НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ МЕТОДОВ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Доценко П. Д.

Широко распространенные в инженерных расчетах стержневых систем методы конечных элементов и начальных параметров обладают существенными недостатками в применении к нестандартным задачам. Известно, что достаточно разработанный метод конечных элементов (МКЭ) в статике, дает заметно худшие результаты в динамических задачах. Применение стандартной процедуры МКЭ даже в задачах статики с неконсервативными или следящими нагрузками, а также для более совершенных моделей (например, типа Тимошенко) приводит к ошибочным результатам. Причина заключается в несоответствии реальных форм деформирования или форм колебаний с аппроксимационными (в виде полиномов третьей или четвертой степени).

Исследование этого вопроса в целях обеспечения точности и сходимости численных процессов для расчета статики и динамики стержневых систем привело к разработке нового, с нашей токи зрения универсального подхода, обеспечивающего в большинстве неклассических задач надежность и точность расчета. Суть идеи заключается в сведении двухточечной задачи к задаче Коши и построении полиномиального решения, точно удовлетворяющего уравнению состояния (статического или динамического) для любых степеней полинома.

Пусть краевая задача сведена к обыкновенному дифференциальному уравнению n-го порядка

$$\frac{d^n z_o}{ds^n} + \alpha_{n-1}\frac{d^{n-1} z_o}{ds^{n-1}} + \ldots + \alpha_1 \frac{dz_o}{ds} + \alpha_o z_o = q(s). \qquad (1)$$

Его можно представить в виде системы n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\frac{dz_{n-1}}{ds} + \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_o z = q(s);\quad \frac{dz_{n-2}}{ds} = z_{n-1};\ \ldots\quad \frac{dz_o}{ds} = z_1. \qquad (2)$$

Коэффициенты α_k отражают геометрические и физические параметры системы, $q(s)$-внешнюю распределенную (приведенную) нагрузку. В задачах устойчивости $\alpha_k=\alpha_k(\lambda)$ (при этом $q=0$), где λ - собственное число задачи. В задачах вынужденных колебаний λ - известный параметр.

Представим $q(s)$ и $z_o(s)$ в виде полиномиальных рядов

$$q(s)=\sum_{k=0} q_k s^k; \quad z_o(s)=\sum_{k=0}(a_k s^k + r_k s^k), \tag{3}$$

где q_k- известные, a_k - подлежащие определению коэффициенты. Подставим выражение (3) в уравнение (1) и приравняем к нулю коэффициенты при одинаковых степенях s. Получим

$$b_{k+n}+\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j b_{k+j}=Q_k \ ; \quad k=0,1,2,3,... \tag{4}$$

Здесь обозначено: $b_m=a_m m!$, $Q_m=q_m m!$. Коэффициенты $R_k=r_k k!$ частного решения, удовлетворяющего уравнению (1) получим заменой в соотношениях (4) b_k на R_k. Имеем рекуррентные соотношения для коэффициентов R_k вида

$$R_{k+n}= Q_k -\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j R_{k+j} \ ; \quad k=0,1,2,3,... \ , \tag{5}$$

где $R_o=R_1= \ ... \ =R_{n-1}= 0$. Коэффициенты общего решения a_k должны удовлетворять соотношениям

$$b_{k+n}= -\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j b_{k+j}; \quad k=0,1,2,3,... \tag{6}$$

и граничным условиям задачи. Граничные условия задачи (2) адекватны начальным условиям задачи (1).

Назовем вектором состояния

$$H(s)=\left\{z_o(s),z_1(s), \ ... \ ,z_{n-1}(s)\right\} . \tag{7}$$

Тогда вектор начальных условий $H_o= H(0)$ будет иметь вид

$$H_o= \left\{z_o(s),z_1(s), \ .... \ ,z_{n-1}(s)\right\}\Big|_{s=0}= \left\{z^o_o,z^o_1, \ ... \ ,z^o_{n-1}\right\} . \tag{8}$$

Решение задачи (1) линейно зависит от начальных условий и, поскольку рекуррентные соотношения (6) тоже линейны, очевидно, что все коэффициенты b_k являются линейными комбинациями n первых независимых коэффициентов. Таким образом

$$b_k =\sum_{j=0}^{n-1}A_{kj}b_j \qquad k = 0,1,2,3,... \tag{9}$$

Первые $(k=0,1,2,\dots,n-1)$ коэффициенты A_{kj} представляют собой единичную матрицу. Это следует из самой записи выражения (9).

