{K_E} \frac{E, f_1}{G, F_1}} \cdot \frac{x}{e} \right]^2 \frac{dx}{E_3 f_3} + \left( \frac{H}{h} \right)^2 \int_0^e \left[ 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 + 3 \left( \frac{B}{\psi e} \right)^2 \frac{t'_G}{K_E} \frac{E, f_1}{G, F_1}} \cdot \frac{x}{e} \right]^2 \cdot \\ & \cdot \frac{dx}{E_2 f_2} + \left( \frac{H}{h} \right)^2 \int_0^e \left[ 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 + 3 \left( \frac{B}{\psi e} \right)^2 \frac{t'_G}{K_E} \frac{E, f_1}{G, F_1}} \cdot \frac{x}{e} \right]^2 \cdot \frac{dx}{E_4 f_4} + \left[ \frac{3}{2} \cdot \frac{B}{\psi e} \cdot \frac{1}{1 + 3 \left( \frac{B}{\psi e} \right)^2 \frac{t'_G}{K_E} \frac{E, f_1}{G, F_1}} \right]^2 \cdot \\ & \cdot \frac{e}{G, F_1} + \left( \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right)^2 \left[ \frac{3}{2} \cdot \frac{B}{\psi e} \cdot \frac{1}{1 + 3 \left( \frac{B}{\psi e} \right)^2 \frac{t'_G}{K_E} \frac{E, f_1}{G, F_1}} \right]^2 \cdot \frac{e}{G_3 F_3} + \\ & + \left[ \frac{B+d}{B} \cdot \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \right]^2 \left[ \frac{3}{2} \cdot \frac{B}{\psi e} \cdot \frac{1}{1 + 3 \left( \frac{B}{\psi e} \right)^2 \frac{t'_G}{K_E} \frac{E, f_1}{G, F_1}} \right]^2 \cdot \frac{e}{G_2 F_2} + \\ & + \left[ \frac{d}{B} \cdot \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \right]^2 \left[ \frac{3}{2} \cdot \frac{B}{\psi e} \cdot \frac{1}{1 + 3 \left( \frac{B}{\psi e} \right)^2 \frac{t'_G}{K_E} \frac{E, f_1}{G, F_1}} \right]^2 \cdot \frac{e}{G_4 F_4} \end{aligned}$$

Вводим обозначения:

$$\begin{aligned} A = & 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 + 3 \left( \frac{B}{\psi e} \right)^2 \frac{t'_G}{K_E} \frac{E, f_1}{G, F_1}} \\ B = & 1 + \frac{\left[ \frac{3}{2} \cdot \frac{B}{\psi e} \cdot \frac{1}{1 + 3 \left( \frac{B}{\psi e} \right)^2 \frac{t'_G}{K_E} \frac{E, f_1}{G, F_1}} \right]^2}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 + 3 \left( \frac{B}{\psi e} \right)^2 \frac{t'_G}{K_E} \frac{E, f_1}{G, F_1}}} \cdot \frac{E, f_1}{G, F_1} \cdot \frac{t'_G}{K_E} \end{aligned}$$

Тогда

$$\delta_{11} = A \frac{e}{E, f_1} \cdot K_E \cdot B \quad (284)$$

Согласно Мору

$$\Delta_{1P} = - \left[ \left( 1 - \frac{1}{1 + 3 \left( \frac{B}{\psi e} \right)^2 \frac{t'_G}{K_E} \frac{E, f_1}{G, F_1}} \right) \frac{e^2}{2 E, f_1} \cdot \frac{M(a, -1)}{B H} \cdot K_E + \frac{3}{2} \cdot \frac{B}{H \psi^2} \cdot \frac{1}{1 + 3 \left( \frac{B}{\psi e} \right)^2 \frac{t'_G}{K_E} \frac{E, f_1}{G, F_1}} \cdot \frac{a, M}{G, F_1} \cdot t'_G \right]$$



Вводим обозначения:

$$A_1 = 1 - \frac{1}{1 + 3 \left(\frac{B}{\psi e}\right)^2 \frac{t'_G}{K_E} \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1}}$$

$$B_1 = 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{B}{H \psi^2} \cdot \frac{1}{1 + 3 \left(\frac{B}{\psi e}\right)^2 \frac{t'_G}{K_E} \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1}} \cdot \frac{1}{1 + 3 \left(\frac{B}{\psi e}\right)^2 \frac{t'_G}{K_E} \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1}} \cdot \frac{a_1}{a_1 - 1} \cdot \frac{t_G}{K_E} \cdot \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1}$$

Тогда

$$\Delta_{1p} = -A_1 \cdot \frac{e^2}{2E_1 f_1} \cdot \frac{M(a_1 - 1)}{B H} \cdot K_E \cdot B_1$$

Подставив значения  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1p}$  в уравнение (251), находим:

$$P_{1,m} = \frac{A_1 B_1}{A_1 B} \cdot \frac{M e (a_1)}{2 B H} \tag{285}$$

Окончательные усилия в элементах коробки трапецидального сечения, пояса которой имеют защемления на нервюре А и на нервюре В от крутящего момента М в плоскости нервюры А выражаются следующим образом:

Осевые силы в поясах:

$$N_{1,x} = \frac{M(a_1 - 1) \cdot x}{B H} - P_{1,m} \left[ 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 + 3 \left(\frac{B}{\psi e}\right)^2 \frac{t'_G}{K_E} \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1}} \cdot \frac{x}{e} \right]$$

или

$$N_{1,x} = \frac{(a_1 - 1) \cdot M \cdot e}{B H} \cdot q_x \tag{286}$$

где:

$$q_x = \frac{x}{e} - \frac{A_1 B_1}{2 A B} \left[ 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 + 3 \left(\frac{B}{\psi e}\right)^2 \frac{t'_G}{K_E} \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1}} \cdot \frac{x}{e} \right] \tag{287}$$

при  $x = e$

$$q_e = 1 - \frac{A_1 B_1}{2 A B} \left[ 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 + 3 \left(\frac{B}{\psi e}\right)^2 \frac{t'_G}{K_E} \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1}} \right] \tag{288}$$

$$N_{3,x} = N_{1,x} \tag{289}$$

$$N_{2,x} = N_{1,x} \cdot \frac{H}{h} \tag{290}$$

$$N_{4,x} = N_{2,x} \tag{291}$$



Срезающие силы в стеночках:

$$Q_1 = \frac{\sigma_1 \cdot M}{\psi H} - \rho_1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{B}{\psi e} \cdot \frac{1}{1 + 3 \left( \frac{B}{\psi e} \right)^2 \frac{t'_g}{K_E} \cdot \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1}} \quad \text{или}$$

$$Q_1 = \frac{\sigma_1 \cdot M}{B H} \cdot q_1 \quad (292)$$

где:

$$q_1 = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{\sigma_1 - 1}{\sigma_1} \cdot \frac{A_1 B_1}{AB} \cdot \frac{1}{1 + 3 \left( \frac{B}{\psi e} \right)^2 \frac{t'_g}{K_E} \cdot \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1}} \quad (293)$$

$$Q_3 = Q_1 \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \quad (294)$$

$$Q_2 = \frac{\sigma_2 M}{B} - \rho_1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{B}{\psi e} \cdot \frac{1}{1 + 3 \left( \frac{B}{\psi e} \right)^2 \frac{t'_g}{K_E} \cdot \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1}} \cdot \frac{B+d}{B} \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha)$$

или

$$Q_2 = \frac{\sigma_2 \cdot M}{B} \cdot q_2 \quad (295)$$

где

$$q_2 = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{B+d}{\psi H} \cdot \frac{\sigma_2 - 1}{\sigma_2} \cdot \frac{A_1 B_1}{AB} \cdot \frac{1}{1 + 3 \left( \frac{B}{\psi e} \right)^2 \frac{t'_g}{K_E} \cdot \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1}} \cdot \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha)$$

$$Q_4 = \frac{\sigma_4 M}{B} \cdot q_4 \quad (296)$$

$$q_4 = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{d}{\psi H} \cdot \frac{\sigma_4 - 1}{\sigma_4} \cdot \frac{A_1 B_1}{AB} \cdot \frac{1}{1 + 3 \left( \frac{B}{\psi e} \right)^2 \frac{t'_g}{K_E} \cdot \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1}} \cdot \cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \quad *)$$

Усилия в элементах коробки, порса которой имеют за-  
щемление на нервюре А и на нервюре В от смещения  $\Delta r^{**}$   
определяются также в результате решения уравнения (251). Место  
момента М занимает воздействие  $\Delta r$ , перемещение  $\Delta r$  заме-  
няется на  $\Delta_1 r$ .

\*) Индексы при  $q$  поставлены в соответствии с индексами при  $Q$ .

\*\*\*) Под  $\Delta r$  здесь понимается смещение сечения пояса 1. Это смещение является неза-  
висимым, смещение сечений остальных поясов являются функцией смещения  $\Delta r$



Согласно Мору:

$$\Delta_{1,f} = - \left\{ \left[ 1 - \frac{1}{1+3 \left( \frac{B}{\psi e} \right)^2 \frac{t'_g}{K_E} \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1}} \right] \cdot \frac{e}{2E_1 f_1} \cdot N_{1,e} \cdot K_E + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \cdot \frac{B^2}{e \psi^2} \cdot \frac{1}{1+3 \left( \frac{B}{\psi e} \right)^2 \frac{t'_g}{K_E} \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1}} \cdot \frac{t'_g}{G_1 F_1} \cdot N_{1,e} \right\}$$

или

$$\Delta_{1,f} = A_1 \cdot \frac{e}{2E_1 f_1} \cdot N_{1,e} \cdot K_E \cdot B_2 \quad (297)$$

где:

$$B_2 = 1+3 \frac{\alpha}{\psi^2} \cdot \frac{1}{1+3 \left( \frac{B}{\psi e} \right)^2 \frac{t'_g}{K_E} \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1}} \cdot \frac{t'_g}{K_E} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+3 \left( \frac{B}{\psi e} \right)^2 \frac{t'_g}{K_E} \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1}}}$$

Подставив значение  $\Delta_{1,f}$  вместо  $\Delta_{1,p}$  в уравнение (251) нахо-

дим

$$P_{1,f} = \frac{1}{2} \frac{A_1 B_2}{AB} \cdot N_{1,e} \quad (298)$$

Окончательные усилия от смещения  $\Delta_f$  в элементах внешне-статически неопределимой коробки трапециoidalного постоянного сечения представляются в следующем виде:

Осевые силы в поясах:

$$N_{1,x}^f = N_{1,e} \cdot \left\{ \frac{x}{e} - \frac{1}{2} \frac{A_1 B_2}{AB} \left[ 1 - \frac{3}{2} - \frac{1}{1+3 \left( \frac{B}{\psi e} \right)^2 \frac{t'_g}{K_E} \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1}} \cdot \frac{x}{e} \right] \right\} \quad (299)$$

при  $x=e$ ,

$$N_{1,e}^f = N_{1,e} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{A_1 B_2}{AB} \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{1+3 \left( \frac{B}{\psi e} \right)^2 \frac{t'_g}{K_E} \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1}} \right] \right\} \quad (300)$$

$$N_{3,x}^f = N_{1,x}^f \quad (301)$$

$$N_{2,x}^f = N_{1,x}^f \frac{H}{h} \quad (301a)$$

$$N_{4,x}^f = N_{2,x}^f \quad (301b)$$

В формуле (299)

$$N_{1,e} = \frac{3E_1 f_1}{e} \cdot \frac{1}{K_E \left[ 1+3 \left( \frac{B}{\psi e} \right)^2 \frac{t'_g}{K_E} \right]} \cdot \Delta_f$$



201  
Реакция  $Z_{tr}$  представляет собой осевую силу, возникающую в закреплении стрингера 1 на нервюре  $m$  от двух внешних крутящих моментов, один из которых приложен в плоскости нервюры  $m-1$  и относится к коробке  $m$ , а другой приложен к плоскости нервюры  $m$  и относится к коробке  $m+1$ \*)

При этом сложение осевых сил производится с учетом их знаков, которое вытекает из принимаемого условия знаков. В дальнейшем положительными принимаются осевые силы, имеющие направление, показанное на рис. 111. Для прямоугольной коробки реакции  $Z_{tr}$  определяются с применением формул (263) и (265). Для трапециoidalной коробки реакция  $Z_{tr}$  определяется с применением формул (285), (286), (287)

Реакция  $Z_{tk}$  представляет собой осевую силу, возникающую в закреплении стрингера 1 на нервюре  $m$  от единичного смещения закрепления стрингера 1 на нервюре  $k$ . Реакция  $Z_{tk}$  для прямоугольной коробки определяется с применением формул (269) и (271), а для коробки трапециoidalного сечения с применением формул (298), (300).

Вычисленные реакции подставляем в уравнение (250), которые решаем относительно перемещений  $Z_m$ . После чего осевые силы в поясе определяются по формуле:

$$N = N_p + Z_1 N_1 + Z_2 N_2 + \dots + Z_m N_m \quad (301B)$$

известной из расчета статически-неопределимых систем.

Окончательные срезывающие силы в стеночках можно также определить по формуле, подобной формуле (301B). Однако значительные упрощения в вычислении срезывающих сил можно достигнуть, если для этого вычисления воспользоваться уже известными осевыми силами в сечениях поясов на нервюре  $A(N_A)$  и на нервюре  $B(N_B)$

\*) Сказанное вытекает из равновесия сил, действующих на закрепление  $m$



Для прямоугольной коробки

$$M_B = \frac{M(1-2K)e}{4bh} + M_A$$

откуда

$$K = \frac{1}{2} - 2 \frac{(M_B - M_A)bh}{eM} \quad (302)$$

Для трапециoidalной коробки

$$M_B = \left( Q_1 \frac{\psi_0}{b} - \frac{M}{b} \cdot \frac{e}{h} \right) + M_A,$$

откуда

$$Q_1 = \left( M_B - M_A + \frac{M}{b} \frac{e}{h} \right) \frac{b}{\psi_0} \quad (302a)$$

Когда определена срезающая сила  $Q_1$ , то остальные срезающие силы определяются по формулам (185), (186) и (187).

С тем, чтобы усвоить идею метода деформаций и убедиться в правильности результатов, получаемых по этому методу, ниже рассматривается пример из области сжатия простейших брусков. (Наряду с этим следует указать, что по методу деформаций могут быть решаемы как статически-неопределимые системы, так и статически-определимые системы).

Пример 18. В брусе рис. 112 требуется определить вертикальное смещение точки 1 и эпюру осевых сил в брусе.

Жесткость бруска  $EF = \text{const}$ .

Решение.

1. Выбор основной системы.

Основная система получается из заданной путем введения в последнюю закрепления в точку 1, задерживающего линейные смещения этой точки. Для того, чтобы стереть отличие между заданной основной системой, в последней точке 1 необходимо сообщить продольное линейное смещение  $Z_1$ , которое испытывает точка 1 в заданной системе. Основная система представлена на рис. 113.

\*) См. уравнение, предшествующее формуле (188)



2. Запись канонического уравнения метода деформаций для определения перемещений  $Z_1$ .

В данном случае мы имеем одно уравнение с одним неизвестным:  $Z_1: \tau_{11} + \tau_{1p} = 0$

откуда 
$$Z_1 = -\frac{\tau_{1p}}{\tau_{11}} \quad (A)$$

3. Построение эпюры осевых сил  $N_p$  от внешней нагрузки и эпюры осевых сил  $N_1$  от единичного смещения  $Z_1 = 1$ .

На участке АВ эпюра осевых усилий от внешней силы  $P$  строится как для статически определимого бруса высотой  $h$ . В пределах этого участка осевая сила остается постоянной и равной  $P$ .

На участке ВД эпюра осевых усилий от внешней силы  $P$  определяется как для статически-неопределимого бруса с двумя закреплениями в сечениях В и Д. Сила  $P$  в точке С распределяется пополам на участок ВС и СД так, что участок ВС подвергается растяжению, а участок СД сжатию.

Эпюра осевых сил  $N_p$  представлена на рис. 114. Осевая сила от смещения  $Z_1 = 1$  возникнет лишь на участке ВД, а на участке АВ она равна нулю, т.к. этот участок получит только поступательное перемещение, не испытывая деформаций.

Сечение В опускаем вниз на величину  $Z_1 = 1$  и, пользуясь законом Гука, находим силу  $N_1^B$ , соответствующую абсолютной деформации  $Z_1 = 1$

$$Z_1 = \frac{N_1^B \cdot 2h}{EF}$$

откуда  $N_1^B = \frac{Z_1 \cdot EF}{2h}$ . Когда  $Z_1 = 1$ , то  $N_1^B = \frac{EF}{2h}$

Эпюра осевых сил  $N_1$  от смещения  $Z_1 = 1$  представлена на рис. 115. Поскольку смещение  $Z_1$  было дано вниз, то сила  $N_1$  представляет собой силу сжатия.

4. Определение реакций  $\tau_{1p}$  и  $\tau_{11}$ .

Реакция  $\tau_{1p}$  определяется из условия равновесия узла 1 представленного на рис. 116, учитывая состояние бруска, характе-



ризуемое эпюрой  $N_p$ .

Из условия равновесия  $\sum y = 0$  вытекает  $\tau_{1p} - \frac{3}{2} P = 0$  откуда  $\tau_{1p} = \frac{3}{2} P$ , т.е. из равновесия узла 1 вытекает, что в закреплении 1 возникает реакция  $\tau_{1p}$  от действия сил  $P$  на брусок в основной системе. Реакция  $\tau_{1p}$  направлена вверх. Рассматривая равновесие узла 1 (см. рис. 117) в состоянии, характеризуемом эпюрой  $N_1$ , находим:

$$\tau_{11} = \frac{EF}{2h} = 0, \quad \text{откуда } \tau_{11} = \frac{EF}{2h}.$$

Реакция  $\tau_{11}$  направлена вниз.

### 5. Определение смещения $Z_1$ и окончательной эпюры осевых сил.

Так как  $\tau_{1p}$  и  $\tau_{11}$  имеют разное направление, то в соответствии с формулой А

$$Z_1 = - \frac{-\frac{3}{2} P}{\frac{EF}{2h}} = \frac{3Ph}{EF} \quad (B)$$

К этому же результату мы придем, если для определения абсолютной деформации заданного бруса в сечении В будем пользоваться законом Гука. Действительно, согласно этому закону

$$Z_1 = \frac{Ph}{EF} + \frac{P2h}{EF} = \frac{3Ph}{EF},$$

что совпадает с формулой (B).

Окончательная эпюра осевых сил определяется уравнением

$$N = N_p + Z_1 N_1$$

Стало быть, на участке АВ:  $N = -P + Z_1 \cdot 0 = -P$  (сжатие)

на участке ВС:  $N = \frac{P}{2} - Z_1 \cdot \frac{EF}{2h} = \frac{P}{2} - \frac{3Ph}{EF} \cdot \frac{EF}{2h} = -P$  (сжатие)

на участке CD:  $N = -\frac{P}{2} - Z_1 \cdot \frac{EF}{2h} = -\frac{P}{2} - \frac{3Ph}{EF} \cdot \frac{EF}{2h} = -2P$  (сжатие)

Окончательная эпюра осевых сил  $N$  представлена на рис. 118.

Пример 19. Определить осевые силы в поясах коробки рис. 119 и срезывающие силы в стеночках.

Данные: эпюра крутящих моментов  $M$  и их величины указаны на рис. 120. Крутящие моменты сосредоточены на нервюрах.



Сечения поясов одинаковы во всех отсеках коробки.

$$E_{\text{пояса}} = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2; f_{\text{пояса}} = 2,78 \text{ см}^2$$

Толщина стенок во всех отсеках коробки  $f = 0,05 \text{ см}$ .

Размеры коробки по отсекам даны на рис. 119. В расчете принято, что пояса коробок в сечении I-II не имеют разрыва. Это замечание относится как к данному примеру, так и ко всем остальным примерам, в которых рассматривается кручение коробок. Оно вытекает из того, что коробки представляют собой расчетную схему крыла, в котором лонжероны обладают непрерывностью.

Модули сдвига стенок коробки даны в нижеприводимой таблице.

№ коробки	G кг/см <sup>2</sup>	
	G <sub>гор.</sub>	G <sub>вер.</sub>
I-0	65 · 10 <sup>3</sup>	165 · 10 <sup>3</sup>
III-II	75 · 10 <sup>3</sup>	17 · 10 <sup>4</sup>
IV-III	75 · 10 <sup>3</sup>	17 · 10 <sup>4</sup>
V-IV	75 · 10 <sup>3</sup>	17 · 10 <sup>4</sup>

1. Определение сил  $N_e$  в статически определимой коробке от единичных смещений закреплений.

Смещение закреплений пояса I производим в направлении оси X. Этим самым уже ориентированы смещения закреплений остальных поясов поскольку они находятся в функциональной зависимости от смещения закрепления пояса. Так как поперечное сечение коробки симметрично относительно осей Y и Z, то силы  $N_e$  от смещения закреплений определяем по формуле:

$$N_e = \frac{6 E_n f_n}{e} \cdot \frac{1}{2+3(\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Delta f_{\text{обов.}}}{4}$$

$$\alpha = \frac{b^2}{e^2} \cdot \frac{E_n f_n}{G_p F_p}; \quad \beta = \frac{h^2}{e^2} \cdot \frac{E_n f_n}{G_b F_b}$$

Вычисления сил  $N_e$  для каждого из отсеков многопролетной



коробки производим в табличной форме. Одновременно с этим вычисляем коэффициенты  $K$  необходимые в дальнейшем.

Вычисление осевых сил  $M_0$  от смещений  $Z_1=1, Z_2=1, Z_3=1$  и коэффициентов  $K$ .

Расчетн. коэффициенты Сечения	0 и I	II и III	III и IV	IV и V
$\frac{b}{e}$	0,235	1,96	1,52	1,52
$\frac{h}{e}$	0,0156	0,134	0,105	0,105
$E_n \cdot f_n$	$4,78 \cdot 10^6$ кг.	$4,78 \cdot 10^6$ кг.	$4,78 \cdot 10^6$ кг.	$4,78 \cdot 10^6$ кг.
$G_2 F_2$	$330 \cdot 10^3$ кг.	$315 \cdot 10^3$ кг.	$315 \cdot 10^3$ кг.	$315 \cdot 10^3$ кг.
$G_B F_B$	$180 \cdot 10^3$ кг.	$187 \cdot 10^3$ кг.	$187 \cdot 10^3$ кг.	$187 \cdot 10^3$ кг.
$\alpha$	3,4	3,0	2,32	2,32
$\beta$	0,415	3,42	2,62	2,62
$\alpha + \beta$	3,815	6,42	4,94	4,94
$K$	0,168	0,475	0,526	0,526
$M_e$	6600 кг	11350 кг.	12600 кг.	12600 кг.

а) Определение сил  $P_{1,f}$  и  $M_{e,f}$  от смещений  $Z_1=1, Z_2=1, Z_3=1$  во внешне статически-неопределимой коробке.

Силы  $P_{1,f}$  и  $M_{e,f}$  для каждого отсека рассматриваемой нами многопролетной коробки определяются по формулам (262) и (271)

В этих формулах в силу симметрии коробок относительно осей  $y$  и  $Z$ :

$$\alpha m_d = 2(\alpha + \beta), \quad m_E = 4; \quad 1 + 3\alpha \frac{m_d}{m_E} = 1 + \frac{3}{2}(\alpha + \beta)$$

Вводим обозначения:

$$P_1 = 3\alpha \frac{m_d}{m_E}; \quad P_2 = P_1 \left(1 + 3\alpha \frac{m_d}{m_E}\right)$$

$$P_3 = 1 - \frac{2}{3} \left(1 + 3\alpha \frac{m_d}{m_E}\right) + \frac{4}{9} \left(1 + 3\alpha \frac{m_d}{m_E}\right)^2$$

Вычисление сил  $P_{1,f}$  и  $M_{e,f}$  сведен в нижеприведенную



таблицу.

