МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАУКОВО-МЕТОДИЧНИЙ ЦЕНТР ВИЩОЇ ОСВІТИ
Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
“Харківський авіаційний інститут”

В.О. Попов

ІМОВІРНІСНІ МОДЕЛІ ПРОМИСЛОВОЇ ЛОГІСТИКИ

**Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для вищих
навчальних закладів**

Харків “ХАІ” 2006

ББК У290-592 (я73)
УДК 658.012.34:519.24+330.4(075.8)

Імовірнісні моделі промислової логістики / В.О.Попов. - Навч. посібник. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т "Харк. авіац. ін-т", 2006.- 190 с.

ISBN 966-662-132-0

Навчальний посібник складено з розділів, що містять теоретичні основи аналізу систем промислової логістики. Основна увага приділена моделям і методам теорії масового обслуговування. Наведено приклади, що ілюструють застосування методів для аналізу та проектування логістичних систем із матеріальними й інформаційними потоками.

Для студентів і магістрів напрямків «Комп'ютерні науки», «Прикладна математика», «Комп'ютерна інженерія», «Інформаційні керуючі системи й технології» при виконанні курсових і дипломних робіт, а також випускних робіт бакалаврів і магістрів.

Може бути корисним викладачам вищих навчальних закладів, аспірантам, науковим співробітникам, а також фахівцям аерокосмічної промисловості при вивченні сучасних методів та інформаційних технологій проектування інформаційно-керуючих систем.

Іл. 35. Табл. 8. Бібліогр.: 55 назв

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. В. М. Левикін,
д-р техн. наук, проф. В.М. Томашевський

Гриф надано 10.02.06 Міністерством освіти і науки України
(лист №14/18.2-312)

ISBN 966-662-132-0

ЗМІСТ

Список умовних скорочень і позначень

ЛС – логістична система;

ЛІС – логістична інформаційна система;

ГП – готова продукція;

МР – матеріальні ресурси;

АСК – автоматизована система керування;

НВ – незавершене виробництво;

ЛЛС – ланка логістичної системи;

MRP – система керування запасами;

MRP II – система керування запасами й закупівлі матеріальних ресурсів;

DRP – система поставки готової продукції споживачеві;

MRP/OPT - концепція, що не забезпечує досягнення позитивного ефекту й може породити додаткові, у ряді випадків неадекватні інформаційні потоки;

LRP – система контролю над вхідними, внутрішніми й вихідними матеріальними потоками на рівні підприємства;

M – символ, який позначає, що потік – пуассонівський або тривалість обслуговування розподілена за експоненціальним законом;

ACK – автоматизовані системи керування;

G – довільний розподіл;

$A(t)$ – функція розподілу тривалості проміжків часу між моментами надходження вимог;

$a(t)$ – відповідна щільність імовірності;

$B(t)$ – функція розподілу тривалості обслуговування;

$b(t)$ – відповідна щільність імовірності;

$\beta(t)$ – перетворення Лапласа – Стілтьєса функції $\beta(t)$;

$P_n(t)$ – імовірність того, що в стаціонарному стані в системі перебуває n вимог; вживається також для позначення ймовірностей окремих значень дискретної випадкової величини;

ρ – завантаження, або коефіцієнт використання (звичайні відношення інтенсивності надходження вимог до інтенсивності обслуговування);

L_c – середнє число вимог у системі;

L_o – середнє число вимог у черзі;

CI – позначення послідовності незалежних однаково розподілених (за довільним законом) величин;

D – вироджений розподіл;

$M(t)$ – твірна функція випадкової величини;

σ – середнє квадратичне відхилення;

$*$ – позначення перетворення Лапласа;

μ_r – r-й початковий момент;

τ – часовий інтервал;

δ_{in} – символ Кронекера;

X_t – випадковий процес;

$F(x,t)$ – функція розподілу випадкової величини x у момент t;

E_j – j-й стан системи;

P – матриця ймовірностей переходу;

$P_{ij}^{(n)}$ – імовірність переходу зі стану E_i в стан E_j в n-й момент переходу;

λ (інколи $\frac{1}{a}$) – інтенсивність надходження вимог;

μ (інколи $\frac{1}{b}$) – інтенсивність обслуговування;

$\varpi_n(t)$ – щільність розподілу тривалості чекання (n+1)-ї вимоги;

$W_n(t)$ – відповідна функція розподілу;

$P(t=0)$ – імовірність обслуговування без чекання;

W – середній час перебування в системі;

$W(g)$ – середній час чекання в черзі;

$W(p)$ – середній час чекання вимоги з p-м пріоритетом;

$P(n_1,...,n_k;t)$ – імовірність того, що в момент t у системі з $к$ послідовними каналами в j - му каналі чекає $n_j \; (j=1,...,k)$ вимог.

ВСТУП

У навчальному посібнику розглянуті основні моделі й методи, які використовують для аналізу матеріальних й інформаційних потоків у промисловій логістиці.

В останні десятиліття розвиток науки й техніки, економіки та засобів зв'язку і транспорту привів до необхідності мати справи з більшими системами, що мають певну цілісність і складаються з величезного числа частин, використання яких перебуває під впливом іррегулярних впливів. Особливості такого роду систем вимагають особливого підходу до їхнього вивчення, а також спеціальних прийомів керування. До таких систем можна віднести телефонний вузол, велике підприємство, систему протиповітряної оборони, мореплавства або ж великий аеропорт. Природно, що у всіх цих системах виникають численні задачі, що відображають специфіку конкретної системи, а також тих цілей, які ставить перед собою керівництво цієї системи, якщо йдеться про системи, які керуються людиною. Однак у цій величезній різноманітності індивідуальних особливостей виявляються задачі загального характеру, властиві іншим складним системам найрізноманітної природи. Деякі із цих задач і створили базу теорії масового обслуговування.

Імовірнісні моделі можна умовно розбити на дві групи. До першої групи відносяться моделі потоків різної фізичної природи. Тут основним представником є марковський випадковий процес, на основі якого будуються конкретні графічні подання у вигляді діаграм станів, що дозволяють складати системи диференціальних рівнянь і знаходити на їхній основі характеристики систем.

У першому розділі розглянуто елементи теорії синтезу ЛС із позиції системного аналізу на якісному рівні, принципи й методичні основи розробки ЛС, а також особливості вимог, які пред'являються до ЛС із позиції аналізу потокових процесів.

У другому розділі описано технології побудови ймовірнісних моделей функціонування логістичних систем (ЛС). Дано формалізований опис потокових процесів та етапів побудови емпіричної моделі логістичного потоку. Розглянуто параметризацію теоретичних функцій розподілу параметрів потоку, оцінки точності апроксимації розподілу параметрів потоку за допомогою критерію згоди, а також особливості вибору виду апроксимуючих розподілів при побудові моделей ЛС. Наведено типові функції розподілу для визначення потокових ЛС. У висновку розділу наведена методика побудови моделі, що описується марковським графом.

У третьому розділі розглянуто марковські випадкові процеси, моделі на основі марковських ланцюгів, ілюстративні приклади, процеси загибелі й розмноження. Наведено моделі транспортної системи на основі марковських процесів із дискретними станами.

Друга група моделей являє собою системи масового обслуговування й мережі обслуговування. У цьому випадку методика дослідження вимагає складання графа станів і системи диференціальних рівнянь, що дозволяє одержувати характеристики системи обслуговування у перехідних режимах. Однак для спрощення проведеного аналізу можна розглядати тільки стаціонарні рішення й одержувати характеристики завантаження й черги. Для розрахунку логістичних систем слід використати сукупність окремих систем обслуговування. У посібнику розглянуто послідовні мережі для моделювання логістичних ланцюгів, що дозволяє знаходити характеристики затримки або часу виконання комплексу робіт.

У четвертому розділі показано необхідність застосування систем масового обслуговування (СМО) як систем із дискретним станом і безперервним часом. Розглянуто класифікацію СМО й задачі аналізу одноканальної детермінованої ймовірнісної системи. Наведено порядок побудови математичної моделі на основі графу станів і приклади аналізу систем за допомогою найпростіших моделей масового обслуговування.

У п'ятому розділі розглянуто виробничий процес як логістичний, для якого наведено класифікацію систем, що має дозволити правильно обґрунтувати модель для розрахунку того чи іншого фрагмента логістичної мережі. Дано приклад застосування показників надійності систем керування процесами за допомогою моделей масового обслуговування.

У шостому розділі досліджено багатофазні моделі логістичних систем у вигляді послідовних і послідовно-паралельних каналів обслуговування. Виробничі циклічні системи обслуговування розглянуто з однією чергою, зі зворотним зв'язком і без нього.

У сьомому розділі описано системи для аналізу інформаційних потоків, а також транспортних потоків і потоку обслуговування виробничого встаткування. Використовують як моделі масового обслуговування, так й інші моделі, що дозволяють одержувати результати у вигляді характеристик, які аналогічні моделям масового обслуговування й характерні для них.

Розділ 1. ПРИНЦИПИ ПОБУДОВИ ТА ФУНКЦІОНУВАННЯ ЛОГІСТИЧНИХ СИСТЕМ

1.1. Основні функціональні області логістичних систем

Історично термін “логістика” вперше згадується у воєнній науці й пов'язаний із забезпеченням військових з'єднань необхідними припасами й спорядженням. Це поняття охоплює комплекс проблем, пов'язаних з вихідними виробничими факторами кожного підприємства, всі види діяльності, що стосуються переміщення матеріалів у часі й просторі. Останні можуть бути визначені складанням часових графіків роботи й зберігання матеріалів. При різних заходах щодо транспортування, планування робочого й вільного часу, зберігання в логістиці враховують фактор перегруповування. Прикладом перегруповування, тобто зміни групової структури, може бути пересортування (під час перевезення матеріалів). Таким чином, логістику як загальну внутрішню функцію підприємства ділять на ряд складових [8]:

1) організація переміщення в просторі,
2) планування часового графіка переміщення,
3) системний аналіз перегруповування об'єктів.

Функції логістики реалізуються на всіх стадіях виробництва продуктів:

1) постачання,
2) виробництва,
3) розподілу (збуту).

Логістику постачання й збуту можна частково подати внутрішніми потоками ресурсів у межах підприємства, а в значно більшому ступені – рухом ресурсів і продуктів поза його межами. Таким чином, функції логістики тісно переплітаються з іншими функціями, які забезпечують рух потоків виробничих факторів [28-30].

Логістика не є доповненням до постачання, виробництва й збуту, а являє собою самостійну область, яка охоплює проблеми фізичного переміщення в просторі й руху в часі на всіх стадіях діяльності підприємства. Вона припускає виділення згаданих вище питань в окрему область обов'язків і функцій. Таке відокремлення обумовлено, насамперед, можливістю спільного використання наявних у розпорядженні підприємства ресурсів. Наприклад, наявні транспортні засоби можна використати для вирішення задач логістики постачання, виробничої й збутової логістики.

Існує й інша характеристика логістики – її предмет. Із цього погляду розрізняють логістику переміщення людей і логістику матеріалів. В останній виділяють різні види матеріалів і рухоме майно, що відноситься до процесу виробництва (логістика товарів). В останні роки набули розвитку одні із галузей логістики матеріалів логістики енергетичних та інформаційних потоків. У табл. 1.1 наведена класифікація функціональних областей логістики.

Таблиця 1.1

Класифікація функціональних областей логістики

№ п/п	Види логістики	Функції логістики
1	Логістика пасажирських перевезень	Переміщення людей Організація чекання Пересадження
2	Логістика товарів	Транспортування Зберігання Сортування, перевантаження, перевалка
3	Логістика енергетичних потоків	Передача енергії Збереження енергії Трансформація енергії
4	Логістика інформаційних потоків	Передача інформації Збереження інформації Реорганізація даних

Розділення на логістики матеріалів і збуту знаходить висвітлення в організаційній структурі підприємства. Логістикою матеріалів займається підрозділ матеріально-технічного забезпечення, збутовою логістикою – відділ збуту. Головна задача логістики постачання – забезпечення підприємства вхідними матеріалами для виробництва. Такий підхід використовують також при визначенні задач логістики виробництва. Взаємозв'язок задач постачання, матеріально-технічного забезпечення й логістики показано на рис. 1.1.

Основними об'єктами вивчення логістики є потокові процеси [9].

Специфіка логістики полягає в такому:

1) виділенні єдиної функції керування розрізненими матеріальними та іншими потоками;

2) інтеграції окремих ланок логістичного ланцюга в єдину систему, що забезпечує ефективне керування наскрізними матеріальними та іншими потоками.

Концепція логістики являє собою систему поглядів на підвищення ефективності функціонування підприємств на основі оптимізації потокових процесів. Вона включає в себе такі основні положення:

1) реалізація принципу системного підходу;
2) мінімізація загальних витрат логістичного ланцюга й ін.

Таким чином, до головних функцій логістики можна віднести:

1) виконання дій, однорідних з погляду мети;
2) реалізація операцій, спрямованих на досягнення цілей системи.

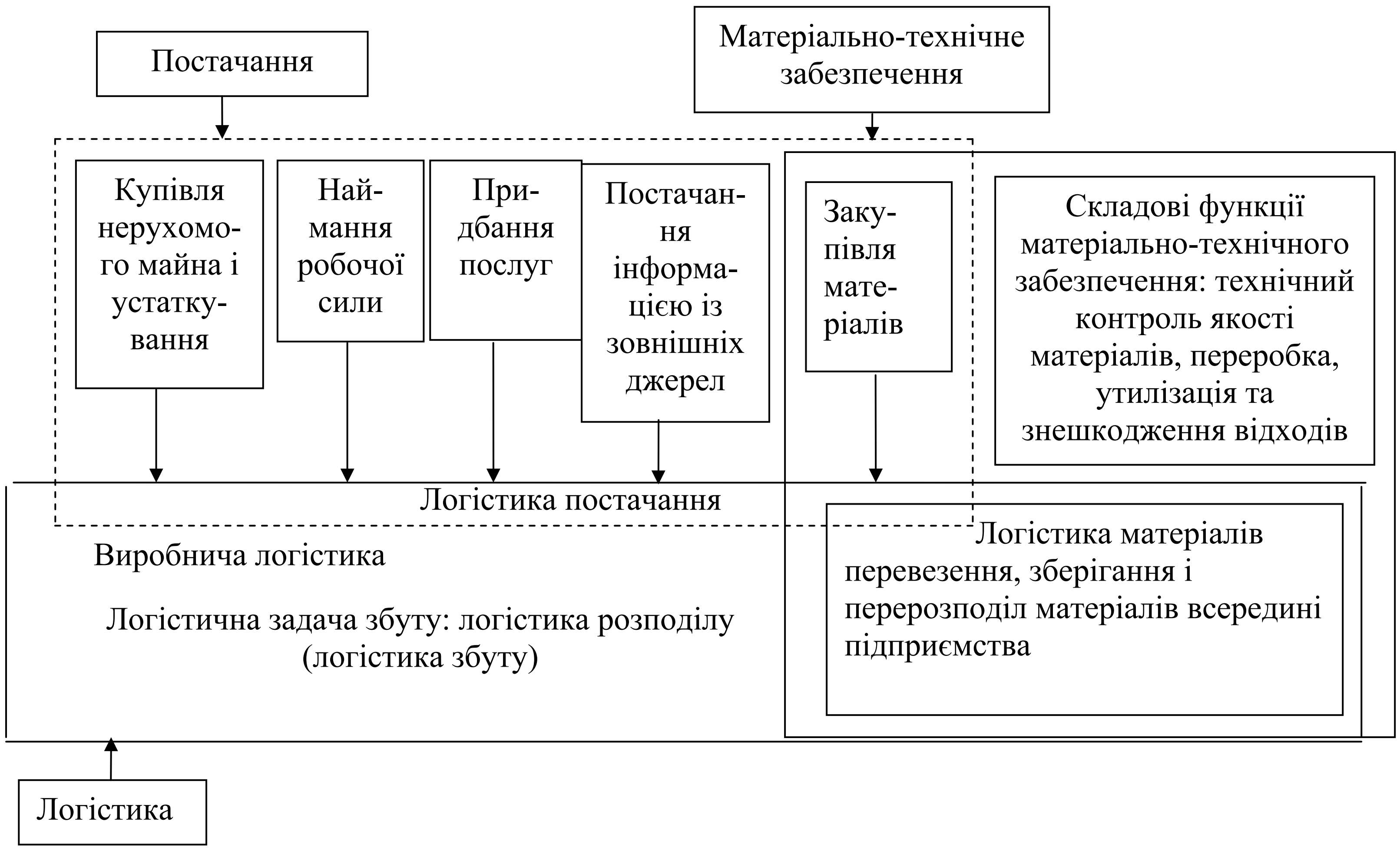

Рис. 1.1. Взаємозв'язок задач постачання, матеріально-технічного забезпечення й логістики

Ефективна ринкова стратегія підприємства (фірми) грунтується на зв'язках між фірмою, споживачем і конкурентом (рис. 1.2).

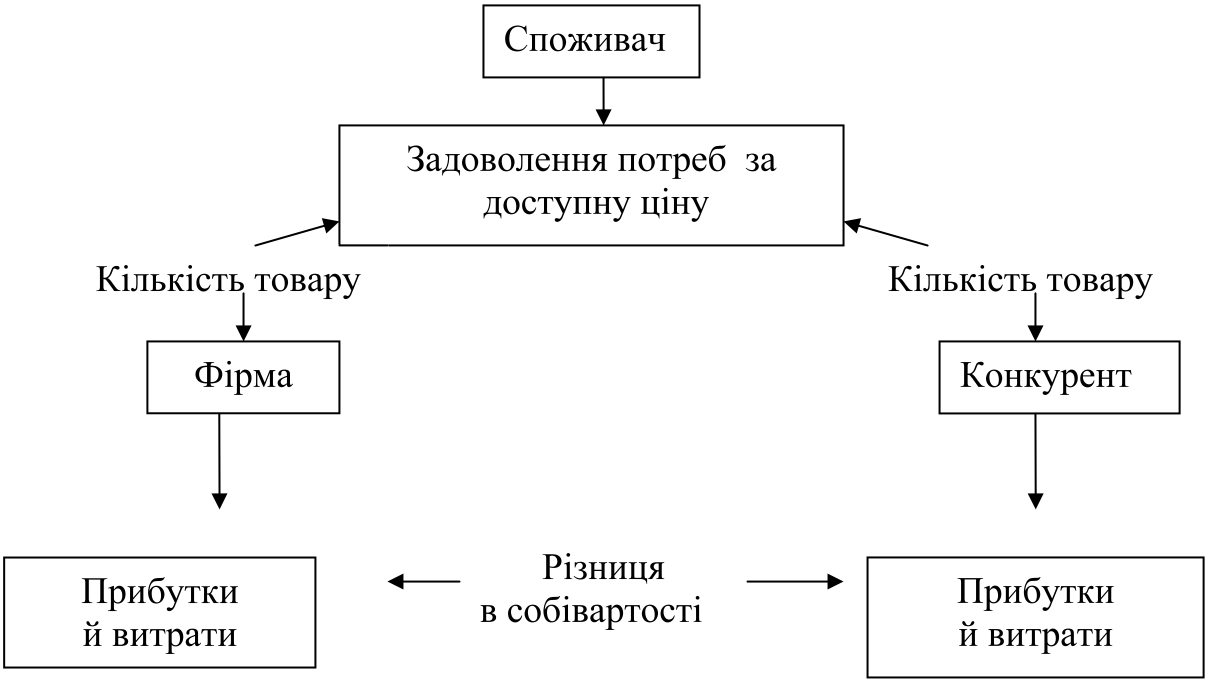

Рис. 1.2. Схема конкурентних переваг

Як правило, з підвищенням обсягу виробництва товарів їхня собівартість знижується, відповідно ефективність виробництва підвищується. Однак в умовах перенасичення ринку товарами досягнення прибуткової діяльності шляхом орієнтації на збільшення обсягів продаж неефективне. Щоб продати товар, необхідно, щоб його властивості значною мірою відповідали потребам споживача (стратегія сегментації ринку).

Не менш важливим процесом додавання до товару додаткових споживчих властивостей є обслуговування (у процесі доставки, після продажу й т.д.). Ринок більше уваги приділяє якості обслуговування, яка впливає на досягнення конкурентних переваг (рис. 1.3).

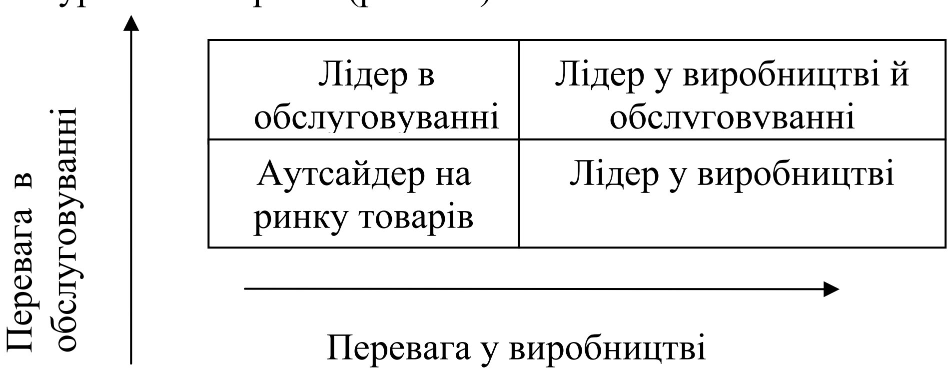

Рис. 1.3. Логістика й конкурентні переваги

Продукція фірм-аутсайдерів не відрізняється від продукції інших фірм.

Вони не мають конкурентних переваг. Це типова ситуація на ринку товарів. Щоб вийти з неї, треба досягти лідерства або у виробництві, або в обслуговуванні. Шлях лідерства у виробництві відносно простий, але в умовах розвиненого ринку, коли будь-яка технологія відразу стає доступною конкурентові, неефективний. Більш привабливим є інший шлях – пропозиція споживачеві додаткової «цінності» у вигляді розширеного набору послуг, їхньої відповідності товару й попиту споживача.

Найбільш захищеною й безпечною для фірми є позиція лідера у виробництві й обслуговуванні (рис. 1.3). Логістика в цьому випадку розглядається як інструмент, що дозволяє зайняти й утримати цю позицію.

Діяльність щодо підвищення ефективності, спрямована на досягнення конкурентних переваг за допомогою логістики, може бути розділена на два види – основні функції (виробництво, маркетинг) і допоміжні (інфраструктура, керування персоналом, технічний розвиток і т.д.). Переваги в конкуренції зростають у міру організації окремих функцій в єдиному процесі, орієнтованому на підвищення ефективності діяльності фірми.

Логістика може сприяти досягненню конкурентних переваг як у виробництві – через раціональне використання наявних потужностей, скорочення запасів оборотних коштів, кооперацію, інтеграцію, удосконалювання календарного планування й т.д., так й в обслуговуванні завдяки вдосконаленню торговельного обслуговування, більш повному задоволенню потреб споживачів і т.д. Із цим пов’язана одна з головних задач керування логістикою – планування й координація всієї діяльності, необхідної для досягнення бажаного рівня обслуговування і якості поставок при можливо більш низькому рівні цін. Логістика розглядається як зв'язок між місцем на ринку й виробничими функціями фірми. Вона охоплює весь процес організації – від керування поставкою сировини до збуту готової продукції (рис. 1.4).

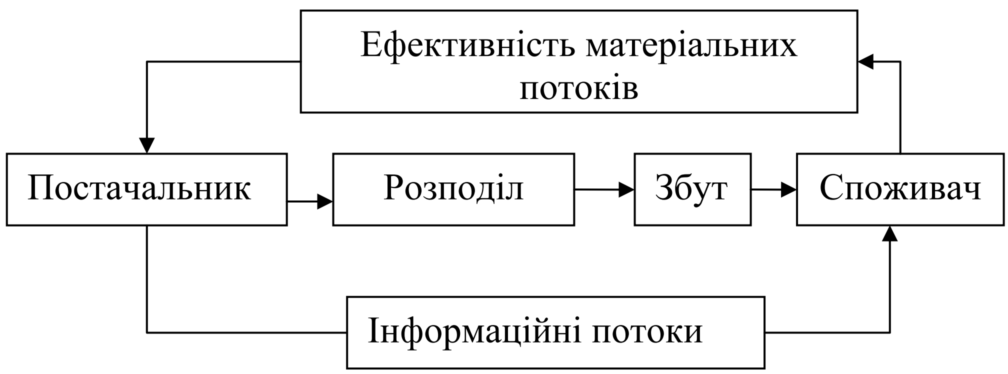

Рис. 1.4. Процес керування логістикою

Керування логістикою являє собою інструмент, за допомогою якого на основі координації матеріальних та інформаційних потоків у сфері виробництва й споживання продукції задовольняються потреби споживача. Для такої координації потрібний взаємозв'язок багатьох понять відносно виробництва й маркетингу. Ефективні виробничі процеси (гнучкі виробничі системи, керування запасами, поставки «точно в строк») мають доповнюватися більш ефективними ринковими стратегіями.

В сучасних умовах склалася парадоксальна ситуація. Щоб успішно конкурувати, треба:

1) мати спеціалізацію, яка задовольняє конкурентні переваги,
2) вступати в інтеграцію з потенційними конкурентами.