Перепишем соотношение (6) в виде

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_i b_{k+i}=0; \quad \alpha_n=1; \quad k=0,1,2,3,\dots \tag{10}$$

Тогда подставив выражение (9) и равенство (10) получим

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{n}\alpha_i A_{k+i,j}\right]b_j=0; \quad k=1,2,3,\dots \tag{11}$$

Так как теперь b_j $(j=0,\dots,n-1)$ независимы, то из (11) следует

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_i A_{k+i,j}=0, \quad j=0,1,2,3,\dots,n-1, \quad k=0,1,2,3,\dots \tag{12}$$

Учитывая, что при $i=n$ $\alpha_n=1$ из формулы (12) получим рекуррентные соотношения для определения элементов матрицы A_{kj}

$$A_{k+n,j}=-\sum_{i=0}^{n}\alpha_i A_{k+i,j}; \; j=0,1,2,\dots,n-1; \; k=0,1,2,\dots \tag{13}$$

Вернемся к записи общего решения однородного уравнения (1). С учетом обозначения $b_k=a_k\cdot k!$ имеем

$$\bar z_0(s)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k s^k=\sum_{k=0}b_k\frac{S^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}A_{kj}b_j\frac{S^k}{k!}. \tag{14}$$

Или иначе

$$\bar z_0(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}A_{kj}j!\,a_j\frac{S^k}{k!}. \tag{15}$$

Из выражения (2) и (3) следует, что $z^0_{ik}=k!\;a_k$. Поэтому

$$\bar z_0(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}A_{kj}j^c_j\frac{S^k}{k!}=\sum_{j=0}^{n-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}A_{kj}\frac{S^k}{k!}\right]z^c_j. \tag{16}$$

Легко видеть, что вектор состояния $H(s)$ может быть получен последовательным дифференцированием $\bar z_0(s)$ по S.

Например

$$z_m=\frac{d^m z_0}{ds^m}=\sum_{j=0}^{n-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}A_{kj}\frac{S^{k-m}}{(k-m)!}\right]z^c_j; \quad m=1,2,3\dots,n-1 \tag{17}$$

Обозначим

$$B_{mj}(s)=\sum_{k=0}^{\infty}A_{kj}\frac{S^{k-m}}{(k-m)!}; \quad m=0,1,2\dots,n-1. \tag{18}$$

Естественно, при $k-m<0$ соответствующий элемент $B_{mj}=0$. Тогда вектор состояния $H(s)$ можно записать в виде

$$z_m(s)=\sum_{j=0}^{n-1}B_{mj}(s)z^c_j. \tag{19}$$

Или иначе

$$H(s)=B(s)Ho \qquad (20)$$

Задача сведена к задаче Коши с известной матрицей B(s). Характерно, что элементы матрицы B(s) получены из условия точного (до любого порядка s^k) удовлетворения общему уравнению (1). Таким образом адекватность задачи, если она сформулирована верно, при переходе к численному процессу полностью сохранена.

На базе равенства (20) легко построить численные процессы начальных параметров, метода продолжения, переноса и т.д. Если стержневая конструкция разбита на разнотипные элементы, для каждого из которых можно построить соотношение вида (20) $H_k=B_kH_{k-1}$, то очевидно

$$H_k = B_kB_{k-1}\ldots B_1H_0 = BH_0 \qquad (21)$$

и процесс сводится к перемножению матриц B отдельных элементов.

Если разбиение конструкции на элементы выполнить так, чтобы в узлах оказались сосредоточенные включения (массы, нагрузки, разветвления, повороты и т.п.), то процесс остается типовым, но кроме матриц элементов (B(s)) стандартным путем следует построить матрицы "включений" и "поворотов"

При наличии "лишних" неизвестных (промежуточные опоры и соединения, вносящие дополнительные неизвестные) приходится добавить процедуру исключения (точнее подмены) этих неизвестных, не нарушающую общий процесс.

Изложенная в этой работе методика может с успехом применена для обобщения МКЭ. Формулы (16) и (17) позволяют выбирать в качестве обобщенных координат не только составляющие вектора начальных параметров, но и любое их сочетание на левом и правом узлах. Например, при n=4 (классическая модель тонкого прямолинейного стержня) можно в качестве обобщеных координат взять z_0^0, z_1^0 на левом узле $z_0(e)$, $z_1(e)$ на правом. Исключив из (16),(17) z_2^0 и z_3^0, получим существенно уточненные аппроксимирующие полиномы для МКЭ в перемещениях.