Расчетные коэффициенты сечения			
$2(\alpha + \beta)$	12,84	9,88	9,88
$1 + \frac{3}{2}(\alpha + \beta)$	10,62	8,40	8,40
$\frac{\alpha m_d}{m_e}$	3,21	2,47	2,47
$\rho_1$	9,63	7,41	7,41
$\rho_2$	97,5	86	86
$\rho_3$	$1 - \frac{3}{2} \cdot 10,62 +$ $+\frac{4}{9} \cdot 112,36 = 43,7$	$1 - \frac{2}{3} \cdot 8,40 +$ $+\frac{4}{9} \cdot 97,5$	38,75
	46,91	41,22	41,22
	$2,08 \cdot 11350 \cdot \frac{1}{3} = 7870$	$2,09 \cdot 126000 \cdot \frac{1}{3} = 8770$	8770
	4600	5400	5400

На рис. 121, 122 и 123 представлены эпюры осевых сил в порсе I от смещений  $Z_1 = 1$ ,  $Z_2 = 1$ ,  $Z_3 = 1$

На этих же рисунках показаны силы действующие на закрепления I-II, III и IV, и даны величины реакций  $Z_{11}$ ,  $Z_{22}$ ,  $Z_{12}$ ,  $Z_{33}$ ,  $Z_{23}$ , вытекающие из равновесия узлов I-II, III и IV. Наименование реакций кг/см.

3. Определение сил  $P_{i,m}$ ,  $N_{e,m}$  в сечениях I-II, III, IV и V от моментов M

$$P_{i,m} = \frac{1}{18} \cdot \frac{M(2K-1)e}{bh} \cdot \left(1 + 3\alpha \frac{m_d}{m_e}\right)^2 \cdot \frac{1 + \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_d}{m_e}} \left(6 \frac{K}{1-K} \alpha \frac{D_d}{m_e} - 1\right)}{\rho_3 + \alpha^2 \frac{m_d}{m_e}}$$

$$N_{e,m} = \frac{M(2K-1)e}{4bh} - P_{i,m} \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_d}{m_e}}\right)$$

В силу симметрии сечения коробки относительно осей y и z

$$\frac{D_d}{m_e} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{h^2}{b^2} \cdot \frac{1-K}{K} \cdot \frac{G_1 F_1}{G_2 F_2}\right)$$

Вводим обозначения:

$$6 \cdot \frac{K}{1-K} \cdot \alpha \cdot \frac{D_d}{m_e} - 1 = \rho_4$$

$$1 + \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_d}{m_e}} \rho_4 = \rho_5$$



Вычисление  $P_{i,m}$  и  $N_{e,m}$  сводим в нижеприводимую таблицу.

Сечения Расчетн. коэффициенты	I-II и III	III и IV	IV и V
$K$	0,475	0,526	0,526
$\frac{1-K}{K}$	$\frac{0,525}{0,475} = 1,105$	$\frac{0,474}{0,526} = 0,903$	0,903
$\frac{K}{1-K}$	0,905	1,11	1,11
$(\frac{h}{B})^2$	$\frac{22}{84} = (0,262)^2 = 0,066$	0,066	0,066
$\frac{G_1 F_1}{G_2 F_2}$	$\frac{75 \cdot 10^3 \cdot 0,05 \cdot 34}{17 \cdot 10^4 \cdot 0,05 \cdot 22} = 1,68$	1,68	1,68
$\frac{\partial \sigma}{m_E}$	$0,5(1-0,122) = 0,439$	$0,5(1-0,1) = 0,45$	0,45
$\alpha$	3,0	2,32	2,32
$\rho_4$	$6 \cdot 1,09 - 1 = 0,54$	$6 \cdot 1,16 - 1 = 0,96$	0,96
$\frac{1}{1+3\alpha \frac{m_G}{m_E}}$	0,0942	0,119	0,119
$\rho_5$	1,05	1,11	1,11
$\frac{M(2K-1) \cdot e}{Bh}$	$\frac{146430(-0,05) \cdot 30}{42,11} = -177$	$\frac{227830 \cdot 0,05 \cdot 34}{42,11} = 840$	840
$\rho_3 + \alpha \frac{m_G}{m_E}$	46,91	41,22	41,22
$(1+3\alpha \frac{m_G}{m_E})^2$	112,36	97,5	97,5
$P_{i,m}$	-66,65	122,5	122,5
$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_G}{m_E}}$	0,142	0,179	0,179
$1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_G}{m_E}}$	0,858	0,821	0,821
$P_{i,m} \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+3\alpha \frac{m_G}{m_E}}\right)$	-57,19	100,57	100,57
$\frac{M(2K-1) \cdot e}{4bh}$	$\frac{477}{4} = -119,25$	$\frac{840}{4} = 210$	210
$N_{e,m}$	-62,06	109,43	109,43

Примечание: Знак минус свидетельствует о том, что осевая сила в поясе, вызываемая моментом, приложенным к вертикальным стеночкам



больше, чем осевая сила, вызываемая моментом, приложенным к горизонтальным стеночкам. В нашем случае это приводит к растяжению в поясе 1 см. рис. 124а. В сечении I со стороны коробки 0-I

$$N_{e,m} = \frac{M(2K-1)e}{4bh} = \frac{39400 \cdot 0,664 \cdot 80}{77,5 \cdot 20} = -1350.$$

На рис. 124 представлена эпюра  $N_p$  осевых сил в поясе 1 в основной системе, от моментов, приложенных в плоскостях нервюр 0, I-II, III, IV.

На этом же рисунке даны величины реакций  $\tau_{1p}, \tau_{2p}, \tau_{3p}$  определенные из равновесия узлов I-II, III, IV. Наименование реакций кг.

#### 4. Определение перемещений $Z_1, Z_2, Z_3$

Перемещения  $Z_1, Z_2, Z_3$  определяются из канонических уравнений метода деформаций:

$$Z_1 \cdot \tau_{11} + Z_2 \tau_{12} + \tau_{1p} = 0$$

$$Z_1 \tau_{21} + Z_2 \tau_{22} + Z_3 \tau_{23} + \tau_{2p} = 0$$

$$Z_2 \tau_{32} + Z_3 \tau_{33} + \tau_{3p} = 0$$

Решение этих уравнений выполняем по алгоритм'у Гаусса.

Результаты решения:

$$Z_1 = 0,0985$$

$$Z_2 = 0,322$$

$$Z_3 = 0,284$$

#### 5. Определение окончательных осевых сил в поясах

Осевые силы в поясе 1 определяем по формуле:

$$N = N_p + Z_1 \cdot N_1 + Z_2 \cdot N_2 + Z_3 \cdot N_3$$

Величина и направление силы в поясе 1 предопределяет величину и направление осевых сил в остальных поясах.

Таблицу вычисления осевых сил в поясе 1 см. на стр. 33.



## Вычисление осевых сил в поясе 1.

Расчетн. коэффициенты сечения	0	I-II	III	IV	V
$N_p$	0	1350	62,06	-109,43	-109,43
$Z_1 \cdot N_1$	0	$0,0985 \cdot 6600 = 650,1$	$0,0985 \cdot 7870 = 775$	0	0
$Z_2 \cdot N_2$	0	0	$-0,322 \cdot 4600 = -1480$	$-0,322 \cdot 8770 = -2830$	0
$Z_3 \cdot N_3$	0	0	0	$0,224 \cdot 5400 = 1210$	$0,224 \cdot 8770 = 1964$
$N$	0	2000 кг.	-643 кг.	-1409 кг.	2382 кг.

Условные обозначения: (+) растяжение

(-) сжатие.

Проверка.

Правильность полученных результатов подтверждается тем, что осевые силы, определенные суммированием ординат взятых слева от сечений I-II, III, IV в эпюрах  $N_p, N_1, N_2, N_3$ , должны совпадать с соответствующими осевыми силами, полученными суммированием ординат, взятых справа от тех же сечений в эпюрах  $N_p, N_1, N_2$  и  $N_3$ .

Действительно для сечения I-II, если суммировать ординаты справа от сечения, находим:

$$-62,06 + 0,0985(-4600) - 0,322 \cdot (-7870) = 2019$$

Выше мы нашли в этом же сечении суммированием ординат, лежащих слева от сечения  $N = 2000$

расхождение  $\frac{2019 - 2000}{2019} \cdot 100 = 0,94\%$  допустимо при работе на логарифмической линейке.

Эпюра окончательных осевых сил  $N$ , в поясе 1 представлена на рис. 125. Силы в кг.

6. Определение срезающих сил в стеночках

Коробка 0-1

$$K = \frac{1}{2} - 2 \frac{(2000 - 0) \cdot 77,5 \cdot 20}{2 \cdot 2 \cdot 39400 \cdot 80} = \frac{1}{2} - 0,492 = 0,008$$



$$Q_3 = \frac{(1-K)M}{2b} = \frac{0,992 \cdot 39400}{77,5} = 504,32 \text{ кг}$$

$$Q_2 = \frac{0,008 \cdot 39400}{77,5} = 4,07 \text{ кг}$$

Коробка 2-3

$$K = \frac{1}{2} - 2 \frac{(1429 - 643) \cdot 311,22}{2 \cdot 2 \cdot 30 \cdot 116430} = 0,5 - 0,16 = 0,34$$

$$Q_3 = \frac{KM}{2h} = \frac{0,34 \cdot 146430}{22} = 2263 \text{ кг}$$

$$Q_2 = \frac{(1-K)M}{2h} = \frac{(1-0,34) \cdot 146430}{22} = 4393 \text{ кг}$$

Вычисление перерезывающих сил в остальных коробках предлагаем читателю выполнить самостоятельно.

Переходим к расчету на кручение многопролетных коробок с многоконтурным поперечным сечением, например, рис. 109. Ход расчета с применением смешанного метода в этом случае заключается в следующем:

1. Выбор основной системы. Основная система устанавливается также, как и для коробки прямоугольного двухсвязного сечения и представлена на рис. 126.

2. Разбивка действительной коробки на ряд отдельных многопролетных коробок с двухсвязным контуром (см. рис. 127) и решение каждой из этих коробок от единичного момента, последовательно прикладываемого в сечениях 0, I, II, III, IV. Решение это для многопролетной коробки с двухсвязным поперечным сечением было рассмотрено выше. Когда единичный момент приложен в сечении IV, то коробка IV-V разрешается как однопролетная внешне-статически определяемая коробка. Коробки с крайними контурами 1 и 5 не подлежат разрешению как многопролетные коробки, поскольку в их поясах не возникают осевые силы. Эти коробки разбиваются на однопролетные внешне-статически определяемые отсеки с односторонним лонжероном.



а. Определение коэффициентов распределения  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$  в сечениях 0, I, II, III и IV.

Эти коэффициенты являются корнями уравнений

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 \cdot \delta_{11} + \mu_2 \delta_{12} &= \varepsilon \\ \mu_1 \delta_{21} + \mu_2 \delta_{22} + \mu_3 \delta_{23} &= \varepsilon \\ \mu_2 \delta_{32} + \mu_3 \delta_{33} + \mu_4 \delta_{34} &= \varepsilon \\ \mu_3 \delta_{43} + \mu_4 \delta_{44} + \mu_5 \delta_{45} &= \varepsilon \\ \mu_4 \delta_{54} + \mu_5 \delta_{55} &= \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (Б)$$

В уравнениях В углы закручивания  $\delta_{кт}$  и  $\varepsilon$  определяются не на единицу длины коробки, а на всю ее длину, которая измеряется от рассматриваемого сечения до заделки.

Перемещения  $\delta_{кт}$  для коробок 2, 3, 4 определяются по формуле

$$\delta_{кт} = \sum \left( \sum \int_0^e \frac{N_k \cdot N_m \cdot dx}{EJ} \right) + \sum \left( \sum \int_c^r \frac{q_k \cdot q'_m \cdot dc}{GJ} \right) \cdot e \quad (303)$$

Операция  $\sum$  вне скобок производится по отсекам, а операция  $\sum$  внутри скобок производится по поясам и стеночкам в пределах одного отсека каждой из коробок 1, 2, 3, 4.

Уравнения осевых сил для каждого отсека коробок 2, 3, 4, можно представить в следующем виде:

$$N = p + m \frac{x}{e} \quad (304)$$

Интенсивности срезающих сил в стеночках определяются по формуле

$$\frac{Q}{c}$$

где:  $Q$  - срезающая сила в рассматриваемой стеночке и  $c$  - ее длина в плоскости поперечного сечения коробки.

Указанные замечания относительно уравнений осевых сил и интенсивностей  $q$  дают возможность представить формулы для перемещений  $\delta_{кт}$  и  $\delta_{тт}$  в развернутом виде. Для конкретности рассуждения свои относим к коробкам 2 и 3.



$$\delta_{22}^* = \sum \left[ \int_0^e \frac{(n+m \cdot \frac{x}{e})^2 dx}{E_1 f_1} + \int_0^e \frac{(n+m \cdot \frac{x}{e})^2 dx}{E_2 f_2} + \int_0^e \frac{(n+m \cdot \frac{x}{e})^2 dx}{E_2 f_3} + \int_0^e \frac{(n+m \cdot \frac{x}{e})^2 dx}{E_4 f_4} + \right. \\ \left. + \left(\frac{Q_1}{2b}\right)^2 \frac{2be}{G_1 d_1} + \left(\frac{Q_2}{2b}\right)^2 \frac{2be}{G_3 d_3} + \left(\frac{Q_2}{2h}\right)^2 \frac{2he}{G_2 d_2} + \left(\frac{Q_4}{2h}\right)^2 \frac{2h}{G_4 d_4} \right]$$

или

$$\delta_{22}^* = \sum \left[ \left( n^2 + nm + \frac{m^2}{3} \right) \frac{e}{E_i f_i} m_{\Sigma} + \frac{Q_i^2 e}{2b G_i d_i} m_{\Sigma} \right] \quad (305)$$

где

$$m_{\Sigma} = 1 + \left(\frac{Q_3}{Q_1}\right)^2 \frac{G_1 d_1}{G_3 d_3} + \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^2 \left(\frac{b}{h}\right)^2 \frac{G_1 d_1}{G_2 d_2} + \left(\frac{Q_4}{Q_1}\right)^2 \frac{G_1 d_1}{G_4 d_4}$$

Для прямоугольной коробки

$$\frac{Q_3}{Q_1} = 1$$

Если сечения коробки симметрично относительно осей  $Y$  и  $Z$ , то $m_{\Sigma} = 4$  и

$$m_{\Sigma} = 2 \left[ 1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 \frac{Q_2}{Q_4} \right] \quad (306)$$

В формуле (305) суммирование  $\Sigma$  распространяется на от-  
секи. Перемещения типа  $\delta_{nmm}^*$  определяются подобно  $\delta_{22}^*$ .

Если в сечении  $I$  осевая сила равна  $N_I$ , а в сечении  $II$ , осевая сила равна  $N_{II}$ , то коэффициенты  $n$  и  $m$  определяются из следующих условий:

1. При  $x=0$ ,  $N_I = n+m \cdot 0$  откуда  $n = N_I$
2. При  $x=e$ ,  $N_{II} = n+m$  откуда  $m = N_{II} - N_I$

Следует отметить, что влияние осевых сил на угол закручивания по сравнению с влиянием сдвигающих сил незначительно.

Если пренебречь этим влиянием, то

$$\delta_{22}^* = \sum \frac{Q_i^2 e}{2b G_i d_i} m_{\Sigma} \quad (307)$$

Перемещение  $\delta_{23}^*$  определяется по формуле:

$$\delta_{23}^* = \sum \left[ \int_0^e \frac{(n+m \frac{x}{e})_2 \cdot (n+m \frac{x}{e})_3 \cdot dx}{E_2 f_2} + \int_0^e \frac{(n+m \frac{x}{e})_2 (n+m \frac{x}{e})_3 \cdot dx}{E_6 f_6} + \frac{(Q_2)_2}{2h_2} \frac{(Q_2)_3}{2h_2} \frac{2he}{G_2 d_2} \right]$$

или

$$\delta_{23}^* = \sum \left\{ \left[ (h_2)_2 (h_3)_3 + \frac{(m_2)_2 (n_3)_3}{2} + \frac{(n_2)_2 (m_3)_3}{2} + \frac{(m_2)_2 (m_3)_3}{3} \right] \frac{e}{E_2 f_2} \left( 1 + \frac{E_2 f_2}{E_6 f_6} \right) + \frac{(Q_2)_2 \cdot (Q_2)_3 \cdot e}{2h_2 G_2 d_2} \right\} \quad (308)$$



Если пренебречь влиянием осевых сил, то

$$\delta_{23}^* = \sum \frac{(Q_2)_2 (Q_2)_3 e}{2h_2 G_2 \delta_2} \quad (308)$$

В формуле (308) приняты следующие обозначения: индексы 2 и 3 внизу круглой скобки указывают на принадлежность соответствующей величины коробке 2 или коробке 3.

$2h_2$ ,  $G_2$ ,  $\delta_2^*$  - высота, модуль сдвига и толщина стенок на границе коробок 2 и 3.

Перемещения типа  $\delta_{кт}^*$  определяются подобно  $\delta_{23}^*$ .

Углы закручивания  $\delta_{тт}^*$  коробок с крайними контурами 1 и 5, имеющих односторонний лонжерон, определяем в каждом данном начальном сечении отсека, как сумму углов закручивания начальных сечений последующих отсеков, не учитывая (в целях упрощения) упругого защемления поясов на изгиб в горизонтальной плоскости и, стало быть, пользуясь формулой (159) (а для трапециoidalной и треугольной коробки формулами (202) и (203)).

Побочное перемещение  $\delta_{12}^*$  (и аналогично  $\delta_{43}^*$ ) определяется по формуле:

$$\delta_{12}^* = \frac{(Q_4)_1 (Q_4)_2 2h_4}{2h_4 \cdot 2h_4 \cdot G_4 \delta_4} = \frac{(Q_4)_1 (Q_4)_2}{2h_4 G_4 \delta_4} \quad (310)$$

Для коробки трапециoidalного сечения

$$\begin{aligned} \delta_{22}^* = \sum & \left[ \int_0^e \frac{(n_1 + m_1 \frac{x}{e})^2 dx}{E_1 f_1} + \int_0^e \frac{(n_1 + m_1 \frac{x}{e})^2 dx}{E_3 f_3} + \left(\frac{H}{h}\right)^2 \int_0^e \frac{(n_1 + m_1 \frac{x}{e})^2 dx}{E_2 f_2} + \right. \\ & + \left(\frac{H}{h}\right)^2 \int_0^e \frac{(n_1 + m_1 \frac{x}{e})^2 dx}{E_4 f_4} + \left(\frac{Q_3}{B \cos \beta}\right)^2 \frac{B}{\cos \beta G_3 \delta_3} + \left(\frac{Q_4}{B \cos \alpha}\right)^2 \frac{B}{\cos \alpha G_4 \delta_4} + \\ & \left. + \left(\frac{Q_2}{h}\right)^2 \frac{h}{G_2 \delta_2} + \left(\frac{Q_4}{H}\right)^2 \frac{H}{G_4 \delta_4} \right] \end{aligned}$$

или

$$\delta_{22}^* = \sum \left[ \left( n_1^2 + n_1 m_1 + \frac{m_1^2}{3} \right) \frac{e}{E_1 f_1} \cdot K_E + \frac{Q_1^2 \cos \beta}{B G_1 \delta_1} \cdot t_\delta \right] \quad (311)$$

$$\text{где } t_\delta = 1 + \left(\frac{Q_3}{Q_1}\right)^2 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \frac{G_1 \delta_1}{G_3 \delta_3} + \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^2 \frac{B}{h \cos \beta} + \left(\frac{Q_4}{Q_1}\right)^2 \frac{B}{H \cos \beta} \frac{G_1 \delta_1}{G_4 \delta_4}$$



$n$ , и  $m$ , - осевые силы, относящиеся к поясу 1

Формула (308) для определения перемещения  $\delta_{23}^*$  остается в силе и для коробки трапециoidalного сечения, имея ввиду, что все величины, входящие в формулу (308) относятся к поясам и стеночкам, расположенным на границе между двумя рассматриваемыми коробками.

#### 4. Определение осевых сил в поясах и срезающих сил в стеночках от заданных крутящих моментов

Необходимая цель достигается умножением усилий от единичных моментов на действительные моменты  $M_n, M$  в сечениях каждой из коробок 1, 2, 3, 4 и 5.

Усилия в поясах и стеночках, расположенных на границе двух соседних контуров, определяются как алгебраическая сумма соответствующих усилий.

Пример 20. Определить осевые силы в поясах и срезающие силы в стеночках многосвязной многопролетной коробки (рис. 128а), нагруженной сосредоточенными крутящими моментами  $M$ , согласно эпюры  $M$  (рис. 128б).

Решение:

1. Определение коэффициентов  $\alpha, \beta$  и  $K$  и сил  $N_0$  для внешне-статически определимой коробки от  $\Delta_f = 1$

$$\alpha = \frac{b^2}{e^2} \cdot \frac{E_1 f_1}{G_1 F_1}, \quad \beta = \frac{h^2}{e^2} \cdot \frac{G_1 f_1}{G_2 F_2}, \quad K = \frac{1+3\beta}{2+3(\alpha+\beta)}$$

$$N_0 = \frac{6 E_n f_n}{e} \cdot \frac{1}{2+3(\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Delta f_{обоб}}{4}$$

Вычисление коэффициентов  $K$  и сил  $N_0$  от смещений  $Z_1=1, Z_2=1$  сведено в нижеприводимую таблицу.