Вертикальна інтеграція постачальників, виробників й одержувачів поступається місцем горизонтальній (логістичний ланцюг), яка являє собою мережу організацій, пов'язаних за допомогою логістичних зв'язків у процесі виробництва товарів і послуг. Кожна організація незалежна від інших. Сучасному ринку більш притаманна не конкуренція фірм, а конкуренція логістичних ланцюгів. Якщо керування логістикою пов'язане з оптимізацією потоків усередині фірми, то керування логістичним ланцюгом виходить за рамки однієї організації. Йому властиві системний підхід та оптимізація окремих функцій за генеральним критерієм.

Сучасний ринок ставить перед логістикою задачу прискорення руху матеріальних потоків за логістичним ланцюгом. Тривалий процес транспортування призводить до того, що продукція морально застаріває, тільки-но потрапивши на ринок. Необхідно прискорити рух товарів, зробити всю логістичну систему більш гнучкою, яка швидко адаптується до умов ринку. Є три основні шляхи вирішення цієї проблеми:

1) скорочення довжини логістичного ланцюга шляхом більш тісних контактів із постачальниками та споживачами й виключення із процесів руху товарів операцій складування;

2) контроль за матеріальним потоком на всьому шляху його просування на основі створення інформаційних систем керування логістикою;

3) пропозиція всіх видів послуг, які пов'язують ринок останніх з ринком попиту.

Головна ідея керування логістикою – керування ланцюгом обслуговування споживачів за допомогою ефективної діяльності, розподілу й співробітництва з посередниками. Усвідомлення тісного зв'язку логістики з маркетингом доповнилося розумінням ролі обслуговування споживачів у конкурентній боротьбі. Цьому сприяли два фактори: перший – зростаючі вимоги споживачів до рівня обслуговування, особливо до швидкості й точності виконання замовлення; другий – перехід до «товарного» типу ринку. Завдяки зближенню технології розбіжності конкуруючі вироби важко відрізнити між собою (наприклад: ринок комп'ютерів), що призводить до зменшення ролі фірмової марки. За таких умов вирішальним фактором є доступність товару, наявність його на ринку за принципом «тут і зараз». Доступність товару залежить від таких параметрів логістичних послуг, як частота прибуття, надійність поставок, рівень запасів, час циклу замовлення й т.д.

Логістична функція розподілу спрямована на те, щоб зробити товар доступним. Це дозволяє вирішити одну з головних задач маркетингу –

залучення і утримання споживача, що на практиці досягається розширенням спектра послуг.

Вирішення проблеми високої ринкової ефективності забезпечує логістичні системи, орієнтовані на високий рівень обслуговування. Послідовність створення таких систем показана на рис. 1.5.

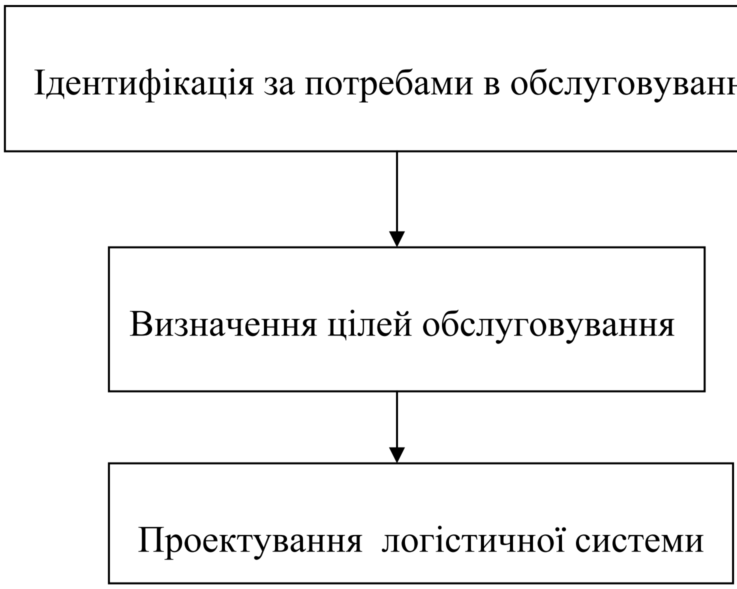

Рис. 1.5. Послідовність створення логістичних систем

Розподіл потреб в обслуговуванні базується на принципі сегментації послуг, тобто групуванні споживачів згідно з відповідним критерієм обслуговування.

Процес сегментації послуг включає в себе такі етапи:

1) визначення ключових компонентів обслуговування на основі думок самих споживачів;
2) встановлення відносної важливості компонентів;
3) групування споживачів за компонентами обслуговування.

Для збору інформації використовують методи соціології (анкетне опитування й т.д.), а для її обробки й наступного групування споживачів – статистичні методи (метод кластерного аналізу).

На ринку руху товарів можна виділити два сегменти обслуговування – дві групи споживачів. Перша приділяє велику увагу поставці товарів (строкам й інтенсивності поставок, повноті замовлення), друга – зв'язку з постачальниками, якості комунікацій і легкості замовлення.

1.2. Класифікація логістичних систем

Логістичні системи (ЛС) можна розділити на дві групи: мікрологістичні й макрологістичні (рис. 1.6).

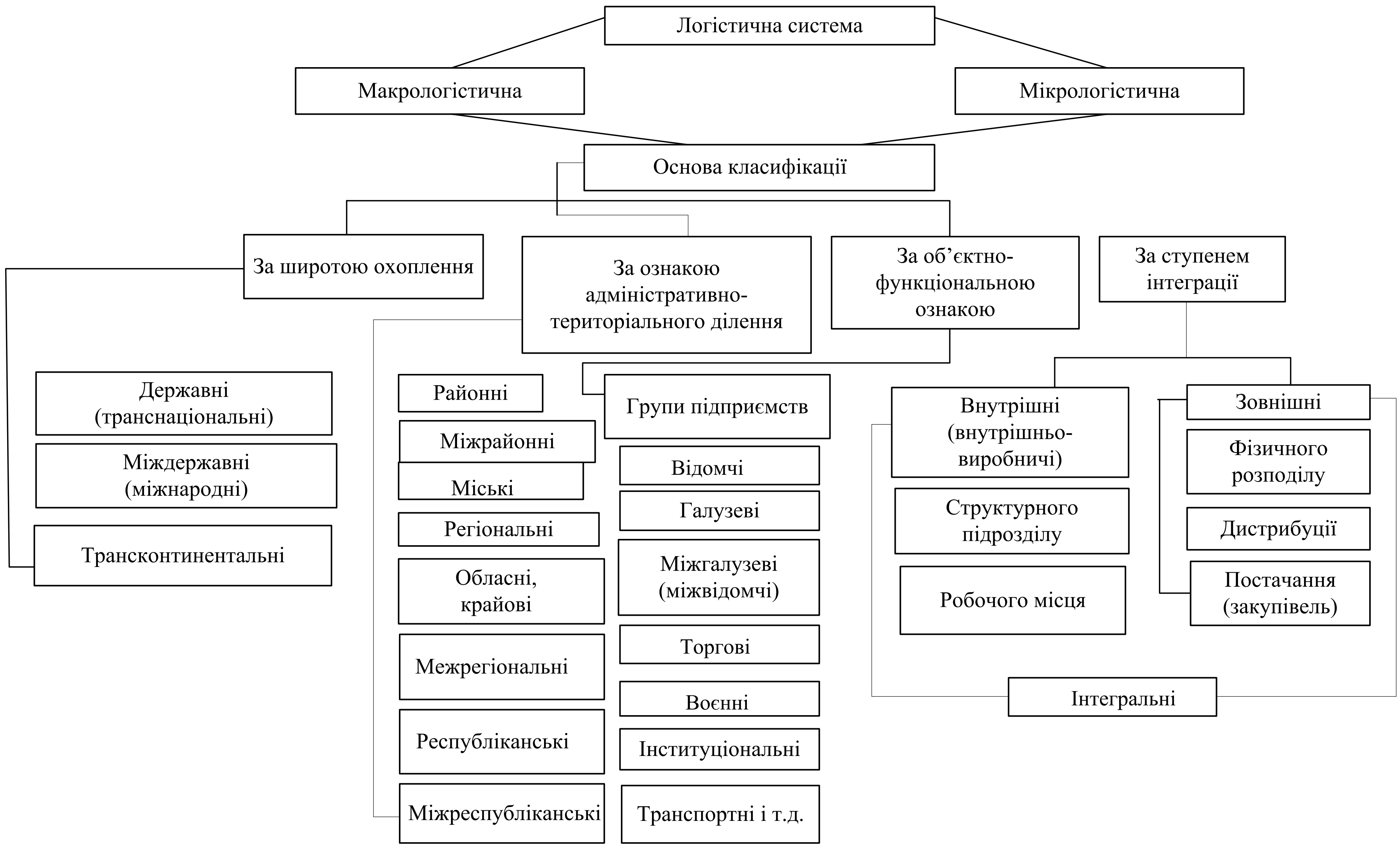

Рис. 1.6. Класифікація логістичних систем

Мікрологістичні системи відносяться до певної організації бізнесу (фірми – виробника товару) й призначені для керування і оптимізації матеріальних та інших потоків (інформаційних, фінансових) у процесі виробництва, постачання й збуту. Розрізняють внутрішні (внутрішньовиробничі), зовнішні й інтегральні мікрологістичні системи.

Внутрішньовиробничі ЛС оптимізують керування матеріальними потоками в межах технологічного циклу виробництва продукції. До основних задач внутрішньовиробничих ЛС при заданій програмі випуску готової продукції (ГП) відносять:

1) ефективне використання матеріальних ресурсів (МР),
2) зменшення запасів МР і незавершеного виробництва (НВ),
3) прискорення оборотності оборотного капіталу фірми,
4) зменшення основного виробничого часу,
5) контроль й керування рівнями запасів МР, НВ і ГП у складських системах фірми-виробника,
6) оптимізація роботи технологічного (промислового) транспорту.

Критеріями оптимізації є мінімум собівартості виробництва й мінімум часу виробничого циклу при забезпеченні заданого рівня якості ГП.

Мікрологістичні внутрішньовиробничі ЛС можуть бути деталізовані до виробничого (структурного) підрозділу підприємства (цеху, ділянки, окремого робочого місця). Надалі будемо розглядати подібні ЛС тільки на рівні всього підприємства.

Зовнішні ЛС вирішують задачі, пов'язані з керуванням та оптимізацією матеріальних і супутніх потоків від джерел до пунктів призначення (кінцевого особистого або виробничого споживання) поза виробничим технологічним циклом. Ланками зовнішніх ЛС є елементи постачальницьких і дистрибутивних мереж, що виконують ті чи інші логістичні активності від постачальників МР до виробничих підрозділів фірми-виробника й від її складів ГП до кінцевих споживачів.

Типовими задачами зовнішніх ЛС є раціональна організація руху МР і ГП у товаропровідних мережах, оптимізація витрат, пов'язаних із логістичними активностями окремих ланок ЛС, і тотальних витрат, скорочення часу доставки МР і ГП, і виконання замовлень споживачів, керування запасами МР і ГП, забезпечення високого рівня якості сервісу.

Система постачання (закупівель) МР виробника являє собою систему збуту продукції постачальника (групи постачальників). Принциповим питанням є місце передачі прав власності на товар (МР) від постачальника виробникові. Умови передачі прав закріплюють у договорі поставки (купівлі-продажу) МР. При цьому можуть виникати певні конфліктні ситуації, пов'язані з розбіжностями у логістичних стратегіях і задачах постачальника і фірми - виробника ГП. На практиці це часто призводить до того, що виробник змушений створювати власні логістичні структури закупівель МР, які відрізняються від дистрибутивних систем постачальника.

Подібні логістичні структури складаються з ланок логістичних систем (ЛЛС), які виконують різні логістичні операції й функції щодо транспортування, складування, зберігання та вантажопереробки. Разом із товаропровідною мережею постачальників (або її частинами) вони становлять зовнішню ЛС, яку часто називають ЛС постачання (закупівель). Однією з важливих задач логістичного менеджменту в такий ЛС є координація логістичних функцій й узгодження цілей з постачальниками й посередниками.

Виділення базових і ключових логістичних функцій привело до появи зовнішніх ЛС фізичного розподілу, дистрибуції, постачання (закупівель) і т. ін. У закордонній і вітчизняній літературі були початі спроби дослідження подібних систем й їхніх задач у рамках закупівельної, розподільної, збутової логістики [27].

Однак повною мірою концепція бізнесу логістики в сучасному розумінні була реалізована з появою інтегральної функції мікрологістичної системи, яка визначає виробничо-розподільний (логістичний) цикл (процеси закупівлі МР й організація продажів ГП споживачам і післяпродажний сервіс). Ці процеси поряд із супутніми інформаційними й фінансовими потоками, утворюють операційне функціональне логістичне середовище, в якому інтегрально взаємодіють численні внутрішньофірмові ЛЛС і логістичні посередники.

Логістичний менеджмент в інтегральній ЛС являє собою такий управлінський підхід до організації роботи фірми та її логістичних партнерів (посередників), що забезпечує найбільш повне урахування часових і просторових факторів у процесах оптимізації керування матеріальними, фінансовими й інформаційними потоками для досягнення стратегічних і тактичних цілей фірми на ринку.

Визначальними для формування таких ЛС є концепції мінімізації загальних логістичних витрат і керування якістю на всіх етапах виробничо-розподільного циклу.

Іноді внутрішні й зовнішні ЛС розглядають як підсистеми інтегральної ЛС (інтегральної функції логістики). На рис. 1.7 показано схему мікрологістичної системи.

Базисні логістичні активності (постачання, виробництво, збут) реалізуються залежно від поставлених перед ЛС цілей і критеріїв оптимізації шляхом створення множини ЛЛС і спеціальної організаційно-функціональної структури, яка включає в себе суб'єкти вищого логістичного менеджменту, для здійснення координації й інтегрального керування матеріальними та іншими потоками. ЛЛС можуть бути як внутрішніми підрозділами фірми (транспортними, виробничими, складськими, грузопереробними й т.д.), так і підприємствами, організаціями й установами (логістичними посередниками), що виконують ті чи інші логістичні операції й функції.

Крім прямих потоків МР і ГП на схемі показані зворотні матеріальні потоки, утворені в товаропровідних мережах збуту (дистрибуції) й постачання.

Загальна структура мікрологістичної системи може функціонувати як інтегральна, зовнішня або внутрішня ЛС залежно від базисних логістичних активностей і мети синтезу.

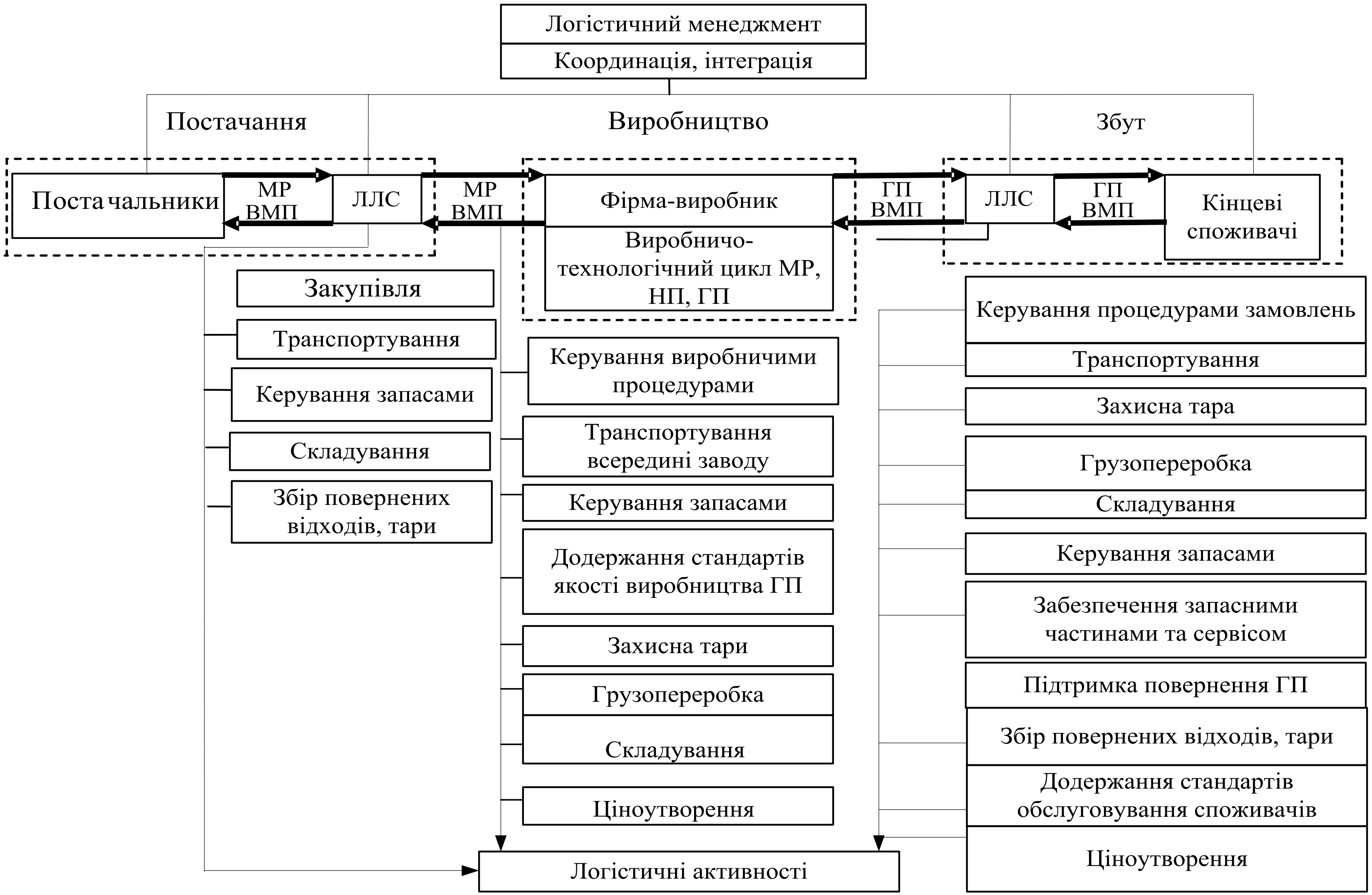

Рис. 1.7. Схема мікрологістичної системи

Для досягнення цієї мети керуючі впливи в мікрологістичній системі реалізуються звичайно на внутрішньому рівні спеціальним відділом логістики або інтегральним менеджером, що приймає рішення й координує всі елементи системи.

Макрологістичними вважаються системи, призначенням яких є не збільшення прибутку або досягнення яких-небудь інших корпоративних цілей організації бізнесу. Вони створюються на рівні територіального або адміністративно-територіального поділу для вирішення соціально-економічних, екологічних, військових та інших подібного роду задач. Макрологістичні системи можуть бути класифіковані за декількома ознаками.

1. За адміністративно-територіальним поділом країни:
   1) районні,
   2) міжрайонні,
   3) міські,
   4) обласні й крайові,
   5) регіональні,
   6) міжрегіональні,
   7) республіканські,
   8) міжреспубліканські.
2. За об'єктно-функціональною ознакою:
   1) макрологістичні системи для групи підприємств однієї чи декількох галузей,
   2) відомчі,
   3) галузеві,
   4) міжвідомчі (міжгалузеві),
   5) торговельні,
   6) військові,
   7) інституціональні й т.п.

У закордонній практиці часто використовують поняття побальних макрологістичних систем, до яких відносять:

1) державні (транснаціональні) ЛС, сформовані на рівні країни в цілому,
2) міждержавні (міжнародні) ЛС, що охоплюють кілька країн,
3) трансконтинентальні, створювані в межах декількох континентів.

Мета створення макрологістичних систем може значною мірою відрізнятися від цілей і критеріїв синтезу мікроЛС. Для фірми як критерії оптимізації її функціонування в ринковому середовищі бізнесу й відповідно формування логістичної організації та керування можуть застосовуватися:

1) мінімум загальних логістичних витрат,
2) максимальний обсяг продажів ГП (або прибутку),
3) завоювання максимальної частки ринку,
4) утримання позицій на ринку збуту,
5) максимальна величина курсової вартості акції й т.д.

Обов'язковою умовою при цьому є найповніше задоволення запитів споживачів як в продукції, строках виконання замовлень, логістичному сервісі.

У більшості випадків критерій мінімуму загальних логістичних витрат використовують і при синтезі макрологічних систем. Однак найчастіше критерії формування макроЛС визначаються екологічними, соціальними, військовими, політичними й іншими цілями. Наприклад, для поліпшення екологічної обстановки в регіоні може бути створена макрологістична система оптимізації транспортних (вантажних) регіональних потоків, яка вирішує задачу оптимізації маршрутів, розв'язання транспортних потоків, перекладення перевезень із одного виду транспорту на інший і т.д.

У макрологістичних системах можуть вирішуватися такі задачі:

1) формування міжгалузевих матеріальних балансів;

2) вибір видів і форм постачання й збуту продукції груп споживачів і виробників;

3) розміщення на заданій території складських комплексів загального використання, вантажних терміналів, диспетчерських (логістичних) центрів;

4) вибір виду транспорту й транспортних засобів;

5) організація транспортування й координація роботи різних видів транспорту в транспортних вузлах;

6) оптимізація адміністративно-територіальних дистрибутивних систем для матеріальних потоків різного асортименту.

З позицій загальної теорії керування, за аналогією з автоматизованими системами керування (АСУ), ЛС як на мікро –, так і на макрорівні можна подати у вигляді взаємодії суб'єкта і об'єкта логістичного керування, яка підтримується комплексом забезпечуючих підсистем. При такому підході в більшості ЛС реалізується кібернетичний принцип "слідкуючої" системи, яка стежить за керуванням (рис. 1.8). Відповідно до неї суб'єкт (керуюча система) безупинно відслідковує вихідні параметри матеріальних (інформаційних, фінансових) потоків, порівнює їх із цільовою функцією і обмеженнями (настройка ЛС), що накладаються на керування. Настройка ЛС – кортеж $<Y^0, R^0, C^0>$, що дорівнює у вимірнику неузгодженості з вихідним кортежем векторів об'єкта керування $<Y^0, R^', C^'>$. У результаті порівняння може виникнути неузгодженість α, поява якої викликана впливом на об'єкт управління вектора зовнішніх збуджень F або зміною вектора Z параметрів внутрішнього стану ЛС. Залежно від величини неузгодженості α логістичний регулятор (координатор) формує вектор U керуючих впливів на об'єкт, які мають постійно у розглянутому періоді часу прагнути звести неузгодженість до нуля.

Для підтримки процесів логістичного керування в ЛС звичайно формується комплекс підсистем, що складаються з інформаційного, організаційного, економічного, технічного, правового, ергономічного, екологічного та інших видів забезпечення.

Для визначення цілей обслуговування необхідно усвідомити те, що рівень обслуговування не тільки визначає вартість обслуговування, але й впливає на його ефективність. Зв'язок між якістю й вартістю обслуговування описується експоненціальною функцією. Крива окупності (доходів від продажів) має S-подібний вигляд. Таким чином, у реальних умовах ринку не потрібний 100%-ний рівень обслуговування.

Рис. 1.8. Подання логістичної системи як “слідкуючої” системи керування

Зв’язок логістики й маркетингу

Концепції логістики й маркетингу базуються на спільності операцій планування. Як відомо, маркетинг – це планування, орієнтоване на попит, на потреби споживача товару або послуг, а логістика – планування матеріального попиту споживача за наявністю, доступністю й часом реалізації товару. В обох концепціях наголос робиться на планування для споживача, а не виробника товару [13].

Транспорт – вид діяльності, похідний від постачальника (сукупність продавців) і одержувача (сукупність покупців). Збут товару може описуватися фактом, що відбувся, лише тоді, коли кінцевий споживач одержав товар. Таким чином, з погляду факторів наявності й доступності маркетинг і логістика невіддільні один від одного, тому що разом виражають послуги з постачання, забезпечення, реалізації. Тому маркетингу логістичного обслуговування базується на таких принципах:

1) орієнтація на споживання товару;

2) побудова організаційної структури керування з орієнтацією на споживача;

3) мета діяльності – одержання прибутку;

4) стратегічне планування як основа успіху;

5) розвиток «культури змін» як результат досліджень, аналізу й постійних інновацій. Це прийняття нової стратегії або реалізація нових ідей в орієнтації на того чи іншого споживача відповідного сегмента ринку.

Особливість маркетингу логістичних послуг – наявність великої кількості й різноманітності споживачів. При цьому необхідно враховувати, який товар продається, кому й чому. Звідси отримуємо характер вимог на ринку до логістичного обслуговування й витрати на нього. Один зі способів оцінки логістичного обслуговування ґрунтується на величині вартості, на яку зростає загальна вартість перевезених або оброблених товарів [32].

У розглянутій концепції оцінки виділяють два аспекти:

1) економія витрат шляхом систематичного комбінування вантажопотоків з метою скорочення кількості операцій, транспортних перевантажень або пересувань;

2) сполучення функцій розподілу з виробництвом (наприклад, збір кінцевого продукту з компонентів, комплектація, підбір, формування вантажних місць, готування сумішей, розфасування, упакування, зберігання на складі, залучення фірм-дистриб'юторів).

Різні групи споживачів мають обслуговуватися відповідно до їхніх конкретних потреб. Як правило, це здійснюється в рамках одного сегмента ринку.