Сечение	0-1	(Z <sub>1</sub> =1)	I-II	(Z <sub>2</sub> =1)	II-III	(Z <sub>2</sub> =1)
Рассчетн. коэфф. цен	2	3	2	3	2	3
	2	3	4	5	6	7
$\frac{b}{e}$	0,800	0,700	0,892	0,700	0,983	0,700
$\frac{h}{e}$	0,183	0,183	0,217	0,217	0,250	0,250

продолж. см. на стр.39



Сечение	0-I (Z <sub>1</sub> =1)		I-II (Z <sub>2</sub> =1)		II-III (Z <sub>2</sub> =1)	
	2	3	2	3	2	3
Расчетные коэффициенты	2	3	2	3	2	3
1	2	3	4	5	6	7
E <sub>n</sub> f <sub>n</sub>	21,84 · 10 <sup>6</sup>	21,84 · 10 <sup>6</sup>	21,84 · 10 <sup>5</sup>	21,84 · 10 <sup>6</sup>	21,84 · 10 <sup>6</sup>	21,84 · 10 <sup>6</sup>
G <sub>2</sub> F <sub>2</sub>	1,92 · 10 <sup>6</sup>	1,68 · 10 <sup>6</sup>	2,14 · 10 <sup>6</sup>	1,68 · 10 <sup>6</sup>	2,36 · 10 <sup>6</sup>	1,68 · 10 <sup>6</sup>
G <sub>8</sub> F <sub>8</sub>	2,376 · 10 <sup>6</sup>	2,376 · 10 <sup>6</sup>	2,708 · 10 <sup>6</sup>	2,708 · 10 <sup>6</sup>	3,240 · 10 <sup>6</sup>	3,240 · 10 <sup>6</sup>
α	7,387	6,370	8,119	6,370	8,938	6,370
β	0,308	0,308	0,380	0,380	0,421	0,421
α+β	7,695	6,678	8,499	6,750	9,359	6,791
K	0,0767	0,0873	0,0778	0,0962	0,0752	0,1011
N <sub>e</sub>	21840	24788	19874	24470	18128	24252

2. Определение сил P<sub>1,р</sub> и N<sub>e,р</sub> от смещений Z<sub>1</sub>=1 и Z<sub>2</sub>=1 во внешне статически-неопределимой коробке

Сечения	I - II		II - III	
	2	3	2	3
Коробки	2	3	2	3
Расчетные коэффициенты	2	3	2	3
2(α+β)	17,0	13,5	18,718	13,582
1 + $\frac{3}{2}(\alpha+\beta)$	13,75	11,1	15,1	11,2
$\frac{\alpha \cdot m_G}{m_E}$	4,25	3,375	4,6795	3,3955
P <sub>1</sub>	12,75	1,25	14,04	10,2
P <sub>2</sub>	170	111	205	111
P <sub>3</sub>	76,53	47,9	91,9	48,24
P <sub>3</sub> + α $\frac{m_G}{m_E}$	80,78	51,275	96,58	59,44
P <sub>1,р</sub>	0,702 · 19874 = 14000	0,722 · 24470 = 17600	0,707 · 18128 = 12800	0,622 · 24252 = 15100
$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+3\alpha} \frac{m_G}{m_E}$	0,108	0,135	0,099	0,133
$1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+3\alpha} \frac{m_G}{m_E}$	0,892	0,865	0,901	0,867
P <sub>1,р</sub> (1 - $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+3\alpha} \frac{m_G}{m_E}$ )	12500	15270	11500	13100
N <sub>e,р</sub>	19874 - 12500 = 7374	24470 - 15270 = 9200	18128 - 11500 = 6628	24252 - 13100 = 11152



На рис. 130 и 131 представлены эпюры осевых сил в порсе 1 коробки 2 и в порсе 2 коробки 3 от смещений  $Z_1 = 1, Z_2 = 1$

На этих же рисунках указаны величины реакции, определенные из равновесия узлов I и II отнесенных в действительности к коробке 2 и к коробке 3

3 Определенные сил  $P_m$  и  $M_{em}$  в сечениях I-II и II-III от моментов  $M=1$ , действующего в сечении O

Расчетные коэффици- енты	Короб. ку.		I-II		II-III		O-I	
	2	3	2	3	2	3	2	3
$K$	0,9778	0,9662	0,0752	0,1011				
$\frac{A-K}{K}$	$\frac{0,9222}{0,9778} = 11,9$	$\frac{0,9038}{0,9662} = 9,4$	$\frac{0,9248}{0,0752} = 12,3$	$\frac{0,8989}{0,1011} = 8,9$				
$\frac{K}{1-K}$	0,084	0,106	0,0812	0,113				
$\left(\frac{h}{B}\right)^2$	$\left(\frac{25}{107}\right)^2 = 0,059$	$\left(\frac{26}{84}\right)^2 = 0,096$	$\left(\frac{30}{118}\right)^2 = 0,065$	$\left(\frac{30}{84}\right)^2 = 0,128$				
$\frac{G_1 F_1}{G_2 F_2}$	$\frac{25 \cdot 10^4 \cdot 0,08 \cdot 107}{27 \cdot 10^4 \cdot 0,4 \cdot 26} = 0,762$	$\frac{25 \cdot 10^4 \cdot 0,08 \cdot 84}{27 \cdot 10^4 \cdot 0,4 \cdot 26} = 0,598$	$\frac{25 \cdot 10^4 \cdot 0,08 \cdot 118}{27 \cdot 10^4 \cdot 0,4 \cdot 30} = 0,727$	$\frac{25 \cdot 10^4 \cdot 0,08 \cdot 84}{27 \cdot 10^4 \cdot 0,4 \cdot 30} = 0,517$				
$\frac{D_0}{m_E}$	$\frac{1}{2}(1-0,45) = 0,275$	$\frac{1}{2}(1-0,54) = 0,23$	$\frac{1}{2}(1-0,532) = 0,21$	$\frac{1}{2}(1-0,59) = 0,205$				
$\alpha$	8,119	6,37	8,938	6,37				
$\rho_H$	0,187	0,156	0,152	0,1475				
$\frac{1}{1+3\alpha} \frac{m_G}{m_E}$	0,072	0,09	0,066	0,089				



$\int S$	1,0135	1,014	1,01	1,0131
$M(2K-1)e$ $\frac{8h}{2}$	$\frac{1 \cdot (-0,84) \cdot 60}{107 \cdot \frac{26}{2}} = 0,0725$	$\frac{1 \cdot (-0,8) \cdot 60}{84 \cdot \frac{30}{2}} = 0,088$	$\frac{1 \cdot (-0,85) \cdot 60}{118 \cdot \frac{30}{2}} = 0,058$	$\frac{1 \cdot (-0,8) \cdot 60}{84 \cdot \frac{30}{2}} = 0,076$
$\int_3 + \alpha \frac{mg}{mE}$	80,78	51,275	96,53	59,44
$(1+3\alpha \frac{mg}{mE})^2$	190	122	227	123
$P_{1,M}$	$-\frac{0,172}{18} = -96 \cdot 10^{-4}$	$-\frac{0,211}{18} = -117 \cdot 10^{-4}$	$\frac{0,138}{18} = -77 \cdot 10^{-4}$	$-\frac{0,168}{18} = -93 \cdot 10^{-4}$
$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+3\alpha} \frac{mg}{mE}$	0,108	0,135	0,099	0,133
$1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+3\alpha} \frac{mg}{mE}$	0,892	0,865	0,901	0,867
$P_{1,M} \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+3\alpha} \frac{mg}{mE}\right)$	$-85,6 \cdot 10^{-4}$	$-101 \cdot 10^{-4}$	$-69,4 \cdot 10^{-4}$	$-80,5 \cdot 10^{-4}$
$\frac{M \cdot (2K-1)e}{4\delta h}$	$-181 \cdot 10^{-4}$	$-220 \cdot 10^{-4}$	$-145 \cdot 10^{-4}$	$\frac{1 \cdot (-0,844) \cdot 60}{96,22} = 239 \cdot 10^{-4}$
$M_e, m$	$-95,9 \cdot 10^{-4}$	$119 \cdot 10^{-4}$	$-75,6 \cdot 10^{-4}$	$-109,5 \cdot 10^{-4}$
				$\frac{1 \cdot (-0,826) \cdot 60}{107,26} = 178,5 \cdot 10^{-4}$
				$-178,5 \cdot 10^{-4}$

На рис 132 представлены эпюры осевых сил в поясе 1 коробки 2 и в поясе 2 коробки 3 от момента  $M=1$ , приложенного в сечении O. На этом же рисунке указаны реакции  $T_1, P_1, T_2, P_2$ , определенные из равновесия узлов I и II, отнесенных в отдельности к коробке 2 и к коробке 3



4. Определение перемещений  $Z_1$  и  $Z_2$ , когда момент  $M=1$  приложен в сечении 0 в отдельности к коробке 2 и коробке 3

Перемещения  $Z_1$  и  $Z_2$  определяются из уравнений:

$$Z_1 \cdot z_{11} + Z_2 \cdot z_{12} + z_{1p} = 0$$

$$Z_1 \cdot z_{21} + Z_2 \cdot z_{22} + z_{2p} = 0$$

Коробка 2.

$$Z_1 \cdot 116856 + Z_2 \cdot 56000 + 1340 \cdot 10^{-4} = 0$$

$$Z_1 \cdot 56000 + Z_2 \cdot 56008 + 689,6 \cdot 10^{-4} = 0$$

Решение:

$$Z_1 = -10,9 \cdot 10^{-7}$$

$$Z_2 = -1,5 \cdot 10^{-7}$$

Коробка 3

$$Z_1 \cdot 136232 + Z_2 \cdot 70400 + 1182 \cdot 10^{-4} = 0$$

$$Z_1 \cdot 70400 + Z_2 \cdot 81688 + 848 \cdot 10^{-4} = 0$$

Решение

$$Z_1 = -3,47 \cdot 10^{-7}$$

$$Z_2 = -10,1 \cdot 10^{-7}$$

5. Определение окончательных осевых сил в поясах коробки 2 и коробки 3, когда момент  $M=1$  приложен в сечении 0.

Коробка 2

$$N_I = 239 \cdot 10^{-4} - 10,9 \cdot 10^{-7} \cdot 21340 = -9 \cdot 10^{-4}$$

$$N_{II} = 95,4 \cdot 10^{-4} - 10,9 \cdot 10^{-7} \cdot 14000 - 1,5 \cdot 10^{-7} \cdot 7374 = -68,1 \cdot 10^{-4}$$

$$N_{III} = 75,6 \cdot 10^{-4} - 1,5 \cdot 10^{-7} \cdot 12800 = 56,4 \cdot 10^{-4}$$

Коробка 3

$$N_I = 178,5 \cdot 10^{-4} - 3,47 \cdot 10^{-7} \cdot 24788 = -92,5 \cdot 10^{-4}$$

$$N_{II} = 119 \cdot 10^{-4} - 3,47 \cdot 10^{-7} \cdot 17600 - 10,1 \cdot 10^{-7} \cdot 9270 = -35,7 \cdot 10^{-4}$$

$$N_{III} = 109,5 \cdot 10^{-4} - 10,1 \cdot 10^{-7} \cdot 15100 = -43 \cdot 10^{-4}$$

6. Определение срезывающих сил в стеночках

Коробка 2

Отсек 0-1

$$K = \frac{1}{2} - 2 \frac{(-9 \cdot 10^{-4} + 0) \cdot 96,22}{60 \cdot 1 \cdot 2,2} = 0,5158$$



$$1-K = 0,4842$$

$$Q_2 = \frac{0,5158 \cdot 1}{22} = 235 \cdot 10^{-4}$$

$$Q_8 = \frac{0,4842 \cdot 1}{96} = 50,3 \cdot 10^{-4}$$

Отсек I-II

$$K = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{(-58,1 \cdot 10^{-4} + 9,10^{-4}) \cdot 107,26}{60,1 \cdot 2,2} = 0,637$$

$$1-K = 0,363$$

$$Q_2 = \frac{0,637 \cdot 1}{26} = 245 \cdot 10^{-4}$$

$$Q_8 = \frac{0,363 \cdot 1}{107} = 34 \cdot 10^{-4}$$

Отсек II-III

$$K = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{(56,4 \cdot 10^{-4} + 58,1 \cdot 10^{-4}) \cdot 118,30}{60,1 \cdot 2,2} = 0,132$$

$$1-K = 0,868$$

$$Q_2 = \frac{0,132 \cdot 1}{30} = 44 \cdot 10^{-4}$$

$$Q_8 = \frac{0,868 \cdot 1}{118} = 73,7 \cdot 10^{-4}$$

Коробка 3.

Отсек 0-I

$$K = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{(92,5 \cdot 10^{-4} + 0) \cdot 84,22}{60,1 \cdot 2,2} = 0,3575$$

$$1-K = 0,6425$$

$$Q_2 = \frac{0,3575 \cdot 1}{22} = 162,5 \cdot 10^{-4}$$

$$Q_8 = \frac{0,6425}{84} = 76,4 \cdot 10^{-4}$$

Отсек I-II

$$K = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{(-35,7 \cdot 10^{-4} - 92,5 \cdot 10^{-4}) \cdot 84,26}{60,1 \cdot 2,2} = 0,731$$

$$1-K = 0,269$$

$$Q_2 = \frac{0,731 \cdot 1}{26} = 281 \cdot 10^{-4}$$

$$Q_8 = \frac{0,269}{84} = 32 \cdot 10^{-4}$$

Отсек II-III

$$K = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{(-43 \cdot 10^{-4} + 35,7 \cdot 10^{-4}) \cdot 30,84}{60,1 \cdot 2,2} = 0,515$$



$1 - K = 0.485$

$Q_2 = \frac{0.515 \cdot 1}{30} = 166.7 \cdot 10^{-4}$

$Q_3 = \frac{0.485 \cdot 1}{84} = 57.8 \cdot 10^{-4}$

7. Определение углов закручивания  $\delta_{II}$  и  $\delta_{IV}$  в сечениях 0, I и II коробок 1 и 4 от моментов  $M=1$ , приложенных в отдельности к коробкам 1 и 4 в сечениях 0, I и II.

Угол закручивания крайних однолонжеронных коробок 1 и 4 определяется по формуле:

$$\theta = \frac{K^2 e^3}{3E, J_1} \left[ \left( 2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{m'_d}{m'_E} \cdot \frac{E, J_1}{G_1 F_1} \right) \right]$$
 где  $m'_d = 2 \left[ 1 + \frac{h^2}{8^2} \left( \frac{1-K}{K} \right)^2 \frac{G_1 F_1}{G_2 F_2} \right]$

Коэффициент K определяем по формуле:

$$K = 3 \frac{1}{e^2} \cdot \frac{h^2}{8^2} \cdot \frac{E, J_1}{G_2 F_2} \cdot \frac{\pi d}{E}$$

где

$$\pi d = 2; \quad J_E = 2 + 3 \frac{E, J_1}{G_1 F_1} \cdot \frac{m_d}{e^2}; \quad m_d = 2 \left( 1 + \frac{h^2}{8^2} \cdot \frac{G_1 F_1}{G_2 F_2} \right)$$

Вычисление K

Коробки	1			4		
	0	I	II	0	I	II
$\left(\frac{h}{8}\right)^2$	1	$\left(\frac{13}{12.5}\right)^2 = 1.04$	$\left(\frac{15}{14}\right)^2 = 1.14$	$\left(\frac{11}{16}\right)^2 = 0.475$	$\left(\frac{13}{18}\right)^2 = 0.52$	$\left(\frac{15}{19}\right)^2 = 0.59$
$\frac{E, J_1}{G_2 F_2}$	2540	3420	2960	3020	2560	2270
$\frac{E, J_1}{G_1 F_1}$	$\frac{480}{0.2115} = 2280$	$\frac{480}{0.24} = 2000$	$\frac{480}{0.269} = 1785$	$\frac{480}{0.692} = 694$	$\frac{480}{0.78} = 616$	$\frac{480}{0.843} = 570$
$\frac{G_1 F_1}{G_2 F_2}$	$\frac{0.2115}{0.119} = 1.77$	$\frac{0.24}{0.1405} = 1.71$	$\frac{0.269}{0.162} = 1.66$	$\frac{0.692}{0.1585} = 4.35$	$\frac{0.78}{0.1875} = 4.15$	$\frac{0.843}{0.216} = 3.9$
$m_d$	5.54	5.56	5.78	6.12	6.32	6.6
$\frac{m_d}{e^2}$	$0.153 \cdot 10^{-2}$	$0.153 \cdot 10^{-2}$	$0.16 \cdot 10^{-2}$	$0.17 \cdot 10^{-2}$	$0.175 \cdot 10^{-2}$	$0.183 \cdot 10^{-2}$
$3 \frac{E, J_1}{G_1 F_1} \cdot \frac{m_d}{e^2}$	10.5	9.18	8.6	3.54	3.25	3.14
$J_E$	12.5	11.18	10.6	5.54	5.23	5.14
$\frac{\pi d}{J_E}$	0.16	0.179	0.189	0.362	0.383	0.390
K	$3 \cdot \frac{10^{-2}}{36} \cdot 1.2540 \cdot 0.16 = 34 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot \frac{10^{-2}}{36} \cdot 1.043420 \cdot 0.179 = 53 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot \frac{10^{-2}}{36} \cdot 1.142960 \cdot 0.189 = 53 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot \frac{10^{-2}}{36} \cdot 0.4753020 \cdot 0.362 = 43.3 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot \frac{10^{-2}}{36} \cdot 0.522530 \cdot 0.383 = 42.5 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot \frac{10^{-2}}{36} \cdot 0.592270 \cdot 0.39 = 43.7 \cdot 10^{-2}$



в. Определение углов закручивания  $\delta_{22}^*$  и  $\delta_{33}^*$  в сечениях 0, I и II коробок 2 и 3 от моментов  $M=1$ , приложенных в отдельности к коробкам 2 и 3 в сечениях 0, I и II

$$\delta_{kk}^* = \sum \left[ \left( n^2 + \pi m + \frac{m^2}{2} \right) \cdot \frac{e}{E_1 I} \cdot m_e + \frac{Q_2^2 e}{2 E G_1 J_1} \cdot m_d \right]$$

$$m_d = 2 \left[ 1 + \left( \frac{b}{h} \right)^2 \frac{Q_2}{Q_1} \right]$$

$$m_e = 4$$

$$\pi = N_1; \quad m = N_2 - N_1$$



Вычисление углов закручивания  $\delta_{22}^{\circ}$  и  $\delta_{33}^{\circ}$  в сечении O

Углы закручивания	$\delta_{22}^{\circ}$				$\delta_{33}^{\circ}$			
	Сеченур	0	I	II	0	I	II	
Рисунки коэффициенты								
$\eta^2$	$(-9 \cdot 10^{-4})^2 = 81 \cdot 10^{-8}$							
$\eta m$	$(-9 \cdot 10^{-4}) \cdot (-58,149) \cdot 10^{-8} = 531,9 \cdot 10^{-8}$							
$\frac{\eta m^2}{3}$	$\frac{(-58,149 \cdot 10^{-4})^2}{3} = 1155 \cdot 10^{-8}$							
$(\frac{m^2}{\eta m + m^2}) \frac{e}{E_1 \eta} m \epsilon$	$\frac{1778 \cdot 10^{-8} \cdot 60}{21 \cdot 10^8 \cdot 10^4 \cdot 4} = 1948 \cdot 10^{-13}$							
$(\frac{\delta}{h})^2 \frac{Q_2}{Q_1}$	$(\frac{196}{26})^2 \cdot \frac{50,3}{235} = 4,07$	$(\frac{107}{26})^2 \cdot \frac{34}{245} = 2,35$	$(\frac{118}{30})^2 \cdot \frac{73,7}{44} = 17,6$	$(\frac{24}{26})^2 \cdot \frac{76,1}{162,5} = 6,8$	$(\frac{24}{26})^2 \cdot \frac{32}{281} = 1,85$	$(\frac{24}{30})^2 \cdot \frac{57,8}{166,7} = 2,72$		
$m \Delta$	$\frac{(235 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 60}{96,25 \cdot 10^4 \cdot 0,08} \cdot 10,14 = 175,19 \cdot 10^{-9}$	$\frac{(245 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 60}{107,25 \cdot 10^4 \cdot 0,08} \cdot 6,70 = 113 \cdot 10^{-9}$	$\frac{(44 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 60}{118,25 \cdot 10^4 \cdot 0,08} \cdot 39,2 = 19,25 \cdot 10^{-9}$	$\frac{(162,5 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 60}{84,25 \cdot 10^4 \cdot 0,08} \cdot 15,6 = 148 \cdot 10^{-9}$	$\frac{(281 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 60}{84,25 \cdot 10^4 \cdot 0,08} \cdot 3,7 = 104,5 \cdot 10^{-9}$	$\frac{(166,7 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 60}{84,25 \cdot 10^4 \cdot 0,08} \cdot 7,44 = 73,5 \cdot 10^{-9}$		
$\frac{Q_1^2 e}{26 G_1 \delta_1} \cdot m \Delta$	$175,19 \cdot 10^{-9}$	$113 \cdot 10^{-9}$	$19,25 \cdot 10^{-9}$	$148 \cdot 10^{-9}$	$104,5 \cdot 10^{-9}$	$73,5 \cdot 10^{-9}$		
$\delta_{kk}^{\circ}$	$\delta_{kk}^{\circ} = 19,25 \cdot 10^{-9} + 113 \cdot 10^{-9} + 175,19 \cdot 10^{-9} = 307,44 \cdot 10^{-9}$							



Вычисление углов закручивания  $\delta_n^0$  и  $\delta_{44}^0$  в сечении O

Угол закручивания сечения Расчетн. коэффициент	$\delta_n^0$			$\delta_{44}^0$		
	O	II	I	O	I	II
$K^2$	$1160 \cdot 10^{-4}$	$2200 \cdot 10^{-4}$	$2500 \cdot 10^{-4}$	$1830 \cdot 10^{-4}$	$1800 \cdot 10^{-4}$	$1900 \cdot 10^{-4}$
$\left(\frac{1-K}{K}\right)^2$	$\left(\frac{0,66}{0,34}\right)^2 = 3,8$	$\left(\frac{0,47}{0,53}\right)^2 = 0,785$	$\left(\frac{0,47}{0,53}\right)^2 = 0,785$	$\left(\frac{0,567}{0,433}\right)^2 = 1,72$	$\left(\frac{0,575}{0,425}\right)^2 = 1,83$	$\left(\frac{0,563}{0,437}\right)^2 = 1,65$
$\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1-K}{K}\right) \frac{G_1 F_1}{G_2 F_2}$	$1 \cdot 3,8 \cdot 1,77 = 6,75$	$1,14 \cdot 1,66 \cdot 0,785 = 1,49$	$1,04 \cdot 1,71 \cdot 0,785 = 1,39$	$0,475 \cdot 4,35 \cdot 1,72 = 3,56$	$0,52 \cdot 4,15 \cdot 1,83 = 3,96$	$0,65 \cdot 3,9 \cdot 1,66 = 3,89$
$m_d^2$	15,50	4,98	4,78	9,12	9,92	9,64
$\frac{3}{4} \cdot \frac{m_d \cdot E \cdot J}{G \cdot F}$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{15,5 \cdot 10^{-2}}{36} \cdot 2280 = 7,37$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{4,98 \cdot 10^{-2}}{36} \cdot 1785 = 1,85$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{4,78 \cdot 10^{-2}}{36} \cdot 2000 = 1,98$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{9,12 \cdot 10^{-2}}{36} \cdot 694 = 1,315$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{9,92 \cdot 10^{-2}}{36} \cdot 615 = 1,275$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{9,92 \cdot 10^{-2}}{36} \cdot 570 = 1,125$
$2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{m_d \cdot E \cdot J}{G \cdot F}$	$2 + \frac{3}{4} \cdot 7,37 = 7,72$	$2 + \frac{3}{4} \cdot 1,85 = 3,385$	$2 + \frac{3}{4} \cdot 1,98 = 3,48$	$2 + \frac{3}{4} \cdot 1,315 = 2,985$	$2 + \frac{3}{4} \cdot 1,275 = 2,955$	$2 + \frac{3}{4} \cdot 1,125 = 2,885$
$\frac{K^2 e^3}{3E \cdot J}$	$\frac{(1160)^2 \cdot 21,6 \cdot 10^4}{3 \cdot 480 \cdot 10^{14}} = 6,202 \cdot 10^{-5}$	$\frac{(2200)^2 \cdot 21,6 \cdot 10^4}{3 \cdot 480 \cdot 10^{14}} = 1,153 \cdot 10^{-5}$	$\frac{(2500)^2 \cdot 21,6 \cdot 10^4}{3 \cdot 480 \cdot 10^{14}} = 2,6 \cdot 10^{-5}$	$\frac{(1830)^2 \cdot 21,6 \cdot 10^4}{3 \cdot 480 \cdot 10^{14}} = 0,53 \cdot 10^{-5}$	$\frac{(1800)^2 \cdot 21,6 \cdot 10^4}{3 \cdot 480 \cdot 10^{14}} = 0,487 \cdot 10^{-5}$	$\frac{(1900)^2 \cdot 21,6 \cdot 10^4}{3 \cdot 480 \cdot 10^{14}} = 0,61 \cdot 10^{-5}$
$\theta$	$1,56 \cdot 10^{-5}$	$3,6 \cdot 10^{-5}$	$3,6 \cdot 10^{-5}$	$1,58 \cdot 10^{-5}$	$1,49 \cdot 10^{-5}$	$1,755 \cdot 10^{-5}$

$$\delta_{44}^0 = (1,755 + 1,49 + 1,58) \cdot 10^{-5} = 4,835 \cdot 10^{-5}$$

$$\delta_n^0 = (3,6 + 3,6 + 1,58) \cdot 10^{-5} = 8,76 \cdot 10^{-5}$$



Влияние осевых сил на угол закручивания учтено лишь в первом отсеке коробки Я (учет осевых сил увеличил угол закручивания на  $\frac{0,19}{175} \cdot 100 = 0,11\%$ ) в остальных отсеках коробки 2 и во всех отсеках коробки 3 это влияние не учтено, ввиду его незначительности.

9. Приближенное определение коэффициентов распределения

$\mu_1^0, \mu_2^0, \mu_3^0, \mu_4^0$  в сечении 0.

$$\varepsilon = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_{11}^0} + \frac{1}{\sigma_{22}^0} + \frac{1}{\sigma_{33}^0} + \frac{1}{\sigma_{44}^0}} = \frac{1}{\frac{10^5}{8,76} + \frac{10^9}{307} + \frac{10^9}{326} + \frac{10^5}{4,825}} = 157 \cdot 10^{-9}$$

$$\mu_1^0 = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_{11}^0} = \frac{0,157 \cdot 10^{-9}}{8,76 \cdot 10^{-5}} = 17,9 \cdot 10^{-4} = 0,0018$$

$$\mu_2^0 = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_{22}^0} = \frac{157 \cdot 10^{-9}}{307 \cdot 10^{-3}} = 0,51$$

$$\mu_3^0 = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_{33}^0} = \frac{157 \cdot 10^{-9}}{326 \cdot 10^{-9}} = 0,481$$

$$\mu_4^0 = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_{44}^0} = \frac{157 \cdot 10^{-9}}{4,825 \cdot 10^{-5}} = 32,5 \cdot 10^{-4} = 0,0033$$

$$\mu_1^0 + \mu_2^0 + \mu_3^0 + \mu_4^0 = 0,0018 + 0,51 + 0,481 + 0,0033 = 0,996$$

$$\text{ошибка} = 0,043 \cdot 100 = 0,4\%$$

Из анализа полученных коэффициентов распределения вытекает, что кручение почти целиком воспринимают средние две коробки 2 и 3, что и следовало ожидать. Вычисленные коэффициенты остаются применимыми в пределах первого отсека. Для определения коэффициентов распределения в сечении II необходимо в сечении I приложить момент  $M=1$  и рассмотреть отсеки I-II и II-III.

Для решения этих отсеков вспомогательные вычисления заимствуются из предыдущего решения отсеков 0-I, I-II и II-III. В сечении II коэффициенты распределения могут быть



определены непосредственно.

$$\varepsilon_{II} = \frac{10^5}{3,6} + \frac{10^9}{19,25} + \frac{10^9}{73,5} + \frac{10^5}{1,735} = 1,52 \cdot 10^{-6}$$

$$M_1^{\bar{II}} = \frac{\varepsilon_{II}}{\delta_{11}^{\bar{II}}} = \frac{1,52 \cdot 10^{-8}}{8,75 \cdot 10^{-5}} = 0,173 \cdot 10^{-3};$$

$$M_2^{\bar{II}} = \frac{\varepsilon_{II}}{\delta_{22}^{\bar{II}}} = \frac{1,52 \cdot 10^{-8}}{19,25 \cdot 10^{-9}} = 0,79;$$

$$M_3^{\bar{II}} = \frac{\varepsilon_{II}}{\delta_{33}^{\bar{II}}} = \frac{1,52 \cdot 10^{-8}}{13,5 \cdot 10^{-9}} = 0,207$$

$$M_4^{\bar{II}} = \frac{\varepsilon_{II}}{\delta_{44}^{\bar{II}}} = \frac{1,52 \cdot 10^{-8}}{1,83 \cdot 10^{-9}} = 0,325 \cdot 10^{-3}$$

$$M_1^{\bar{II}} + M_2^{\bar{II}} + M_3^{\bar{II}} + M_4^{\bar{II}} = 0,0001738 + 0,79 + 0,207 + 0,000325 = 0,997$$

ошибка 0,3%

Умножив коэффициенты распределения на внешний крутящий момент в данном сечении, заимствованный из эпюры  $M$ , устанавливаем те моменты, которые воспринимаются каждой из коробок 1, 2, 3, 4, после чего определяются усилия в элементах коробки.

Эту часть примера предлагаем читателю выполнить самостоятельно.

\*

\*

\*



## § 24. Расчет на кручение вблизи заделки коробок, обшивка которых воспринимает срез и изгиб.

В порядке постепенного усложнения задачи рассмотрим треугольную, прямоугольную и трапециoidalную коробку.

Независимо от типа коробки предполагаем, что от изгиба каждой стеночки коробки имеют место нормальные напряжения  $\sigma$ , распределяющиеся по закону прямой в пределах поперечного сечения (при более точном решении для коротких и высоких стенок напряжения распределяются не по закону кривой); имеют место также касательные напряжения, которые в пределах поперечного сечения изменяются по параболической кривой. Кроме того, предполагаем, что стеночки коробки не воспринимают скручивающих моментов и изгиба из своей плоскости.

Треугольная коробка, рис. 133. В плоскости диска  $A$  приложен крутящий момент  $M$ . Производим сечение  $m-m$  на расстоянии  $x$  от диска  $A$  и рассматриваем равновесие отсеченной части коробки, представленной на рис. 134.

$M_1, M_2, M_3$  - изгибающие моменты, действующие соответственно в плоскости граней 1, 2 и 3.

$N_1, N_2, N_3$  - осевые силы, приложенные в центрах тяжести соответственно граней 1, 2 и 3. Предполагается, что осевые силы  $N_1, N_2, N_3$  распределяются равномерно по поперечному сечению граней.

$Q_1, Q_2, Q_3$  - срезающие силы, воспринимаемые соответственно гранями 1, 2 и 3.

Составляем уравнения равновесия для рассматриваемого нами пространственно-нагруженной части коробки:



- 1.  $\Sigma X = 0$  или  $N_1 + N_2 + N_3 = 0$
- 2.  $\Sigma Y = 0$  или  $-Q_3 + Q_1 \sin \beta + Q_2 \sin \alpha = 0$
- 3.  $\Sigma Z = 0$  или  $-Q_1 \cos \beta + Q_2 \cos \alpha = 0$   
откуда  $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$
- 4.  $\Sigma M_x = 0$  или  $M - Q_3 d = 0$   
откуда  $Q_3 = \frac{M}{d}$

Из уравнений 2, 3 и 4 вытекает

$$Q_1 = \frac{M}{d} \cdot \frac{1}{\cos \beta (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha)}$$

$$Q_2 = \frac{M}{d} \cdot \frac{1}{\cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}$$

Стало быт, срезающие силы в стеночках треугольной коробки, которые работают на срез и на изгиб, получаются такими же, как и срезающие силы в стеночках треугольной коробки, работающих только на срез.

- 5.  $\Sigma M_y = 0$  или  $N_1 b_1 \cos \beta - N_2 b_2 \cos \alpha + N_3 d - M_1 \cos \beta - M_2 \cos \alpha = 0$
- 6.  $\Sigma M_z = 0$  или  $N_1 b_1 \sin \beta - N_2 b_2 \sin \alpha + N_3 (M - 2b_1 \sin \beta) - M_1 \sin \beta - M_2 + M_3 = 0$

В трех еще нерешенных уравнениях 1, 5 и 6 имеется шесть неизвестных.

Таким образом, рассматриваемая нами коробка трижды статически неопределима.

Для составления трех дополнительных уравнений мы используем условия, что одна грань на другую передает исключительно срезающие силы по ребру пересечения граней.

Эти силы собственно говоря и являются результатом той связи плоских граней, которая обращает их в пространственно работающую коробку.

На рис. 135 представлены отрезки граней 1, 2 и 3 длиною с действующими по их контуру усилиями.



235

Срезающие силы в ребрах  $AB, CD, EF$  создаются в результате того, что волокно  $AB$  (аналогично волокнам  $CD$  и  $EF$ ) в любом сечении  $x$  получает разное удлинение от изгиба моментами  $M_1$  и  $M_3$  и от осевого растяжения-сжатия  $N_1$  и  $N_3$ . В связи с чем для сохранения совместности деформаций, волокна  $AB$  необходимо появление срезающих сил по ребру  $AB$ . Достоверным является еще из элементарной теории изгиба, что скалывающие напряжения поварируются за счет разности нормальных напряжений.

Вводим обозначение:

$T_x^{AB}$  - срезающая сила на грани  $AB$  на расстоянии  $x$  от диска  $A$ . Аналогичный смысл имеют обозначения  $T_x^{CD}, T_x^{EF}$ . Для определения срезающих сил  $T_x$  мы используем условия: 1)  $\sigma_{1,x}^{AB} = \sigma_{3,x}^{AB}$ , т.е. нормальное положение в волокне  $AB$  в сечении  $x$ , определенное из рассмотрения изгиба грани 1, равно нормальному напряжению в том же волокне, определенному из рассмотрения изгиба грани 3.

$$2) \sigma_{1,x}^{CD} = \sigma_{2,x}^{CD} \quad 3) \sigma_{2,x}^{EF} = \sigma_{3,x}^{EF}$$

Из рассмотрения изгиба пластины 1 в сечении  $x$  вытекает:

для волокна  $AB$

$$\sigma_{1,x}^{AB} = \frac{M_1}{W_{z_1}} + \frac{N_1}{F_1}$$

$$M_1 = -Q_1 \cdot x - T_x^{AB} \cdot \delta_1 + T_x^{CD} \cdot \delta_1 \quad (312)$$

$$N_1 = - (T_x^{AB} + T_x^{CD}) \quad (313)$$

где:  $W_{z_1}$  - момент сопротивления крайнего волокна грани 1 относительно оси  $z_1$ , проходящей через центр тяжести поперечного сечения грани 1.

$F_1$  - площадь этого сечения. Аналогичные обозначения остаются и для остальных граней:

Грань 2. Волокно  $CD$

$$\sigma_{2,x}^{CD} = \frac{M_2}{W_{z_2}} + \frac{N_2}{F_2}; \quad M_2 = -Q_2 \cdot x + T_x^{CD} \cdot \delta_2 + T_x^{EF} \cdot \delta_2 \dots \dots (314); \quad N_2 = T_x^{CD} - T_x^{EF} \dots \dots (315)$$



Грань 3. Волокно АВ.

$$\sigma_{3,x}^{AB} = \frac{M_3}{W_{23}} + \frac{N_3}{F_3}; \quad M_3 = Q_3 \cdot x + T_x^{AB} \cdot H - T_x^{EF} \cdot H \quad (316)$$

$$N_3 = T_x^{AB} + T_x^{EF} \quad (317)$$

Из условий 1, 2 и 3 вытекают следующие уравнения:

$$(318) \begin{cases} -T_x^{AB} \left( \frac{b_1}{W_{21}} + \frac{1}{F_1} + \frac{H}{W_{23}} + \frac{1}{F_3} \right) + T_x^{CD} \left( \frac{b_1}{W_{21}} - \frac{1}{F_1} \right) + T_x^{EF} \left( \frac{H}{W_{23}} - \frac{1}{F_3} \right) = x \left( \frac{Q_1}{W_{23}} + \frac{Q_3}{W_{23}} \right) \\ T_x^{AB} \left( \frac{b_1}{W_{21}} - \frac{1}{F_1} \right) - T_x^{CD} \left( \frac{b_1}{W_{21}} + \frac{1}{F_1} + \frac{b_2}{W_{22}} + \frac{1}{F_2} \right) - T_x^{EF} \left( \frac{b_2}{W_{22}} - \frac{1}{F_2} \right) = x \left( \frac{Q_1}{W_{21}} + \frac{Q_2}{W_{22}} \right) \\ T_x^{AB} \left( \frac{H}{W_{23}} - \frac{1}{F_3} \right) - T_x^{CD} \left( \frac{b_2}{W_{22}} - \frac{1}{F_2} \right) - T_x^{EF} \left( \frac{b_2}{W_{22}} + \frac{1}{F_2} + \frac{H}{W_{23}} + \frac{1}{F_3} \right) = x \left( \frac{Q_2}{W_{22}} + \frac{Q_3}{W_{23}} \right) \end{cases}$$

К решению уравнений (318) возможно применить сокращенный алгоритм Гаусса, т.к. коэффициенты при силах  $T$  обладают свойствами взаимности.

Эти же уравнения можно было получить, применяя обычный метод сил, с определением коэффициентов по формуле Мора.

Когда из уравнений (318) определены силы  $T_x$ , то по формулам 312-317 - определяются осевые силы  $N_1, N_2$  и  $N_3$  и изгибающие моменты  $M_1, M_2, M_3$ .

Уравнения равновесия 1, 5 и 6 характеризуют взаимную зависимость осевых сил  $N$  и моментов  $M$  и могут быть использованы для контроля.

Из уравнений (318) вытекает, что сдвигающие силы  $T_x$ , а стало быть, и осевые силы  $N$  являются линейной функцией  $x$ .

Распределение срезающей силы  $Q$  по поперечному сечению грани устанавливаем из следующих соображений:

из грани рис. 136 вырезаем элемент, производя сечения I-II, II-III и III-III. На рис. 137 представлен этот элемент в увеличенном масштабе с действующими на него силами. Из условия равновесия рассматриваемого элемента грани вытекает:

$$\sum X = 0 \quad \text{или} \quad T_x \cdot \delta \cdot dx - T_y \cdot \delta \cdot dx + \delta \int_{y_0}^H \sigma_x \cdot dy - \delta \int_{y_0}^H \sigma_x \cdot dx \cdot dy = 0 \quad (A)$$



$$\sigma_x = \frac{M_x \cdot y}{J_z} + \frac{T_n \cdot H \cdot y}{J_z} + \frac{T_{n+1} \cdot H \cdot y}{J_z} + \frac{T_n}{F} - \frac{T_{n+1}}{F} \quad (319)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{x+dx} &= \frac{(M_x + dM_x) \cdot y}{J_z} + \frac{(T_n + dT_n) H y}{J_z} + \frac{(T_{n+1} + dT_{n+1}) H y}{J_z} + \frac{T_n + dT_n}{F} - \frac{T_{n+1} + dT_{n+1}}{F} \\ \delta \int_{y_0}^H \sigma_x dy - \delta \int_{y_0}^H \sigma_{x+dx} dy &= - \left( \frac{dM_x}{J_z} \int_{y_0}^H \delta dy \cdot y + \frac{dT_n H}{J_z} \int_{y_0}^H \delta dy \cdot y + \frac{dT_{n+1} H}{J_z} \int_{y_0}^H \delta dy \cdot y + \right. \\ &\quad \left. + \frac{dT_n}{F} \int_{y_0}^H \delta dy - \frac{dT_{n+1}}{F} \int_{y_0}^H \delta dy \right) \quad (320) \end{aligned}$$

Вводим обозначения:  $\int_{y_0}^H \delta dy \cdot y = S_z$  - статический момент части площади поперечного сечения, лежащей выше точки, в которой ищется касательное напряжение

$\int_{y_0}^H \delta dy = F_{y_0}$  - площадь части поперечного сечения, лежащая выше точки, в которой имеется касательное напряжение.

Кроме того

$$dT_n = \delta \tau_n dx; \quad dT_{n+1} = \delta \tau_{n+1} dx$$

Стало быть

$$\tau_n = \frac{dT_n}{dx} \cdot \frac{1}{\delta} \quad (321) \quad \tau_{n+1} = \frac{dT_{n+1}}{dx} \cdot \frac{1}{\delta}$$

Учитывая формулу (320) и введенные обозначения, из уравнения А, находим:

$$\tau_{y_0} = \tau_n - \left[ \frac{dM_x}{dx} \cdot \frac{S_z}{J_z} + \delta (\tau_n + \tau_{n+1}) \frac{H \cdot S_z}{J_z} + \delta (\tau_n - \tau_{n+1}) \frac{F_{y_0}}{F} \right]$$

Так как  $\frac{dM_x}{dx} = Q_x$ , то

$$\tau_{y_0} = \tau_n - \left[ \frac{Q_x S_z}{J_z} + \delta (\tau_n + \tau_{n+1}) \frac{H \cdot S_z}{J_z} + \delta (\tau_n - \tau_{n+1}) \frac{F_{y_0}}{F} \right] \quad (322)$$

Стало быть, кривая, изображающая изменение  $\tau_{y_0}$  с изменением  $y_0$ , составлена из прямых и параболических линий.

Для прямоугольного сечения:

$$S_z = \frac{(H - y_0) \cdot \delta \cdot H}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{H^2 - y_0^2}{H}; \quad \frac{F_{y_0}}{F} = \frac{(H - y_0) \cdot \delta}{2H \cdot \delta} = \frac{H - y_0}{2H} \quad \text{и}$$

$$\tau_{y_0} = \tau_n - \frac{1}{\delta} \left[ \frac{3}{4} \cdot \frac{H^2 - y_0^2}{H} \cdot Q_x + \frac{3}{4} \delta \frac{H^2 - y_0^2}{H^2} (\tau_n + \tau_{n+1}) + \frac{H - y_0}{2H} \delta (\tau_n - \tau_{n+1}) \right] \quad (323)$$



Легко убедиться, что площадь эпюры касательных напряжений, соответствующей членам в формуле 322, не содержащим  $Q_x$ , равна нулю.

Действительно

$$\int_{-H}^H \tau_n \cdot \delta - \frac{3}{4} \int_{-H}^H (\tau_n + \tau_{n+1}) dx + \frac{3}{4} \int_{-H}^H (\tau_n + \tau_{n+1}) y_0^2 dy - \frac{1}{2} \int_{-H}^H (\tau_n - \tau_{n+1}) dy + \frac{1}{2} \int_{-H}^H (\tau_n - \tau_{n+1}) dy = 0.$$

Величина

$$-\frac{3}{4} \cdot \delta \int_{-H}^H \frac{H^2 - y_0^2}{\delta H^3} \cdot Q_x \cdot dy = -\frac{3}{4} \cdot \left[ \frac{1}{H} \cdot 2H - \frac{1}{3} \cdot 2 \frac{H^3}{H^3} \right] \cdot Q = Q_x,$$

т.е. соблюдено уравновешивание внешней срезающей силы  $Q_x$  внутренними касательными напряжениями.

Переходим к рассмотрению кручения прямоугольной коробки рис. 139 (задача Эбнера)\*). Сечением  $m-m-m$  отделяем часть коробки длиной  $x$  и рассматриваем равновесие этой части под действием сил, показанных на рис. 140.

$$1. \sum X = 0 \quad \text{или} \quad N_1 + N_3 - (N_2 + N_4) = 0, \quad \text{откуда} \quad N_1 + N_3 = N_2 + N_4 \quad (5)$$

$$2. \sum Y = 0 \quad \text{или} \quad Q_2 - Q_4 = 0, \quad \text{откуда} \quad Q_2 = Q_4 = Q_{II} \quad (6)$$

$$3. \sum Z = 0 \quad \text{или} \quad Q_1 - Q_3 = 0, \quad \text{откуда} \quad Q_1 = Q_3 = Q_I \quad (7)$$

$$4. \sum M_x = 0 \quad \text{или} \quad M - (Q_1 \cdot h + Q_3 \cdot h + Q_2 \cdot b + Q_4 \cdot b) = 0$$

Учитывая уравнения 5 и 7 имеем:

$$M = Q_I h + Q_{II} b$$

Обозначаем:

$$Q_I h = X_1, \quad Q_{II} b = X_2,$$

тогда

$$X_2 = M - X_1$$

$$5. \sum M_y = 0 \quad \text{или} \quad -M_1 + M_3 - N_4 b + N_2 \cdot b = 0, \quad \text{откуда} \quad M_3 - M_1 = b (N_4 - N_2)$$

$$6. \sum M_z = 0 \quad \text{или} \quad M_4 - M_2 + N_1 h - N_3 h = 0, \quad \text{откуда} \quad M_4 - M_2 = h (N_3 - N_1)$$

В шести написанных уравнениях статики имеется 12 неизвестных. Таким образом, так же, как и в соответствующем случае прямоугольной коробки, станки которой работают только на срез, мы могли бы сделать вывод, что рассматриваемая нами коробка

\* С работой Эбнера читатель может познакомиться в книге



шесть раз статически неопределима. На самом деле это не так по той причине, что пространственность работы коробки создается за счет только следующих двух факторов: 1. совместность скручивания всех стенок коробки, 2. связь стенок за счет сопротивления срезам граблей в местах их пересечения.

Остальные связи, которыми обладает коробка, как-то: связь на изгиб стенок в своей плоскости относится не к пространственной работе коробки, а к плоской работе ее граней. Действительно сечением по ребрам  $AB, BC, CD, DE$  коробка разбивается на пару параллельных горизонтальных стенок и на пару параллельных вертикальных стенок. Лишними неизвестными силами, приложенными к этим стеночкам являются момент  $X$ , и силы  $T_x^{AB}$ ,  $T_x^{BC}$ ,  $T_x^{CD}$ ,  $T_x^{DE}$ .

В результате сделанного анализа мы приходим к выводу, что коробка является пять раз внутренне статически неопределимой.

Уравнения для определения сил  $T_x^{AB}$ ,  $T_x^{BC}$ ,  $T_x^{CD}$ ,  $T_x^{DE}$  составляются так же, как и для треугольной коробки.

Ориентируясь на направление сил, показанное на рис. 441, мы устанавливаем следующие выражения для нормальных напряжений в крайних волокнах  $AB, BC, CD, DE$

$$\sigma_{1,x}^{AB} = \frac{-Q_1 \cdot x - T_x^{AB} \cdot b + T_x^{BC} \cdot b}{W_{z_1}} - \frac{T_x^{AB} + T_x^{BC}}{F_1}$$

$$\sigma_{4,x}^{AB} = \frac{Q_2 \cdot x + T_x^{AB} \cdot h - T_x^{DE} \cdot h}{W_{z_4}} + \frac{T_x^{AB} + T_x^{DE}}{F_4}$$

$$\sigma_{1,x}^{BC} = \frac{Q_1 \cdot x + T_x^{AB} \cdot b - T_x^{BC} \cdot b}{W_{z_1}} - \frac{T_x^{AB} + T_x^{BC}}{F_1}$$

$$\sigma_{2,x}^{BC} = \frac{-Q_2 \cdot x + T_x^{BC} \cdot h - T_x^{CD} \cdot h}{W_{z_2}} + \frac{T_x^{BC} + T_x^{CD}}{F_2}$$

$$\sigma_{2,x}^{CD} = \frac{-Q_2 \cdot x + T_x^{BC} \cdot h - T_x^{CD} \cdot h}{W_{z_2}} + \frac{T_x^{BC} + T_x^{CD}}{F_2}$$



$$240$$

$$\sigma_{3,x}^{CD} = \frac{-Q_I x - T_x \cdot b + T_x \cdot b}{W_{z_3}} - \frac{T_x^{CD} + T_x^{DE}}{F_3}$$

$$\sigma_{3,x}^{DE} = \frac{Q_I x + T_x \cdot b - T_x \cdot b}{W_{z_3}} - \frac{T_x^{CD} + T_x^{DE}}{F_3}$$

$$\sigma_{4,x}^{DE} = \frac{-Q_{II} x - T_x \cdot h + T_x \cdot h}{W_{z_4}} + \frac{T_x^{AB} + T_x^{DE}}{F_4}$$

Условия  $\sigma_{1,x}^{AB} = \sigma_{4,x}^{AB}$ ,  $\sigma_{1,x}^{BC} = \sigma_{2,x}^{BC}$ ,  $\sigma_{2,x}^{CD} = \sigma_{3,x}^{CD}$ ,  $\sigma_{3,x}^{DE} = \sigma_{4,x}^{DE}$ , - приводят к

следующим уравнениям относительно сил  $T_x$ :

$$T_x^{AB} \left( \frac{h}{W_{z_4}} + \frac{b}{W_{z_1}} + \frac{1}{F_4} + \frac{1}{F_1} \right) + T_x^{BC} \left( \frac{1}{F_1} - \frac{b}{W_{z_1}} \right) + T_x^{DE} \left( \frac{1}{F_4} - \frac{h}{W_{z_4}} \right) = \left( \frac{Q_I}{W_{z_1}} + \frac{Q_{II}}{W_{z_4}} \right) \cdot x \quad (324)$$

$$T_x^{AB} \left( -\frac{b}{W_{z_1}} + \frac{1}{F_1} \right) + T_x^{BC} \left( \frac{h}{W_{z_2}} + \frac{b}{W_{z_1}} + \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_1} \right) + T_x^{CD} \left( \frac{1}{F_2} - \frac{h}{W_{z_2}} \right) = - \left( \frac{Q_I}{W_{z_1}} + \frac{Q_{II}}{W_{z_2}} \right) \cdot x \quad (325)$$

$$T_x^{BC} \left( \frac{1}{F_2} - \frac{h}{W_{z_2}} \right) + T_x^{CD} \left( \frac{h}{W_{z_2}} + \frac{b}{W_{z_3}} + \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_3} \right) + T_x^{DE} \left( \frac{1}{F_3} - \frac{b}{W_{z_3}} \right) = \left( \frac{Q_I}{W_{z_3}} + \frac{Q_{II}}{W_{z_2}} \right) \cdot x \quad (326)$$

$$T_x^{CD} \left( \frac{b}{W_{z_3}} - \frac{1}{F_3} \right) + T_x^{DE} \left( \frac{b}{W_{z_3}} + \frac{h}{W_{z_4}} + \frac{1}{F_3} + \frac{1}{F_4} \right) + T_x^{AB} \left( \frac{1}{F_4} - \frac{h}{W_{z_4}} \right) = \left( \frac{Q_I}{W_{z_3}} + \frac{Q_{II}}{W_{z_4}} \right) \cdot x \quad (327)$$

Если в левой части первого уравнения отсутствовал первый член, а в левой части последнего уравнения последний член, то уравнения 324-327 были бы трехчленными.

Ввиду того, что коэффициенты при неизвестных в уравнениях 324-327 обладают взаимностью, эти уравнения могут быть решены с применением алгоритма Гаусса.

После чего силы  $T_x$  будут выражены через срезывающие силы  $Q_I$  и  $Q_{II}$ . Последние определяются из условия совместности скручивания пары горизонтальных и пары вертикальных стенок, что, как известно приводит к уравнению

$$X_1 \cdot \delta_{II}^I + \Delta_{I,II} = 0 \quad (143)$$

Для определения перемещения  $\delta_{II}^I$  необходимо к паре горизонтальных стенок приложить момент  $X_1 = 1$  и такой же момент, но в обратном направлении приложить к паре вертикальных стенок.