Розглянемо взаємозв'язок навколишнього середовища й логістичних ринків.

Логістичний бізнес має всеосяжний характер. Це означає, що результат конкурентної боротьби при різному розходженні потенційних можливостей окремих видів транспорту, типажу рухомого складу, складських потужностях і т.д. визначається якісним складом вантажопотоків. Споживачі самі вибирають відповідні послуги, визначають набір і характер реалізації щодо оцінки дій й планів конкуруючих фірм. Найбільша складність виявляється в системах міжнародних, мультимодальних й інтермодальних перевезень. Тут важливе співвідношення мають гомогенні (однорідні) потреби і попит у глобальному масштабі, а також рівень стандартизації товарів і послуг [34-36].

Факторами, пов'язаними з навколишнім середовищем, що визначають зміст логістичного обслуговування, є розвиток технології (гнучкість, мобільність й автоматизація) й інформаційного забезпечення (наявність і доступність систем зв'язку), які важливі в прийнятті рішень «товар - послуга» з урахуванням надійності й витрат.

Розглянемо основні напрямки розвитку логістики в сучасних умовах:

1) скорочення кількості складів;

2) збільшення обсягу послуг третіх учасників;

3) посилення глобальної логістичної стратегії;

4) інтеграція логістичної діяльності;

5) зосередження більшої частини логістичних функцій у рамках виробничих, маркетингу або керування запасами;

6) підвищення ролі управлінської інформації.

Скорочення кількості складів

Передбачається, що компанії мають обслуговувати свої ринкові простори з використанням меншої кількості складів. У середині 80-х років XX ст. американські компанії мали від восьми до дванадцяти складів для обслуговування споживачів. Зараз вони скоротили їх до трьох-шести, використовуючи при цьому транспортні фірми, що забезпечують надійне обслуговування.

Збільшення обсягу послуг третіх учасників

Асортименти логістичних послуг, які надаються сторонніми фірмами, усе більше розширюється. Діапазон послуг третіх учасників не обмежується транспортуванням і складуванням, а поширюються на інші сфери діяльності.

Посилення глобальної логістичної стратегії

Розуміється формування стійких торгово-економічних зв'язків між окремими країнами або групами країн на основі міжнародного поділу праці. Своє відбиття вона знаходить, зокрема, у переході Європейського співтовариства до єдиного внутрішнього ринку (спрощення й скасування митних формальностей і т. ін.).

Дана стратегія відіграє важливу роль у промисловості США, особливо в її відносинах з Японією й Південною Кореєю. При цьому характерною рисою господарських зв'язків фірм США з японськими й південнокорейськими постачальниками є більша ритмічність, (рівномірність) поставок товарів (імовірність зриву поставки в них у п’ять разів нижче середньої величини) і менші інтервали поставки (як правило, один тиждень при середньому інтервалі поставки понад два тижні). Територіальна роз'єднаність фірми та її постачальників змушує збільшувати розміри страхових запасів засобів виробництва, використовуючи для їхнього зберігання й склади загального користування, а також створювати резерв постачальників-дублерів.

Характерною рисою глобальної логістичної стратегії є зменшення кількості посередників і перевізників. Фірми користуються послугами одного перевізника, котрий несе перед одержувачем партії відповідальність за вантаж і здійснює перевезення за єдиним перевізним документом (наприклад, наскрізним коносаментом) [37].

Однак перехід до глобальної логістичної стратегії вимагає вирішення ряду правових, організаційних, технічних й інших питань, у тому числі впровадження нових інформаційних технологій (таких, як EDITFACT, система контролю місцезнаходження транспортних засобів й ін.). Близько 1/3 фірм США, що використовують глобальну логістичну стратегію, застосовують електронний обмін даними, в тому числі й за стандартом EDIFACT, з перевізниками, постачальниками й експедиторами. Перехід до даної стратегії може призвести до подовження логістичних циклів, втрат від коливання курсів валют і т.д.

Інтеграція логістичної діяльності

З'являється можливість підвищення ефективності логістики в результаті інтеграції логістичної діяльності окремих фірм із логістичною діяльністю постачальників і замовників, а потім спільного використання всіх отриманих переваг. Компанії будуть керувати запасами, складуванням і транспортом за межами корпоративних границь [38].

Збільшення ролі управлінської інформації

Логістика вимагає все більшого обсягу інформації. Компанії, що володіють більш розробленими інформаційними системами, можуть поліпшити обслуговування споживачів при одночасному скороченні витрат.

1.3. Інтегральна функція логістики і етапи її проектування

Інтегральна функція логістики розглядається в процесі вирішення проблеми ефективності логістики фірми, в якій беруть участь різні структурні підрозділи [32]:

1. Підрозділ проектування, який розробляє виробництво запасних частин. При цьому планується й утримується в запасі кількість різних запасних частин.
2. Конструкторський підрозділ, де розробляють виробничі верстати високої гнучкості (швидкості переналагодження), що дозволяє випускати товари маленькими партіями.
3. Виробничий підрозділ, який орієнтується на виробництво товарів малими серіями й прагне до гнучкої взаємозамінності персоналу.
4. Підрозділ маркетингу, який розробляє реалістичні й надійні плани продажу.
5. Керуючий підрозділ, який вчасно подає фінансові відомості про стан запасів, що дозволяє менеджерові з логістики аналізувати ці відомості й коректувати величину цих запасів.

Структурне поліпшення інтегральної функції логістики відбувається на основі поетапного проектування.

1. *Визначення цілей*

У формулюванні цілей центральне місце посідає споживач (табл. 1.2). Важливо знати потреби споживачів і правильно вибирати періодичні поставки (що вибрати: щоб товар був швидше доставлений або щоб не змінювався обговорений строк поставок?).

При визначенні цілей також звертають увагу на виробниче й комерційне керування підприємством. Скорочення періоду поставок, наприклад, є одним із важливих аспектів у керуванні виробництвом.

Цільові задачі мають бути реальними з меншою кількістю коректувань.

Після того, як основні цілі сформульовані, визначають, хто буде здійснювати проект, і складають загальний план. Правильний вибір осіб для реалізації має вирішальне значення для успіху.

Таблиця 1.2

Цільові задачі логістики

Оцінні параметри	Досягнення мети на сьогоднішній день	Досягнення мети через рік
Рівень запасів, умовн. од.	10 000 000	8 000 000
Надійність поставок, дні	79	70
Гнучкість виробництв	Заздалегідь досягається домовленість про можливості виробництва в певний планований період	У будь-який планований період може бути зроблений будь-який продукт

2. *Аналіз вузлових моментів*

Варто проаналізувати вузлові моменти (категорії) поліпшення логістики (рис. 1.9). Для цього необхідно відповісти на запитання: як досягти поліпшення за кожною категорією?

У рамках категорії «Товар» відбувається уточнення асортименту, стандартизація запасних частин і напівфабрикатів, модульне складання продукції [33].

Категорія «Виробництво й розподіл» припускає оснащення виробництва надійними верстатами, тісний зв'язок виробництва й розподілу.

Категорія «Планування й керування» вимагає вибору найбільш ефективної методики керування запасами, зміни частоти планування (наприклад, перехід від щотижневого планування до щоденного).

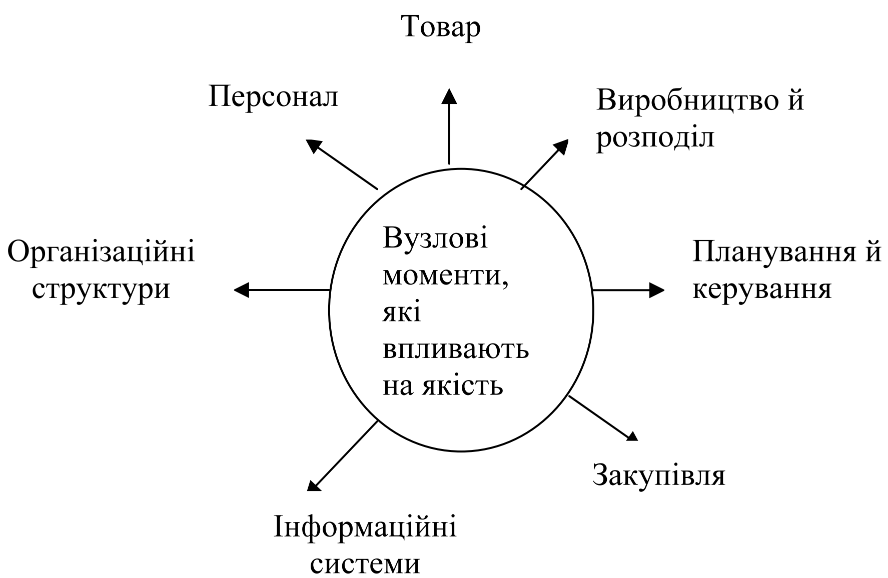

Рис. 1.9. Шляхи вдосконалення логістики (категорії)

При аналізі категорії «Закупівля» перевіряють надійність постачальників, виявляють можливості скорочення строків поставок, укладання прямих договорів з постачальниками й т.д.

Категорії поліпшення логістики безпосередньо пов'язані між собою. Наприклад, розробка асортименту (категорія «Товар») визначає напрямок виробничого процесу й вимоги відносної гнучкості (категорія «Виробництво»); комплексність інформаційних систем впливає на рівень підготовки співробітників (категорія «Персонал»).

Вузлові моменти вказують на напрямок діяльності щодо поліпшення інтегральної логістики. Їх включають у планування, при цьому визначають, хто буде цим займатися і які засоби будуть при цьому вивільнені.

3. *Реалізація заходів щодо поліпшення логістики*

Структурні поліпшення на початку виконання проекту реалізують циклічно за «правилом кола» (рис. 1.10). На першому етапі формулюють цілі, на другому - план їхньої реалізації, на третьому – реалізація. У період реалізації проекту відзначають результати поліпшень.

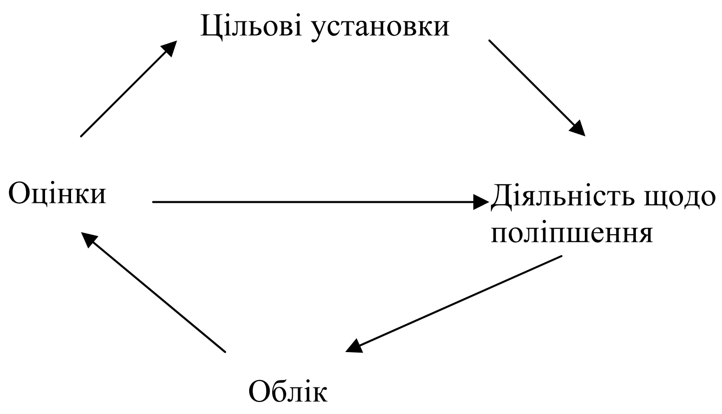

Рис. 1.10. «Правило кола» при діяльності щодо поліпшення інтегральної логістики

4. Оцінка діяльності й розрахунки. Чи здійснюється проект відповідно до наміченого плану? Чи є фактори, що гальмують реалізацію проекту?

5. *Коректування.* Можна внести зміни в планування діяльності, намітити нові дії.

1.4. Загальні принципи й тенденції формування логістичних систем

Проектування ЛС являє собою розробку процесів керування й організацію системи керування проходження деякого комплексу потокових процесів, що утворюють об'єкт керування й потребують взаємного регулювання та координації [32,43].

При проектуванні логістичної системи мають бути продумані як способи транспортування, так і методи керування розподілом товарів на різних ділянках каналу розподілу. У багатьох випадках витрати на транспортування не враховують у загальному аналізі витрат. Найбільшою проблемою є керування розподілом товарів, що надходять від виробника до декількох споживачів. Канали розподілу можуть бути різного типу: від прямого зв'язку виробник-споживач до зв'язку через безліч комбінацій різних посередників. Проектування логістичних систем має охоплювати докладний опис розподільної мережі із чітким виділенням при цьому всіх видів витрат, включаючи обробку матеріалів, зберігання й транспортування продукції.

Начальними принципами розробки сучасних логістичних систем є такі:

1) більші масштаби – за числом частин, за обсягом виконуваних функцій, за абсолютною вартістю;

2) наявність певної цілісності, функціональної єдності (загальної мети, загального значення), що призводить до складної ієрархічної будови системи;

3) складність (поліфункціональність) поведінки;

4) високий ступінь автоматизації, що означає підвищення ступеня самостійності системи в її функціонуванні;

5) нерегулярність, що статистично розподіляється в часі надходження зовнішніх впливів;

6) наявність у цілому ряді випадків такого функціонування системи, при якому необхідно враховувати конкуренцію окремих частин сформованої системи.

Найважливішою причиною формування систем є поява зацікавленості (об'єктивної або суб'єктивної) в їхньому створенні й умов, що цьому сприяють [33].

Одна із цілей при розробці логістичної системи полягає в зниженні вартості збоїв системи до деякого рівня. Ця невизначена ситуація виражається за допомогою оцінок імовірності настання подій.

Однією з основних задач фахівця з логістики при розробці логістичної системи є зменшення кількості людських помилок, що викликають неправильне функціонування системи. Фахівцеві з логістики може бути доручено заново розробити систему, що перебуває в погано структурованому стані. Його метою може бути така реорганізація логістичної системи, що трансформувала б її в добре структуровану відкриту систему, здатну адекватним чином адаптуватися до даного діапазону входів. Правильне функціонування системи обумовлюється тим, у якому ступені досягається належна структура при її розробці.

Надзвичайне зростання складності логістичних об'єктів привело до того, що в процесі їхньої розробки виявляються пов'язаними в єдине ціле десятки й сотні підприємств, сотні й десятки виконавців.

Ключовим фактором, що формує вимоги до логістичної системи, є споживач.

При формуванні логістичних систем варто врахувати такі тенденції:

1) зростання швидкості, збільшення інтенсивності й складності потоків, ускладнення схем фінансових розрахунків між партнерами в межі поставок;

2) скорочення числа ланок ланцюга поставок, зменшення кількості організаційно-економічних відносин у логістичних системах

підприємств при одночасному рості ступеня їхньої складності;

3) зниження рівня надійності ланцюга поставок шляхом застосування стратегій керування запасами, спрямованих на скорочення рівня всіх видів запасів, впровадження концепцій “точно в час”.

Наслідком цих тенденцій є ріст потенційної нестійкості логістичних систем, формованих на рівні підприємства. Для підвищення ступеня їхньої стійкості й надійності необхідна як подальша інтеграція в самому ланцюзі поставок, так й урахування факторів зовнішнього середовища, що динамічно змінюється.

Залежно від виду й масштабу бізнесу та інших факторів зовнішнього середовища логістичні системи того чи іншого підприємства можуть істотно відрізнятися одна від одної. Отже, однією із задач формування логістичних систем є уточнення їхніх моделей та критеріїв оцінки рівня якості обслуговування.

У рамках логістичних систем вирішують ряд таких задач, як прогнозування потреб у продукції, контроль над рівнем запасів, збір й обробка замовлень, визначення послідовності просування продукції в ланцюзі поставок, визначення необхідної кількості складів й їхнього місця розташування, а також політика зберігання продукції на складі.

Вирішення задач в області логістики ускладнюється динамічними умовами зовнішнього середовища, в яких здійснюються поставки продукції, недостатнім рівнем надійності діяльності виробників, значним часовим інтервалом між початком планування поставок й їхнім здійсненням.

Розглянемо основні принципи формування логістичних систем:

1) орієнтація на задоволення потреб споживача;

2) орієнтація на функціональні й інформаційні процеси;

3) орієнтація на запобігання помилкам, збоям, невідповідностям, недолікам, наскільки це можливо;

4) орієнтація на здійснення процесів, процедур і документації щадо логістичного обслуговування споживачів;

5) участь співробітників функціональних підрозділів підприємства в забезпеченні необхідного обслуговування споживачів;

6) чіткий розподіл посадових обов'язків працівників підприємства;

7) виконання замовлень із погляду розроблених і впроваджених на підприємстві стандартів обслуговування;

8) безперервна й постійна підтримка необхідного споживачам рівня обслуговування;

9) урахування факторів зовнішнього середовища;

10) досягнення ефективності функціонування логістичної системи.

Фахівці служби логістики мають реалізовувати такі дії в області обслуговування споживачів:

1) чітко встановлювати замовлення і вживати відповідних заходів в області політики обслуговування споживачів;

2) проводити попереджуючі (превентивні) впливи й реалізацію механізму контролю над якістю логістичного обслуговування;

3) розробляти корпоративні зобов'язання щодо підтримки всередині фірми стандартів логістичного обслуговування споживачів;

4) оптимізувати витрати ресурсів підприємства, пов'язані із забезпеченням необхідного споживачам рівня обслуговування;

5) постійно проводити аналіз вимог, пропонованих до логістичної системи, з метою визначення можливостей підтримки необхідного споживачам рівня обслуговування.

Для вирішення цих задач фахівці служби логістики формують структуру логістичної системи. Труднощі при формуванні логістичної системи обумовлюються специфічністю продукції. В області логістичного обслуговування споживачів можуть бути використані підходи, які традиційно застосовують у сфері виробництва матеріальної продукції, але спроби їх використання можуть бути неефективними через таке:

1) діяльність у сфері логістичного обслуговування має творчий характер і рівень її якості оцінюється споживачами безпосередньо в процесі споживання;

2) процеси надання й споживання логістичного обслуговування проходять одночасно;

3) у сфері логістичного обслуговування відсоток індивідуальної праці, рівень якості якої залежить від індивідуальних особливостей працівників підприємства високий;

4) різноманітність вимог, пропонованих споживачами, утруднює уніфікацію й стандартизацію методів, видів і рівнів обслуговування;

5) виконавець і споживач логістичних послуг безпосередньо взаємодіють при наданні обслуговування;

6) умови обслуговування, які характеризуються комплексом показників обслуговування, впливають на споживача логістичних послуг;

7) кінцева оцінка рівня логістичного обслуговування здійснюється на етапі безпосереднього контакту споживача й виробника послуг;

8) неможливо транспортувати й зберігати логістичні послуги.

Під умовами обслуговування розуміють сукупність факторів, що впливають на споживача в процесі надання послуг.

1.5. Формування вимог до логістичних систем з позиції системного аналізу підприємства

З метою формування потреб до ЛС з позицій системного аналізу підприємства можна сформулювати такі принципи [32, 47, 48-50].

1) інтеграція ланок ланцюга поставок у єдину логістичну систему, що забезпечує ефективне наскрізне керування матеріальними й інформаційними потоками;

2) інтеграція систем контролю над рухом і використанням сировини, матеріалів й іншої продукції, що надходить у виробництво, а також готової продукції, що доставляється споживачеві;

3) забезпечення ефективної взаємодії й погодженості

функціонування функціональних елементів логістичної системи;

4) чітке вписування логістичної системи в діючі бізнес-процеси, а також у систему керування підприємством;

5) функціонування логістичної системи відповідно до принципу Парето, спрямоване на те, щоб допомогти фахівцям служби логістики підприємства виявити важливі задачі й можливості, тобто логістична система має включати в себе елементи, що сприяють вирішенню дійсно важливих і пріоритетних задач (таких, для яких необхідно виділити ресурси);

6) приділення уваги методам, об'єктам, суб'єктам і самому предмету дослідження в логістичних системах;

7) упорядкованість й явність логістичних систем (що не виключає цінності інтуїції), сумісних зі стилем керування, прийнятим на підприємстві, і орієнтованістю на дії [47-50].

Вимоги, які має задовольняти логістична система, здійснюються на основі аналізу цілей функціонування логістичної системи й обмежень зовнішнього середовища:

1) гнучкість, необхідність швидкої адаптації до змін факторів зовнішнього середовища в умовах політичної й економічної нестабільності;

2) можливості функціонування при нерозвиненій інфраструктурі й сфері послуг.

Аналіз і синтез взаємозв'язку виявляють, з яких частин складається цілісна система і як вони взаємодіють. Якщо аналіз є процесом уявного розчленовування (декомпозиції) або розбивання об'єктів на елементи з урахуванням наявних між ними зв'язків, то синтез – процес возз'єднання елементів в одне ціле.

Аналіз і синтез діалектично взаємозалежні. Мислення складається не тільки у розкладанні предметів свідомості на їхні елементи, але й в об'єднанні пов'язаних один з одним елементів у деяку єдність [1].

Класики філософії підкреслюють взаємозв'язок аналізу й синтезу, оснований на єдності матеріального світу, його системності й диференційованості, безперервності й переривчастості.

1.6. Парадигми синтезу логістичних систем

Можна виділити такі парадигми синтезу логістичних систем: аналітичну, технологічну, маркетингову й інтегральну. Парадигма означає спосіб організації наукового знання, що задає те чи інше бачення об'єкта й відповідно моделі постановки та вирішення дослідницьких задач [49].

1. Аналітична парадигма

Ставлять задачу побудови економіко-математичної моделі, що відбиває специфіку розв'язуваної задачі в області логістики. При цьому задача чітко визначена, а модель реалізована. Але цього нелегко досягти, з огляду на складність, більшу розмірність і стохастичність функціонування інтегрованих логістичних систем. Крім того, реалізація подібних моделей вимагає значного числа вхідних даних і розробки складних алгоритмів прийняття управлінських рішень. Зазначені вимоги можуть привести до того, що області практичного застосування логістичних моделей і задач звужуються до рівня локальних систем. Для більшості прикладних задач, основаних на інтегральній парадигмі синтезу логістичних систем, даний підхід не дозволяє одержати необхідні рішення на системному рівні. Аналітична парадигма, наприклад, не дозволяє формалізувати складні динамічні зв'язки в логістичних системах.

2. Технологічна парадигма

Дана парадигма орієнтується на адміністративні функції співробітників функціональних підрозділів підприємства: планування, закупівля матеріальних ресурсів, виробництво, розподіл готової продукції. Підтримку глобального виконання замовлень здійснюють на основі застосування інформаційних систем обліку, контролю й прийняття рішень.

Прикладом використання технологічної парадигми є системи MRP, MRPII, DRP, які застосовуються у внутрішніх системах керування запасами й закупівлями матеріальних ресурсів, а також поставками готової продукції споживачам. Поряд із цим вирішують й окремі задачі, наприклад розрахунок оптимальної партії поставок (замовлення) або рівнів запасів продукції в ланках ланцюга поставок типу OPT. У той же час логістичні системи, побудовані на принципі технологічної парадигми, не мають необхідний рівень гнучкості й динамічності, наприклад, для регулювання відносин виробників з постачальниками й споживачами. Спроби застосувати технологічну парадигму приводять до поширення концепції MRP/OPT на нові логістичні організаційні структури, що не забезпечує досягнення позитивного ефекту й може породити додаткові, в ряді випадків неадекватні інформаційні потоки.

3. Маркетингова парадигма

Моделі, що використовують дану парадигму при синтезі логістичних систем, описують зв'язок між її елементами. Синтезована логістична система призначена для реалізації стратегічної мети підприємства – досягнення стратегічних конкурентних переваг на ринку. Моделі логістичних систем, які побудовані на основі даної парадигми, є до деякої міри абстрактними, мають велику розмірність, багатозмінні, мають якісний характер, що утруднює одержання кількісних рішень.

Прикладом маркетингової парадигми є LRP-система (Logistics Requirements Planning) – система контролю над вхідними, внутрішніми й вихідними матеріальними потоками на рівні підприємств. Система LRP відома також під назвою Supply Chain Management System (система керування ланцюгом поставок). Система LRP забезпечує:

1) концептуальний підхід до керування запасами в розподільних мережах і функціональних підрозділах підприємства;

2) прогнозування потреб у матеріальних ресурсах і транспортних засобах попиту на готову продукцію;

3) визначення оптимальної кількості ланок у ланцюзі поставок.

4. Інтегральна парадигма

Основними передумовами застосування інтегральної парадигми є такі принципи:

1) обслуговування споживачів як стратегічний елемент системи забезпечення конкурентної переваги підприємства;

2) необхідність досягнення високого рівня інтеграції між логістичними партнерами в ланцюзі поставок, створення нових організаційних (структурних) відносин;

3) використання сучасних технологічних можливостей для керування ланцюгами поставок.

Сутність інтегральної парадигми полягає в розгляді логістичної системи як інструмента керування, інтегрованого з процесом виконання замовлень для досягнення стратегічних цілей підприємства.