Когда обобщенное неизвестное  $x$ , равно единице, то

$$Q_1 = \frac{1}{h}; \quad Q_2 = -\frac{1}{b}$$

Подставив эти значения  $Q_1$  и  $Q_2$  в уравнения 324-327, мы определяем соответствующие силы  $T_x$ . После чего по формуле Мора находим:

$$\begin{aligned} \delta_{11} = & \int_0^e \kappa \frac{Q_1^2 dx}{G_1 F_1} + \int_0^e \kappa \frac{Q_2^2 dx}{G_2 F_2} + \int_0^e \kappa \frac{Q_3^2 dx}{G_3 F_3} + \int_0^e \kappa \frac{Q_4^2 dx}{G_4 F_4} + \\ & + \int_0^e \frac{N_1^2 dx}{E_1 F_1} + \int_0^e \frac{N_2^2 dx}{E_2 F_2} + \int_0^e \frac{N_3^2 dx}{E_3 F_3} + \int_0^e \frac{N_4^2 dx}{E_4 F_4} + \\ & + \int_0^e \frac{M_1^2 dx}{E_1 J_1} + \int_0^e \frac{M_2^2 dx}{E_2 J_2} + \int_0^e \frac{M_3^2 dx}{E_3 J_3} + \int_0^e \frac{M_4^2 dx}{E_4 J_4} \end{aligned}$$

Коэффициент  $\kappa$ , который сопровождает перерезывающие силы  $Q$ , учитывает неравномерное распределение касательных напряжений по перчному сечению при изгибе и зависит от формы сечения.

Для прямоугольного сечения  $\kappa = \frac{b}{3}$

В формуле 328 (как и в дальнейшем) учет среза лишь от сил  $Q$  и не учтено влияние среза от сил  $T_x$

Так как силы  $T_x$  являются линейными функциями от  $x$ , то они могут быть представлены в виде

$$T_x = a \cdot x \quad (329)$$

Тогда

$$N_1 = (a_1 + a_2) \cdot x \quad (330)$$

$$N_2 = (a_2 + a_3) \cdot x \quad (331); \quad N_3 = (a_4 + a_3) \cdot x \quad (332); \quad N_4 = (a_1 + a_4) \cdot x \quad (333)$$

$$M_1 = \left[ -\frac{1}{h} + b(-a_1 + a_2) \right] \cdot x \quad (334)$$

$$M_2 = \left[ -\frac{1}{b} + h(a_2 - a_3) \right] \cdot x \quad (335)$$

$$M_3 = \left[ \frac{1}{h} + b(a_3 - a_4) \right] \cdot x \quad (336)$$

$$M_4 = \left[ \frac{1}{b} + h(a_1 - a_4) \right] \cdot x \quad (337)$$

\*) Коэффициент  $a$  устанавливается в результате решения уравнений 324-327



Подставив значения усилий  $Q$ ,  $N$  и  $M$  в формулу (328), находим:

$$\delta_{11} = \frac{6}{5} \cdot \frac{e}{G_1 F_1} m_G + \frac{e^3 (a_1 + a_2)^2}{3 E_1 F_1} \cdot \int_E + \frac{e^3 \left[ -\frac{1}{h} + b(a_2 - a_1) \right]^2}{3 E_1 J_1} \cdot \int_J$$

или

$$\delta_{11} = \frac{e^3}{3 E_1 F_1} (a_1 + a_2)^2 \cdot \int_E \left\{ 1 + \frac{18}{5} \cdot \frac{1}{e^2} \cdot \frac{m_G}{\int_E} \cdot \frac{1}{(a_1 + a_2)^2} \cdot \frac{E_1}{G_1} + \frac{\int_J}{\int_E} \cdot \frac{\left[ -\frac{1}{h} + b(a_2 - a_1) \right]^2 \cdot \frac{F_1}{J_1}}{(a_1 + a_2)^2} \right\} \quad (338)$$

В формуле (338) приняты следующие обозначения:

$$\int_E = 1 + \left( \frac{a_2 + a_3}{a_1 + a_2} \right)^2 \cdot \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} + \left( \frac{a_4 + a_3}{a_1 + a_2} \right)^2 \cdot \frac{E_1 F_1}{E_3 F_3} + \left( \frac{a_1 + a_4}{a_1 + a_2} \right)^2 \cdot \frac{E_1 F_1}{E_4 F_4} \quad (339)$$

$$\int_J = 1 + \left[ \frac{-\frac{1}{b} + h(a_2 - a_3)}{-\frac{1}{h} + b(a_2 - a_1)} \right]^2 \cdot \frac{E_1 J_1}{E_2 J_2} + \left[ \frac{\frac{1}{h} + b(a_3 - a_4)}{-\frac{1}{h} + b(a_2 - a_1)} \right]^2 \cdot \frac{E_1 J_1}{E_3 J_3} + \left[ \frac{\frac{1}{b} + h(a_1 - a_4)}{-\frac{1}{h} + b(a_2 - a_1)} \right]^2 \quad (340)$$

Для определения перемещения  $\Delta_{1P}$  необходимо рассмотреть два состояния: в первом состоянии основная система загружена обобщенным моментом  $X$ , во втором состоянии только вертикальные стеночки основной системы загружены внешним моментом  $M$ . При этом срезающие силы на вертикальных стеночках равны  $\frac{M}{b}$ , а силы  $T_x$ , определенные из уравнений 324-327, представляются в виде:

$$T_x = c x \quad (341)$$

$$N_{p,1} = -(C_1 + C_2) \cdot x \quad (342); \quad N_{p,2} = -(C_2 + C_3) \cdot x \quad (343); \quad N_{p,3} = (C_4 + C_3) \cdot x \quad (344)$$

$$N_{p,4} = -(C_1 + C_4) \cdot x \quad (345)$$

$$N_{p,1} = -b(-C_1 + C_2) \cdot x \quad (346); \quad M_{p,3} = -b(C_3 - C_4) \cdot x \quad (347)$$

$$M_{p,2} = -\left[ -\frac{M}{b} + h(C_2 - C_3) \right] \cdot x \quad (348); \quad M_{p,4} = -\left[ \frac{M}{b} + h(C_1 - C_4) \right] \cdot x \quad (349)$$

$$Q_{p,2} = Q_{p,4} = \frac{M}{b} \quad (350)$$

Перемещение  $\Delta_{1P}$  определяем по формуле Мора:

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} = & \frac{6}{5} \int_0^e \frac{Q_2 \cdot Q_{p,2} dx}{G_2 F_2} + \frac{5}{6} \int_0^e \frac{Q_4 \cdot Q_{p,4} dx}{G_4 F_4} + \int_0^e \frac{N_1 \cdot N_p dx}{E_1 F_1} + \int_0^e \frac{N_2 \cdot N_p dx}{E_2 F_2} + \\ & + \int_0^e \frac{N_3 \cdot N_p dx}{E_3 F_3} + \int_0^e \frac{N_4 \cdot N_p dx}{E_4 F_4} + \int_0^e \frac{M_1 \cdot M_p dx}{E_1 J_1} + \int_0^e \frac{M_2 \cdot M_p dx}{E_2 J_2} + \int_0^e \frac{M_3 \cdot M_p dx}{E_3 J_3} + \\ & + \int_0^e \frac{M_4 \cdot M_p dx}{E_4 J_4} \quad (351) \end{aligned}$$



Подставив в формулу (351) значения  $Q, N, M$ , находим:

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} = & - \left\{ \frac{6}{5} \int_0^e \frac{1}{b} \cdot \frac{M}{B} \cdot \frac{dx}{G_2 F_2} + \frac{6}{5} \int_0^e \frac{1}{b} \cdot \frac{M}{B} \cdot \frac{dx}{G_4 F_4} + \int_0^e (a_1 + a_2) \cdot x (c_1 + c_2) \cdot x \frac{dx}{E_1 F_1} + \right. \\ & + \int_0^e (a_2 + a_3) \cdot x (c_2 + c_3) \cdot x \frac{dx}{E_2 F_2} + \int_0^e (a_4 + a_3) \cdot x (c_4 + c_3) \cdot x \frac{dx}{E_3 F_3} + \int_0^e (a_1 + a_4) \cdot x (c_1 + c_4) \cdot x \frac{dx}{E_4 F_4} + \\ & + \int_0^e \left[ -\frac{1}{h} + b(-a_1 + a_2) \right] \cdot x \cdot b(-c_1 + c_2) \cdot x \cdot \frac{dx}{E_1 J_1} + \int_0^e \left[ -\frac{1}{b} + h(a_2 - a_3) \right] \cdot x \left[ -\frac{M}{B} + h(c_2 + c_3) \right] \cdot x \frac{dx}{E_2 J_2} + \\ & \left. + \int_0^e \left[ \frac{1}{h} + b(a_3 - a_4) \right] \cdot x \cdot b(c_3 - c_4) \cdot x \frac{dx}{E_3 J_3} + \int_0^e \left[ \frac{1}{b} + h(a_1 - a_4) \right] \cdot x \cdot \left[ \frac{M}{B} + h(c_1 - c_4) \right] \cdot x \frac{dx}{E_4 J_4} \right\} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} = & -(a_1 + a_2) \cdot (c_1 + c_2) \cdot \frac{M \rho^3}{3E_1 F_1} \cdot S'_E \left\{ 1 + \frac{18}{5} \cdot \frac{\rho c}{S_E} \cdot \frac{1}{e^2 b^2 (a_1 + a_2) (c_1 + c_2)} \cdot \frac{E_1 F_1}{G_2 F_2} + \right. \\ & \left. + \frac{\left[ -\frac{1}{h} + b(a_1 + a_2) \right] \cdot b(-c_1 + c_2)}{(a_1 + a_2) \cdot (c_1 + c_2)} \cdot \frac{S'_E}{S'_E} \cdot \frac{F_1}{J_1} \right\} \quad (357) \end{aligned}$$

В формуле (357) приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} S'_E = & 1 + \frac{1}{M} \cdot \frac{(a_2 + a_3) (c_2 + c_3)}{(a_1 + a_2) (c_1 + c_2)} \cdot \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} + \frac{1}{M} \cdot \frac{(a_4 + a_3) (c_4 + c_3)}{(a_1 + a_2) (c_1 + c_2)} \cdot \frac{E_1 F_1}{E_3 F_3} + \frac{1}{M} \cdot \frac{(a_1 + a_4) (c_1 + c_4)}{(a_1 + a_2) (c_1 + c_2)} \cdot \frac{E_1 F_1}{E_4 F_4} \\ S'_J = & \frac{1}{M} \left\{ 1 + \frac{\left[ -\frac{1}{b} + h(a_2 - a_3) \right] \left[ -\frac{M}{B} + h(c_2 - c_3) \right]}{\left[ -\frac{1}{h} + b(-a_1 + a_2) \right] \cdot b(-c_1 + c_2)} \cdot \frac{E_1 J_1}{E_2 J_2} + \frac{\left[ \frac{1}{h} + b(a_3 - a_4) \right] \cdot b(c_3 - c_4)}{\left[ -\frac{1}{h} + b(-a_1 + a_2) \right] \cdot b(-c_1 + c_2)} \cdot \frac{E_1 J_1}{E_3 J_3} + \right. \\ & \left. + \frac{\left[ \frac{1}{b} + h(a_1 - a_4) \right] \left[ \frac{M}{B} + h(c_1 - c_4) \right]}{\left[ -\frac{1}{h} + b(-a_1 + a_2) \right] \cdot b(-c_1 + c_2)} \cdot \frac{E_1 J_1}{E_2 J_2} \right\} \end{aligned}$$

Решая уравнение (143), находим:

$$\begin{aligned} x_1 = & -\frac{\Delta_{1P}}{S_H} \quad \text{и} \\ K = \frac{x_1}{M} = & -\frac{1}{M} \cdot \frac{\Delta_{1P}}{S_H} \quad (355) \end{aligned}$$

Дальнейшее развитие расчета на кручение коробки, обшивка которой воспринимает изгиб и срез протекает также, как и для выше рассмотренной коробки, обшивка которой воспринимала только срез

В многопролетной коробке за обобщенное перемещение



необходимо принять перемещение по направлению сил  $T_e$  ( $T_e = T_x$  при  $x=e$ ).

Связь между обобщенным перемещением  $\Delta f$  по направлению сил  $T_e$  и силами  $T_e$  устанавливается из следующих соображений:

Зная четыре силы  $T_e$  мы из четырех уравнений нижеприводимого типа находим силы  $M_e$ :

$$M_{e,1} = T_e^{AB} + T_e^{BC} \quad (356)$$

$$M_{e,2} = T_e^{AB} + T_e^{DC} \quad (357)$$

$$M_{e,3} = T_e^{CD} + T_e^{DE} \quad (358)$$

$$M_{e,4} = T_e^{AB} + T_e^{DE} \quad (359)$$

$$T_x = T_e \cdot \frac{x}{e} \quad (360)$$

Из уравнений типа

$$M_x = Q_x + (T_e^I - T_e^{IV}) \cdot b \quad (361)$$

где  $Q$  выражается через обобщенный крутящий момент  $X_1$ , находим изгибающие моменты  $M_x$ . Обобщенный крутящий момент  $X_1$  определяется из условия совместного кручения пары горизонтальных и пары вертикальных стенок.

Из уравнений 356-359 все осевые силы выражаем через  $T_e^{AB}$ . После чего рассматривая два состояния (в первом  $T_e^{AB}$  отлично от единицы, во втором состоянии  $T_e^{AB} = 1$ ), находим по формуле Мора обобщенное перемещение  $\Delta f$ .

Метода, положенная в основу расчета прямоугольных коробок, обшивка которых воспринимает изгиб и срез, может быть распространена и на кручение трапециoidalных коробок, обшивка которых работает на изгиб и на кручение, что и предлагаем читателю выполнить в качестве самостоятельного задания.



245

## §25 Кручение многогранных конвольных оболочек, имеющих применение в конструкциях самолета.

### А Характеристика оболочки и методов решения задачи расчета оболочки.

К оболочкам относят обычно тонкостенные пространственные конструкции, в частности, пустотелые трубы большого диаметра. К оболочкам следует отнести также и коробки, рассмотренные нами выше. В самолетостроении мы встречаемся с оболочками в фюзеляже и крыле с работающей обшивкой. Пространственность тонкостенных конструкций типа оболочек отображается не только в их геометрической форме, но и в их деформациях, осуществляющихся не в одной плоскости. Сплошные балочные конструкции подчиняются гипотезе плоских сечений. В этих конструкциях пренебрегают теми дополнительными напряжениями, которые вызываются деформацией сечения, и полагают, что изгиб таких конструкций от нагрузки параллельной главной плоскости и проходящей через центр жесткости, происходит в плоскости нагрузки. В конструкциях типа оболочек плоскость нагрузки еще не предопределяет плоскость деформаций и изгиб этой конструкции не может быть разложен на составляющие плоского изгиба (как это имеет место, например, в случае косоугольного изгиба балки). Поперечное сечение оболочки при изгибе настолько деформируется, что порой эта деформация играет основную роль в напряженном состоянии оболочки.

В общем случае напряженного состояния элемент, вырезанный из тела оболочки, подвергается изгибу, кручению, сдвигу, растяжению (или сжатию), как это показано на рис. 141.

Вследствие такого сложного напряженного состояния элемента понятие об изгибе и кручении оболочки, вообще говоря, становится условным. Так как в случае нагрузки, которая в большинстве



системах кваліфіцируется как изгибающая, элементы оболочки не свободны от кручения и, наоборот, в случае кручения элементы оболочки не свободны от изгиба.

В теории упругости, где задача решается наиболее точно с наименьшим количеством гипотез, в отношении оболочек все же делается допущение, что любая прямая линия, перпендикулярная поверхности оболочки до деформации остается прямой и перпендикулярной к поверхности оболочки и после деформации. Затем рассматривается общий случай равновесия элемента оболочки; к уравнениям равновесия присоединяется закон Гука, после чего получается дифференциальное уравнение упругой поверхности оболочки в частных производных. Решение этих уравнений с удовлетворением всех условий на поверхности удается лишь в некоторых частных случаях. В настоящее время имеется обширная литература по расчету оболочек, в которой необходимо решение достигается в результате упрощений. Эти упрощения вытекают из того, что некоторыми второстепенными усилиями, действующими на элемент оболочки рис. 141, пренебрегают по сравнению с основными усилиями. Например, в так называемой мембранной теории предполагают, что элемент оболочки подвергается лишь растяжению в двух направлениях (т.е. принимают лишь во внимание усилия  $S$ ). Мембранная теория хорошо себя оправдывает в применении к расчету тонкостенных резервуаров со сферическим днищем и к другим подобным конструкциям, подверженным внутреннему давлению.

В ряде оболочек принимают во внимание лишь срезающие силы (т.е. силы  $T$ ) (безмоментная теория оболочек). Во многих случаях вполне приемлемый ответ дает т. наз. теория складок (разработанная инж. Элерс, Кремер и др), согласно которой оболочка заменяется многогранником и предполагается



что взаимодействие между гранями выражается лишь в виде срезающих сил, всеми остальными усилиями (как-то: изгиб, кручение, растяжение, сжатие) по ребру пересечения граней пренебрегают.

В отношении самих граней предполагается, что в своей плоскости они воспринимают изгиб и срез. Эту теорию мы в дальнейшем распространим на кручение фюзеляжа, обшивка которой воспринимает изгиб и срез. Эту же теорию мы по сути дела применили и к расчету на кручение коробок, грани которых работают на изгиб и на срез в своей плоскости.

Оболочки фюзеляжа с работающей обшивкой, подкрепленные в двух направлениях (шпангоутами и стрингерами), по характеру своей работы находятся, очевидно, в промежутке между классической оболочкой и пустотелой балкой. Это обстоятельство дает повод применить метод последовательных приближений к расчету оболочки фюзеляжа.

В первом приближении фюзеляж трактуется как балка. Во втором и последующих приближениях учитывается деформируемость поперечного сечения оболочки.

Такой метод можно применить в расчете на изгиб фюзеляжа монокок<sup>\*)</sup>

### В. Кручение многогранной оболочки типа фюзеляжа монокок.

Для фюзеляжа монокок также как и для крыла следует различать кручение вдали и вблизи заделки.

Поскольку при кручении вдали от заделки мы ставим обшивку, потерявшую и не потерявшую устойчивость, в одинаковые принципиальные условия, применяя к той и другой принцип

<sup>\*)</sup> Этот метод, аналогичен методу, названному нами методом упругих и жестких дисков и изложенному в нашей работе „Методы расчета пространственных рамных конструкций“ (готовится к печати).



Бредта, то в результате мы имеем какбы кручение однородного сечения. Вследствие чего нет необходимости в применении уравнений метода деформаций.

Формулы (128)-(131) разрешают задачу о кручении вдали заделки.

Расчет на кручение фюзеляжа „монокок“ вблизи заделки мы выполним, применяя метод кручения коробок. Распространение этого метода на фюзеляж базируется на решении ряда вспомогательных задач, приведенных ниже, в порядке их последовательного усложнения.

1. Кручение цилиндрического консольного многогранного отсека, рис. 142, когда поперечное сечение его симметрично относительно осей  $Y$  и  $Z$  и имеет четное число граней.

Отсек разбиваем на ряд коробок с одной парой стенок, которые образуют параллельные грани отсека. Недостающие грани коробки на рис. 142 отмечены пунктиром. На рис. 142 отсек разбит на 10 коробок. Крутящий момент приложен к свободному концу оболочки в плоскости  $ZOY$  и распределяется между гранями в виде срезающих сил. Шпангоут на свободном конце оболочки рассматривается абсолютно жестким в своей плоскости. Предполагается, что обшивка воспринимает только срез, а осевые силы воспринимаются стрингерами, расположенными на пересечении граней.

Совместная работа коробок характеризуется общностью угла закручивания  $\epsilon$ . Вследствие чего распределение крутящего момента  $M$  между вышеуказанными коробками может быть установлено с помощью коэффициентов распределения  $\mu$ , определяемых с достаточным приближением по формуле

$$\mu_n = \frac{\epsilon}{\epsilon_n}$$



Для пользования этой формулой необходимо знание углов закручивания  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  для неполной коробки, состоящей только из пары параллельных граней, рис. 143.

В связи с чем мы и переходим к определению угла закручивания  $\epsilon_n$  для ниже рассматриваемых случаев коробки из двух параллельных стенок.

а) Обе стеночки не потеряли устойчивости.

Момент  $M=1$  распределяется между стеночками в виде пары срезающих сил

$$Q = \frac{M}{2H} = \frac{1}{2H}$$

Осевые силы в стрингерах

$$N_x = \frac{1-x}{2H} \cdot \frac{1}{2b} = \frac{x}{4bH}$$

Стрингера предполагаем одинаковыми по геометрическим размерам и материалу. То же и в отношении стенок.

Тогда из формулы Мора следует:

$$\epsilon_n = \sum \int_0^e \frac{Q_x^2 dx}{GF_{ст.}} + \sum \int_0^e \frac{N_x^2 dx}{E\varphi} = 2 \left( \frac{1}{4H^2} \cdot \frac{e}{GF_{ст.}} \right) + 4 \frac{1}{16b^2H^2} \frac{e^3}{3E\varphi} \quad \text{или}$$

$$\epsilon_n = \frac{e^3}{12b^2H^2E\varphi} \left( 1 + 6 \frac{e^2}{e^2} \frac{E\varphi}{GF_{ст.}} \right) \quad \text{или}$$

$$\epsilon_n = \frac{e^3}{12b^2H^2E\varphi} (1 + 6\alpha) \quad (362)$$

Если не учитывать влияния осевых сил в стрингерах, то для коробки с несимметричными стеночками

$$\epsilon_n = \left( \frac{1}{4H^2} \cdot \frac{e}{GF_{ст.}} \right) + \left( \frac{1}{4H^2} \cdot \frac{e}{GF_{ст.}} \right) \quad (363)$$

Для коробки с симметричными стеночками

$$\epsilon_n = 2 \left( \frac{1}{4H^2} \cdot \frac{e}{GF_{ст.}} \right) \quad (364)$$

При тех же условиях для коробки пстенок, иначе говоря для многогранной оболочки

$$\epsilon_n = \sum \frac{1}{4H^2} \cdot \frac{e}{GF_{ст.}} \quad (364a)$$



250  
Для коробки, стеночки которой представляют из себя фермы

$$\epsilon_n = \sum \frac{N\sigma}{EF} \quad (364a)$$

где:  $N$ -осевые усилия в стержнях фермы от срезающей силы  $\frac{1}{n}$ , приложенной в плоскости фермы,  $E$ -модуль упругости материала стержня;

$F$ -площадь поперечного сечения стержня. Суммирование  $\sum$ -распространяется на грани коробки или многогранной ферменной оболочки.

б) Обе стеночки потеряли устойчивость и превратились в диагонально-растянутое поле.

Тогда, если не учитывать изгиб стрингеров и деформацию шпангоутов, из формулы Мора вытекает:

$$\epsilon_n = \sum \frac{\sigma^2 \rho}{E_{ст.} F_{ст.}} + \sum \int_0^e \frac{N_x^2 \cdot dx}{EF} \quad (364b)$$

$$\sigma = \frac{2Q}{F_{ст.} \sin 2\varphi} = \frac{e}{2n F_{ст.} \sin 2\varphi} = \frac{1}{n F_{ст.} \sin 2\varphi}$$

$$N_{1x} = \frac{1 \cdot x}{4bH} - \frac{1}{2n \operatorname{tg} \varphi}$$

$$N_{2x} = \frac{1 \cdot x}{4bH} + \frac{2}{2n \operatorname{tg} \varphi}$$

Когда  $x=e$ ;  $N_2 = N_1 \cdot t_2$  где

$$t_2 = \frac{e \cdot 2n \operatorname{tg} \varphi + 4bH}{e \cdot 2n \operatorname{tg} \varphi - 4bH} = \frac{e \operatorname{tg} \varphi + 2b}{e \operatorname{tg} \varphi - 2b}$$

$$N_{3x} = N_{2x}; \quad N_{4x} = N_{1x}$$

Подставив значения  $\sigma$  и  $N$  в формулу (364b), находим:

$$\epsilon_n = 2 \frac{e}{H^2 \sin^2 2\varphi E_{ст.} F_{ст.}} + 2 \left( \frac{1}{16b^2 H^2} \cdot \frac{e^3}{3E\varphi} + 2 \frac{1}{8bH^2 \operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{e^2}{2E\varphi} + \frac{1}{4H^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot \frac{e}{E\varphi} \right) +$$

$$+ 2 \left( \frac{1}{16b^2 H^2} \cdot \frac{e^3}{3E\varphi} - 2 \frac{1}{8bH^2 \operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{e^2}{2E\varphi} + \frac{1}{4H^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot \frac{e}{E\varphi} \right) \text{ или}$$

$$\epsilon_n = 2 \frac{e^3}{48b^2 H^2 E\varphi} \left[ \frac{e}{H^2 \sin 2\varphi E_{ст.} F_{ст.}} \cdot \frac{48b^2 H^2 E\varphi}{e^3} + 1 + 2 \frac{e \cdot 48b^2 H^2 E\varphi}{4H^2 \operatorname{tg}^2 \varphi E\varphi e^2} \right] \text{ или}$$

$$\epsilon_n = \frac{e^3}{24b^2 H^2 E\varphi^2} \left[ 48 \omega_1 + 24 \frac{b^2}{e^2} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \varphi} + 1 \right] \quad (365)$$



б) Одна стеночка не потеряла устойчивости (например верхняя), а другая потеряла устойчивость и превратилась в диагональное растянутое поле.