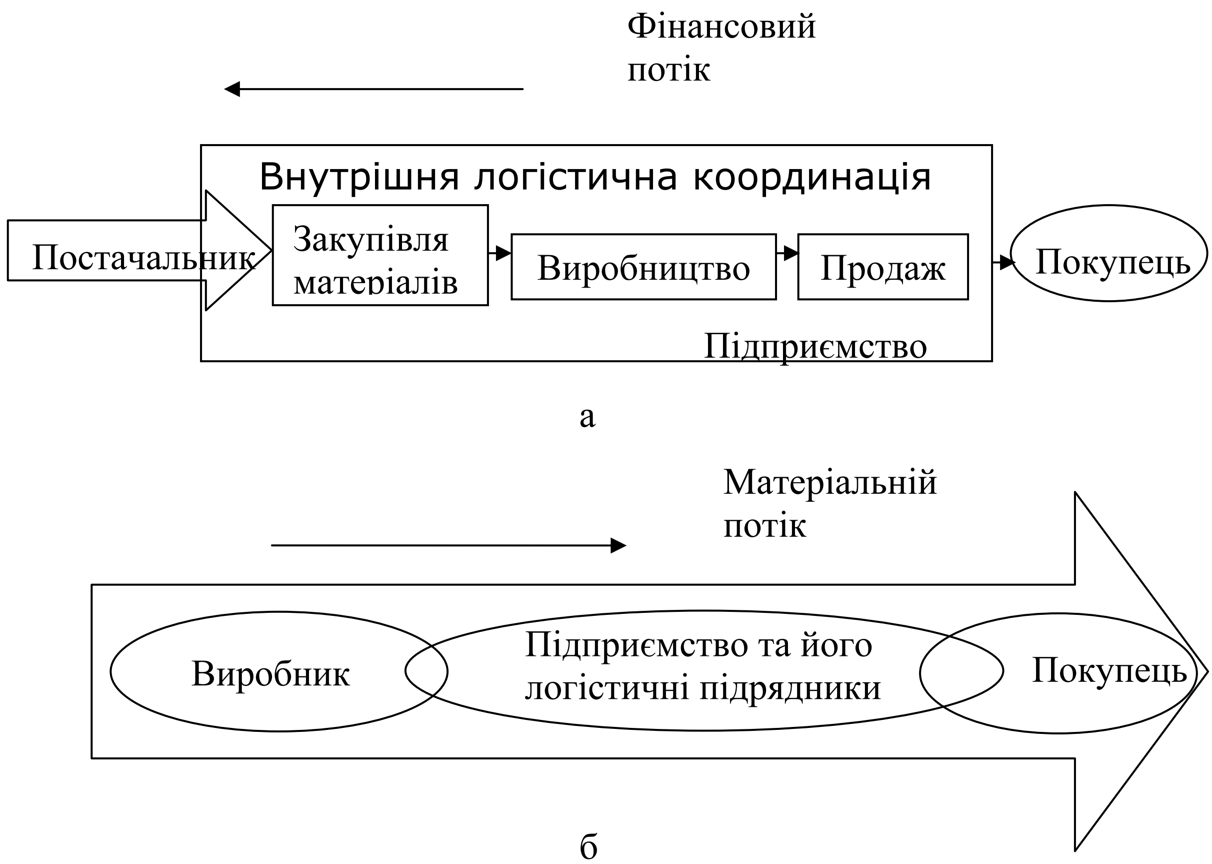

Рис 1.11. Особливості логістичних підходів:
а – традиційний;
б – інтегральний

Суть інтегральної парадигми проілюструємо на рис. 1.11, який відображає традиційний підхід, оснований на таких функціональних областях логістики, як постачання, виробництво й збут. З концептуальних позицій логістична система має інтегруючий потенціал, орієнтований на матеріальний потік. Однак в основному розглядають координуючу функцію й компенсацію обмеженої або недостатньої інтеграції з параметрами в ланцюзі поставок.

Матеріальний потік наведений як інтегратор процесу. При цьому інтегруюча функція може поширюватися на ряд підприємств, організацій, підрядників, узагальнених функцій, інформаційних систем і фінансових інститутів. Таким чином, логістичну систему розглядають як інтегровану систему, що реалізує ланцюги бізнесу підприємства.

Логістична парадигма утворюється при використанні методу системного аналізу при аналізі, синтезі, оцінці й оптимізації функціонування логістичних задач формування, розглянутих вище. Парадигми, як правило, комбінуються.

Формування логістичних систем ґрунтується на використанні певних методологічних принципів (розглянутих у розд. “Принципи системного аналізу”) і підходів. Як було відзначено, задачу формування логістичної системи вирішують з погляду мінімізації загальних витрат ресурсів підприємства. У цьому зв'язку застосування принципів системного аналізу є одним із найбільш ефективних шляхів вирішення актуальних наукових задач обслуговування.

Аналіз закордонних і вітчизняних наукових досліджень дозволяє виділити такі основні методологічні принципи формування логістичних систем.

В [49] наведені такі принципи синтезу логістичних систем:

1. Принцип глобальної оптимізації, інтеграції й координації. При оптимізації структури синтезованої логістичної системи узгоджуються локальні цілі функціонування елементів системи для досягнення глобального оптимуму. У процесі виконання замовлень досягається погоджена участь ланок ланцюга поставок у керуванні матеріальними потоками за умови реалізації глобальної функції системи.

2. Принцип контролю над рівнем обслуговування споживачів.

3. Принцип узгодження інформаційних, ресурсних, технічних й інших характеристик логістичної системи (уніфікації даних для всіх елементів логістичної системи).

На основі зазначених принципів, а також принципів, наведених у розд. “Принципи системного аналізу”, можна сформулювати концептуальну основу формування логістичних систем на підприємстві.

Реалізується комплекс мір, що передбачає:

1) прийняття однакових вимог до рівня логістичного обслуговування споживачів;

2) організацію системи обслуговування і оцінку рівня;

3) систематичне проведення опитувань й анкетувань для оперативного визначення думки споживачів;

4) розробку внутрішніх документів нормативно-технічного характеру, що регламентують вимоги до логістичних систем, методів і результатів процесів обслуговування споживачів.

Формування властивостей системності в розвитку логістики, обумовлене потребами споживачів, відкрило шлях до формування складних логістичних систем і комплексів. Вони забезпечують зміни в технології організації виробництва, підвищення продуктивності праці, зниження матеріаломісткості й енергоємності, підвищення рівня якості обслуговування.

Подання тенденції формування логістичних систем як елементів структури досягається на основі дослідження внутрішнього функціонування систем, взаємодії їх з іншими системами і умов їхнього функціонування. Дамо відповідь на такі запитання: яким чином формується залежність логістичних систем між собою при їхній розробці? Якими методами й засобами досліджуються якісні особливості таких систем? Це шлях системного аналізу, який вимагає відповідної методологічної й теоретичної бази: системного підходу, системотехніки й загальної теорії систем. Дослідження та розробку логістичних систем здійснюють на основі інтеграції власне наукових, технічних і соціальних знань. Причому фронт їхнього застосування розширюється, підвищується актуальність. Якщо при вивченні логістичних об'єктів враховують стабільність або стійкість їхніх характеристик, то формування логістичних систем відрізняється обов'язковим урахуванням випадкових різноманітних впливів. Практичне використання логістичних об'єктів починається після етапу їхнього проектування. Для застосування ж логістичних систем необхідні попередні теоретичні дослідження, результати яких можуть поповнювати арсенали наукових знань, стимулювати їхній розвиток. Проведення теоретико-практичних досліджень логістичних систем, як правило, обмежене часом. Заміна існуючих логістичних систем новими починається, як правило, до вичерпання їх технічних і технологічних можливостей і ресурсів.

При формуванні зв'язків між елементами утворюється певна структура системи, яка залежить від комбінації згаданих вище. Кожний елемент має певні властивості, одні з яких при формуванні зв'язків знижуються, інші підсилюються й набувають додаткових властивостей. Однак ступінь зниження системотворчих (системозначних) властивостей елементів, як правило, буває частковим, неповним. У цьому зв'язку при формуванні логістичної системи виникають не тільки "корисні" функції, що позитивно впливають на функціонування системи, забезпечуючи збереження системою її якісної особливості, але й дисфункції, що негативно впливають на її функціонування [54].

Для виникнення системи потрібні системотворчі фактори, а для руйнування – системоруйнівні. До системоруйнівних факторів відносять зовнішні впливи, розвиток дисфункції, зростання ентропії. Зовнішні впливи руйнують систему, коли їхня сила стає більше сили внутрішніх зв'язків системи. Дисфункція системи підриває систему зсередини. Зростання ентропії відбувається через дезорганізуючі зовнішні впливи, зношування й переродження внутрішніх зв'язків.

Контрольні запитання

1. Назвіть і поясніть основні принципи розробки логістичних систем.
2. Назвіть і поясніть основні тенденції при формуванні логістичних систем.

3. Обґрунтуйте основні принципи формування логістичних систем на прикладі промислового підприємства.

4. Поясніть неефективність підходів, які застосовують традиційно в сфері виробництва матеріальної продукції в області логістичного обслуговування споживачів.

5. Обґрунтуйте вимоги, запропоновані до логістичних систем.

6. Назвіть і прокоментуйте основні парадигми синтезу логістичних систем.

7. Покажіть принципову різницю між традиційним логістичним підходом й інтегральним логістичним підходом.

8. Сформуйте концептуальну основу формування логістичних систем на авіабудівному підприємстві.

9. Сформулюйте основні принципи синтезу логістичних систем.

10. Назвіть основні задачі, які ефективно вирішують у рамках логістичних систем.

Завдання

1. Побудуйте спрощений алгоритм синтезу логістичної системи управління (ЛСУ) на основі виділення основних фаз функціонування ЛС - постачання, виробництво, збут.

2. Наведіть приклад синтезу ЛС і ЛСУ для машинобудівних підприємств на основі принципів, викладених у розд. 1.

3. Проведіть обґрунтування й вибір математичних моделей для основних задач, ефективно розв'язуваних у рамках логістичних систем.

4. Обґрунтуйте й схематично зобразіть ЛС, ЛСУ й інформаційно-управляючу систему (ІУС).

5. Підберіть адекватні математичні моделі із розділів даного посібника.

6. Обґрунтуйте трифазну ЛС (постачання, виробництво, збут), виберіть відповідну математичну модель у вигляді мережі масового обслуговування.

Розділ 2. ПОБУДОВА ЙМОВІРНІСНИХ МОДЕЛЕЙ ФУНКЦІОНУВАННЯ ЛОГІСТИЧНИХ СИСТЕМ

2.1. Подання інформаційних потоків у моделях логістичних систем

Розглянемо основні характеристики потоків подій, причому під подією будемо розуміти появу за проміжок часу $\Delta t \to 0$ однієї або декількох (групи) заявок розглянутого потоку (вхідного або обслуговування) [12].

Інтенсивність потоку в момент часу t

$$\alpha(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \wedge (t, \tau),$$

де $\wedge(t,\tau)$ – число заявок потоку, що надійшли або обслужені за проміжок часу $(t,t+\tau)$.

Якщо $\alpha(t)=\alpha=const, t=(a,b)$, то потік називається стаціонарним на розглянутому інтервалі (a,b). У ряді випадків можна вважати, що $a=0, b\leq\infty$. Для стаціонарного потоку число заявок, що надійшли або обслужені за деякий проміжок часу τ, не залежить від розташування цього проміжку на інтервалі (a,b). Інтенсивність потоку визначається також як середнє число (математичне сподівання) заявок, що надійшли або обслужені за одиничний часовий інтервал.

Взаємне розташування подій потоку на часовій осі можна охарактеризувати (в імовірнісному сенсі) ступенем післядії (впливу), факту настання деякої події потоку, яка залежить від імовірнісних характеристик появи наступних подій цього ж потоку. Важливим класом потоків подій є рекурентні потоки, в яких імовірність появи події потоку в деякий момент часу залежить від моменту t появи найближчої попередньої події й не залежить від виду потоку до моменту часу t. Часткою рекурентних потоків є потоки без післядії, для яких імовірність настання події в будь-який момент часу не залежить від того, яким чином впливали події до цього моменту часу [10-12].

Введемо величину $p_k(\tau)$ – імовірність того, що за час τ наступить рівно k подій потоку. Тоді проміжок часу τ_2 між будь-якими двома сусідніми подіями рекурентного стаціонарного потоку описується функцією розподілу

$$F(\tau)=P\{\tau_2<\tau\}=1-p_0(\tau), \qquad (2.1)$$

причому $P\{\tau_2<\tau\}$ – імовірність виконання умови, що міститься в дужках. Наприклад, для стаціонарного потоку без післядії

$$F(\tau)=1-e^{-\lambda\tau}, \qquad (2.2)$$

де λ – деяка постійна величина.

Потік подій називається ординарним, якщо для нього

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1-p_0(\tau)-p_1(\tau)}{\tau}=0.$$

Фізичний зміст ординарності потоків полягає в тому, що кожна подія потоку відбувається за участю тільки однієї заявки (відсутні групи одночасних заявок, що надходять та обслуговуються). Рекурентні ординарні стаціонарні потоки задаються функцією розподілу (2.1) і положенням моменту настання першої події потоку щодо початкової точки відліку часової координати.

Величина

$$\varepsilon=\lim_{\tau\to 0}\frac{1-p_0(\tau)}{\tau}$$

називається параметром потоку. Згідно з теоремою Королюка, необхідною й достатньою умовою ординарності потоку є рівність значень параметра й інтенсивності

$$\varepsilon=\lambda.$$

Урахування неординарності потоку подій веде до необхідності задання закону розподілу числа заявок у групі потоку

$$Q(n) = P\{\eta = n\}, n = 1,2,..., \qquad (2.3)$$

де η – число заявок, що відповідають деякій події потоку. Очевидно, що ординарні потоки є окремим випадком неординарних, для яких

$$Q(1) = 1, Q(n) = 0 \text{ при } n = 2,3,....$$

Математичне сподівання часу між двома сусідніми подіями

$$m = \int_0^\infty \tau dF(\tau),$$

дисперсія цього часу

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (\tau - m)^2 dF(\tau).$$

Величина $g = \frac{\sigma_2}{m^2}$ називається коефіцієнтом варіації й може бути використана як характеристика потоку. Зокрема, для потоку без післядії $g = 1$.

Імовірність настання k подій потоку за інтервал часу τ

$$p_0(\tau) = 1 - F(\tau),$$

$$p_i(\tau) = \int_0^\tau p_{i-1}(\tau - \tau_2)\, dF(\tau_2), i = 1,2,....$$

Для стаціонарного потоку без післядії

$$p_i(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^i}{i!} e^{-\lambda\tau}, i = 0,1,2,...,$$

що відповідає розподілу Пуассона. Такі потоки звичайно називаються пуассонівськими. Потоки, для яких одночасно виконуються властивості стаціонарності, ординарності й відсутності післядії, називаються найпростішими, вони характеризуються однією величиною - параметром потоку.

Таким чином, для задання рекурентного стаціонарного потоку подій необхідно мати аналітичний вигляд функції розподілу часу між двома сусідніми подіями (2.1) і функції розподілу числа заявок у групі потоку (2.3). Надалі ми будемо розглядати моделі функціонування АСУ саме з такими потоками, оскільки реальні потоки, як правило, є рекурентними. Властивість стаціонарності виконується не завжди, однак у межах деякого часового інтервалу з певною похибкою можна вважати інтенсивність потоку постійною, тоді весь часовий інтервал роботи системи розбивають на інтервали, в межах кожного з яких потік подій вважають стаціонарним із певною інтенсивністю. Реальна зміна інтенсивності потоку відбувається звичайно досить плавно.

Послідовність побудови статистичної моделі деякого потоку подій можна подати таким чином:

1. Побудова емпіричної моделі потоку на основі статистичних даних, що включає в себе:

а) перевірку гіпотези про стаціонарність потоку, виділення (за необхідності) часових інтервалів функціонування досліджуваної системи, на яких потік подій можна вважати стаціонарним;

б) побудову емпіричної функції розподілу (або щільності розподілу), а також знаходження оцінок числових характеристик емпіричного розподілу (математичного сподівання, дисперсії, вищих моментів);

в) побудову дискретної функції розподілу числа заявок у групі у випадку неординарного потоку подій.

2. Вибір найбільш зручного аналітичного вигляду апроксимуючої (теоретичної) функції розподілу. Як правило, найбільш зручним видом теоретичної функції розподілу (з погляду можливості одержання аналітичних рішень моделей з такими потоками, а також простоти апроксимації) є експоненціальна функція розподілу.

3. Знаходження параметрів (параметризація) теоретичної функції розподілу.

4. Перевірка можливості використання розподілу вибраного виду як теоретичного з використанням критерію згоди.

5. Аналіз результатів перевірки за попереднім етапом, ухвалення рішення про вид теоретичної функції розподілу; повторення (якщо буде потреба) пунктів 3, 4, 5 до одержання потрібної точності апроксимації.

У цьому розділі будуть розглянуті особливості перерахованих вище етапів побудови статистичних моделей потоків подій.

2.2. Побудова емпіричної моделі логістичного потоку

Основою для знаходження виду потоку подій є розгляд фізичних умов його виникнення і аналіз статистичного матеріалу, який одержують при спостереженні за ним. Звичайно моделі ЛС використовують при проектуванні системи, коли не завжди є можливість визначити фізичні реалізації потоку. У зв'язку із цим необхідно докладно розглянути причини, що викликають потік подій, тоді характеристики потоку іноді можна визначити з розгляду всіх (або досить великого числа) можливих варіантів формування подій потоку. Істотним полегшенням при цьому може бути використання методів моделювання на базі універсальних цифрових КС. Крім того, часто можна скористатися результатами спостережень за реальним потоком подій, однотипним стосовно досліджуваного [39,40].

Припустимо, що існує певне число величин, які є продовженням проміжків часу між сусідніми подіями деякого потоку. Нехай ці величини (або частина з них) являють собою вибірку з деякої генеральної сукупності випадкових величин, що описуються однією функцією розподілу. Така вибірка є вхідною інформацією для побудови емпіричної моделі потоку подій. Очевидно, такий потік має бути стаціонарно-рекурентним.

Стаціонарність потоку перевіряють шляхом аналізу фізичної сутності умов його виникнення або формальних методів. При використанні останніх найбільше практичне застосування знайшли непараметричні статистичні критерії, які не потребують апріорного знання виду закону розподілу аналізованого потоку. До таких критеріїв відносяться критерії серій, тренда, Уілкоксона й $X-$ критерій.

Якщо гіпотеза про стаціонарність потоку на деякому часовому інтервалі не підтвердилася, то цей інтервал можна розбити на два інтервали (не обов'язково однакові) і перевірити гіпотезу про стаціонарність для кожного з них. При виборі точки розбивання варто використати відомості про середні значення випадкової величини X на різних ділянках інтервалу існування потоку подій. Продовжуючи (якщо буде потреба) такі розбивання, можна виділити часові відрізки функціонування системи, у межах кожного з яких потік подій можна вважати стаціонарним.

Побудова емпіричної функції розподілу величини X звичайно починається з побудови гістограми розподілу цієї величини. При досить великому обсязі вибірки (порядку 100 - 150 і більше) послідовність побудови гістограми має такий вигляд [42]:

1. Визначення діапазону змін випадкової величини X, тобто знаходження $x_{\min}$ й $x_{\max}$. Упорядкування ряду значень вибірки (за величиною елементів).

2. Вибір числа r інтервалів зміни величини X. Звичайно інтервали однакові, й у кожний з них повинно потрапити (у середньому) 8 - 15 значень вибірки. Варто мати на увазі, що надмірне збільшення величини r призводить до великої нерівності гістограми, що може ускладнити знаходження виду апроксимуючої функції. У той же час мале r може знецінити частину інформації, що міститься у вибірці. Значення r пропонується порядку 6 - 15.

3. Знаходження числа влучень випадкової величини X у кожний з r інтервалів, одержання значень ординат наведеної гістограми

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \gamma(x_j - a_{i-1})\gamma(a_i - x_i) / \sum_{s=1}^{n} x_s , \tag{2.4}$$

причому тут і далі

$$\gamma(x) = \begin{cases} o \\ 1 \end{cases} \text{при} \begin{cases} x \le 0, \\ x > 0, \end{cases}$$

де $\gamma(x)$ – одинична функція Хевісайда;

a_i – точка розділу інтервалів.

4. Графічна побудова гістограми розподілів

При великій нерівності гістограми варто зменшити величину r (шляхом об'єднання інтервалів із малим значенням b_i) і повторити пп. 3 й 4.

При невеликому обсязі вибірки величин $X(n < 30)$ необхідно згладити особливу значимість величин, що потрапили у вибірку. Таке згладжування особливо необхідно в тих випадках, коли невідома форма гіпотетичного розподілу. У ряді випадків необхідно знати числові характеристики випадкової величини X. Якщо вихідною інформацією при цьому є деяка випадкова вибірка, то й числові величини, що знаходять, будуть випадковими оцінками шуканих характеристик. Ці оцінки повинні мати властивості несумісності, незалежності й ефективності [24]. Наведемо формули для незміщених оцінок перших чотирьох центральних моментів:

$$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m) \equiv 0 \text{ , тому що } m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ ;}$$

$$M_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 \text{ ;}$$

$$M_3 = \frac{n}{(n-1)(n-2)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^3 \text{ ;}$$

$$M_4 = \frac{n^2 - 2n + 3}{(n-1)(n-2)(n-3)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^4 -$$

$$- \frac{3(2n-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2\right]^2 ,$$

де m – математичне сподівання величини X [44].

2.3. Параметризація апроксимуючих теоретичних функцій розподілу параметрів потоку

Знаходження теоретичних функцій розподілу, що описують рекурентні потоки подій, пов'язане з визначенням числових значень їхніх параметрів. Вхідною інформацією при параметризації є емпірична функція розподілу, або відповідні числові характеристики. У зв'язку з тим, що ця інформація є певною мірою функцією вибірки, то задача параметризації зводиться до визначення оцінок параметрів теоретичної функції розподілу [43].

Шукані оцінки параметрів мають задовольняти звичайні вимоги несумісності, незалежності й ефективності [24]. Крім того, необхідно, щоб методика знаходження оцінок була по можливості простішою. Нижче будуть розглянуті такі методи параметризації:

1) методи, що використовують середньоквадратичні критерії розбіжності теоретичної й емпіричної функцій розподілу;

2) метод моментів;

3) графоаналітичний метод на основі критерію Колмогорова.

У першому випадку як міру розбіжності емпіричної й теоретичної функції розподілу приймають величину

$$b = \sum_{i=1}^{r} c_i \left(\frac{v_i}{n} - p_i \right)^2 , \qquad (2.5)$$

де n – обсяг вибірки; r – число інтервалів гістограми; v_i– число значень вибірки, що потрапили в i-й інтервал; $p_i = p_i(\alpha_1,...,\alpha_m)$ - площа під кривою щільністю розподілу, що відповідає i-му інтервалу; $\alpha_j (j=1,...,m)$ – параметр теоретичної функції (або щільності) розподілу; $c_i (i=1,...,r)$ – деяким чином вибрані множники.

Знаходження параметрів зводиться до розв'язання такої системи рівнянь:

$$\partial b / \partial \alpha_j = 0,\ j = 1,2,...m. \tag{2.6}$$

Якщо припустити, що

$$c_i = n / p_i,\ i = 1,2,...,r,$$

то міра розбіжності теоретичного й емпіричного розподілів матиме вигляд

$$b_1 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i}. \tag{2.7}$$

При $n \to \infty$ величина b_1 має розподіл χ^2 з $(r-1)$ степенями вільності. При цьому систему рівнянь (2.6) переписують таким чином:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial b_1}{\partial \alpha_j} = \sum_{i=1}^{r}\left[\frac{v_i - np_i}{p_i} + \frac{(v_i - np_i)^2}{2np_i^2}\right]\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} = 0. \tag{2.8}$$

Розв'язати останню систему рівнянь відносно α_j досить важко навіть у найпростіших випадках. Тому звичайно використовують такі спрощення системи рівнянь (2.8):

1. *Метод максимуму правдоподібності*

Якщо знаменник другого члена в (2.8) вважати постійним, то можна одержати таку систему рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{v_i}{p_i}\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} = 0,\ j = 1,2,...,m. \tag{2.9}$$

Оцінки, що знаходять за методом максимуму правдоподібності, у більшості практичних випадків є найбільш ефективними, тобто мають мінімальну дисперсію серед інших можливих оцінок тих же параметрів.

2. *Метод найменших квадратів*

Якщо у виразі (2.5) прийняти $c_i = n^2 / v_i$, то одержимо таке рівняння для міри розбіжності емпіричного й теоретичного розподілів:

$$b_2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(v_i - np_i)^2}{v_i}.$$

Відповідна система рівнянь для параметрів теоретичної функції розподілу

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{(v_i - np_i)}{v_i}\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} = 0, j = 1,2,...,m. \tag{2.10}$$

Вона досить зручна у випадку лінійного виду функції

$$p_i = p_i(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m),$$

оскільки приводить до системи лінійних алгебричних рівнянь відносно величин α_j. Відзначимо, що оцінки за методом найменших квадратів відрізняються від оцінок методу максимуму правдоподібності на величину порядку $\frac{1}{n}$.

Метод моментів

Параметри теоретичного розподілу визначають з умови рівності перших h моментів теоретичного і емпіричного розподілу. В основу методу покладено ту обставину, що характеристична функція

$$\varphi(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{isx} dF(x) \ ,$$

однозначно відповідна функції розподілу $F(x)$, може бути наведена у вигляді

$$\varphi(s) = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{dv}{v!}(is)^{v} \ , \qquad (2.11)$$

де d_v – v-й початковий момент розподілу.

Звідси випливає, що рівність всіх моментів емпіричного й теоретичного розподілу свідчить про повний збіг і відповідних функцій розподілу. При апроксимації, яку виконують із деяким кінцевим ступенем точності, важливий збіг моментів із найбільшими ваговими коефіцієнтами в розкладанні (2.11). Оскільки зі збільшенням номера моменту його вага в формулі (2.11) знижується, то для отримання системи рівнянь доцільно вимагати збігу саме перших моментів. Поряд із початковими моментами можуть використовуватися й центральні моменти розподілів, якщо це зручніше.

Для більшості апроксимуючих розподілів ефективність методу моментів значно нижче одиниці (що відповідає методу максимуму правдоподібності), і тільки для нормального й експоненціального розподілів ця величина досягає одиниці. Однак процес параметризації за методом моментів, як правило, не викликає особливих труднощів, а невисока ефективність методу може бути компенсована відповідним збільшенням обсягу вибірки.

Графоаналітичний метод

У цьому методі параметризації істотно використовується критерій Колмогорова, відповідно до якого апроксимацію вважають задовільною, якщо модуль різниці емпіричної й теоретичної функції розподілу Δ не перевищує деяку певну величину ε .

Практично методика параметризації функції розподілу з використанням критерію Колмогорова зводиться до такого. Насамперед будують емпіричну функцію розподілу. Потім при вибраному рівні значимості α визначають табличну величину ε [24] і будують «коридор» розподілу, границями якого служать східчасті лінії, що знаходяться на відстані $\pm\frac{\varepsilon}{2}$ від емпіричної функції розподілу. Потім «коридор» розподілів заповнюють відрізками апроксимуючої функції розподілу таким чином, щоб число відрізків було мінімальним. Оскільки «коридор» розподілів цілком покриває гіпотетичну функцію розподілу, то теоретична апроксимуюча функція розподілу відстоїть від неї не більш ніж на ε, що свідчить про достатню точність виконаної апроксимації [46].

2.4. Функції розподілу для задання потоків у логістичних системах та їхні властивості

Безліч всіх можливих реалізацій деякого стаціонарного рекурентного потоку подій адекватне генеральній сукупності можливих значень тривалості моментів часу між сусідніми подіями (за умови, що відомо число заявок, що беруть участь у кожній події). Можна говорити про те, що величини, що становлять генеральну сукупність, підпорядковуються деякій гіпотетичній функції розподілу, відновити яку за вибіркою обмеженого обсягу можна лише з деяким ступенем точності [27].

Будемо говорити про апроксимації розподілу величин, що становлять генеральну сукупність, за допомогою деякої апроксимуючої (теоретичної) функції розподілу за вибіркою обмеженого обсягу. Одержання формального виду розподілу часу між сусідніми подіями потоку необхідно для використання в математичному апараті рішення моделей, частиною яких є ці потоки. При цьому вид розподілу впливає на трудомісткість (і можливість) того чи іншого методу дослідження моделей.

Аналітична форма апроксимуючого розподілу має дозволяти:

1) з достатнім ступенем точності наблизитися до розподілу випадкових величин, що становлять генеральну сукупність;

2) знаходити по можливості нескладні аналітичні рішення досліджуваних систем;

3) виконувати апроксимацію (тобто робити параметризацію теоретичної функції розподілу) досить просто й ефективно.

Розподіли можуть мати такі характеристики:

1. Функцію розподілу

$$F(x) = P\{\tau < x\},$$

де τ – тривалість проміжку між сусідніми подіями.

2. Щільність розподілу

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \tag{2.12}$$

3. Перетворення Лапласа – Стілтьєса

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x). \tag{2.13}$$

4. Математичне сподівання часу між сусідніми подіями

$$\tau_{сер} = \int_0^\infty x dF(x). \tag{2.14}$$

5. Вищі початкові моменти

$$d_\nu = \int_0^\infty x^\nu dF(x), \nu = 2,3,... \tag{2.15}$$

6. Дисперсію часу між сусідніми подіями

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (x - \tau_{сер})^2 dF(x). \tag{2.16}$$

7. Вищі центральні моменти

$$\theta_\nu = \int_0^\infty (x - \tau_{сер})^\nu dF(x), \nu = 3,4,... \tag{2.17}$$

8. Відносну варіацію

$$g = \frac{\sigma^2}{\tau_{сер}^2}. \tag{2.18}$$

Характеристики експоненціального розподілу наведені в табл. 2.1. Такий розподіл описує потоки без післядії, які згадувалися в п. 2.1. Потоки подій, описувані експоненціальним розподілом, зобразимо як марковські процеси з безперервним часом, що створює виняткові зручності при аналізі системи з такими потоками [31].

Експоненціальна апроксимація найчастіше зовсім незадовільно передає форму гіпотетичного (і емпіричного) розподілу, що може призвести до грубих помилок при розв'язанні моделей. Тому використовувати експоненціальний розподіл треба досить обережно, з огляду на ступінь узгодження його з емпіричним розподілом, а також можливу похибку розв'язання моделі.

Узагальненням експоненціального розподілу для випадку $g \le 1$ є спеціальний розподіл Ерланга k–го порядку $(k = 1,2,...)$, основні характеристики якого наведені в табл. 2.1.

Часові проміжки між сусідніми подіями можна подати як суму k відрізків, кожний з яких описується експоненціальним розподілом з параметром α.

З таким потоком можна зіставити фіктивну регулюючу систему, що складається з k послідовних фаз, і вважати, що група заявок, що беруть участь в одній події, перебуває на i-й фазі, якщо від попередньої події цю групу відокремлює $(i-1)$-й відрізок. Одночасно на всіх фазах може перебувати не більше однієї групи заявок. Ерланговський потік із зазначеним розкладанням на фази може бути наведений як марковський процес із безперервним часом, при цьому вводиться додаткова координата прохідної фази [41,42].

Таблиця 2.1

Функції розподілу потоків у логістичних системах та їхні властивості

№ п/п	Найменування розподілу	$F(x)$	$f(x)$	$\varphi(s)$	τ_{cep}	σ^2	g	d_υ
1	Експоненціальний	$1-\exp(-\alpha x)$	$\alpha\times\exp(-\alpha x)$	$\frac{\alpha}{\alpha+s}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}$	1	$\frac{\upsilon!}{\alpha^\upsilon}$
2	Ерланга-спеціальний	$1-\sum_{i=0}^{k=1}\frac{(\alpha x)^i}{i!}e^{-\alpha z}$	$\alpha\frac{(\alpha x)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\alpha x}$	$\left(\frac{\alpha}{\alpha+s}\right)^k$	$\frac{k}{\alpha}$	$\frac{k}{\alpha^2}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{(k+\upsilon-1)!}{(k-1)!\alpha^\upsilon}$
3	Гіперекспо-ненціальний другого порядку	$1-\varphi\exp(-2\varphi\alpha x)-$ $-(1-\varphi)\times$ $\times\exp[-2(1-\varphi)\alpha x]$	$2\varphi^2de^{-2\varphi\alpha x}+$ $+2(1-\varphi)^2\times$ $\times\alpha e^{-2(1-\varphi)\alpha x}$	$\frac{2\varphi^2\alpha}{2\varphi\alpha+s}+$ $+\frac{2(1-\varphi)^2\alpha}{2(1-\varphi)\alpha+s}$	$\frac{1}{\alpha}$		$1+$ $+\frac{(1-2\varphi)^2}{2\varphi(1-\varphi)}$	$\frac{\varphi\cdot\nu!}{(2\varphi\alpha)^\nu}+$ $+\frac{(1-\varphi)\nu!}{[2(1-\varphi)\alpha]^\nu}$
4	Вироджений	$\gamma(x-a)$	$\delta(x-a)$	e^{-as}	a	0	0	a^ν
5	Східчастий	$\sum_{i=1}^{n}b_i\gamma(x-a_i)$	$\sum_{i=1}^{n}b_i\delta(x-a_i)$	$\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{s}e^{-a_is}$	$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$			$\sum_{i=1}^{n}a^\nu{}_ib_i$
6	Кусково-лінійний	$\sum_{i=1}^{n}b_i(x-a_i)\gamma(x-a_i)$	$\sum_{i=1}^{n}b_i\gamma(x-a_i)$	$\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{s}e^{-a_is}$	$-\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i{}^2b_i}{2}$			$-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i{}^{\nu+1}\cdot b_i}{\nu+1}$
7	Нормальний		$\frac{\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$		m	σ^2	$\frac{\sigma^2}{m^2}$	

Розподіл із безперервною (у деякому інтервалі) зміною g можна одержати, використовуючи перетворення Лапласа – Стілтьєса, що має вигляд

$$\varphi(s) = \left(\frac{\alpha}{\alpha + s}\right)^{k-1} \frac{\gamma}{\gamma + s}.$$

Такий розподіл виводять зі спеціального розподілу Ерланга k-го порядку, для якого інтенсивність проходження перших $(k-1)$ фаз дорівнює α, а k-ї фази – γ. Для цього розподілу

$$F(x) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - \gamma}\right)^{k-1} \left\{1 - e^{-\gamma x} - \frac{\gamma}{\alpha}\sum_{j=0}^{k-2}\left(\frac{\alpha-\gamma}{\alpha}\right)^{i}\left(1 - \sum_{s=0}^{j}\frac{(\alpha x)^s}{s!}e^{-\alpha x}\right)\right\},$$

$$f(x) = \gamma\left(\frac{\alpha}{\alpha - \gamma}\right)^{k-1}\left\{e^{-\gamma x} - \sum_{j=0}^{k-2}\frac{(\alpha - \ \gamma)\cdot x^j}{j!}e^{-\alpha x}\right\}.$$

Крім того, одержимо

$$\tau_{cep} = \frac{(k-1)\gamma + \alpha}{\alpha\gamma},\ \sigma^2 = \frac{k-1}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{\gamma^2},$$

тоді

$$g = \frac{(k-1)\gamma^2 + \alpha^2}{[(k-1)\gamma + \alpha]^2}.$$

Можна бачити, що при $\tau_{cep} = \text{const}$ $\text{g} \to 1$при $\alpha \to \infty$; $g \to \frac{1}{k}$ при $\alpha \to \gamma$, тобто для такого розподілу спектр g безперервний в інтервалі $\left[1, \frac{1}{k}\right]$.Параметризація у цьому випадку найбільш зручна й виконується методом моментів, вихідною інформацією є значення τ_{cep} й g вибірки. Тоді одержимо

$$k = \left[\frac{1}{g}\right],\ \alpha = \frac{k - 1 + \sqrt{kg(k-1) - (k-1)}}{\tau_{cep}(1\text{ - g})},\ \gamma = \frac{\alpha}{\alpha\tau_{cep} - (k-1)}.$$

Узагальненням експоненціального розподілу на випадок $g \geq 1$ є гіперекспоненціальний розподіл k-го порядку, $k = 1,2,...$, для якого

$$F(x) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} a_i e^{-\alpha_j x}, \sum_{i=0}^{k-1} a_i = 1, a_i \geq 0.$$

Часові проміжки між сусідніми подіями потоку з гіперекспоненціальним розподілом описуються експоненціальними розподілами, однак параметр цього розподілу для різних проміжків може бути неоднаковим, причому з імовірністю a_i параметр дорівнює $\alpha_i (i = 0,1,...,k-1)$.

Для такого потоку також можна ввести регулюючу систему, що складається з k паралельних фаз, і вважати, що для кожної заявки (або групи заявок) i-а фаза може бути вибрана з імовірністю a_i, тоді час проходження фази розподілений за експоненціальним законом з параметром a_i, причому одночасно на всіх фазах може перебувати не більше однієї заявки (або групи заявок при неординарному потоці). Гіперекспоненціальний потік може бути поданий марковським процесом із безперервним часом, при цьому необхідно також ввести додаткову координату прохідної фази.

Зручна форма завдання гіперекспоненціального розподілу 2-го порядку та його характеристики наведені в табл. 2.1. Відзначимо, що при другому порядку розподілу й фіксованому $\tau_{сер}$ величина g може набувати будь-яких значень у діапазоні від 1 (що відповідає експоненціальному розподілу) і до ∞.

Параметризація за методом моментів в останньому випадку реалізується з використанням величин $\tau_{сер}$ і g вибірки. Тоді

$$\alpha = \frac{1}{\tau_{сер}},$$

$$\varphi = \frac{\frac{1}{2} - \sqrt{g^2 - 1}}{[2(g+1)]}.$$

Можна відзначити, що всі види розподілів Ерланга й гіперекспоненціальних розподілів зводяться до експоненціального при $k = 1$. Ефективність оцінок за методом моментів падає з ростом k, однак використання інших методів параметризації призводить до необхідності вирішення громіздких систем трансцендентних рівнянь.

Вироджений розподіл, характеристики якого наведені в табл. 2.1, описує регулярний потік, для якого інтервали між сусідніми подіями строго постійні й однакові. Незважаючи на простоту задачі, аналіз систем із такими потоками, як правило, далеко не тривіальний. До виродженого розподілу прагне спеціальний розподіл Ерланга при $k \to \infty$.

Вироджений розподіл є окремим випадком введення апроксимуючих розподілів, описуваних кусково-статистичним функціями розподілу

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} b_{ik} (x - a_i)^k \gamma(x - a_i), \tag{2.19}$$

де n – число ділянок апроксимації;

m – максимальний ступінь виразу;

$\gamma(x)$ – одинична функція Хевісайда,

$$r(x) = \begin{cases} 0 \ \ \textit{при} \ \mathrm{x} \le 0, \\ 1 \ \ \textit{при} \ \mathrm{x} > 0. \end{cases}$$

Для такого розподілу

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} b_{i0} \delta(x - a_i) + \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} k b_{ik} (x - a_i)^{k-1} r(x - a_i),$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака.

У табл. 2.1 наведені характеристики деяких форм східчастого й кусково-лінійного розподілів.

Кусково-східчасті розподіли дозволяють робити апроксимацію реальних розподілів, заданих у табличній або графічній формі, практично з будь-яким необхідним ступенем точності. Така апроксимація основана на теоремі Вейєрштраса. Іншою особливістю кусково-статистичних апроксимуючих функцій є можливість одержання аналітичних рішень досить широкого класу моделей, в яких використовують потоки, описувані цими функціями. Нарешті, параметризація таких функцій як методом моментів, так і методом найменших квадратів зводиться до розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь, а для східчастої й кусково-лінійної залежностей параметризація виявляється досить простою з використанням графоаналітичного методу.

З нормувальної умови $\int_0^\infty f(x)dx = 1$ випливає, що

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{ik} = 0\,, \tag{2.20}$$

$$\sum_{i=0}^{n} b_{i0} + \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k b_{ik} a_i^k = 1\,. \tag{2.21}$$

Останні дві рівності мають обов'язково враховуватися при параметризації.

Аналітичній параметризації кусково-статистичних розподілів передує етап одержання границь ділянок апроксимації $a_i (i = 1,2,...,n)$. Далі параметризація зводиться до визначення величин b_{ik} при вибраному m.

При використанні методу моментів необхідно прирівняти значення незміщених оцінок методів вибірки й відповідних початкових моментів теоретичного розподілу

$$d_v = \sum_{i=0}^{n}\left\{ a_i^v b_{i0} + \sum_{k=1}^{m} b_{ik} (-1)^k \frac{k!v!}{(v+k)!} a_i^{v+k} \right\},$$

або центральних моментів

$$\theta_v = \sum_{j=0}^{v} (-1)^j \frac{v! d_1^{v-j}}{j!(v-j)!} d_j\,.$$

Якщо необхідно знайти s параметрів розподілу (2.19) при $m > 0$, слід прирівняти перші $(s-2)$ емпіричні й теоретичні моменти, тоді з урахуванням (2.20), (2.21) одержимо систему s лінійних алгебричних рівнянь із s невідомими.

При $m = 0$ необхідно прирівняти перші $(s-1)$ моменти і врахувати рівність (2.21). Більш доцільно використати при параметризації розподілів вигляду (2.19) метод найменших квадратів, тому що ефективність його вище, а обчислювальні труднощі ті ж, що і при методі моментів [44].

У деяких моделях теорії надійності знаходить застосування нормальний розподіл. Такий розподіл має місце в тих випадках, коли випадкові величини, що відповідають часу між сусідніми подіями потоку, формуються як результат дії великої кількості різних факторів, при цьому вплив цих факторів має приблизно той самий порядок. Характеристики нормального розподілу наведені в табл. 2.1.

Слід зазначити, що нормальний розподіл відіграє виняткову роль у різного роду граничних співвідношеннях теорії ймовірності. Зокрема, спеціальний розподіл Ерланга з ростом порядку розподілу досить мало відрізняється від нормального в силу центральної теореми [45].

2.5. Оцінка точності апроксимації розподілів параметрів потоку за допомогою критеріїв згоди

Критерій згоди використовують у загальному випадку для перевірки різних гіпотез щодо належності вибірки до генеральної сукупності випадкових величин із деякими певними властивостями. Такі критерії використовують при перевірці стаціонарності потоку подій, а також при побудові деяких методів параметризації. Критерій згоди доцільно використовувати для перевірки гіпотези про достатню точність апроксимації емпіричного розподілу теоретичною функцією розподілу. Якщо при цьому параметри теоретичної функції розподілу беруть до уваги, то критерій називається параметричним, у противному разі – непараметричним.

Серед параметричних критеріїв найбільш поширеним є критерій χ^2, в основі якого лежить використання міри розбіжності емпіричного й теоретичного розподілів вигляду (2.7), що раніше використовували при параметризації розподілів. Міра (2.7) має ту властивість, що при $n \to \infty$ величина b_1 розподілена за законом χ^2 з $(r-c-1)$ степенями вільності, причому c – число тих параметрів теоретичного розподілу, які були визначені за виборкою випадкових величин [5,7].

Вираз (2.12) можна записати в зручнішій формі:

$$b_1 = \sum_{i=1}^{r} \frac{v_i^2}{np_i} - n.$$

Природно, що чим менше величина b_1, тим з більшою ймовірністю можна свідчити про близькість емпіричного й теоретичного розподілів.

Для того, щоб сформулювати перевірки, слід вибрати рівень значимості α – імовірність запропонованої гіпотези за умови її істинності, тобто

$$p\{b_1 > \chi_0^2\} = \alpha,$$

де в лівій частині рівності ймовірність того, що $b_1 > \chi_0^2$ при вірній гіпотезі, причому χ_0^2 відповідає рівню значимості α межі для закону χ_0^2 з $r-c-1$ степенями вільності. Помітимо, що термін «число степенів вільності» використовують для позначення параметра розподілу χ^2, що може набувати тільки цілочислових значень.

Перевірка відповідності емпіричного й теоретичного розподілів за допомогою критерію χ^2 включає в себе такі етапи:

1. Вибір рівня значимості α

При цьому необхідно враховувати, що зі зменшенням α помітно росте ймовірність прийняття гіпотези навіть у тому випадку, коли вона невірна. Значення α вибирають із проміжку від 0,1 до 0,05.

2. Упорядкування вибірки (розташування її елементів у порядку зростання їхніх значень), поділ її на r інтервалів.

Інтервали можуть бути вибрані досить довільно, однак у кожному з них має потрапити не менше п'яти значень вибірки. Число інтервалів розбивки при $n > 200$ можна визначити як найближче ціле до такої величини:

$$r = 4(0{,}75(n-1)^2)^{\frac{1}{5}}.$$

При помірній величині n значення r можна вибрати таким, що дорівнює максимально цілому числу, яке не перевищує рівня $n/5$.

3. Визначення математичного сподівання $E_i = n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dF(x)$.

4. Підрахунок v_i – числа спостережень вибірки, що потрапили в інтервал (x_{i-1}, x_i).

5. Обчислення значення критерію

$$b_1 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(v_i - E_i)^2}{E_i}.$$

6. Порівняння обчислювального значення b_1 з табличним значенням величини χ_0^2 при $r-c-1$ степенями вільності й рівні значимості. Перевищення значення b_1 над χ_0^2 відповідає тому, що ймовірність справедливості гіпотези про відповідність теоретичного й емпіричного розподілів не перевершує α, при цьому модель розподілу звичайно відкидають.

При невеликому обсязі вибірки доцільно використовувати критерій ω^2 [51], що ґрунтується на незгрупованих значеннях випадкових величин, що становлять вибірку. Як міра розбіжності емпіричного й теоретичного розподілів вибрана величина

$$\omega^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [F_M(x) - F(x)]^2 \, dF_M(x), \tag{2.22}$$

де $F_M(x)$ – емпірична, а $F(x)$ – теоретична функція розподілу. Вираз (2.22) можна перетворити в таке співвідношення:

$$\omega^2 = \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[F(x_i) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2, \tag{2.23}$$

де x_i – значення i – го елемента вибірки.

Якщо $n \to \infty$, $\omega^2 \to 0$, добуток $n\omega^2 \to 1$. При $n > 40$ розподіл цього добутку близький до деякого граничного розподілу, для якого обчислені таблиці критичних значень величин $n\omega_0^2$.

При використанні критерію ω^2 насамперед необхідно задати рівень значимості α, що має той же зміст, що й для критерію χ^2. Потім обчислюють величину ω^2 за формулою (2.23) і добуток $n\omega^2$ порівнюють зі значенням $n\omega_0^2$, узятим при відповідному рівні значимості з табл. 2.2. Якщо $n\omega^2 > n\omega_0^2$, то гіпотезу відповідності емпіричного й теоретичного розподілів відкидають.

Таблиця 2.2

α	0,1	0,5	0,3	0,02	0,01	0,001
$n\omega_0^2$	0,3473	0,4614	0,5489	0,6198	0,7435	1,1679

Особливе положення при побудові моделей потоків подій займає експоненціальний розподіл виду (2.2) у зв'язку із простотою одержання аналітичних рішень при таких розподілах. Розглянемо простий непараметричний критерій WE_0 для перевірки можливості експоненціальної апроксимації [24].

При використанні критерію WE_0 необхідно обчислити величину

$$WE_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tau_{сер})^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2},$$

а потім визначити, чи не перебуває обчислене значення WE_0 поза межами інтервалу для $\alpha = 0{,}05$ (або $\alpha = 0{,}1$) рівня значимості для відповідних n значень. Занадто велике або занадто мале значення WE_0 вказує на відсутність експоненціальності, тобто ймовірність того, що вибірка взята із сукупності випадкових величин, розподілених за експоненціальним законом, становить не більше 0,05 (або 0,1).

2.6. Особливості вибору виду апроксимуючих розподілів при побудові моделей логістичних систем

Строге вирішення задачі знаходження оптимальних апроксимуючих розподілів для потоків подій імовірнісних моделей істотно ускладнюється відсутністю критерію, що враховує всі наслідки такого вибору. Раніше вже було сказано, що вид апроксимуючої (теоретичної) функції розподілу істотно визначає можливість (і трудомісткість) аналітичного дослідження моделі, досяжну точність апроксимації, а також простоту процесу апроксимації й можливість використання тих чи інших методів параметризації. Кількісна оцінка перерахованих факторів викличе певні труднощі.

Найбільш зручним розподілом для можливості одержання аналітичного рішення в моделях масового обслуговування є експоненціальний розподіл виду (2.2). Використання розподілів, що зводяться до експоненціального розкладання на фази (Ерланга, гіперекспоненціального), збільшує трудомісткість одержання рішень моделі, особливо з ростом величини порядку розподілів k. Далі за шкалою складності одержання рішень знаходяться кусково-статистичні розподіли. Для абсолютної більшості розподілів теорії ймовірності, не згаданих у цьому переліку, взагалі не вдається одержати прийнятні з погляду можливості практичного використання результати [11].

З точки зору зручності апроксимації порядок розташування розподілів змінюється для перерахованих функцій на зворотний, тому що найбільшу точність апроксимації в загальному випадку можна досягти лише з використанням кусково-статичних розподілів. Експоненціальна апроксимація в ряді практичних випадків може дозволити зробити лише досить грубе наближення. Проміжне положення (за точністю апроксимації) між кусково-статистичними й експоненціальними розподілами займають розподіли Ерланга й гіперекспоненціальний розподіл.

Аналізуючи існуючі методи розв’язання імовірнісних моделей (зокрема, моделей обслуговування), можна стверджувати, що найбільш оптимальними варіантами завдання потоків, які дозволяють отримати вірогідні моделі, є такі потоки, коли один із них, точність апроксимації якого впливає на похибку характеристик моделі в цілому, апроксимований з використанням однієї з кусково-статичних залежностей, а для завдання інших потоків використовуються розподіл Ерланга або гіперекспоненціальний розподіл (у тому числі й експоненціальний). При більш твердих вимогах необхідно всі потоки подій задавати кусково-статичними розподілами.

У деяких випадках (особливо при малому обсязі статистичних даних для потоку подій) на вибір розподілу, що описує цей потік, можуть істотно впливати умови формування потоку. Мова йде про випадки застосування граничних теорем теорії ймовірності. Наведемо деякі з них.

Центральна гранична теорема теорії ймовірностей [10] встановлює, що якщо випадкова величина ξ є сумою n незалежних випадкових величин, таких, що жодна з них не є переважаючою, то з ростом n функція розподілу величини ξ прагне до нормального закону. Саме цією теоремою розкривається близькість спеціального розподілу Ерланга високого порядку й нормального розподілу.

Використання як апроксимуючий розподіл нормального закону має місце в задачах надійності для моделей з поступовими відмовами. Поступові відмови виникають у результаті нагромадження змін властивостей об'єкта під впливом ряду факторів, тоді як адитивність змін дозволяє використати центральну граничну теорему.