В этом случае согласно формулы Мора имеем:

$$\varepsilon_n = \frac{e}{(H \sin 2\varphi)^2 E_{ст.} F_{ст.}} + \frac{e}{4H^2 G F_{ст.}} + 2 \frac{1}{16b^2 H^2} \cdot \frac{e^3}{3E\varphi} + 2 \frac{1}{4H^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot \frac{e}{E\varphi} \quad \text{или}$$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{8b^2 H^2} \cdot \frac{e^3}{3F\varphi} \left[ 1 + 12 \frac{b^2}{e^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \varphi} + 24\alpha_1 + \frac{9}{4}\alpha \right] \quad (366)$$

В формулах (365) и (366) принято обозначение

$$\alpha_1 = \frac{b^2}{e^2} \cdot \frac{E\varphi}{E_{ст.} F_{ст.}} \cdot \frac{1}{\sin^2 2\varphi}$$

## 2. Кручение цилиндрического незамкнутого отсека.

В качестве примера рассмотрим кручение отсека, образованного из отсека рис. 143 удалением граней  $R$  и  $R'$  и представленного на рис. 144.

Результаты изучения кручения незамкнутого цилиндрического отсека могут быть приложены к расчету на кручение срезавляжа с учетом отверстий в обшивке.

По предыдущему, рассматриваемый отсек разбиваем на коробки, из которых одна состоит из трех граней. Эта коробка представлена на рис. 145. Нам предстоит определить для этой коробки угол закручивания  $\varepsilon_n$ .

Из всех возможных случаев состояния граней коробки, мы рассмотрим лишь случай, когда все стеночки коробки не потеряли устойчивости.

Рассмотрение остальных случаев состояния граней коробки оставляется читателю для самостоятельного упражнения.

Изучим равновесия сил, действующих на коробку. Стеночки коробки воспринимают срезающие силы  $Q_1, Q_2$  и  $Q_3$  (см. рис. 146), стрингера воспринимают осевые силы  $N_1, N_2, N_3$  и  $N_4$



252 -8-  
Составляем уравнения равновесия:

1.  $\Sigma y = 0$  или  $Q_2 \cos \alpha - Q_3 \cos \alpha = 0$ , откуда

$$Q_2 = Q_3 = Q \quad (367)$$

2.  $\Sigma z = 0$  или  $Q_1 + Q_2 \sin \alpha + Q_3 \sin \alpha = 0$ , откуда

$$Q_1 = -2Q \sin \alpha \quad (368)$$

3.  $\Sigma M_x = 0$  или  $Q_1 d + M = 0$ , откуда

$$Q_1 = -\frac{M}{d} \quad (369)$$

Из уравнений (368) и (369) вытекает:

$$Q = \frac{M}{2d \sin \alpha} \quad (370)$$

4.  $\Sigma x = 0$  или  $N_1 - N_2 - N_3 + N_4 = 0$ , откуда

$$N_2 - N_4 = N_1 - N_3 \quad (370a)$$

5.  $\Sigma M_z = 0$   $-N_1 h - N_3 h + N_2 h + N_4 h = 0$  или  $(N_2 + N_4) - (N_1 + N_3) = 0$

откуда  $N_2 + N_4 = N_1 + N_3 \quad (370b)$

Из совместного решения уравнений (370a) и (370b), вытекает:

$$N_2 = N_1 - N_{II} \quad (371) \quad \text{и} \quad N_4 - N_3 = N_{II} \quad (372)$$

$\Sigma M_y = 0$  или  $(N_3 + N_4) b_1 - (N_1 + N_2) (b_1 + 2b_2) = 0$  или

$$N_{II} - N_I \left(1 + 2 \frac{b_2}{b_1} \sin \alpha\right) = 0, \quad \text{откуда}$$

$$N_{II} = N_I \left(1 + 2 \frac{b_2}{b_1} \sin \alpha\right) \quad (373)$$

Из уравнений равновесия вытекает, что в корытообразной коробке срезавшие силы  $Q_1$ ,  $Q_2$  и  $Q_3$  определяются из трех уравнений плоской статики.

Четыре же осевых сил не определяются из оставшихся трех уравнений статики.

Однако, система все же статически определима, т.к. осевые силы в поясах определяются из рассмотренных отдельных стенок, как плоских двух поясных балочек (см. замечание, сделанное в отношении кручения прямоугольных коробок).

После того, как изучены общие условия равновесия



253

коробки, представленной на рис. 14Б, переходим к определению угла закручивания  $\epsilon_n$ , когда все стеночки коробки не потеряли устойчивости. Осевая сила  $N_I$  в этом случае определяется по формуле

$$N_I = \frac{Q_x}{2H} = \frac{M_x}{4dHS \sin \alpha}$$

$$N_{II} = N_I \left( 1 + 2 \frac{b_2}{b_1} \sin \alpha \right) = \frac{M \left( 1 + 2 \frac{b_2}{b_1} \sin \alpha \right)}{4dHS \sin \alpha} \cdot x$$

Из формулы Мора следует

$$\epsilon_n = \sum \int_0^e \frac{Q_x^2 dx}{G F_{CT}} + \sum \int_0^e \frac{M_x^2 dx}{E I} = \left( \frac{1}{d} \right)^2 \frac{e}{G F_1} + 2 \left( \frac{1}{2d \sin \alpha} \right)^2 \frac{e}{G F_2} +$$

$$+ 2 \left( \frac{1}{4dHS \sin \alpha} \right)^2 \frac{e^3}{3 E I_1} + 2 \left( \frac{1 + 2 \frac{b_2}{b_1} \sin \alpha}{4dHS \sin \alpha} \right)^2 \frac{e^3}{3 E I_3}$$

$$\epsilon_n = \frac{1}{d^2} \frac{e}{G F_1} \left( 1 + \frac{1}{2 \sin \alpha} \frac{F_1}{F_2} \right) + \frac{1}{24(dHS \sin \alpha)^2} \frac{e^3}{E I_1} \left[ 1 + \left( 1 + 2 \frac{b_2}{b_1} \sin \alpha \right)^2 \frac{I_1}{I_3} \right]$$

$$\epsilon_n = \frac{1}{24(dHS \sin \alpha)^2} \frac{e^3}{E I_1} \left\{ 24 \frac{(HS \sin \alpha)^2}{e^2} \frac{E I_1}{G F_1} \left( 1 + \frac{1}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{F_1}{F_2} \right) + \right.$$

$$\left. + \left( 1 + 2 \frac{b_2}{b_1} \sin \alpha \right)^2 \cdot \frac{I_1}{I_3} + 1 \right\} \quad (374)$$

В формуле (374) принято

$$F_2 = F_3; \quad I_1 = I_2; \quad I_3 = I_4.$$

### 3. Кручение многопролетной оболочки фюзеляжа вблизи заделки.

Подобно тому, как для прямоугольных коробок коэффициент  $\mu$  является функцией  $e$ , коэффициенты  $\mu$  для фюзеляжа также являются функцией  $e$ , в чем легко убедиться из анализа выражений для углов закручивания  $\epsilon_n$ . Поэтому также, как и в случаях длинных прямоугольных коробок, мы оболочку фюзеляжа разбиваем на ряд отсеков (длина отсека равна расстоянию между шпангоутами). В пределах



234  
отсека принимаем все геометрические и физические параметры постоянными.

Расчет производим по смешанному методу.

Переходим к рассмотрению ряда вспомогательных задач, на решении которых будет базироваться применение этого метода.

а) Определение усилий в элементах цилиндрического многогранного отсека рис. 142, когда закрепление стрингеров коробки 1 на шпангоуте В получили обобщенное перемещение  $\Delta f$ .

Пусть закрепления стрингеров только коробки 1 получили перемещение  $\Delta f$ . Такому перемещению, как известно из теории кручения коробок, соответствует самоуравновешивающийся\* крутящий момент в плоскости шпангоута Я. Иначе говоря, если смещение  $\Delta f$  вызовет крутящий момент  $M$  создающийся в коробке 1 срезающими силами в гранях этой коробки, то он должен быть уравновешен крутящим моментом, создающимся срезающими силами в остальных гранях оболочки. В прямоугольной коробке (имеющей четыре грани) этот крутящий момент уравновешивается крутящим моментом, создающимся срезающими силами вертикальных граней. В рассматриваемом нами случае роль недостающих вертикальных граней играют все остальные грани цилиндрического отсека. Стало быть, срезающие силы этих граней и создают крутящий момент в своей совокупности равный  $M$ . В связи с чем момент  $M$  должен быть распределен на  $(n-1)$  коробку с помощью коэффициентов распределения  $\mu_2, \mu_3, \mu_n$  ( $\mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n = 1$ ). После чего определение смещения  $\Delta f$  коробки 1 выполняются также, как и в соответствующем случае для прямоугольной коробки.

Срезающая сила в стеночках коробки 1 равна  $Q_1 = \frac{M}{2H_1}$  осевая



сила в стрингерах этой коробки складывается, например, в стрингере из осевой силы за счет изгиба грани 1 силой  $Q$  и осевой силы за счет изгиба грани 2 срезающей силой  $Q_2 = \frac{M_2 \pi l}{2H_2}$ . Стало быт, осевая сила в стрингере 1, если стеночки коробки не потеряли устойчивости, равна

$$N_1 = \frac{Q_1 \cdot x}{2b_1} + \frac{Q_2 \cdot x}{2b_2} = \frac{\pi l x}{4H_1 b_1} + \frac{M_2 \pi l x}{4H_2 b_2} \quad \text{или}$$

$$N_1 = \frac{\pi l x}{4H_1 b_1} \left( 1 + \frac{M_2 H_1 b_1}{H_2 b_2} \right) \quad (375)$$

Вследствии того, что рассматриваемый нами отсек симметричен относительно осей  $y$  и  $z$ , осевые силы в стрингерах 2, 3 и 4 коробки 1 равны по абсолютной величине осевой силе  $N_1$ . При  $x=e$

$$N_{1e} = \frac{\pi l e}{4H_1 b_1} \left( 1 + \frac{M_2 H_1 b_1}{H_2 b_2} \right) \quad (376)$$

откуда, если сила  $N_{1e}$  известна, то

$$\pi l = \frac{4H_1 b_1 N_{1e}}{e \left( 1 + \frac{M_2 H_1 b_1}{H_2 b_2} \right)} \quad (377)$$

$$Q_1 = \frac{2b_1 N_{1e}}{e \left( 1 + \frac{M_2 H_1 b_1}{H_2 b_2} \right)} \quad (378)$$

$$N_{1x} = \frac{N_{1e} \cdot x}{e} \quad (378a)$$

Когда  $N_{1e} = 1$ , то

$$\pi l = \frac{4H_1 b_1}{e \left( 1 + \frac{M_2 H_1 b_1}{H_2 b_2} \right)} \quad (379)$$

$$Q_1 = \frac{2b_1}{e \left( 1 + \frac{M_2 H_1 b_1}{H_2 b_2} \right)} \quad (380)$$

$$N_{1x} = \frac{x}{e} \quad (381)$$

Для применения метода деформаций необходимо силу  $N_{1e}$  выразить через  $\Delta f_{об.об.}$

Последняя и все остальные задачи связанные с определением усилий в элементах основной системы, принимаемой в расчете на кручение оболочки по смешанному методу могут быть решены



с применением формул - Мора и метода сил, следует тому же пути, который был изложен в расчете на кручение многоконтурных и многопрелетных коробок.

б. Определение зависимости между силами  $N_{1e}$  и смещением  $\Delta f$  закреплений стрингеров коробки 1 на нервюре  $\beta$ .

Для решения поставленной задачи согласно принципа Мора рассматриваем два состояния. В первом состоянии задан момент  $M$  (определяемый по формуле 377) уравновешивающийся моментами  $M_2 M$ ;  $M_3 M$ .

Во втором состоянии заданы четыре силы  $N_{1e} = 1$ , приложенные к стрингерам коробки 1. Перемещение  $\Delta f$  по направлению сил  $N_{1e} = 1$  определяем по формуле Мора.

$$\Delta f = \sum \int_0^e \frac{N_1 N_f dx}{E_f} + \sum \int_0^e \frac{Q_1 Q_f dx}{GF} \quad (A)$$

$N_1$  - осевая сила в стрингерах одного отсека в состоянии, когда  $N_{1e} = 1$

$Q_1$  - перерезывающая сила в гранях отсека в этом же состоянии

$N_f$  - осевая сила в стрингерах одного отсека в состоянии, когда стрингера коробки 1 получили смещения  $\Delta f$ , т.е. в состоянии когда задан момент  $M$  (определяемый по формуле 377)

$Q_f$  - перерезывающая сила в гранях оболочки в этом же состоянии

Суммирование  $\sum$  происходит по поперечному сечению одного отсека.

Согласно формул (377)-(381) в коробке 1.

$$N_{1,x} = \frac{e}{x} \cdot N_{1e} \quad N_f = N_{1e} \cdot \frac{x}{e} \quad (381a)$$

$$Q_1 = \frac{2b_1}{e(1-\mu_2) \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}} \cdot N_{1e} \quad Q_f = \frac{2b_1}{e(1+\mu_2) \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}} \cdot N_{1e} \quad (381b)$$

В коробке 2.

$$N_1 = \left( \frac{M_2 M}{4H_2 b_2} - \frac{M_3 M}{4H_3 b_3} \right) \cdot x = \mu_2 \cdot \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2} \cdot \frac{1}{1+\mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}} \cdot \frac{x}{e} \left( 1 - \frac{M_3}{M_2} \frac{H_2 b_2}{H_3 b_3} \right)$$



$$Q_1 = \frac{H_2 M}{2 H_2} = 2 M_2 \cdot \frac{b_1}{e} \cdot \frac{1}{1 + M_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}}$$

$$M_f = M_2 \cdot \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{1 - \frac{M_3}{M_2} \cdot \frac{H_2 b_2}{H_3 b_3}}{1 + M_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}} \cdot N_{1,e} \quad (381b)$$

$$Q_f = 2 M_2 \frac{H_1}{H_2} \cdot \frac{b_1}{e} \cdot \frac{1}{1 + M_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}} \cdot N_{1,e} \quad (381z)$$

В коробке п.

$$N_1 = M_n \frac{H_1 b_1}{H_n b_n} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{1 - \frac{M_2}{M_n} \cdot \frac{H_n b_n}{H_2 b_2}}{1 + M_n \frac{H_1 b_1}{H_n b_n}}$$

$$Q_1 = 2 M_n \cdot \frac{H_1}{H_n} \cdot \frac{b_1}{e} \cdot \frac{1}{1 + M_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}}$$

$$M_f = M_n \frac{H_1 b_1}{H_n b_n} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{1 - \frac{M_2}{M_n} \cdot \frac{H_n b_n}{H_2 b_2}}{1 + M_n \frac{H_1 b_1}{H_n b_n}} \quad (381d)$$

$$Q_f = 2 M_n \frac{H_1}{H_n} \cdot \frac{b_1}{e} \cdot \frac{1}{1 + M_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}} \cdot N_{1,e} \quad (381e)$$

Подставив значения  $N_1$ ,  $M_f$ ,  $Q_1$ ,  $Q_f$  в формулу  $A$ , находим:

$$\Delta f = \frac{N_{1,e} \rho}{3 E_1 f_1} \cdot A_E \left( \frac{2 b_1}{1 + M_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}} \right)^2 \cdot \frac{M_{1,e}}{e G_1 f_1} \cdot A_G \quad (5)$$

или

$$\Delta f = \frac{N_{1,e} \rho}{3 E_1 f_1} \cdot A_E \left[ 1 + 2 \alpha \cdot \frac{1}{\left( 1 + M_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2} \right)^2} \cdot \frac{A_G}{A_E} \right] \quad (382)$$

В формуле (382) приняты следующие обозначения:

$$A_E = 2 \left[ 2 + \left( M_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2} \cdot \frac{1 - \frac{M_3}{M_2} \cdot \frac{H_2 b_2}{H_3 b_3}}{1 + M_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}} \right)^2 \cdot \frac{E_1 f_1}{E_2 f_2} + \dots + \left( M_n \frac{H_1 b_1}{H_n b_n} \cdot \frac{1 - \frac{M_2}{M_n} \cdot \frac{H_n b_n}{H_2 b_2}}{1 + M_n \frac{H_1 b_1}{H_n b_n}} \right)^2 \cdot \frac{E_1 f_1}{E_n f_n} \right]$$

$$A_G = 2 \left[ 1 + \left( 2 M_2 \frac{H_1}{H_2} \right)^2 \cdot \frac{G_1 f_1}{G_2 f_2} + \dots + \left( 2 M_n \cdot \frac{H_1}{H_n} \right)^2 \cdot \frac{G_1 f_1}{G_n f_n} \right]$$



Из формулы (382) находим  $M_{1,e}$ , когда известно  $\Delta f$

$$M_{1,e} = \frac{3E_1 I_1}{e} \cdot \frac{1}{A_E \left[ 1 + 12 \alpha \frac{1}{\left( 1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2} \right)^2} \cdot \frac{A_6}{A_5} \right]} \cdot \Delta f \quad (383)$$

б) Определение самоуравновешивающего момента  $\delta M$  и усилий в элементах отсека, когда стрингера коробки 1 загружены системой сил  $P_i$  на шпангоуте  $A$ .

Рассматриваемое нагружение силами  $P_i$  представлено на рис. 147. Самоуравновешивающий момент  $\delta M$  определяется из канонического уравнения метода сил:

$$\delta M \cdot \delta_{MM} + \Delta M P = 0 \quad (384)$$

Перемещение  $\delta_{MM}$  определяем по формуле Мора:

$$\delta_{MM} = \sum \int_0^e \frac{M_m^2 dx}{E I^2} + \sum \int_0^e \frac{Q_m^2 dx}{GF} \quad (B)$$

В формуле (B)  $M_m$  и  $Q_m$  соответственно осевая сила и перерезывающая сила в состоянии, когда  $M=1$

в коробке 1:

$$M_{1,x} = \frac{x}{4H_1 b_1} \left( 1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2} \right) \quad (388) \quad [\text{см. ф-лу (376)}]$$

$$Q_1 = \frac{1}{2H_1} \quad (389)$$

в коробке 2:

$$M_{2,x} = \left( \frac{\mu_2}{4H_2 b_2} - \frac{\mu_3}{4H_3 b_3} \right) \cdot x = \frac{\mu_2}{4H_2 b_2} \left( 1 - \frac{\mu_3}{\mu_2} \cdot \frac{H_2 b_2}{H_3 b_3} \right) \cdot x \quad (390)$$

$$Q_2 = \mu_2 \frac{1}{2H_2} \quad (391)$$

в коробке n:

$$M_{n,e} = \frac{\mu_n}{4H_n b_n} \cdot \left( 1 - \frac{\mu_2}{\mu_n} \cdot \frac{H_n b_n}{H_2 b_2} \right) \cdot x \quad (392)$$

$$Q_n = \mu_n \cdot \frac{1}{2H_n} \quad (392a)$$



Подставив значения  $Q_m$  и  $N_m$  в формулу (B), находим:

$$\delta_{mm} = \left(1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{e}{4 H_1 b_1}\right)^2 \cdot \frac{e \rho}{3 E_1 f_1} \cdot \beta_E \left[1 + 12 \frac{\beta_G}{\beta_E} \alpha \cdot \frac{1}{\left(1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}\right)^2}\right] \quad (393)$$

где

$$\beta_E = 2 + \left(\frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1 - \frac{\mu_3}{\mu_2} \cdot \frac{H_2 b_2}{H_3 b_3}}{1 + \mu_2 \cdot \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}}\right)^2 \cdot \frac{E_1 f_1}{E_2 f_2} + \dots + \frac{H_1 b_1}{H_n b_n} \cdot \left(\frac{1 - \frac{\mu_2}{\mu_n} \cdot \frac{H_n b_n}{H_2 b_2}}{1 + \mu_2 \cdot \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}}\right) \cdot \frac{E_1 f_1}{E_n f_n} \quad (393a)$$

$$\beta_G = 1 + \mu_2^2 \left(\frac{H_1}{H_2}\right)^2 \cdot \frac{G_1 F_1}{G_2 F_2} + \dots + \mu_n^2 \left(\frac{H_1}{H_n}\right)^2 \cdot \frac{G_1 F_1}{G_n F_n} \quad (393b)$$

Перемещение  $\Delta_{mp}$  определяется из рассмотрения двух состояний основной системы (эта система состоит раздельно из коробки 1 и всей остальной неразделенной части фюзеляжа), в первом состоянии  $\delta \delta l = 1$ , во втором состоянии к коробке 1 приложены силы  $P_i$ , вызывающие постоянное осевое усилие только в поясах коробки 1.

Согласно формуле Мора:

$$\Delta_{mp} = \left[4 \int_0^e \frac{P_i x}{4 H_1 b_1} \left(1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}\right) \frac{dx}{E_1 f_1} = -P_i \cdot \frac{e^2}{2 H_1 b_1} \left(1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}\right) \frac{1}{E_1 f_1}\right]$$

Подставив значения перемещений  $\delta_{mm}$  и  $\Delta_{mp}$  в уравнение (384) и решая его относительно  $M$  находим:

$$\delta \delta l = P_i \frac{12 H_1 b_1}{e} \cdot \frac{1}{\left(1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}\right) \beta_E \left[1 + 12 \frac{\beta_G}{\beta_E} \alpha \cdot \frac{1}{\left(1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}\right)^2}\right]} \quad (394)$$

Усилия в элементах оболочки определяются по следующим формулам:

Коробка 1:

$$N_{1,x} = \frac{\delta \delta l x}{4 H_1 b_1} \left(1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}\right) - P_i \quad (395)$$

$$Q_1 = \frac{\delta \delta l}{2 H_1} \quad (396)$$

Коробка 2:

$$N_{2,x} = \frac{\delta \delta l x}{4 H_2 b_2} \cdot \mu_2 \left(1 - \frac{\mu_3}{\mu_2} \cdot \frac{H_2 b_2}{H_3 b_3}\right) \quad (397)$$

$$Q_2 = \mu_2 \frac{\delta \delta l}{2 H_2} \quad (398)$$



Коробка 3:

$$N_{n,x} = \frac{\mathcal{M}_x}{4Hnb_n} \cdot \mu_n \left( 1 - \frac{M_{nn}}{M_n} \cdot \frac{Hnb_n}{H_{nn}b_{nn}} \right) \quad (399)$$

$$Q_n = \mu_n \frac{\mathcal{M}}{2H_n} \quad (400)$$

2) Определение усилий в элементах отсека, когда закрепления стрингеров коробки 1 имеются на шпангоуте 4 и на шпангоуте 2 и когда к коробке приложен момент  $M$  (образуемый двумя срезающими силами  $\frac{M}{2H}$ , приложенными к поперечным сечениям граней коробки 1).