Центральна гранична теорема установлює, що якщо випадкова величина ξ утворена як сума по $\bmod 1$ n однаково розподілених випадкових величин з нульовою обмеженою щільністю розподілу в інтервалі (0,1), то при $n \to \infty$ граничний розподіл ξ рівномірно розподілений в інтервалі (0,1). Сума по $\bmod 1$ утвориться таким чином:

$$a \oplus b = a + b, \text{ якщо } a + b \le 1,$$
$$a \oplus b = a + b - 1, \text{ якщо } a + b > 1,$$

причому $$0 < a \le 1, 0 < b \le 1 .$$

Використання цієї теореми дозволяє виявити потоки подій з рівномірним розподілом, тривалість проміжків між сусідніми подіями, а також побудувати простий датчик випадкових чисел.

Гранична теорема для потоків, що рідіють, установлює, що потік заявок, утворений у результаті випадкового розрідження деякого вихідного стаціонарного потоку, прагне до пуассонівського зі збільшенням числа розріджень.

Відповідно до граничної теореми для сумарного потоку вид потоку подій, утвореного підсумовуванням деякого числа незалежних потоків, порівнянних за інтенсивністю, прагне до пуассонівського при збільшенні числа сумуючих потоків.

Для певного класу систем масового обслуговування, а саме для моделей із втратами, тобто за відсутності місць чекання, і найпростішим вхідним потоком вид апроксимуючої функції розподілу для потоку обслуговування не впливає на показники функціонування такої системи Севастьянова [10], а вирази для ймовірностей станів збігаються з формулами для системи при експоненціальному розподілі часу обслуговування. Слід зазначити, що перенесення висновків теореми Севастьянова на моделі з ненульовим числом місць чекання неправомірне й може призвести до грубих помилок.

Вплив виду потоків подій підкреслено в класифікації Кендалла для моделей масового обслуговування (СМО) з одним вхідним потоком. У загальному випадку це має вигляд [18,19]

$$G^{(h)} / G^{(l)} / n / M / N ,$$

де $G^{(h)}$ – неординарний вхідний потік (h – число заявок в одній групі) самого загального вигляду;

$G^{(l)}$ – символ довільного розподілу часу обслуговування (l – число заявок, що обслуговують одночасно);

n – кількість обслуговуючих пристроїв;

M – число заявок у джерелі;

N – число місць чекання.

Для ординарних потоків верхній символ відсутній. При рекурентному вхідному потоці використовують символ Gl. Якщо $M = \infty$ або $N = \infty$, то відповідний символ опускають, а другий записують у вигляді рівності [21].

Часто потоки подій, які використовують у моделях масового обслуговування, замість символу G мають такі позначення:

M – при експоненціальному розподілі потоку;

D – при виродженому розподілі;

E_k – при розподілі Ерланга k-го порядку;

Q_S – при кусково-статичній апроксимації, причому s – максимальний ступінь виразу (2.19).

В цілому вирішення задачі побудови статистичних моделей зводиться до забезпечення альтернативних вимог достатнього ступеня адекватності моделі стосовно реального об'єкта й мінімальної складності їхньої побудови й дослідження [23].

Контрольні запитання

1. Покажіть місце й роль імовірнісних моделей у системному аналізі АСУ.
2. На прикладі КС розгляньте інтерпретацію СМО (вхідні потоки, буфер, пристрої та різноманітність моделей для реальних структур).
3. Охарактеризуйте властивості найпростішого потоку подій. Наведіть приклади із практики АСУ й інших складних систем.
4. Як задається рекурентний стаціонарний потік подій? Назвіть й охарактеризуйте послідовність етапів побудови статичної моделі.
5. Що таке гістограма розподілу випадкової величини? Як вона будується при великій і малій вибірці? У чому сенс задачі параметризації апроксимуючих теоретичних функцій розподілу?
6. Назвіть відомі форми апроксимуючих функції розподілу. Чим викликана їхня різноманітність, яка їхня роль у дослідженні систем обробки інформації?
7. Укажіть переваги кусково-статичних функції розподілу. Який порядок їхнього одержання в реальних умовах?
8. У чому різниця функцій розподілу для часового й надійного аналізу?
9. Яка роль критеріїв згоди при оцінці адекватності теоретичної функції розподілу емпіричним?

Завдання

1. Нехай інтервали часу між елементами потокового процесу в логістичній системі мають експоненціальний розподіл $A(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Знайти щільність розподілу $g(t) = \dfrac{d(t)}{dt}$ і визначити $A(t) = \int\limits_0^t \dfrac{a(t)}{dt}$.

2. Знайти математичне сподівання й дисперсію інтервалів із завдання 1

$$m = \int\limits_0^\infty \frac{tdt}{dt},\ \delta^2 = \int\limits_0^\infty \frac{(t-m)a(t)}{dt}.$$

3. Знайти m, $\delta^2 = d_2$, коефіцієнт варіації $c = \delta / m$ інтервалів між

елементами потоку для розподілу Ерланга.

4. Як й у завданні 3, тільки для гіперекспоненціального розподілу.

5. Одержати вираз для функції й щільності виродженого розподілу як окремий випадок статистичних функцій розподілу.

6. Скласти граф станів системи μ/μ $/1/\infty$ $/\infty$ */Fifo* і записати відповідну систему диференціальних рівнянь.

Розділ 3. МОДЕЛЮВАННЯ ЛОГІСТИЧНИХ СИСТЕМ

3.1. Загальні відомості про марковські процеси

Функція $X(t)$ називається випадковою, якщо її значення при будь-якому аргументі t є випадковою величиною.

Випадкова величина $X(t)$, аргументами якої є час, називається випадковим процесом [3].

Марковські процеси є окремими видами випадкових процесів. Особливе місце марковських процесів обумовлено такими обставинами:

1) для марковських процесів добре розроблено математичний апарат, що дозволяє вирішувати багато практичних задач;

2) за допомогою марковських процесів можна описати (точно або приблизно) поведінку досить складних систем.

Випадковий процес, що проходить в якій-небудь технологічній (або логістичній) системі ТС (ЛС), називається марковським (або процесом без післядії), якщо він має таку властивість: для будь-якого моменту часу t_0 імовірність будь-якого стану системи в майбутньому (при $t>t_0$) залежить тільки від її стану в цей час (при $t = t_0$) і не залежить від того, коли і яким чином ТС (ЛС) перейшла в цей стан [5].

Класифікація марковських випадкових процесів залежить від безперервності або дискретності безлічі значень функції $X(t)$ і параметра t. Розрізняють такі основні види випадкових марковських процесів [7]:

1) з дискретними станами й дискретним часом (ланцюг Маркова);

2) з безперервними станами й безперервним часом (марковські послідовності);

3) з дискретними станами й безперервним часом (безперервний ланцюг Маркова);

4) з безперервними станами й безперервним часом.

Розглянемо тільки марковські процеси з дискретними станами $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Марковські процеси з дискретними станами зручно ілюструвати за допомогою так званого графа станів (рис. 3.1), де кружками позначені стани $S_1, S_2, \ldots S_n$ системи S, а стрілками – можливі переходи зі стану в стан. На графі відзначають тільки безпосередні переходи. Можливі затримки в стані зображують «петлею», тобто стрілкою, спрямованою з даного стану в нього ж. Число станів системи може бути як кінцевим, так і нескінченним (далі - рахунковим). Приклад графу станів ТС (ЛС) показано на рис. 3.1

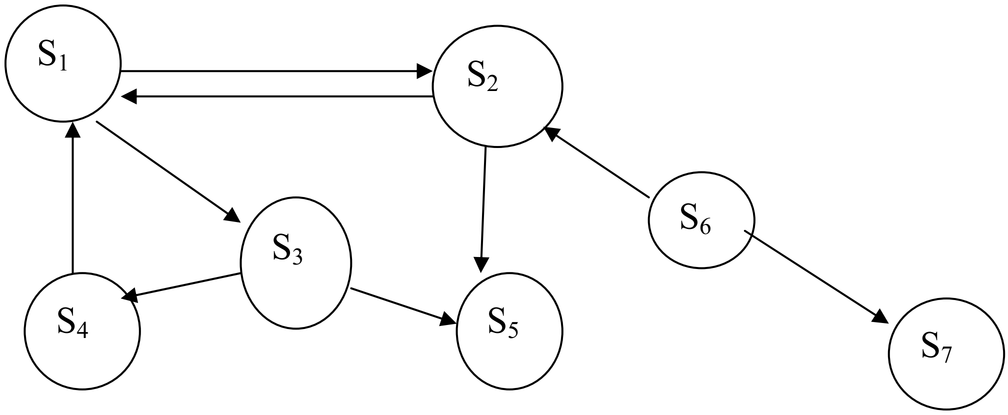

Рис. 3.1. Граф станів ТС (ЛС)

3.2. Моделі на основі марковських ланцюгів

Марковський випадковий процес із дискретними станами й дискретним часом називають марковським ланцюгом. Для такого процесу моменти t_1, t_2, …, t_n, коли система S може змінювати свій стан, розглядають як послідовні кроки процесу, а аргументом, від якого залежить процес, виступає не час t, а номер кроку 1,2,...,k. Випадковий процес характеризується послідовністю станів S (0), S (1), S (2), ... ,S (k), де S (0) – початковий стан системи (перед першим кроком); S (1) – стан системи після першого кроку; S (k) – стан системи після k-го кроку і т. д.

Подія $\{S(k) = S_i\}$, при якій після k-го кроку система перебуває в стані S_i (i = 1, 2, …), є випадковою подією. Послідовність станів S (0), S (1), … ,S (k) можна розглядати як послідовність випадкових подій. Така випадкова послідовність подій називається марковським ланцюгом, якщо для кожного кроку ймовірність переходу з будь-якого стану S_i у стан S_j не залежить від того, коли і як система перейшла в стан S_i. Початковий стан S (0) може бути заданим заздалегідь або випадковим [12,19].

Ймовірностями станів ланцюга Маркова називаються ймовірності $P_i(k)$ того, що після k-го кроку (і до ($k+1$)-го) система S буде перебувати в стані S_i (i = 1, 2, … , n). Для будь-якого k

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(k)=1. \tag{3.1}$$

Початковий розподіл ймовірностей марковського ланцюга називається розподілом ймовірностей станів на початок процесу:

$$P_1(0), P_2(0), \ldots ,P_i(0), \ldots , P_n(0). \tag{3.2}$$

Якщо початковий стан системи S відомий: S (0) $=S_i$, то початкова ймовірність $P_i(0)$ =1, а всі інші дорівнюють нулю [20,23].

Імовірністю переходу (перехідною ймовірністю) на k-му кроці зі стану S_i у стан S_j називається умовна ймовірність того, що система S після k-го кроку виявиться в стані S_j за умови, що безпосередньо перед цим (після (k-1)-го кроку) вона перебувала в стані S_i [20, 23].

Оскільки система може перебувати в одному з n станів, то для моменту часу t необхідно задати n^2 ймовірностей переходу P_{ij}, які зручно навести у вигляді такої матриці:

$$\| P_{ij} \| = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{i1} & P_{i2} & \dots & P_{in} \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (3.3)$$

де P_{ij} – імовірність переходу за один крок із стану S_i у стан S_j;

P_{ii} – імовірність затримки системи в стані S_i.

Матриця (3.3) називається перехідною, або матрицею перехідних ймовірностей. Якщо перехідні ймовірності не залежать від номера кроку (від часу), а залежать тільки від того, з якого стану в який здійснюється перехід, то відповідний ланцюг Маркова називається однорідним [3, 4].

Відзначимо деякі особливості матриці 3.3:

1) кожен рядок характеризує вибраний стан системи, а її елементи являють собою ймовірності всіх можливих переходів за один крок із вибраного (з i-го) стану, в тому числі й перехід в себе;

2) елементи стовпців відображають імовірності всіх можливих переходів системи за один крок у заданий (j-*й*) стан (інакше кажучи, рядок характеризує ймовірність переходу системи зі стану, стовпець - у стан);

3) сума ймовірностей кожного рядка дорівнює одиниці, тому що переходи утворюють повну групу несумісних подій:

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1,\ i = \overline{1, n}\ ; \qquad (3.4)$$

4) по головній діагоналі матриці перехідних ймовірностей стоять імовірності P_{ij} того, що система не вийде зі стану S_i, а затримається в ньому.

Якщо для однорідного марковського ланцюга задані початковий розподіл ймовірностей (3.2) і матриця перехідних ймовірностей P_{ij} (3.3), то ймовірності станів системи $P_i(k)$ $(i = \overline{1,n}; j = \overline{1,n})$ визначаються за рекурентною формулою (рівнянням баланса):

$$P_i(k) = \sum_{j=1}^{n} P_j(k-1) P_{ij}\ ,\ (i = \overline{1,n}; j = \overline{1,n}\ ). \qquad (3.5)$$

Приклад 3.1

Розглянемо процес функціонування технологічної системи (ТС). Нехай ТС протягом однієї зміни (доби) може перебувати в одному із двох станів: справному (S_1) і несправному (S_2). Граф станів системи показано на рис. 3.2.

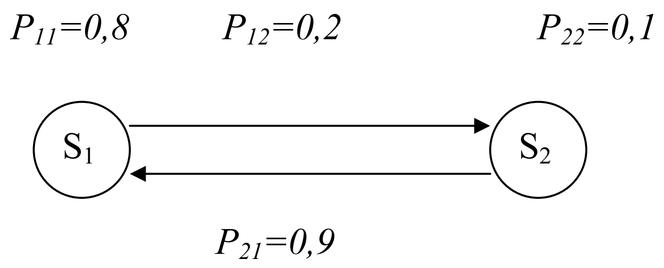

Рис. 3.2. Граф станів ТС

У результаті проведення масових спостережень за роботою ТС складено таку матрицю ймовірностей переходу:

$$\| P_{ij} \| = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}, \qquad (3.6)$$

де $P_{11} = 0{,}8$ – імовірність того, що ТС залишиться в справному стані;

$P_{12} = 0{,}2$ – імовірність переходу ТС зі стану «справна» у стан «несправна»;

$P_{21} = 0{,}9$ – імовірність переходу ТС зі стану «несправна» у стан «справна»;

$P_{22} = 0{,}1$ – імовірність того, що ТС залишиться в стані «несправна».

Вектор початкових ймовірностей станів ТС заданий у вигляді $P(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, тобто $P_1(0) = 0$ і $P_2(0) = 1$.

Потрібно визначити ймовірність станів ТС через три доби.

Використовуючи матрицю перехідних ймовірностей, визначимо ймовірності станів $P_i(k)$ після першого кроку (після першої доби):

$$P_1(1) = P_1(0) \cdot P_{11} + P_2(0) \cdot P_{21} = 0 \cdot 0{,}8 + 1 \cdot 0{,}9 = 0{,}9;$$
$$P_2(1) = P_1(0) \cdot P_{12} + P_2(1) \cdot P_{22} = 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0.1 = 0.1.$$

Імовірність станів після другого кроку (після другої доби) такі:

$$P_1(2) = P_1(1) \cdot P_{11} + P_2(1) \cdot P_{21} = 0.9 \cdot 0.8 + 0.1 \cdot 0.9 = 0.81;$$
$$P_2(2) = P_1(1) \cdot P_{12} + P_2(1) \cdot P_{22} = 0.9 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.1 = 0.19.$$

Імовірності станів після третього кроку (після третьої доби) дорівнюють:

$$P_1(3) = P_1(2) \cdot P_{11} + P_2(2) \cdot P_{21} = 0.81 \cdot 0.8 + 0.19 \cdot 0.9 = 0.819;$$
$$P_2(3) = P_1(2) \cdot P_{21} + P_2(2) \cdot P_{22} = 0.81 \cdot 0.2 + 0.19 \cdot 0.1. = 0.181.$$

Таким чином, після третьої доби ТС буде перебувати в справному стані з імовірністю 0,819 і у стані «несправна» з імовірністю 0,181.

Приклад 3.2

У процесі експлуатації комп'ютерна система (КС) може розглядатися як фізична система S, яка у результаті перевірки може виявитися в одному з таких станів: S_1 – КС повністю справна; S_2 – КС має несправності в оперативній пам'яті, при яких вона може вирішувати задач; S_3 – КС має істотні несправності й може вирішувати обмежений клас задач; S_4 – КС повністю вийшла з ладу.

У початковий момент часу КС повністю справна (стан S_1). Перевірка КС відбувається у фіксовані моменти часу t_1, t_2, t_3. Процес, що проходить у системі S, можна розглядати як однорідний марковський ланцюг з трьома послідовними кроками (перша, друга, третя перевірка КС). Матриця перехідних ймовірностей має вигляд

$$\| P_{ij} \| = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{pmatrix}.$$

Визначимо ймовірність стану КС після трьох перевірок.

Розв'язання

Граф станів КС має вигляд, зображений на рис. 3.3. Проти кожної стрілки проставлена відповідна ймовірність переходу. Початкові ймовірності станів $P_1(0) = 1$; $P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = 0$.

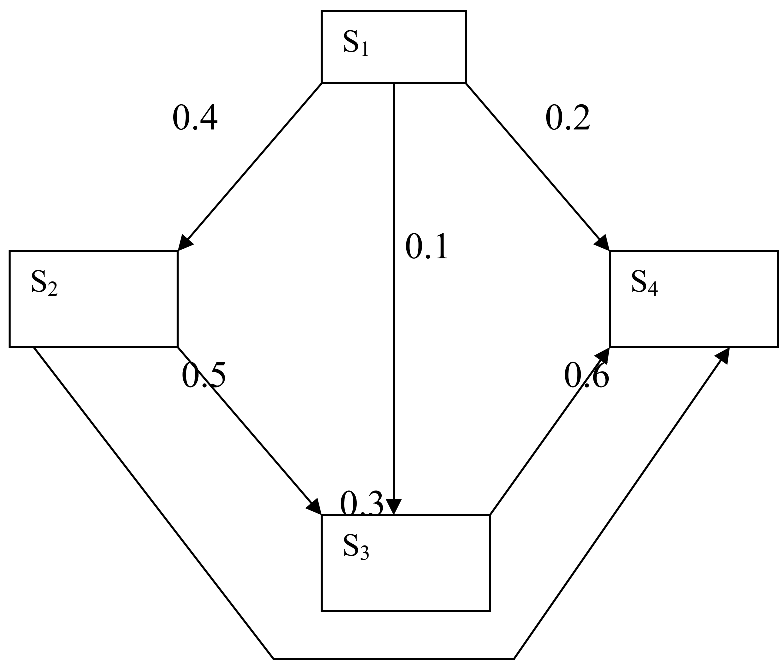

Рис. 3.3. Граф станів КС

За формулою рівняння балансу (3.5), враховуючи в сумі ймовірностей тільки ті стани, з яких можливий безпосередній перехід у даний стан, знаходимо:

$$P_1(1) = P_1(0) \cdot P_{11} = 1 \cdot 0.3 = 0.3;$$
$$P_1(1) = P_1(0) \cdot P_{12} = 1 \cdot 0.4 = 0.4;$$
$$P_1(1) = P_1(0) \cdot P_{13} = 1 \cdot 0.1 = 0.1;$$
$$P_1(1) = P_1(0) \cdot P_{14} = 1 \cdot 0.2 = 0.2;$$
$$P_1(2) = P_1(1) \cdot P_{11} = 0.3 \cdot 0.3 = 0.09;$$
$$P_2(2) = P_1(1) \cdot P_{12} + P_2(1) \cdot P_{22} = 0.3 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.2 = 0.20;$$
$$P_3(2) = P_1(1) \cdot P_{13} + P_2(1) \cdot P_{23} + P_3(1) \cdot P_{33} = 0.27;$$
$$P_4(2) = P_1(1) \cdot P_{14} + P_2(1) \cdot P_{24} + P_3(1) \cdot P_{34} + P_4(1) \cdot P_{44} = 0.44;$$
$$P_1(3) = P_1(2) \cdot P_{11} = 0.09 \cdot 0.3 = 0.027;$$
$$P_2(3) = P_1(2) \cdot P_{12} + P_2(2) \cdot P_{22} = 0.09 \cdot 0.4 + 0.20 \cdot 0.2 = 0.076;$$
$$P_3(3) = P_1(2) \cdot P_{13} + P_2(2) \cdot P_{23} + P_3(2) \cdot P_{33} = 0.217;$$
$$P_4(3) = P_1(2) \cdot P_{14} + P_2(2) \cdot P_{24} + P_3(2) \cdot P_{34} + P_4(2) \cdot P_{44} = 0.680.$$

Отже, ймовірності станів КС після трьох перевірок такі: $P_1(3) = 0.027$; $P_2(3) = 0.076$; $P_3(3) = 0.217$; $P_4(3) = 0.680$.

3.3. Моделі на основі безперервних ланцюгів Маркова

Марковський випадковий процес із дискретними станами й безперервним часом називається безперервним ланцюгом Маркова за умови, що перехід зі стану відбувається не у фіксовані, а у випадкові моменти часу [3].

В технологічних процесах часто зустрічаються ситуації, які передбачити заздалегідь неможливо. Наприклад, будь-яка деталь або агрегат технічного засобу ТЗ (автомобіль, автобус, тролейбус, пароплав та ін.) можуть вийти з ладу в будь-який, непередбачений заздалегідь момент часу. Для опису таких систем в окремих випадках можна використати математичний апарат безперервного ланцюга Маркова [7].

Нехай система характеризується станами S_0, S_1, S_2, … ,S_n, а перехід зі стану в стан може здійснюватися в будь-який момент часу. Позначимо через $P_i(t)$ імовірність того, що в момент часу t система S перебуває в стані S_i ($i = 0,1, …, n$). Потрібно визначити для будь-якого t імовірність станів $P_0(t)$, $P_1(t), ..., P_n(t)$. Очевидно, що

$$\sum_{i=0}^{n} P_i(t) = 1. \tag{3.7}$$

Для процесу з безперервним часом замість перехідних імовірностей P_{ij} розглядають щільності ймовірностей переходу λ_{ij}, що являють собою границю відносин імовірності переходу системи за час Δt зі стану S_i у стан S_j до довжини проміжку Δt: $\lambda_{ij} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{P_{ij}(t;\Delta t)}{\Delta t}$, (3.8)

де $P_{ij}(t;\Delta t)$ – імовірність того, що система, яка перебувала в момент часу t у стані S_i, за час Δt перейде з нього в стан S_j.

Переходи системи S зі стану в стан у безперервних марковських ланцюгах відбуваються під впливом деяких потоків подій. Потоком подій називається послідовність однорідних подій, що наступають одна за одною через випадкові інтервали часу. Щільність імовірності переходу інтерпретують як інтенсивність λ_{ij} відповідних потоків подій. Якщо всі ці потоки пуассонівські, то процес, що проходить в системі *S*, буде марковським [19, 39].

При вивченні марковських випадкових процесів із дискретними станами й безперервним часом у графі станів над стрілками, що ведуть зі стану S_i в S_j, проставляють відповідну інтенсивність λ_{ij}. Такий граф станів називається розміченим.

Нехай система *S* має кінцеве число станів S_0, S_1 ,..., S_n. Випадковий процес, що проходить у системі, описується імовірностями станів $P_0(t)$, $P_1(t)$, ..., $P_n(t)$, де $P_i(t)$– імовірність того, що система *S* у момент часу *t* перебуває в стані S_i.

Імовірності станів $P_i(t)$ знаходять шляхом розв'язання системи диференціальних рівнянь (рівнянь Колмогорова), що мають вигляд

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} P_j(t) \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}, \tag{3.9}$$

де $i = 0,1, ... , n$.

Величина $\lambda_{ij} P_j(t)$ називається потоком імовірності переходу зі стану S_i в S_j, причому інтенсивність потоків λ_{ij} може залежати від часу або бути постійною.

Рівняння (3.8) складають за розміченим графом станів системи, користуючись таким мнемонічним правилом: похідна $dP_n(t)/dt$ імовірності перебування системи в стані n дорівнює алгебричній сумі декількох членів:

а) число членів цієї суми дорівнює числу стрілок на графі стану системи, що з'єднують стан n з іншими станами;

б) якщо стрілка спрямована в стан n, то член суми беруть зі знаком плюс;

в) якщо стрілка спрямована із стану n, то член суми беруть зі знаком мінус;

г) кожен член суми дорівнює добутку ймовірностей того стану, з якого спрямована стрілка, на інтенсивність потоку подій, що переводить систему по даній стрілці.

Щоб розв'язати систему диференціальних рівнянь (3.8), потрібно задати початковий розподіл ймовірностей $P_0(0)$, $P_1(0)$,...,$P_i(0)$, ...,$P_n(0)$. Для цього можна застосовувати числові методи.

Якщо процес, що проходить у системі, триває досить довго ($t \to \infty$), то має сенс говорити про граничну поведінку ймовірностей $P_i(t)$, які не залежать від того, в якому стані система *S* перебувала в початковий момент часу:

$$P_i = \lim_{t \to \infty} P_i(t) ,$$

де $i = 0, 1,\ldots,n$.

Вважають, що в системі S встановлюється граничний стаціонарний режим, у ході якого вона може переходити із стану в стан, але ймовірності станів P_i при цьому уже не змінюються. Система, для якої існують фінальні ймовірності, називається ергодичною, а відповідний випадковий процес – ергодичним.

Фінальні ймовірності станів можуть бути отримані шляхом розв'язання системи лінійних алгебричних рівнянь, які отримують із диференціальних рівнянь Колмогорова, шляхом прирівнювання похідних до нуля й заміни ймовірних функцій станів $P_1(t),\ldots,P_n(t)$ на невідомі фінальні ймовірності $P_1,\ldots,P_n$.

Таким чином, для системи S з n станами отримаємо систему n лінійних однорідних алгебричних рівнянь із n невідомими $P_0, P_1,\ldots,P_n$, які можна знайти з точністю до довільного множника. Для знаходження точного значення $P_0, P_1,\ldots,P_n$ використовують нормувальну умову $P_0+P_1+\ldots+P_n=1$, користуючись якою можна виразити кожну з імовірностей P_i через інші й відкинути одне з рівнянь.

Приклад 3.3

Маємо розмічений граф станів системи S (рис.3.4). Складемо систему диференціальних рівнянь Колмогорова й запишемо початкові умови для розв'язання цієї системи, якщо відомо, що в початковий момент система перебувала в стані S_1.

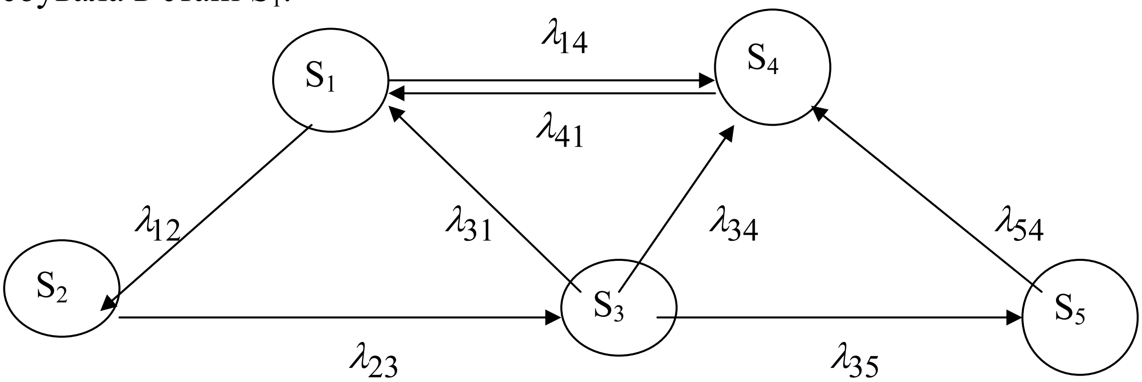

Рис. 3.4. Граф станів системи

Відповідно до наведеного мнемонічного правила система диференціальних рівнянь Колмогорова має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1}{dt} = \lambda_{31}\cdot P_3 + \lambda_{41}\cdot P_4 - \lambda_{12}\cdot P_1 - \lambda_{14}\cdot P_1, \\ \dfrac{dP_2}{dt} = \lambda_{12}\cdot P_1 - \lambda_{23}\cdot P_2, \\ \dfrac{dP_3}{dt} = \lambda_{23}\cdot P_2 - (\lambda_{31}\cdot P_3 + \lambda_{34}\cdot P_3 - \lambda_{35}\cdot P_3), \\ \dfrac{dP_4}{dt} = \lambda_{14}\cdot P_1 + \lambda_{34}\cdot P_3 - \lambda_{54}\cdot P_5 - \lambda_{41}\cdot P_4, \\ \dfrac{dP_5}{dt} = \lambda_{35}\cdot P_3 - \lambda_{54}\cdot P_5. \end{cases} \qquad (3.10)$$

Початкові умови при $t = 0$:

$$P_1 = 1; P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = 0.$$

Розглянемо, що відбудеться із системою S, при $t \to \infty$. Відомо, що у випадку сполучених станів імовірності $P_1(t)$, $P_2(t)$,…, $P_n(t)$ прагнуть до граничних (фінальних), які не залежать від часу, тому в системі диференціальних рівнянь Колмогорова ліві частини рівнянь (похідні) приймають такими, що дорівнюють нулю. При цьому система диференціальних рівнянь перетвориться на систему лінійних алгебричних рівнянь.

Для нашого прикладу система (3.9) матиме вигляд

$$\begin{cases} 0 = \lambda_{31} \cdot P_3 + \lambda_{41} \cdot P_4 - \lambda_{12} \cdot P_1 - \lambda_{14} \cdot P_1, \\ 0 = \lambda_{12} \cdot P_1 - \lambda_{23} \cdot P_2, \\ 0 = \lambda_{23} \cdot P_2 - (\lambda_{31} \cdot P_3 + \lambda_{34} \cdot P_3 - \lambda_{35} \cdot P_3), \\ 0 = \lambda_{14} \cdot P_1 + \lambda_{34} \cdot P_3 - \lambda_{54} \cdot P_5 - \lambda_{41} \cdot P_4, \\ 0 = \lambda_{35} \cdot P_3 - \lambda_{54} \cdot P_5. \end{cases} \qquad (3.11)$$

Розв'язавши її з урахуванням умови $P_1+P_2+P_3+P_4+P_5 = 1$, одержимо всі граничні ймовірності. Вони являють собою середній відносний час перебування системи в даному стані в стаціонарному режимі.

Для існування фінальних ймовірностей однієї умови λ_{ij}=const недостатньо, потрібно виконання ще деяких умов, перевірити які можна за графом станів, виділивши в ньому так звані суттєві й несуттєві стани.

Розглянемо приклад, показаний на рис. 3.5.

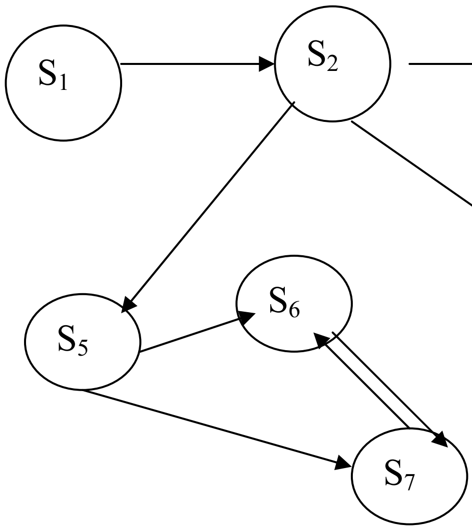

Рис. 3.5. Граф станів системи S

Стани S_1, S_2 і S_5 – несуттєві, тому що з S_1 можна перейти у стан S_2, з S_2 – у S_3 та в S_4, з S_5 – у стан S_6 й S_7 і не повернутися. Стани S_3, S_4, S_6 й S_7 – суттєві стани.

При скінченному числі станів S_1, S_2,…,S_n для існування фінальних імовірностей необхідно й достатньо, щоб з іншого суттєвого стану можна було (за якесь число кроків) перейти в кожен інший суттєвий стан. Якщо число станів S_1, S_2,…,S_n… нескінченне, то ця умова перестає бути достатньою і існування фінальних ймовірностей залежить не тільки від графа станів, але й від інтенсивності λ_{ij}.

При дослідженні безперервних марковських ланцюгів, як було вже відзначено, часто буває зручно уявити перехід системи із стану в стан як вплив потоків подій (потік заявок на обслуговування, потік автомобілів, потік документів і т.д.).

Якщо потік подій не має післядії, ординарний, але не стаціонарний, то його називають нестаціонарним пуассонівським потоком, а його інтенсивність залежить від часу, тобто $\lambda = \lambda(t)$.

У пуассонівському потоці подій (стаціонарному й нестаціонарному) число подій потоку, що потрапили на будь-яку ділянку, розподілені за законом Пуассона:

$$P_m = \frac{a_m}{m!} x e^{-a}, \quad m=0, 1,\ldots, \tag{3.13}$$

де P_m – ймовірність влучення на ділянку m подій;

a – середнє число подій на ділянці.

Для найпростішого потоку $a = \lambda \cdot \tau$, для нестаціонарного пуассонівського потоку

$$a = \int\limits_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)dt, \tag{3.14}$$

де τ – довжина ділянки часу;

t_0 – початок ділянки.

Відзначимо ще одну важливу властивість найпростішого потоку подій. Проміжок часу t між сусідніми подіями розподілений за показовим законом, а його середнє значення Т і середнє квадратичне відхилення однакові:

$$\mathrm{T}=\upsilon=1/\lambda, \tag{3.15}$$

де λ – інтенсивність потоку.

Для нестаціонарного пуассонівського потоку закон розподілу проміжку часу t уже не є показовим, тому що залежить від положення на осі $0t$ і виду залежності $\lambda(t)$. Однак для деяких задач при порівняно невеликих змінах $\lambda(t)$ його можна приблизно вважати показовим з інтенсивністю λ, яка дорівнює середньому значенню $\lambda(t)$.

Таким чином, для досліджуваної системи S із дискретними станами й безперервним часом переходи із стану в стан відбуваються під дією пуассонівських потоків подій з певною інтенсивністю λ_{ij}.

Розглянемо типову схему безперервних марковських ланцюгів – схему загибелі й розмноження, що часто зустрічається в різноманітних практичних задачах.

Марковський процес із дискретними станами S_0, S_1, S_2,…,S_n називається процесом загибелі й розмноження, якщо всі стани можна розмістити на одній прямій, у якій кожен середній стан (S_1, S_2, … , S_{n-1}) може переходити тільки в сусідні стани, які, в свою чергу, переходять назад, а крайні стани (S_0 й S_n) переходять тільки в сусідній стан (рис. 3.6).

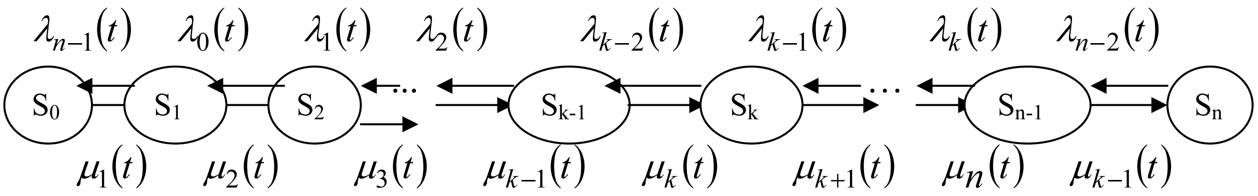

Рис. 3.6. Граф станів для процесу загибелі й розмноження

Назва взята з біології, де стан популяції S_k означає наявність у ній k одиниць особин.

Перехід вправо пов'язаний з розмноженням одиниць, а вліво – з їхньою загибеллю:

$\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_{n-1}(t)$ – інтенсивність розмноження,

$\mu_1(t), \mu_2(t), \ldots, \mu_n(t)$ – інтенсивність загибелі.

λ й μ містять індекс того стану, з якого стрілка виходить.

Із станом S_k пов'язана невипадкова величина X_k. Якщо система S у момент часу t перебуває в стані S_k, то дискретна величина $X(t)$ набуває значення k. Таким чином, одержуємо випадковий процес $X(t)$, що у випадкові, заздалегідь невідомі моменти часу змінює свій стан.

Марковським процесом загибелі й розмноження з безперервним часом називається такий випадковий процес, що може набувати тільки цілих додаткових значень. Зміни цього процесу можуть відбуватися в будь-який момент часу, тобто в будь-який момент часу він може або збільшуватися на одиницю, або зменшуватися на одиницю, або залишитися незмінним.

На практиці зустрічаються процеси «чистого розмноження» й «чистої загибелі». Процесом «чистого розмноження» називається такий процес загибелі й розмноження, інтенсивності всіх потоків загибелі якого дорівнюють нулю. Аналогічно, процесом «чистої загибелі» називається такий процес загибелі й розмноження, інтенсивності всіх потоків розмноження якого дорівнюють нулю.

Приклад 3.4

Розглянемо експлуатацію моделей транспортного засобу (ТЗ) однієї марки у великій транспортній фірмі (на підприємстві). Інтенсивність надходження (ТЗ) на підприємство дорівнює $\lambda(t)$. Кожен ТЗ, що надійшов на підприємство, списується через випадковий час T_C. Термін служби ТЗ T_C розподілений за показовим законом із параметром μ. Процес експлуатації ТЗ є випадковим процесом. $A(t)$ – число ТЗ даної марки, що перебувають в експлуатації в момент t. Знайдемо одновимірний закон розподілу випадкового процесу $P_i(t) = P\{A(t) = i\}$, якщо:

1) немає обмежень на число експлуатованих ТЗ;
2) на підприємстві може експлуатуватися не більше n ТЗ.

Розв'язання

1. Випадковий процес експлуатації ТЗ є процесом загибелі й розмноження, розмічений граф якого показано на рис. 3.7.

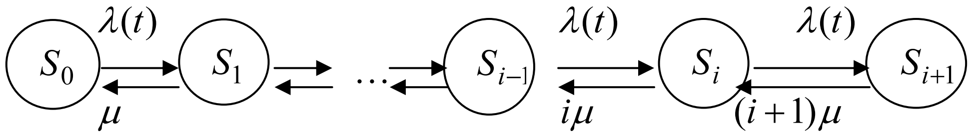

Рис. 3.7. Граф станів

Система рівнянь Колмогорова, що відповідає цьому графу, має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = \mu \cdot P_1(t) - \lambda(t) \cdot P_0(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dP_i(t)}{dt} = \lambda(t) \cdot P_{i-1}(t) + (i+1)\mu P_{i+1}(t) - (\lambda(t) + i\mu) \cdot P_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \qquad (3.16)$$

де i = 1,2,…,n.

Якщо в початковий момент часу t = 0 на підприємстві не було жодного ТЗ, то розв'язувати систему рівнянь (3.16) потрібно за початкових умов $P_0(0)=1, P_i(0)=0\ (i=1,2,...,n)$. Якщо при t = 0 на підприємстві було k ТЗ (k =1,2,…), то початкові умови будуть такими:

$$P_k(0)=1, P_1(0)=0, (\mathrm{i}=1,2,...,\mathrm{i} \neq \mathrm{k}).$$

2. Якщо на підприємстві може експлуатуватися не більше n ТЗ однієї марки, то спостерігається процес загибелі й розмноження з обмеженим числом станів n, розмічений граф якого показаний на рис. 3.8.

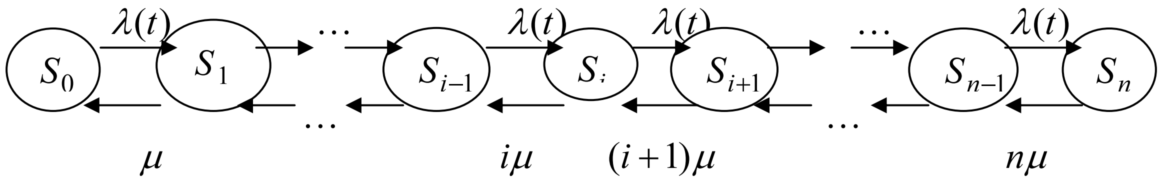

Рис. 3.8. Граф станів

Система рівнянь Колмогорова для розміченого графа (рис. 3.8) має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = \mu \cdot P_1(t) - \lambda(t) \cdot P_0(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dP_i(t)}{dt} = \lambda(t) \cdot P_{i-1}(t) + (i+1)\mu P_{i+1}(t) - (\lambda(t) + i\mu) \cdot P_1(t), \quad \mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{n}-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dP_n(t)}{dt} = \lambda(t) \cdot P_{n-1}(t) - n\mu \cdot P_n(t). \end{cases} \qquad (3.17)$$

Розв'язання систем рівнянь (3.16) і (3.17) у загальному вигляді при будь-якому значенні функції $\lambda(t)$ значно утруднено, а при конкретному значенні – підпорядковується одновимірному закону розподілу $P_i(t)$.

При постійних інтенсивностях потоків загибелі й розмноження й скінченному числі станів буде існувати стаціонарний режим. Система *S* зі скінченним числом станів (*n*+1), в якій проходить процес загибелі й розмноження з постійними інтенсивностями потоків, є найпростішою ергодичною системою. Розмічений граф станів для такої системи показано на рис. 3.9.

Граничні (фінальні) ймовірності станів для найпростішого ергодичного процесу загибелі й розмноження, що перебувають в стаціонарному режимі, визначають за формулою

$$P_k = \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot ...\lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 ... \mu_k} \cdot P_0, k = 1,2,...,n; \qquad (3.18)$$

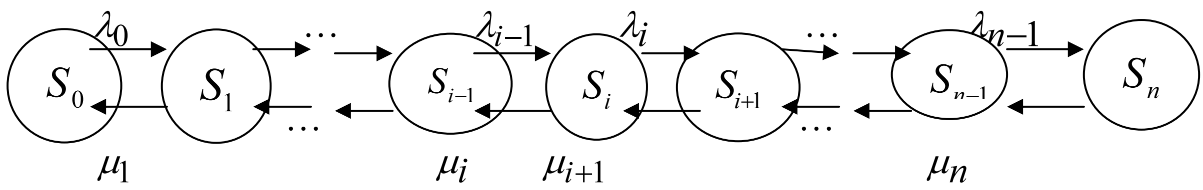

Рис. 3.9. Граф станів

$$P_0 = \left\{ 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + ... + \frac{\lambda_0 \lambda_1 ... \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 ... \mu_n} \right\}^{-1}. \qquad (3.19)$$

Імовірність *k*-го стану дорівнює відношенню добутку всіх інтенсивностей розмноження лівіше S_k до добутку всіх інтенсивностей загибелі лівіше S_k, помноженого на ймовірність крайнього лівого стану системи P_0.

У прикладі 3.4 для стаціонарного режиму, якщо надходження ТЗ постійне $(\lambda(t) = \lambda = const)$, то фінальні ймовірності станів за умови, що немає обмежень на число ТЗ на підприємстві, визначаються формулами

$$P_0 = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}, \qquad (3.20)$$

$$P_k = \left[\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} \right] e^{-\frac{\lambda}{\mu}}. \qquad (3.21)$$

При цьому математичне сподівання числа ТЗ, що експлуатуються, дорівнює його дисперсії:

$$M[A(t)] = Д[A(t)] = \frac{\lambda}{\mu}. \qquad (3.22)$$

Якщо існує обмеження на число ТЗ на підприємстві (не більше n), то фінальні ймовірності

$$P_0 = \frac{e^{-\alpha}}{\sum_{k=0}^{n} \alpha^k \cdot e^{-\alpha}/k!},$$

де $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$;

$$P_k = P_0 \frac{\alpha^k}{k!}, \qquad (3.23)$$

де $k = 0,1,2,...,n$.

Математичне сподівання числа експлуатованих ТЗ у стаціонарному режимі

$$M[A(t)] = \sum_{k=0}^{n} kP_k(t).$$

Приклад 3.5

До складу КС входить чотири персональних комп'ютери (ПК). Бригада із чотирьох чоловік обслуговуючого персоналу проводить профілактичний ремонт кожного ПК. Сумарний потік моментів закінчення ремонтів для всієї бригади – пуассонівський з інтенсивністю $\lambda(t)$. Після закінчення ремонту ПК перевіряють, з імовірністю P його вважають працездатним (часу перевірки мало, і ним можна знехтувати в порівнянні із часом профілактики). Якщо ПК виявився непрацездатним, то знову проводиться його профілактика (час, який не залежить від того, чи проводилася вона раніше) і т.д. У початковий момент всі ПК мають потребу в профілактичному ремонті. Потрібно:

1. Побудувати граф станів для системи S (чотири ПК).
2. Написати диференціальні рівняння для ймовірностей станів.
3. Знайти математичне сподівання числа ПК M_τ, що успішно пройшли профілактичний ремонт до моменту τ.

Розв'язання

1. Граф станів показаний на рис. 3.10, у якому:

S_0 – всі чотири ПК мають потребу в профілактичному ремонті;

S_1 – один ПК успішно пройшов профілактичний ремонт, а три ПК мають потребу в профілактичному ремонті;

S_2 – два ПК успішно пройшли профілактичний ремонт, а інші ПК мають потребу в профілактичному ремонті;

S_3 – три ПК успішно пройшли профілактичний ремонт, а один ПК має потребу в профілактичному ремонті;

S_4 – всі чотири ПК успішно пройшли профілактичний ремонт.

Кожен профілактичний ремонт успішно закінчується з імовірністю *p*, що рівносильне *p*-переформуванню потоку закінчення ремонтів, після якого він залишається пуассонівським, але з інтенсивністю $p\lambda(t)$. У цьому прикладі ми маємо справу із процесом чистого розмноження з обмеженим числом станів.

$$S_0 \xrightarrow{p\lambda(t)} S_1 \xrightarrow{p\lambda(t)} S_2 \xrightarrow{p\lambda(t)} S_3 \xrightarrow{p\lambda(t)} S_4$$

Рис. 3.10. Граф станів системи

2. Рівняння Колмогорова мають вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -p\lambda(t)\cdot P_0(t)\,; \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = p\lambda(t)\cdot\left(P_0(t) - P_1(t)\right); \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = p\lambda(t)\cdot(P_1(t) - P_2(t))\,; \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = p\lambda(t)\cdot(P_2(t) - P_3(t))\,; \\ \dfrac{dP_4(t)}{dt} = p\lambda(t)\cdot P_3(t)\,. \end{cases} \tag{3.25}$$

Початкові умови $P_0(0) = 1; P_1(0) = ... = P_4(0) = 0.$ При постійній інтенсивності $\lambda(t) = \lambda$ імовірності станів визначаються за такими формулами:

$$\begin{cases} P_0(t) = e^{-\lambda pt}; \\ P_1(t) = \lambda\cdot p\cdot t\cdot e^{-\lambda pt}; \\ P_2(t) = \dfrac{(\lambda\cdot p\cdot t)^2}{2!}\cdot e^{-\lambda pt}; \\ P_3(t) = \dfrac{(\lambda\cdot p\cdot t)^3}{2!}\cdot e^{-\lambda pt}; \\ P_4(t) = 1 - \sum\limits_{i=0}^{3} P_i(t). \end{cases} \tag{3.26}$$

3. Математичне сподівання числа ПК, що успішно пройшли профілактику до моменту τ, визначають як

$$M_{\tau} = \sum_{i=0}^{n} iP_i(t), \qquad (3.27)$$

де $n = 4$.

Приклад 3.6

Розглянемо виробництво технологічних агрегатів (ТА) на заводі. Потік вироблених ТА – нестаціонарний пуассонівський з інтенсивністю $\lambda(t)$. Знайдемо одновимірний закон розподілу випадкового процесу X(t) – числа випущених ТА до моменту часу *t*, якщо в момент *t* = 0 почато випуск ТА.

Розв’язання

Існує процес чистого розмноження без обмежень на число станів, при цьому $\lambda_i(t) = \lambda(t)$, тому що інтенсивність випуску ТА не залежить від того, скільки уже агрегатів випущено. Граф станів такого процесу показано на рис. 3.11.

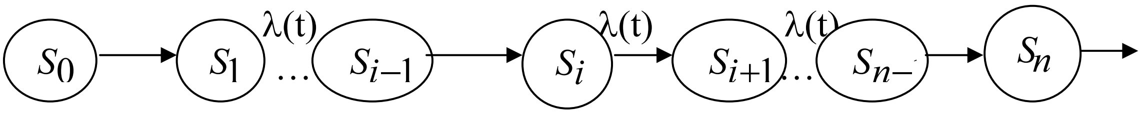

Рис 3.11. Граф станів

Одновимірний закон розподілу випадкового процесу *X*(*t*) для графу, зображеного на рис. 3.11, визначається такою системою рівнянь Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda(t)P_0(t); \\ \text{..............................}; \\ \dfrac{dP_i(t)}{dt} = -\lambda(t)P_i(t) + \lambda(t)P_{i-1}(t); \quad i = 1,2,...n \\ \text{.................................} \end{cases}.$$

Якщо *X*(*t*) на будь-який фіксований момент часу *t* розподілений за законом Пуассона з параметром

$$a(t) = \int_0^1 \lambda(t)dt,$$

то $P\{X(t) = i\} = P_i(t) = \dfrac{[a(t)]^i}{i!} e^{-a(t)}, \; i = 0,1,2,...,$

$$M[X(t)] = D[X(t)] = a(t).$$

Розглянутий у цьому прикладі процес *X*(*t*) називається *неоднорідним процесом Пуассона.* Якщо інтенсивність $\lambda(t) = \lambda = const,$ то одержимо *однорідний процес Пуассона*. Для такого процесу при

$P_0(0)=1, P_i(0)=0\,(i>0).$

$$P\{X(t)=i\}=P_i(t)=\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t},\ i=0,1,2,...,,$$

$$M[X(t)]=D[X(t)]=\lambda t.$$

3.4. Моделювання роботи транспортного засобу з використанням марковських випадкових процесів

Наведемо транспортний засіб (ТЗ) як деяку систему S із дискретними станами S_0, S_1, …, S_n, яка може переходити із стану в стан під впливом випадкових подій (відмов) [3].

На стадії прогнозування (планування) роботи ТЗ доцільно розглянути такі стани, в яких ТЗ може перебувати в процесі експлуатації, та такі, що характеризуються цілоденними простоями:

S_0 – справний, працює;

S_1 – перебуває на капітальному ремонті (КР);

S_2 – проходить ТО-2;

S_3 – перебуває на поточному ремонті (ТР);

S_4 – справний, не працює з організаційних причин (без водія, запасних частин);

S_5 – не працює, зняття агрегату для відправлення на капітальний ремонт;

S_6 – не працює, списання агрегату, заміна на новий;

S_7 – справний, не працює (вихідні й святкові дні);

S_8 – списується.

Треба відзначити, що перераховані вище стани ТЗ плануються при розробці річної програми роботи транспортного підприємства (ТП), при цьому стани S_3, S_5, S_6 поєднуються в один стан «перебуває в ТР».