Рассматриваемый отсек представляет собой многогранную внешне-статически неопределимую коробку. Лишними независимыми неизвестными являются силы  $P_i$ , возникающие в четырех стрингерах коробки 1 на шпангоуте 4. Эти силы определяются из конечного уравнения метода сил:

$$P_i \delta_{ii} + \Delta_{iP} = 0 \quad (401)$$

Перемещение  $\delta_{ii}$  определяем по формуле Мора, пользуясь выражениями (395)-(400) усилий в элементах многогранника:

$$\begin{aligned} \delta_{ii} = & 4 \int_0^e \left[ \frac{\mathcal{M}_x}{4H_1b_1} \left( 1 + \mu_2 \frac{H_1b_1}{H_2b_2} \right) - 1 \right]^2 \frac{dx}{E_1F_1} + 2 \int_0^e \left[ \frac{\mathcal{M}_x}{4H_2b_2} \mu_2 \left( 1 - \frac{M_3}{M_2} \frac{H_2b_2}{H_3b_3} \right) \right]^2 \frac{dx}{E_2F_2} + \dots + \\ & + 2 \int_0^e \left[ \frac{\mathcal{M}_x}{4Hnb_n} \cdot \mu_n \left( 1 - \frac{M_2}{M_n} \cdot \frac{Hnb_n}{H_2b_2} \right) \right]^2 \frac{dx}{E_nF_n} + 2 \left( \frac{\mathcal{M}_1}{2H_1} \right)^2 \frac{e}{G_1F_1} + \\ & + 2 \left( \frac{M_2 \mathcal{M}_1}{2H_2} \right)^2 \frac{e}{G_2F_2} + \dots + 2 \left( \frac{M_n \mathcal{M}_1}{2H_n} \right)^2 \frac{e}{G_nF_n} \quad \text{или} \end{aligned}$$

$$\delta_{ii} = \frac{e}{E_1F_1} \left\{ \frac{E_1F_1}{e} \delta_{MM} + \left[ 1 + \mu_2 \frac{H_1b_1}{H_2b_2} \right] \right\} \quad (402)$$

В формуле (402) перемещение  $\delta_{MM}$  определяется по формуле (393), момент  $\mathcal{M}_1$ , определяется по формуле (394) при  $P_i=1$ .

Перемещение  $\Delta_{iP}$  определяется по формуле Мора:

$$\Delta_{iP} = \sum \int_0^e \frac{N p_i N_m dx}{E F} + \sum \int_0^e \frac{Q p_i Q_m dx}{G F} \quad (403)$$



261

где:  $N_p$  - осевая сила в стрингере коробки 1, в состоянии, когда  $P=1$   
 $Q_p$  - срезывающая сила в поперечном сечении грани коробки 1 в том же состоянии.

Усилия  $N_p$  и  $Q_p$  определяются по формулам (395) - (400), если заменить в этих формулах  $\partial \eta$  на  $\partial \eta_1$  и  $P$  на единицу.

$N_M$  - осевая сила в стрингере коробки 1, когда эта коробка загружена моментом  $M$ ;

$Q_M$  - перерезывающая сила в поперечном сечении грани коробки 1 в том же состоянии нагружения.

$$N_M = \frac{M \cdot x}{4H_1 b_1} \quad (404)$$

$$Q_M = \frac{M}{2H_1} \quad (405)$$

Подставив значения усилий  $N$  и  $Q$  в формулу (403) и выполнив соответствующее интегрирование (которое относится только к элементам коробки 1), находим:

$$\Delta_{1P} = - \left\{ \frac{M}{4(H_1 b_1)^2} \cdot \frac{e^2}{3E_1 I_1} \left[ \partial \eta_1 \left( 1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2} \right) - 6 \frac{H_1 b_1}{e} + 24 \alpha \partial \eta_1 \right] \right\} \quad (407)$$

После чего из уравнения (401) следует:

$$P = - \frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{\frac{M}{4(H_1 b_1)^2} \cdot e^2 \left[ \partial \eta_1 \left( 1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2} \right) - 6 \frac{H_1 b_1}{e} + 24 \alpha \partial \eta_1 \right]}{\frac{E_1 I_1 \cdot \delta_{1111}}{e} + \left[ 1 - 2 \frac{\mu_1}{4H_1 b_1} \left( 1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2} \right) \cdot \frac{e}{2} \right]} \quad (408)$$

Полные усилия в стрингерах и обшивке многогранника определяются по нижеприводимым уравнениям:

Коробка 1

$$N_{1,x} = \frac{M \cdot x}{4H_1 b_1} - P_1 \cdot \frac{\partial \eta_1 \cdot x}{4H_1 b_1} \cdot \left( 1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2} \right) + P_1 \quad (409)$$

$$Q_1 = \frac{P_1 \partial \eta_1}{4H_1 b_1} + \frac{M}{2H_1} \quad (410)$$

Коробка 2

$$N_{2,x} = \frac{P_1 \partial \eta_1 \cdot x}{4H_2 b_2} \cdot \mu_2 \left( 1 - \frac{\mu_3}{\mu_2} \cdot \frac{H_2 b_2}{H_3 b_3} \right) \quad (411)$$



$$Q_2 = \frac{M_2 P_i \alpha \alpha_1}{2H_2} \quad (412)$$

Коробка n

$$N_{n,x} = \frac{P_i \alpha \alpha_1 x}{4H_n b_n} \cdot M_n \left( 1 - \frac{H_2}{M_n} \cdot \frac{H_n b_n}{H_2 b_2} \right) \quad (413)$$

$$Q_n = \frac{M_n P_i \alpha \alpha_1}{2H_n} \quad (414)$$

В формулах (409)-(414)  $P_i$  определяется по формуле (408),  $\alpha \alpha_1$  определяется по формуле (394) положив в этой формуле  $P_i = 1$ .

а) Определение усилий в стрингерах и обшивке отеска, когда крепления стрингеров имеются на шпангоуте А и на шпангоуте В и когда крепления стрингеров коробки 1 на шпангоуте В получили обобщенное смещение  $\Delta f$ .

Задача решается подобно предыдущей, учитывая лишь новое нагружение коробки 1, что отображается на перемещении  $\Delta f$ . Последнее заменяется на  $\Delta f$  и определяется по формуле Мора, рассматривая два состояния: в первом состоянии стрингера коробки 1 на шпангоуте А нагружены осевыми силами  $P_i = 1$ . Усилия в стрингерах и обшивке многогранника в первом состоянии определяются по формулам (395)-(400), положив в них  $P_i = 1$ .

Во втором состоянии коробка 1 освобожденная от креплений стрингеров на шпангоуте А (основная система) нагружена обобщенным смещением  $\Delta f$ . Усилия в многограннике во втором состоянии определяются по формулам (381а)-(381в), в которых  $M_{i,e}$  определяется по формуле (383).

Из сказанного относительно определения  $\Delta f$ , следует:



$$\Delta_{i,\beta} = - \left[ 4 \int_0^e \frac{N_i \cdot N_{f,i}}{E_i f_i} dx + 2 \left( \int_0^e \frac{N_2 \cdot N_{f,2}}{E_2 f_2} dx + \dots + \int_0^e \frac{N_n \cdot N_{f,n}}{E_n f_n} dx + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \left( \frac{Q_1 \cdot Q_{f,1} \cdot e}{G_1 F_1} + \frac{Q_2 \cdot Q_{f,2} \cdot e}{G_2 F_2} + \dots + \frac{Q_n \cdot Q_{f,n} \cdot e}{G_n F_n} \right) \right] \quad (415)$$

В формуле (415) усилия, относящиеся к состоянию  $P_i=1$  снабжены индексами 1, 2, ..., n соответственно номерам коробок, а усилия относящиеся к состоянию, когда закрепления струнгеров на шпангоуте  $\beta$  испытали смещение  $\Delta\beta$ , снабжены помимо индексов 1, 2, ..., n также индексом  $f$ . Подставляя в формулу (415) значения усилий  $N_n, Q_n$  по формулам (395)-(400) при  $P_i=1$  и значения усилий  $N_{f,n}, Q_{f,n}$  по формуле (381a)-(381e)-(383), находим:

$$\Delta_{i,\beta} = - \left\{ 4 \int_0^e \left[ \frac{\partial \sigma_{i,x} \cdot \left( 1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2} \right) - 1}{4 H_1 b_1} \right] N_{i,e} \cdot e^{\frac{x}{e}} \cdot \frac{dx}{E_i f_i} + \right. \\ \left. + 2 \left[ \int_0^e \frac{\partial \sigma_{i,x}}{4 H_2 b_2} \cdot \mu_2 \left( 1 - \frac{\mu_3}{\mu_2} \cdot \frac{H_2 b_2}{H_3 b_3} \right) \cdot \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{1 - \frac{\mu_3}{\mu_2} \cdot \frac{H_2 b_2}{H_3 b_3}}{1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}} \cdot N_{i,e} \cdot \frac{dx}{E_2 f_2} + \dots + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^e \frac{\partial \sigma_{i,x}}{4 H_n b_n} \cdot \mu_n \left( 1 - \frac{\mu_2}{\mu_n} \cdot \frac{H_n b_n}{H_2 b_2} \right) \cdot \mu_n \frac{H_1}{H_n} \cdot \frac{e}{e} \cdot \frac{1}{1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}} \cdot N_{i,e} \right] + \right. \\ \left. + 2 \left[ \frac{\partial \sigma_{i,x}}{2 H_1} \cdot \frac{2 b_1}{e \left( 1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2} \right)} \cdot N_{i,e} \cdot \frac{e}{G_1 F_1} + \frac{H_2 \partial \sigma_{i,x}}{2 H_2} \cdot \mu_2 \frac{H_1}{H_2} \cdot \frac{2 b_1}{e} \cdot \frac{1}{1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}} \cdot N_{i,e} + \dots + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{H_n \partial \sigma_{i,x}}{2 H_n} \cdot \mu_n \cdot \frac{H_1}{H_n} \cdot \frac{2 b_1}{e} \cdot \frac{1}{1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}} \cdot N_{i,e} \right\} \quad \text{или} \\ \Delta_{i,\beta} = - \left\{ 2 \frac{\partial \sigma_{i,x} \cdot \left( 1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2} \right)}{4 H_1 b_1} \cdot N_{i,e} \frac{e}{3 E_i f_i} \cdot \beta_E \left[ 1 + \frac{\frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}}{\left( 1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2} \right)^2} \cdot \frac{\beta_G}{\beta_E} \right] - \right. \\ \left. - 2 N_{i,e} \frac{e}{E_i f_i} \right\} \quad (416)$$



В формуле (416):

$M_{1,e}$  - определяется по формуле (383)

$\beta_E$  - определяется по формуле (3932)

$\beta_G$  - определяется по формуле (3936)

Из уравнения (401) следует:

$$P_1 = -\frac{\Delta_{1f}}{\delta_{11}} = 2 \frac{\gamma \gamma_1 \left( 1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2} \right) \cdot \frac{e}{3} \cdot \beta_E \cdot \left[ 1 + \frac{12 \alpha}{\left( 1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2} \right)^2} \cdot \frac{\beta_G}{\beta_E} \right] - 1}{\frac{E_1 P_1}{e} \cdot \delta_{11} + \left[ 1 - 2 \frac{\mu_1}{4 H_1 b_1} \left( 1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2} \right) \cdot \frac{e}{2} \right]} \cdot M_{1,e} \quad (417)$$

Полные усилия в стрингерах и обшивке многогранника определяются по нижеприводимым уравнениям:

Коробка 1:

$$N_{1,x} = M_{1,e} \cdot \frac{x}{e} - P_1 \left[ \frac{\gamma \gamma_1 \cdot x}{4 H_1 b_1} \left( 1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2} \right) - 1 \right] \quad (418)$$

$$Q_1 = \frac{2 b_1}{e \left( 1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2} \right)} \cdot M_{1,e} - P_1 \cdot \frac{\gamma \gamma_1}{2 H_1} \quad (419)$$

Коробка 2:

$$N_{2,x} = \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{1 - \frac{\mu_3}{\mu_2} \cdot \frac{H_2 b_2}{H_3 b_3}}{1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}} - P_1 \frac{\gamma \gamma_1 \cdot x}{4 H_2 b_2} \cdot \mu_2 \left( 1 - \frac{\mu_3}{\mu_2} \cdot \frac{H_2 b_2}{H_3 b_3} \right) \quad (420)$$

$$Q_2 = \mu_2 \frac{H_1}{H_2} \cdot \frac{2 b_1}{e} \cdot \frac{1}{1 + \mu_2 \frac{H_1 b_1}{H_2 b_2}} - P_1 \frac{\mu_2 \gamma \gamma_1}{2 H_2} \quad (421)$$

Коробка n:

$$N_{n,x} = \mu_n \frac{H_1 b_1}{H_n b_n} \cdot \frac{x}{e} \cdot \frac{1 - \frac{\mu_2}{\mu_n} \cdot \frac{H_2 b_2}{H_n b_n}}{1 + \mu_n \frac{H_1 b_1}{H_n b_n}} \cdot M_{1,e} - P_1 \gamma \gamma_1 \frac{x}{4 H_n b_n} \cdot \mu_n \left( 1 - \frac{\mu_2}{\mu_n} \cdot \frac{H_2 b_2}{H_n b_n} \right) \quad (422)$$

$$Q_n = \mu_n \frac{H_1}{H_n} \cdot \frac{2 b_1}{e} \cdot \frac{1}{1 + \mu_n \frac{H_1 b_1}{H_n b_n}} \cdot M_{1,e} - P_1 \frac{\mu_n \gamma \gamma_1}{2 H_n} \quad (423)$$

В формулах (418) - (423)  $P_1$  - определяется по формуле (417);  $\gamma \gamma_1$  - определяется по формуле (394) при  $P_1 = 1$ .



$M_{12}$  - определяется по формуле (323)

\* \* \*

Задачи, решенные нами для коробки 1 должны быть аналогичным образом решены и для остальных коробок.

Методика расчета кручения коробок распространяется также и на многогранные оболочки с нечетным числом граней и на оболочки, у которых имеются зоны обшивки, потерявшие и не потерявшие устойчивость.

Расчет на кручение оболочки, состоящей из нескольких отсеков, вблизи заделки по смешанному методу подобен расчету на кручение вблизи заделки многоконтурной и многопролетной коробки и состоит в следующем:

1. Разделение многогранной оболочки на отдельные двухстенчатые многопролетные коробки (если число граней четное, в противном случае оболочка делится на двухстенчатые коробки и одну трехстенчатую коробку).

2. Определение угла закручивания каждой из вышеуказанных коробок в отдельности от крутящего момента  $M=1$ , прикладываемого последовательно в сечениях каждого данного отсека, на которые разделена оболочка. Эта задача решается по методу деформаций. Для чего образуют основную систему из заданной введением в последнюю закреплений стрингеров (принадлежащих рассматриваемой коробке) на промежуточных шпангоутах.

Смещения, которые испытывают сечения стрингеров изучаемой коробки на промежуточных шпангоутах, определяются из трехчленных уравнений метода деформаций:

$$\left. \begin{aligned} z_1 \cdot \gamma_{11} + z_2 \cdot \gamma_{12} + \gamma_{1p} &= 0 \\ z_1 \cdot \gamma_{21} + z_2 \cdot \gamma_{22} + z_3 \cdot \gamma_{23} + \gamma_{2p} &= 0 \\ \dots & \dots \\ z_{n-1} \cdot \gamma_{n,n-1} + z_n \cdot \gamma_{nn} + \gamma_{np} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (T)$$



Реакции  $T_{лк}$  и  $T_{пр}$  определяются в закреплениях стрингеров только изучаемой коробки, пользуясь эпюрой осевых сил, построенной для указанных стрингеров в основной системе\*) (решение соответствующих задач подготовлено выше)

После того, как определены перемещения  $Z_n$  из уравнений  $T$ , находят усилия в стрингерах и обшивке коробки, а затем по формуле Мора определяют угол закручивания в интересующем сечении коробки. При этом можно пренебречь влиянием осевых сил в стрингерах на угол закручивания коробки.

3. Определение коэффициентов распределения и распределение внешних крутящих моментов в изучаемых сечениях между коробками многогранной оболочки и определение окончательных усилий в стрингерах и обшивке оболочки.

с. Кручение вблизи заделки многогранной консольной оболочки, обшивка которой воспринимает срез и изгиб.

Толщина граней  $\delta$  незначительна, так что в пределах этой толщины предполагаем равномерное распределение напряжений, а также пренебрегаем изгибом из плоскостей граней и их кручением.

Основная методика решения стоящей перед нами задачи заимствуется из выше рассмотренного расчета на кручение вблизи заделки фюзеляжа „монокок“, обшивка

\*) Основная система для рассматриваемой двухстенчатой коробки представляет собой коробку состоящую из двух граней, окаймленных по продольным сторонам стрингерами. Недостающие стеночки коробки осуществляются оставшейся обшивкой оболочки. Стрингера рассматриваемой коробки имеют закрепления на промежуточных шпангоутах



которого воспринимает только срез, и прямоугольной коробки, обшивка которой воспринимает изгиб и срез.

Для вывода формул, которыми вычисляются коэффициенты распределения внешнего крутящего момента между коробками, состоящими из пары параллельных граней, необходимо уметь определять угол закручивания  $\theta_n$  от крутящего момента  $M=1$ , приложенного к одной из вышеупомянутых коробок, на которые подразделена многогранная оболочка. С тем, чтобы конкретизировать рассуждения об определении угла закручивания  $\theta_n$  определим угол закручивания  $\theta_n$  коробки 1, недостающие вертикальные грани которой на рис. 148 обозначены пунктиром.

Крутящий момент  $M=1$ , приложенный к коробке 1, осуществляется срезающими силами  $Q_1 = \frac{1}{H_1}$ , приложенными в плоскости граней 1 рис. 148.

Ставим своей непосредственной задачей определить срезающие напряжения, которые возникают в гранях в местах их взаимного пересечения, иначе говоря в ребрах 0, 1, 2, ..., n

Для этой цели, сечениями по ребрам разбиваем оболочку на ряд отдельных граней (см. рис. 149) и взаимодействие этих граней заменяем соответствующими касательными напряжениями  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n$ , приложенными по наружным продольным ребрам граней.

Из равновесия части грани 1 длиной  $x$  рис. 150 вытекает:

$$1 \sum X = 0 \text{ или:}$$

$$-N_1 + T_{0,x} - T_{1,x} = 0, \text{ откуда}$$

$$N_1 = T_{0,x} - T_{1,x} \quad (424)$$

$$\text{где: } T_{0,x} = \int_0^x \delta \cdot \tau_0 \cdot dx \quad \text{и} \quad T_{1,x} = \int_0^x \delta \cdot \tau_1 \cdot dx$$



2.  $\sum Z = 0$  или:

$$-\frac{1}{H_1} + Q_1 = 0, \text{ откуда}$$

$$Q_1 = \frac{1}{H_1} \quad (425)$$

3.  $\sum M_y = 0$  или:

$$-M_1 + Q_1 \cdot x + T_{0,x} \cdot b + T_{1,x} \cdot b = 0, \text{ откуда:}$$

$$M_1 = Q_1 \cdot x + T_{0,x} \cdot b + T_{1,x} \cdot b \quad (426)$$

Во всех остальных гранях:

$$Q = 0 \quad (427)$$

$$N_n = T_{n-1,x} - T_{n,x} \quad (428)$$

$$M_n = T_{n-1,x} \cdot b + T_{n,x} \cdot b \quad (429)$$

Нормальные напряжения в ребре 0 определяются по ф-ле:

$$\sigma'_{0,x} = \frac{M_1}{W_{t1}} + \frac{N_1}{F_1} = \frac{\frac{x}{H_1} + T_{0,x} \cdot b + T_{1,x} \cdot b}{W_{t1}} + \frac{T_{0,x} - T_{1,x}}{F_1}; \text{ или}$$

$$\sigma'_{0,x} = T_{0,x} \left( \frac{b}{W_{t1}} + \frac{1}{F_1} \right) + T_{1,x} \left( \frac{b}{W_{t1}} - \frac{1}{F_1} \right) + \frac{x}{H} \cdot \frac{1}{W_{t1}} \quad (430)$$

По аналогичной формуле определяются нормальные напряжения в ребре 1:

$$\sigma'_{1,x} = -\frac{M_1}{W_{t1}} + \frac{N_1}{F_1} = -\frac{\frac{x}{H} + T_{0,x} \cdot b + T_{1,x} \cdot b}{W_{t1}} + \frac{T_{0,x} - T_{1,x}}{F_1}; \text{ или}$$

$$\sigma'_{1,x} = -T_{0,x} \left( \frac{b}{W_{t1}} - \frac{1}{F_1} \right) - T_{1,x} \left( \frac{b}{W_{t1}} + \frac{1}{F_1} \right) - \frac{x}{H} \cdot \frac{1}{W_{t1}} \quad (431)$$

Во всех остальных гранях нормальные напряжения в продольных крайних волокнах определяются по нижеприведенным формулам для грани n

$$\sigma_{n-1,x}^{(n)} = \frac{M_n}{W_{tn}} + \frac{N_n}{F_n} = T_{n-1,x} \left( \frac{b}{W_{tn}} + \frac{1}{F_n} \right) + T_{n,x} \left( \frac{b}{W_{tn}} - \frac{1}{F_n} \right) \quad (432)$$

$$\sigma_{n,x}^{(n)} = -T_{n-1,x} \left( \frac{b}{W_{tn}} - \frac{1}{F_n} \right) - T_{n,x} \left( \frac{b}{W_{tn}} + \frac{1}{F_n} \right) \quad (433)$$

Условия типа:  $\sigma_{n-1,x}^{(n)} = \sigma_{n,x}^{(n)}$  приводят к следующим уравнениям для определения сил  $T_{n,x}$ :



$$\sigma_{1,x}^{(1)} = \sigma_{2,x}^{(1)}$$

$$T_{0,x} \left( \frac{b}{W_{t1}} - \frac{1}{F_1} \right) - T_{1,x} \left( \frac{b}{W_{t1}} + \frac{1}{F_1} \right) - \frac{x}{H} \cdot \frac{1}{W_{t1}} = T_{1,x} \left( \frac{b}{W_{t2}} + \frac{1}{F_2} \right) + T_{2,x} \left( \frac{b}{W_{t2}} - \frac{1}{F_2} \right) \quad \text{или:}$$

$$T_{0,x} \left( \frac{b}{W_{t1}} - \frac{1}{F_1} \right) + T_{1,x} \left( \frac{b}{W_{t1}} + \frac{1}{F_1} + \frac{b}{W_{t2}} + \frac{1}{F_2} \right) + T_{2,x} \left( \frac{b}{W_{t2}} - \frac{1}{F_2} \right) = -\frac{x}{H} \cdot \frac{1}{W_{t1}}$$

$$\sigma_{2,x}^{(2)} = \sigma_{3,x}^{(2)}$$

$$T_{1,x} \left( \frac{b}{W_{t2}} - \frac{1}{F_2} \right) + T_{2,x} \left( \frac{b}{W_{t2}} + \frac{1}{F_2} + \frac{b}{W_{t3}} + \frac{1}{F_3} \right) + T_{3,x} \left( \frac{b}{W_{t3}} - \frac{1}{F_3} \right) = 0$$

$$\sigma_{3,x}^{(3)} = \sigma_{4,x}^{(3)}$$

$$T_{2,x} \left( \frac{b}{W_{t3}} - \frac{1}{F_3} \right) + T_{3,x} \left( \frac{b}{W_{t3}} + \frac{1}{F_3} + \frac{b}{W_{t4}} + \frac{1}{F_4} \right) + T_{4,x} \left( \frac{b}{W_{t4}} - \frac{1}{F_4} \right) = 0$$

и т.д.

После того, как из решения уравнений (434) найдены силы  $T_k$ , имеется возможность по формулам (424)-(433) определить усилия в каждой из граней. Угол закручивания  $E$ , коробки 1, состоящей из пары параллельных граней, определяется по Мору:

$$E_1 = 2 \left( \int_0^e \frac{M_1^e dx}{E J_{t1}} + \int_0^e \kappa \frac{Q_1^e dx}{G F_1} + \int_0^e \frac{N_1^e dx}{E F_1} \right)$$

Коэффициент  $\kappa$ , который сопровождает перерезывающую силу  $Q_1$ , зависит от формы сечения. Для прямоугольного сечения  $\kappa = \frac{6}{5}$ .

Так как продольно-срезающая сила  $T_k$  есть линейная функция  $x$ , то силы  $T_{0,x}$  и  $T_{1,x}$  после решения уравнений (434) представляются в виде:

$$T_{0,x} = a_0 \cdot x; \quad T_{1,x} = a_1 \cdot x.$$

Подставив эти выражения для силы  $T_{0,x}$  и  $T_{1,x}$  в уравнения (424) и (426), находим:

$$N_1 = a_0 \cdot x - a_1 \cdot x = (a_0 - a_1) x$$

$$M_1 = \frac{1}{H_1} \cdot x + a_0 \cdot b \cdot x + a_1 \cdot b \cdot x = \left[ \frac{1}{H_1} + (a_0 + a_1) b \right] \cdot x$$



Кроме того

$$Q_1 = \frac{1}{H_1}$$

После чего угол закручивания  $\epsilon_1$  представляется в виде:

$$\epsilon_1 = 2 \left( \int_0^e \frac{[\frac{1}{H_1} + (a_0 + a_1) \cdot b]^2 x^2 dx}{E J_{t1}} + \frac{6}{5} \int_0^e \frac{(\frac{1}{H_1})^2 dx}{G F_1} + \int_0^e \frac{(a_0 - a_1)^2 x^2 dx}{E F_1} \right)$$

или

$$\epsilon_1 = 2 \left\{ \frac{[\frac{1}{H_1} + (a_0 + a_1) \cdot b]^2 e^3}{3 E J_{t1}} + \frac{6}{5} \frac{(\frac{1}{H_1})^2 e}{G F_1} + \frac{(a_0 - a_1)^2 e^3}{3 E F_1} \right\} \text{ или}$$

$$\epsilon_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{[\frac{1}{H_1} + (a_0 + a_1) \cdot b]^2 e^3}{E J_{t1}} \left\{ 1 + 3 \frac{E J_{t1}}{5 G F_1} \cdot \left[ \frac{\frac{1}{H_1}}{e [\frac{1}{H_1} + (a_0 + a_1) \cdot b]} \right]^2 + \frac{J_{t1}}{F_1} \cdot \left[ \frac{a_0 - a_1}{\frac{1}{H_1} + (a_0 + a_1) \cdot b} \right]^2 \right\} \quad (435)$$

(\*) В формуле (435) учтено влияние среза лишь от сил  $Q$  и не учтено влияние среза от сил  $T_x$ .

Аналогичным образом определяется угол закручивания от момента  $M=1$ , приложенного последовательно к коробкам 2, 3, ..., n

После чего возможно использовать формулы  $\epsilon = \frac{1}{\sum \frac{1}{\epsilon_n}}$  и  $M_n = \frac{\epsilon}{\epsilon_n}$  для распределения внешнего крутящего момента между коробками 1, 2, ..., n, на которые разбита рассматриваемая нами многогранная оболочка.

Имея моменты, воспринимаемые каждой из коробок 1, 2, ..., n определяем усилия в гранях этой коробки из формул типа:

$$N_n = (a_{n-1} - a_n) \cdot x \quad (436)$$

$$Q_n = \frac{M_n \cdot M}{H_n} \quad (437)$$

$$M_n = [Q_n + (a_{n-1} + a_n) \cdot b] \cdot x \quad (438)$$

Нормальные напряжения в поперечном сечении грани определяется по формуле:

$$\sigma_n = \pm \frac{M_n}{W_{\sigma n}} + \frac{N_n}{F_n}$$

Касательные напряжения проверяются по формуле (323)

Дальнейшее развитие расчета на кручение консольной многогранной оболочки, состоящей из нескольких отсеков и обшивка которой воспринимает изломы и срез протекает подобно расчету на кручение оболочки, обшивка которой воспринимает только срез.



# ЗАДАЧИ

к. I<sup>ой</sup> части



## Глава I. Узлы

1. Произвести расчет балок рис. 1, 2, 3 по пластическим деформациям с применением принципа независимого от действия сил и без такого. Сравнить полученные результаты и сделать заключение о применимости принципа независимого действия сил в расчете по пластическим деформациям.

Ответ: Принцип независимого действия сил в расчете по пластическим деформациям не применим.

2. Проверить несущую способность деревянной неразрезной балки рис. 4. Коэффициент формы определить по американской теории и по теории Прагера. Сделать заключение из сравнения полученных результатов.

3. Для балки рис. 5 (поперечное сечение балки см. рис. 4) проверить максимальные касательные напряжения в  $V$ , где вертикальная стеночка приклеивается к полке.

Указание: Необходимо рассмотреть равновесие элемента полки длиной  $dx$  рис. 6.

4. Определить запас прочности рамной системы рис. 7.

Указание: Определение моментов производится, исходя из равенства максимальных пролетных и опорных моментов горизонтального стержня.

5. Произвести расчет неразрезной двухпоясной балки рис. 8.

Указание: Необходимо составить канонические уравнения метода сил приняв за лишние неизвестные опорные моменты. При определении перемещений по формуле Мора необходимо учесть влияние осевых сил в поясах и срезающих сил в стеночках. В первом предположении



стеночки принимаются до потери устойчивости.

6. Расчет балки рис. 8 произвести, применив уравнение Клатейрона (уравнения 3-х моментов). Полученные результаты сравнить с результатами решения задачи 5.

Произвести расчет балки рис. 8, предполагая ее деревянной и имеющей сечение, показанное на рис. 9.

7. Сравнить усилия и максимальные прогибы двух балок рис. 10 и 11, стеночки которых не потеряли устойчивости. Сделать вывод относительно полезности применения наклонных поясов.

8. Сравнить максимальные прогибы балки рис. 10 со стеночкой, до и после потери устойчивости.

9. Построить эпюры усилий и проверить прочность двухпоясной балки рис. 12 в предположении а) стеночка не потеряла устойчивость, б) стеночка обратилась в диагонально растянутое поле.

10. Также, что и задача 9, но применительно к деревянной балке, имеющей сечение рис. 13.

11. Также, что и задача 9 для балки с наклонными поясами рис. 14.

12. Также, что и задача 11, но применительно к деревянной балке, имеющей сечение рис. 15.

13. Для многопоясной балки рис. 16 составить формулы для определения радиальных сжимающих напряжений на уровне осей верхних и промежуточных поясов.

Изучить, что полезнее с точки зрения устойчивости балки: введение ли горизонтальных поясов или вертикальных стоек.

Указание: Методом, изложенная в § 9. 2 I<sup>ая</sup>



распространяется и на рассматриваемую задачу, предположив, что между осевыми силами существует линейная зависимость рис. 17.

Следует также проверить вариант решения в предположении, что линейная зависимость существует между нормальными напряжениями в поясах. В этом случае осевые силы зависят от площади поперечного сечения поясов.

14. Составить формулы для определения усилий в балке рис. 18.

Профиль сечения балки имеет профиль дужки кривла. Учесть работу носика и хвостика и принять в целях упрощения, что стенки балки параллельны.

Рассмотреть два варианта: стенки до потери устойчивости и стенки после потери устойчивости.

УКАЗАНИЕ: Совместить пояса и стенки, расчет произвести как для двухпоясной балки.

15. Пользуясь результатами решения задачи 14, произвести расчет балки рис. 18 при таких данных:

$$P = 1300 \quad H_1 = 600$$

$$l = 900 \text{ мм.} \quad d = 180$$

$$a = 300 \text{ мм.} \quad d_1 = 420$$

$$\delta = 1 \text{ мм.}$$

Сечение лонжеронов рис. 9.

16. Задачу 14 повторить для балки рис. 19, когда пояса не параллельны и стенки не потеряли устойчивости.

17. Пользуясь результатами решения задачи 16 произвести расчет балки рис. 19 при таких (дана на этом же рис.)

18. Составить формулы для расчета по пластиче-



ским деформациям внецентренно нагруженной деревянной стойки прямоугольного сечения рис. 20.

Указание: Предварительно намечается схема эпюры нормальных напряжений рис. 21. Положение нулевой линии и длина отдельных участков эпюры требует определения нескольких параметров.

Для этой цели составляются уравнения равновесия и уравнения геометрического характера, устанавливающие соотношение между вышеуказанными параметрами и вытекающие из эпюры нормальных напряжений рис. 21.

Принцип независимого действия сил неприменим.

19. Метод решения задачи 18 распространить на коробчатое сечение; установить формулу для коэффициента формы.

20. Пользуясь данными решения задачи 19 произвести расчет внецентренно-сжатой деревянной стойки коробчатого сечения. Рис. 22.

21. Установить величину и расстояние между заклепками двух поясной балки рис. 23, когда стеночка не потеряла устойчивости.

22. Также, что и задача 21, но в предположении, что стеночка потеряла устойчивость.

23. Для балки симметричного сечения рис. 24 необходимо:

а) построить эпюру касательных напряжений в поперечном сечении,

б) определить диаметр и расстояние между заклепками.

24. Сравнить касательные напряжения в поперечном сечении балок рис. 25а и 25б, когда профиль сечения



прямоугольник и тогда профиль сечения швеллер. В обоих случаях сила проходит через центр жесткости сечения. Сделать вывод относительно влияния на касательные напряжения введения полки.

25. Для сечения А-А балки рис. 26 определить центр жесткости двумя способами:

- а) центр жесткости, как центр тяжести моментов инерции элементов  $d\sigma$  контура поперечного сечения;
- б) центр жесткости, как центр тяжести внутренних сдвигающих сил  $dT$  сравнить полученные результаты.

Указание: Необходимо установить положение центра тяжести и направление главных осей. Момент инерции элемента  $d\sigma$  контура поперечного сечения определяется, как произведение площади  $d\sigma \cdot \delta$  на квадрат координаты. Моментом инерции площади  $d\sigma \cdot \delta$  относительно собственной оси можно пренебречь. Также пренебречь переменностью момента инерции, которая вытекает из наличия отверстия в обшивке.

26. Построить линию центров жесткости для балочной системы рис. 27.

27. Построить линию центров жесткости для ферменной системы рис. 28.

28. Для балочной системы рис. 27 определить эпюру сдвигающих сил, пользуясь методом распределения изгибающих моментов пропорционально жесткостям, (т.е. исходя из равенства кривизны упругих линий). Полученный результат сравнить с соответствующими данными, извлекаемыми из решения задачи 26.

29. Произвести расчет рамы рис. 29 при следуюц  $\kappa$



данных:

сечение лонжерона коробчатого:  $H=750$ ;  $b=260$ ;  $\delta=3,0$ ;

$$T=150; \quad t=120.$$

сечение подвесок трубы  $d \times d_1 = 180 \times 420$

$$l=300; \quad L=1000; \quad a=500; \quad T=2000$$

30. Произвести расчет рамы рис. 29 по данным в задаче 29, полагая,  $H=0$  сравнить полученный изгибающий момент в сечении 2-2 с изгибающим моментом в том же сечении, полученном в результате решения задачи 29.

## Глава II кручение.

31. Для трапециoidalной коробочки рис. 30 определить от кручения вблизи заделки осевые силы в поясах и срезающие силы в стеночках не потерявшие устойчивости и воспринимающих только срез.

32. Для трапециoidalной коробочки рис. 30 определить от кручения вблизи заделки угол закручивания в плоскости диска  $A$ . Стеночки не потеряли устойчивости и воспринимают только срез.

33. Составить формулу для определения от кручения вблизи заделки усилий в элементах коробочки с переменным прямоугольным сечением рис. 31. Стеночки воспринимают только срез.

Указания: На решение данной задачи распространяется метод расчета на кручение коробочки с постоянным прямоугольным сечением (см. § 18 ч. I <sup>918</sup>) с тем, однако, что стеночки коробочки рассматриваются как двухпоясные балки с наклонными поясами.

34. Составить формулу для определения угла закру-



чивания коробки, указанной в задаче 33.

35. Пользуясь результатами решения задач 33 и 34 произвести расчет на кручение коробки рис. 31.

36. Задачи 33 и 34 повторить для коробки трапециодального сечения рис. 32. (Дать решение в общем виде)

37. Пользуясь результатами решения задачи 36 произвести расчет на кручение коробки рис. 32.

38. Составить формулы для определения от кручения вблизи заделки хилий в элементах коробки постоянного трапециодального сечения рис. 30, когда все стеночки этой коробки потеряли устойчивость.

Указание: На решение данной задачи распространяется метод, рассмотренный в § 19 г. I.

39. Определить угол закручивания вблизи заделки коробки указанной в задаче 38.

40. Пользуясь результатами решения задач 38 и 39 произвести расчет на кручение вблизи заделки коробки рис. 30.

41. Сравнить угол закручивания вблизи заделки коробки с постоянным прямоугольным сечением в двух состояниях:

а) стеночки коробки не потеряли устойчивости,

б) стеночки коробки потеряли устойчивость и превратились в диагонально растянутое поле.

Данные: рис. 41-а.

42. Сравнить угол закручивания коробки вблизи заделки с постоянным трапециодальным сечением в двух состояниях:

а) стеночки коробки не потеряли устойчивости



и воспринимают только срез,

б) стенок коробки потеряли устойчивость и превратились в диагонально растянутое поле.

43. Сравнить угол закручивания двух коробок вблизи заделки, одна из которых имеет постоянное прямоугольное сечение, а другая — постоянное трапециoidalное сечение. Обшивка не потеряла устойчивость и воспринимает только срез.

Данные: рис. 30 и 41.а.

44. Установить влияние на угол закручивания сечения закреплений поясов коробки вблизи заделки прямоугольного постоянного сечения и коробки трапециoidalного постоянного сечения. Обшивка не потеряла устойчивость и воспринимает только срез.

Данные: рис. 30 и 41.а

45. Построить линию центров жесткости для трубы трапециoidalного сечения рис. 32. Допустить, что кручение происходит по Бредту, и что обшивка не потеряла устойчивость и воспринимает только срез.

Указание: Действительный продольный профиль бруса заменить ступенчатым.

46. Построить линию центров жесткости для трубы полукруглого сечения рис. 33. Допустить, что кручение происходит по Бредту и что обшивка не потеряла устойчивости и воспринимает только срез.

47. Определить центр жесткости в сечении  $\alpha-\alpha$  трубы рис. 34, постоянного сечения. Уравнение кривой

$$ABC: y_1 = \frac{4h_1}{t} \sqrt{t \cdot x - x^2}$$

$$\text{Уравнение кривой } ABC: y_2 = \frac{4h_2}{t} \sqrt{t \cdot x - x^2}$$

Сравнить результаты от применения аналитического



интегрирования и от замены интегрирования на суммирование (разбивка контура на участки  $ds$ )

48. а) Обнаружить ошибку в следующем предложении определять касательные напряжения изгиба в тонкостенном двухсвязном сечении рис. 35а:

Исходя из равенства прогибов двух элементов профиля рис. 35-б находим распределение срезывающей силы  $Q$  на элемент  $1$  и на элемент  $2$ . Пользуясь для этой цели формулами § 12 в  $I^{ог}$ . Прогибы  $f_1$  и  $f_2$  от единичных срезывающих сил  $Q_1 = 1$  и  $Q_2 = 1$ , проходящих через центр жесткости соответственно элементов  $1$  и  $2$ , находим по формуле Мора исходя из эпюр интенсивности срезывающей силы представленных на рис. 35в.

После того, как найдено распределение силы на элемент  $1$  и  $2$ , центр жесткости определяется как точка, лежащая на пересечении линии действия равнодействующей сил.

б) Указать, как исправить обнаруженную ошибку.

49. Построить линию центров жесткости для трубы, предложенной в задаче 45; допустив, что условия Бредта не соблюдены (кручение вблизи заделки).

Сравнить полученные результаты с результатами решения задачи 45.

50. Сравнить результаты расчета на кручение вблизи заделки коробки рис. 3б от применения двух способов:

а) раскосы фермы заменяются фиктивной сплошной стеночкой, пользуясь формулой замены 162 в  $I^{ог}$ .

б) коробка квалифицируется, как стержневая система, состоящая из сплошных и ферменных стенок



(см. § 18 ч. I<sup>92</sup>).

50. Построить линию центров жесткости для ферменной коробки с переменным трапециoidalным сечением, рис. 28.

51. Произвести расчет на кручение многоконтурной коробки рис. 37. и определить центр жесткости этой коробки в состояниях:

а) стеночки коробки не потеряли устойчивости и воспринимают только срез.

б) стеночки коробки потеряли устойчивость и превратились в диагонально растянутое поле.

52. Произвести расчет на кручение многопролетной коробки с постоянным прямоугольным сечением рис. 38.

Стеночки коробки не потеряли устойчивости и воспринимают только срез.

53. Произвести расчет на кручение многопролетной коробки с постоянным трапециoidalным сечением рис. 30.

Стеночки коробки не потеряли устойчивости и воспринимают только срез.

Полученные результаты сравнить с результатами решения задачи 51.

54. Произвести расчет на кручение вблизи заделки многопролетной и многоконтурной коробки рис. 40. Стеночки коробки не потеряли устойчивости и воспринимают только срез. Для этой коробки построить линию центров жесткости.

55. Произвести расчет на кручение вблизи заделки коробки прямоугольного сечения рис. 41, обшивка которой воспринимает изгиб и срез. Полученные результаты сравнить с результатами решения задачи 41.



56. Определить центр жесткости в сечении  $\alpha-\alpha$  вблизи заделки коробки рис. 42, обшивка которой воспринимает изгиб и срез. Полученный результат сравнить с центром жесткости той же коробки в предположении, что обшивка воспринимает только срез.

57. Произвести расчет на кручение вблизи заделки коробки треугольного сечения рис. 43, обшивка которой воспринимает изгиб и срез. Определить центр жесткости в сечении  $\alpha-\alpha$  этой коробки.

58. Определить центр жесткости вблизи заделки в сечении  $\alpha-\alpha$  коробки треугольного сечения рис. 43, обшивка которой воспринимает только срез.

59. Произвести расчет на кручение вблизи заделки многопролетной и многоконтурной коробки рис. 44, стенки коробки не потеряли устойчивости и воспринимают только срез.

60. Для коробки предложенной в задаче 59 построить линию центров жесткости.

61. Произвести расчет на кручение вблизи многогранной оболочки рис. 45, в предположении, что обшивка воспринимает только срез и работает в условиях до потери устойчивости.

62. Произвести расчет на кручение вблизи заделки многогранной оболочки рис. 45 в предположении, что обшивка воспринимает только срез и работает в условиях диагонально растянутого поля. Полученные результаты сравнить с результатами решения задачи 61.

63. Произвести расчет на кручение вблизи заделки многогранной оболочки рис. 46 в предположении, что по-



яса отсутствуют и обшивка воспринимает изгиб и срез.

Полученные результаты сравнить с результатами решения задачи 61.

64. Произвести расчет на кручение незамкнутой многогранной оболочки рис. 47, обшивка оболочки воспринимает только срез и работает в условиях до потери устойчивости. Полученные результаты сравнить с результатами решения задачи 45.

65. Произвести расчет на кручение незамкнутой многогранной оболочки, рис. 47, обшивка оболочки воспринимает только срез и работает в условиях после потери устойчивости. Полученные результаты сравнить с результатами решения задачи 45.

66. Произвести расчет на кручение незамкнутой многогранной оболочки рис. 48, предположив отсутствие стрингеров и работу обшивки на изгиб и срез. Сравнить полученные результаты с результатами решения задачи 65.

67. Определить центр жесткости в сечении  $\alpha-\alpha$  оболочек, указанных в задачах 61-66. Сделать заключение и сравнение полученных результатов.

68. Произвести расчет на кручение вблизи заделки многогранной оболочки рис. 47, обшивка которой воспринимает только срез при следующих предположениях:

а) обшивка работает в условиях до потери устойчивости,

б) обшивка работает в условиях диагонально-растянутого поля,

в) обшивка находится в смещенном состоянии

Зоны диагонально-растянутого поля наметить само-



стоятельно.

69. Определить центр жесткости в сечении а-а бруса рис. 49 в предположении, что сечение а-а находится вдали заделки. Сечение постоянно по длине бруса. Данные для дужки взять из атласа профилей Горского. Сравнить положение центра плоскости с центром парусности.

Хорда дужки 100 см.

70. Определить усилия от кручения многогранной ферменной оболочки рис. 50.

71. Определить центр жесткости лонжерона типа „моноспар“. Сечение лонжерона коробчатое рис. 51.

Указание: В расчете на изгиб вводится только лонжерон и для сечения лонжерона строится эпюра  $q_p$ . В расчете на кручение вводится и лонжерон и „моноспар“. Угол закручивания такой смешанной конструкции определяется по формуле 
$$\epsilon = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2}},$$

коэффициенты распределения  $M_1 = \frac{\epsilon}{\epsilon_1}$ ,  $M_2 = \frac{\epsilon}{\epsilon_2}$ ,  $M_1 + M_2 = 1$ .

Крутящий момент, соответствующий эпюре  $q_p$  определяется по формуле 
$$M = \frac{\epsilon_p}{\epsilon}$$



Замеченные опечатки

Стр	Строка	Напечатано	Исправление
2	9 снизу	№ 193	Вычеркнуть
5	2 "	(как о коэф запаса сечений)	Скобки вычеркнуть
7	11 "	Так, например, в расчете	Так, например, в расчете металлических конструкций.
7	10 "	Из диаграммы 2.	Из диаграммы рис 2
20	4 "	проверяют тот	проверяют тот момент
21	12 "	$M \cdot K_{ст} = K_{из}$	$M \cdot K_{ст} = K_{из}$
41	4 "	и при $x = \bar{x}$ , $y_0 = \int_0^{\bar{x}} \bar{z} d\bar{x} + C_1 \bar{x} + C_2 = 0$	и при $x = \bar{x}$ , $y_0 = \int_0^{\bar{x}} \bar{z} d\bar{x} + C_1 \bar{x} + C_2 = 0$
43	9 сверху	многопорядных	многолонжеронных.
43	12 снизу	имеют незначительную	имеют незначительную толщину.
44	11 "	$\delta$ формах	в фермах
51	3 "	$dR = \frac{M}{R} \cdot \frac{M ds}{EJ} = \frac{M^2 ds}{EJ}$	$dR = \frac{M}{h} \cdot \frac{M ds}{EJ} = \frac{M^2 ds}{h EJ}$
55	14 "	$q_y = G \varphi \sin \varphi$	$q_y = G \varphi \delta \cdot \sin^2 \varphi$
55	5 "	крепится	крепится
55	3 "	Напряжения	Вычеркнуть
56	3 "	$(\sigma_n^i - \sigma_n^i) \cdot \cos \varphi$	$\delta (\sigma_n^i - \sigma_n^i) \cdot \cos^2 \varphi$
58	8 сверху	$= \frac{6300}{436800}$	$= \frac{6300}{4368}$
59	2 снизу	$q_y = \dots\dots\dots$	$q_y = G \varphi \delta \cdot \sin^2 \varphi = 1500 \cdot 0,03 \left(\frac{1/2}{2}\right)^2 = 22,5 \text{ кг/см}$
59	1 "	$q_y = \dots\dots\dots$	$q_y = G \varphi \delta \cdot \sin^2 \varphi = 500 \cdot 0,03 \left(\frac{1/2}{2}\right)^2 = 7,5 \text{ кг/см}$
60	8 сверху	$M_c = 0,151 \cdot 353,5 \cdot 20^2 = \dots\dots$	$M_c = 0,151 \cdot 7,5 \cdot 20^2 = 453 \text{ кг.см}$
60	11 сверху	$= \frac{1350}{5} + \frac{21351,4}{6,285} = \dots\dots$	$= \frac{1350}{5} + \frac{453}{6,285} = 270 + 72 = 342 \text{ кг/см}^2$
60	12 "	$= \frac{750}{5} + \frac{21351,4}{6,285} = 3547 \text{ кг/см}^2$	$= \frac{750}{5} + \frac{453}{6,285} = 322 \text{ кг/см}^2$
92	2 снизу	Теория дает	Теория также дает
94	15 сверху	и анализ Прандтля	и аналогия Прандтля
95	2 "	$y = \bar{z} \cdot \delta$	$q = \bar{z} \cdot \delta = \text{const}$
98	1 снизу	1935 г №	1935 г № 7
102	14 сверху	$K = \frac{M}{\sum G_n y_n^2 \cdot \Delta F}$	Вычеркнуть
104	1 снизу	(141)	Дописать: легко убедиться, что полученные нами усилия и угол закручивания совпадают с соответствующими величинами, получаемыми по формулам Бредта. Это объясняется тем, что треугольная коробка статически определима



Стр.	Строка	Напечатано	Исправление
105	15 и 16 сверху	141а и 141б	Вычеркнуть и приставить к формулам строка 19 сверху.
152	9 сверху	и контуров	из контуров
186	2 "	О расчете по методу сил и по методу деформации.	О расчете по методу сил и м.о. .... Выгодность смешанного метода
186	5 снизу	$\sigma_{II}$	$\sigma_{II}$
188	7 "	разные	равные
194	13 снизу	-	Дописать: и по смешанному методу
196	12 "	и в уравнении	и в уравнении 143
213	Таблица графа 1	-	Ниже $S_3$ дописать три строки: $S_3 + \alpha \frac{m_2}{m_1}$ $P, f$ $M, f$
1	2 сверху	независимо от	независимого
задачи	14 "	в	в и/или
"	17 "	запас прочности	запас прочности
3 задачи	3 снизу	при таких (Дана на этом же рис.)	Вычеркнуть