Для аналізу процесу експлуатації ТЗ як випадкового процесу з дискретними станами зручно скористатися графом станів (рис. 3.12), який зображує можливі стани та переходи ТЗ [36, 38].

На рис. 3.12 через λ_{ij} і μ_{ji} позначені щільності ймовірностей переходу ТЗ зі стану S_i в стан S_j. Наприклад, λ_{03} – щільність імовірності переходу ТЗ зі стану «справний, працює» у стан «перебуває в поточному ремонті».

Можна вважати, що події, що переводять ТЗ зі стану в стан, являють собою потоки подій (наприклад, потоки відмов). Якщо всі потоки подій, що переводять систему (ТЗ) зі стану в стан, пуассонівські (стаціонарні або нестаціонарні), то процес, що проходить у системі, буде марковським, а щільності ймовірності переходу λ_{ij} в безперервному ланцюзі Маркова являють собою інтенсивності потоку подій, що переводить систему зі стану S_i в стан S_j.

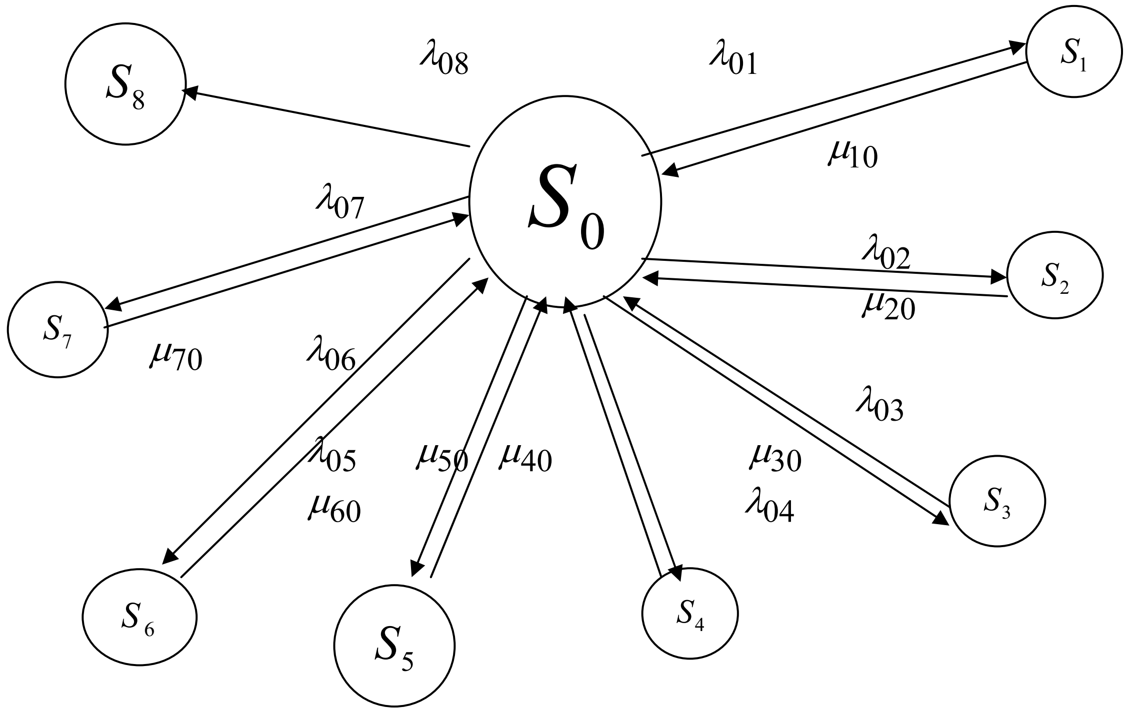

Рис. 3.12. Граф станів ТЗ

Розглянуті стани S_j характеризуються середнім числом днів перебування ТЗ у кожному із станів $Д_j$. Показники $Д_j$ знаходять висвітлення в статистичній звітності ТП.

$$P_j = \frac{Д_j}{Д_k}, \tag{3.28}$$

де $Д_k$ – число календарних днів у році.

$Д_k$ можна трактувати як імовірність знаходження ТЗ у j-му стані.

Імовірності стану ТЗ $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_j, \ldots, P_n$ як функції пробігу у випадку марковського процесу з дискретними станами й безперервним часом задовольняють певний вид диференціальних рівнянь (рівнянь Колмогорова), які мають вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(L)}{dL} = -l_c \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{oi}(L) \cdot P_0(L) + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \mu_{io}(L) \cdot P_i(L), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dP_i(L)}{dL} = l_c \cdot \lambda_{0i}(L) \cdot P_0(L) - \mu_{io}(L) \cdot P_i(L), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dP_n(L)}{dL} = l_c \cdot \lambda_{on}(L) P_0(L), \end{cases} \tag{3.29}$$

де $P_i(L)$ – імовірність знаходження ТЗ в i-му стані, i= (0,n);

$\lambda_{oi}(L)$ – інтенсивність переходу ТЗ з нульового в i-й стан, i=(1,n);

$\mu_{io}(L)$– інтенсивність переходу ТЗ з i-го в нульовий стан, i=1, n-1;

l_c – коефіцієнт, що відображає зв'язок між напрацюваннями в днях і кілометрах пробігу (середньодобовий пробіг, тис. км).

Число рівнянь у системі (3.29) залежить від числа станів ТЗ. Імовірність знаходження ТЗ у стані «справний, працює» $P_0(L)$ являє собою коефіцієнт випуску $a_b(L)$, а сума ймовірностей $P_0(L)+P_4(L)+P_7(L)=k_{тг}(\mathrm{L})$ – коефіцієнт технічної готовності ТЗ.

Оскільки більшість інтенсивностей переходів залежать від пробігу, то розв'язок системи (3.29) знаходиться за допомогою методів числового інтегрування, наприклад методом Рунге-Кутта**.**

Необхідно врахувати, що для розрахунку виробничої програми ТП потрібно визначати показники роботи групи ТЗ певної моделі *j*-го віку (коефіцієнт випуску й річний пробіг ТЗ *j*-ї вікової групи).

Для опису процесу функціонування групи ТЗ може бути використаний *метод динаміки середніх* [3]. Цей метод випливає з теорії марковських випадкових процесів. Зручність його полягає в тому, що, знаючи можливі стани одного (умовного) ТЗ, можна моделювати процес функціонування групи з будь-якого числа ТЗ.

Схема, що зображає процес роботи умовного ТЗ певної моделі, аналогічна схемі рис. 3.12, лише з тією різницею, що через λ_{ij} і μ_{ji} позначені середні інтенсивності потоків подій, що переводять ТЗ із стану S_i в стан S_j, і навпаки. При цьому кожен стан характеризується середньою чисельністю ТЗ $N_j(t)$, що перебувають у ньому в момент часу *t*. Очевидно, що для будь-якого часу *t* сума чисельностей всіх станів дорівнює загальній чисельності ТЗ досліджуваної групи:

$$N=\sum_{j=0}^{\infty}N_j(t).$$

Величина $N_j(t)$ для будь-якого часу *t* являє собою випадкову величину, а при мінливому *t* – випадкову функцію часу.

Знаючи граф станів (рис. 3.12) і відповідні інтенсивності переходу λ_{ij} й μ_{ji}, визначимо середні чисельності ТЗ $N_0(L), N_1(L), N_2(L), \ldots, N_8(L)$ як функції пробігу L. Відповідно до графа станів (рис. 3.12) система диференціальних рівнянь для середніх чисельностей станів запишемо таким чином:

$$\frac{dN_0(L)}{dL}=-l_cN_0(L)[\lambda_{01}(L)+\lambda_{02}(L)+\lambda_{03}(L)+\lambda_{04}(L)+\lambda_{05}(L)+$$
$$+\lambda_{06}(L)+\lambda_{07}(L)+\lambda_{08}(L)]+\mu_{10}(L)N_1(L)+\mu_{20}(L)N_2(L)+$$
$$+\mu_{30}(L)N_3(L)+\mu_{40}(L)N_4(L)+\mu_{50}(L)N_5(L)+\mu_{60}(L)N_6(L)+\mu_{70}(L)N_7(L);$$

$$\frac{dN_1(L)}{dL} = -l_c N_0(L)\lambda_{01}(L) - \mu_{10}(L) N_1(L);$$
$$\frac{dN_2(L)}{dL} = -l_c N_0(L)\lambda_{02}(L) - \mu_{20}(L) P_2 N_2(L);$$
$$\frac{dN_3(L)}{dL} = -l_c N_0(L)\lambda_{03}(L) - \mu_{30}(L) N_3(L);$$
$$\frac{dN_4(L)}{dL} = -l_c N_0(L)\lambda_{04}(L) - \mu_{40}(L) N_4(L); \qquad (3.30)$$
$$\frac{dN_5(L)}{dL} = -l_c N_0(L)\lambda_{05}(L) - \mu_{50}(L) N_5(L);$$
$$\frac{dN_6(L)}{dL} = -l_c N_0(L)\lambda_{06}(L) - \mu_{60}(L) N_6(L);$$
$$\frac{dN_7(L)}{dL} = -l_c N_0(L)\lambda_{07}(L) - \mu_{70}(L) N_7(L);$$
$$\frac{dN_8(L)}{dL} = e_c N_0(L)\lambda_{08}(L).$$

Відношення $\frac{N_0(L)}{N}$ відповідає коефіцієнту випуску ТЗ певної моделі на пробігу L з початку їхньої експлуатації, а відношення $\frac{[N_0(L) + N_4(L) + N_7(L)]}{N}$ – коефіцієнту технічної готовності ТЗ.

Доведемо, що формули для визначення коефіцієнтів технічної готовності k_m та випуску a_b є окремим випадком, що відповідає стаціонарному розв'язку системи рівнянь функціонування ТП (3.30). Для розрахунку середньої чисельності ТЗ, що перебувають у справному стані, можна попередньо об'єднати стани S_1, S_5, S_6 в один стан: «справний» $-S_1^{'}$. Тоді граф станів умовного ТЗ матиме вигляд, зображений на рис. 3.13.

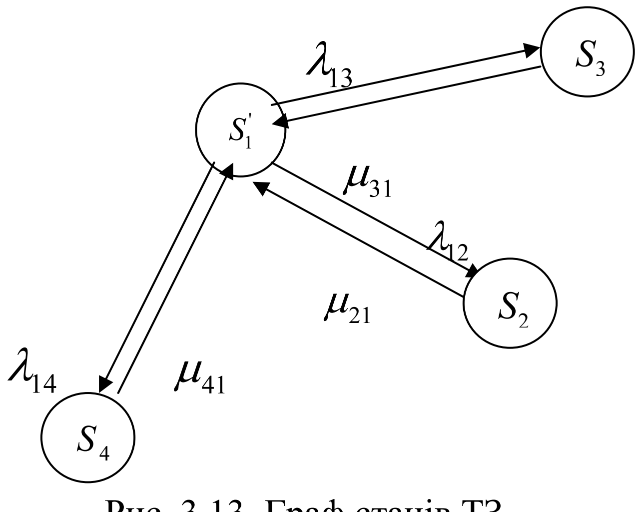

Рис. 3.13. Граф станів ТЗ

Система диференціальних рівнянь для середніх чисельностей рухомого складу запишемо таким чином:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1^{'}(l)}{dt} = -l_c(\lambda_{12}(l) + \lambda_{13}(l) + \lambda_{14}(l)) \cdot N_1^{'}(l) + \mu_{21}(l)N_2(l) + \\ + \mu_{31}(l)N_3(l) + \mu_{41}(l)N_4(l), \\ \dfrac{dN_2(l)}{dt} = -\mu_{21}(l)N_2(l) + l_c\lambda_{12}(l)N_1^{'}(l), \\ \dfrac{dN_3(l)}{dt} = -\mu_{31}(l)N_3(l) + l_c\lambda_{13}(l)N_1^{'}(l), \\ \dfrac{dN_4(l)}{dt} = -\mu_{41}(l)N_2(l) + l_c\lambda_{14}(l)N_1^{'}(l). \end{cases} \quad (3.31)$$

Прирівняємо ліві частини рівнянь до нуля. Одержимо систему алгебричних рівнянь для середніх чисельностей станів ТП, що працюють у стаціонарному режимі:

$$\begin{cases} 0 = -l_c(\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14}) \cdot N_1^{'} + \mu_{21}N_2 + \mu_{31}N_3 + \mu_{41}N_4, \\ 0 = -\mu_{21}N_2 + l_c\lambda_{12}N_1^{'}, \\ 0 = -\mu_{31}N_3 + l_c\lambda_{13}N_1^{'}, \\ 0 = -\mu_{41}N_2 + l_c\lambda_{14}N_1^{'}. \end{cases} \quad (3.32)$$

Розв’яжемо систему алгебричних рівнянь, скориставшись нормувальною умовою

$$N_0 = N_1 + N_2 + N_3 + N_4, \quad (3.33)$$

де N_0 – середнєспискова чисельність ТП, шт.

Для прикладу із системи (3.32) визначимо невідомі середні чисельності станів, використовуючи $N_1^{'}$. Так, із другого й третього рівнянь маємо

$$N_2 = l_c \frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} N_1^{'}, \quad (3.34)$$

$$N_3 = l_c \frac{\lambda_{13}}{\mu_{31}} N_1^{'}. \quad (3.35)$$

Відповідно до нормувальної умови

$$N_4 = N_0 - N_1^{'} - N_2 + N_3. \quad (3.36)$$

Тоді

$$N_4 = N_0 - (N_1^{'} + N_1^{'} l_c \frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} + N_1^{'} l_c \frac{\lambda_{13}}{\mu_{31}}) = N_0 - (1 + l_c \frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} + l_c \frac{\lambda_{13}}{\mu_{31}}).$$

Підставивши в перше рівняння (3.36), одержимо

$$0 = -l_c(\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14})N_1^{'} + l_c\lambda_{12}N_1^{'} + l_c\lambda_{13}N_1^{'} +$$
$$+ \mu_{41}\left[N_0 - \left(1 + l_c\frac{\lambda_{13}}{\mu_{31}} + l_c\frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}}\right)N_1^{'}\right] = -l_c\lambda_{14}N_1^{'} + \mu_{41}N_0 -$$
$$- \mu_{41}\left(1 + l_c\frac{\lambda_{13}}{\mu_{31}} + l_c\frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}}\right)N_1^{'}.$$

Розділимо отримане рівняння на μ_{41}:

$$-l_c\frac{\lambda_{14}}{\mu_{41}}N_1^{'} + N_0 - \left(1 + l_c\frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} + l_c\frac{\lambda_{13}}{\mu_{31}}\right)N_1^{'} = 0.$$

Останнє рівняння можна записати таким чином:

$$N_0 = \left(1 + l_c\frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} + l_c\frac{\lambda_{13}}{\mu_{31}} + l_c\frac{\lambda_{14}}{\mu_{41}}\right)N_1^{'},$$
$$k_{тг} = \frac{\mathrm{N}_1^{'}}{N_0} = \frac{1}{1 + l_c\left(\frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} + \frac{\lambda_{13}}{\mu_{31}} + \frac{\lambda_{14}}{\mu_{41}}\right)}, \qquad (3.37)$$

де $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}$ – інтенсивності переходу ТЗ у стани «технічне обслуговування», «поточний ремонт», «капітальний ремонт» відповідно, відм/тис. км;

$\mu_{21}, \mu_{31}, \mu_{41}$– інтенсивності відновлення, які дорівнюють зворотним середнім величинам тривалості відповідних ремонтних впливів ТО-2, «поточний ремонт», «капітальний ремонт», відм /день.

Відношення

$$\frac{\lambda_{ij}}{\mu_{ji}} = \frac{\frac{\text{відм}}{\text{тис.км}}}{\frac{\text{відм}}{\text{день}}} = \frac{\text{день}}{\text{тис.км}}.$$

Таким чином, $\frac{\lambda_{ij}}{\mu_{ji}} = d_j$ – питома величина, що характеризує кількість днів у j-му стані (ТО-2, ТР, КР) на 1 тис. км пробігу. Тоді формулу (3.37) можна записати у вигляді

$$k_{тг} = \frac{1}{1 + l_{\text{c}}(d_2 + d_3 + d_4)} = \frac{1}{1 + l_c d_{TO-P}}. \qquad (3.38)$$

Очевидно, формула (3.38) являє собою окремий випадок відповідного стаціонарного режиму роботи ТЗ, що є розв’язком системи алгебричних рівнянь.

Розглянемо всі потоки подій, що переводять умовний ТЗ зі стану в стан. Характер потоку відмов ТЗ, що переводить умовний ТЗ зі стану «справний, працює» у стан «перебуває в поточному ремонті», не змінюється. При визначенні його величини враховують вікову структуру ТЗ даної моделі.

Напрацювання до першого капітального ремонту ТЗ підпорядковується нормальному закону розподілу з коефіцієнтом варіації 0,1…0,33. Разом із тим слід зазначити значне абсолютне розсіювання пробігів до першого капітального ремонту ТЗ у досліджуваних групах рухомого складу. Розмах між мінімальним і максимальним пробігами може скласти пробіг, який приблизно дорівнює середньому до першого капітального ремонту цих ТЗ.

Таким чином, потік подій, що переводить ТЗ у стан «капітальний ремонт», проходить на значному інтервалі пробігу. У цьому потоці інтенсивність $\lambda_{01}(L)$ (середнє число подій в одиницю пробігу) залежить від пробігу, тобто потік є нестаціонарним.

Очевидно, на малому інтервалі пробігу ТЗ (1…2 тис. км) інтенсивність $\lambda_{01}(L)$ змінюється порівняно повільно. У цьому випадку закон розподілу напрацювання до капітального ремонту можна приблизно вважати показовим, а інтенсивність λ_{01} приймати такою, що дорівнює середньому значенню $\lambda_{01}(L)$ на цьому інтервалі. Аналогічні твердження справедливі щодо потоків відмов, що переводять умовний ТЗ у стани «капітальний ремонт агрегату» й «списання агрегату».

Загальний потік відмов, пов'язаний із влученням ТЗ досліджуваної групи в «ТО-2», виходить шляхом накладення (суперпозиції) потоків «ТО-2» цих ТЗ. Як показують розрахунки, розподіл інтервалу пробігу між подіями в цьому потоці підпорядковується показовому закону. При цьому потік «ТО-2» всіх досліджуваних ТЗ є пуассонівським.

Потік відмов, пов'язаний із списанням ТЗ, є умовним. Дійсно, якщо ТЗ відмовляє в той момент, коли відбувається перша подія даного потоку, то зовсім однаково, триває після цього потік відмов чи припиняється: частка ТЗ від цього вже не залежить. У випадку, коли елемент (ТЗ) не підлягає відновленню, потік відмов є пуассонівським.

Потік відмов ТЗ, пов'язаний зі списанням, є нестаціонарним, тому що пробіг до списання рухомого складу підпорядковується закону розподілу, який відрізняється від показового. Очевидно, на малому інтервалі пробігу ТЗ (1…2 тис. км) інтенсивність відмов змінюється порівняно повільно, у такому випадку закон розподілу подій можна приблизно вважати показовим і для опису процесу експлуатації ТЗ використати марковську схему.

Характер інших потоків подій, пов'язаних із процесом роботи групи ТЗ, не змінюється.

Таким чином, всі середні потоки, що переводять умовний ТЗ зі стану в стан, чи пуассонівські, чи зводяться до них шляхом розгляду процесу експлуатації на малих інтервалах пробігу (1…2 тис. км) і коректуванням вихідного потоку відмов деталей для виключення наслідку. Це дозволяє використати метод динаміки середніх для опису процесу експлуатації групи ТЗ.

У табл. 3.1 наведені формули для розрахунку інтенсивностей переходу λ_{ij} й μ_{ij} для конкретного ТЗ.

Таблиця 3.1

Інтенсивності переходу λ_{ij} й μ_{ij} для розрахунку комплексних показників надійності автомобілів МАЗ [3]

Інтенсивність	Формула для розрахунку	Примітка
Справний – капітальний ремонт	$\lambda_{01} = \sum_{k=1}^{k} \varphi_k(L)$	Щільність розподілу напрацювання до k-го КР автомобіля $-\varphi_k(L)$
Справний – проходить ТО-2	$\lambda_{02}(L) = \sum_{i=1}^{\infty} f_{moi}(L)$ $\lambda_{02}(\mathrm{L}) = (L_{mo})^{-1}$	f_{moi} – щільність напрацювання до і-го ТО-2; L_{mo} – середня періодичність ТО-2
Справний – перебуває в ПР	$\lambda_{03} = \sum_{j=1}^{F} \omega_f(L)$	$\omega_f(L)$– параметр потоку відмов f-ї деталі по інтервалах пробігу L; F – число ДЛН автомобіля, шт.
Справний – простоює з організаційних причин (без водія й т.п.)	$\lambda_{04}(L) = \rho(L)$ $\lambda_{04}(L) = \left(l_c \overline{T_{np}}\right)^{-1}$	$\overline{T_{np}}$ – середній час між простоями; l_c – середньодобовий пробіг, тис. км
Справний – капітальний ремонт агрегату	$\lambda_{05} = \sum_{n=1}^{N} \omega_n^{краг}(L)$	$\omega_n^{краг}$ – параметр потоку відмов автомобіля, пов’язаний із КР його агрегатів
Справний – списання агрегату	$\lambda_{06} = \sum_{n=1}^{N} \omega_n^{спаг}$	$\omega_n^{спаг}$ – параметр потоку відмов автомобіля, пов’язаний зі списанням агрегатів; N – число агрегатів
Справний – не працює (святкові й вихідні дні)	$\lambda_{07}(L) = \rho(L)$ $\lambda_{07}(L) = \left(l_c \overline{T_{\text{вих}}}\right)^{-1}$	$\overline{T_{вих}}$ – середній час між простоями

Інтенсивність	Формула для розрахунку	Примітка
Справний – списання ТЗ	$\lambda_{08}(L)=\dfrac{f_c(L)}{[1-F_c(L)]}$ $\lambda_{08}(L)=\dfrac{L-L_0}{\delta^2}$ $L>270$ *тис.км*	$F_C(L), f_C(L)$ – функція й щільність розподілу напрацювання до списання автомобіля; прийнятий розподіл Релея з параметрами: $\sigma^2=40^2$ тис. км, L_0 =270 тис. км
Капітальний ремонт – справний	$\mu_{10}=\left(\overline{T_{кр}}\right)^{-1}$	$\overline{T_{кр}}$ – середня тривалість капітального ремонту
ТО-2 – справний	$\mu_{20}=\left(\overline{T_{то}}\right)^{-1}$	$\overline{T_{то}}$ – середня тривалість ТО-2
Перебуває в ТР – справний	$\mu_{30}(L)=\eta(L)$ $\mu_{30}(L)=\left(\overline{T_T}\right)^{-1}$	$\overline{T_T}$ – середня тривалість ТР
Простоює з організаційних причин – справний	$\mu_{40}(L)=\left(\overline{T_п}\right)^{-1}$	$\overline{T_п}$ – середня тривалість простою
Капітальний ремонт агрегату – справний	$\mu_{50}(L)=\left(\overline{T^a_{кр}}\right)^{-1}$	$\overline{T^a_{кр}}$ – середня тривалість простою при знятті агрегату

Значення параметрів моделі (3.30) $\lambda_{03}(L)$, $\lambda_{05}(L), \lambda_{06}(L)$ можуть бути визначені двома способами:

1. Отримані значення параметрів потоку відмов ТЗ, пов'язані з його поточним ремонтом, капітальним ремонтом і списанням його агрегатів, апроксимуються експоненціальними залежностями такого вигляду:

$$\lambda_{0i}(L)=\exp(a_0+a_1x+...+a_nx^n),$$

де x - пробіг ТЗ із початку експлуатації, тис. км,

i - номер стану, в якому перебуває ТЗ, i = 3, 5, 6.

Помилка апроксимації при невеликих n буває високою й може досягати 10…20%. Це один із головних недоліків способу, що істотно знижує точність наступних розрахунків річного пробігу. Зазначений недолік можна виключити.

2. Параметри λ_{03}, λ_{05}, λ_{06} задаються дискретно для кожного інтервалу пробігу і є постійними величинами на кожному інтервалі, що становить 10…20 тис. км, але значення цих параметрів змінюються протягом

пробігу з початку експлуатації ТЗ стрибкоподібно від одного інтервалу до іншого.

Метод динаміки середніх може бути використаний для визначення коефіцієнта випуску ТП, що складається з ТЗ різних моделей.

Зазначену завдачу можна вирішити двома способами:

1. Досліджується ізольований процес експлуатації сукупності автомобілей однієї моделі.

2. Розглядається процес функціонування моделей ТЗ багатомарочного парку в цілому. У цьому випадку без принципіальних змін можна використати викладений вище спосіб, різниця буде лише в тому, що число диференціальних рівнянь збільшиться в n раз, де n – число моделей рухомого складу, що обслуговують на постах ТО-2 й ПР.

Використання методу динаміки середніх для визначення коефіцієнтів технічної готовності й випуску ТЗ моделей різномарочного парку дозволяє врахувати обмежену кількість постів для проведення ТО-2 й ПР.

При визначенні коефіцієнтів технічної готовності й випуску ТЗ різномарочного парку необхідно розбити всі моделі рухомого складу, що експлуатуються в ТП, на групи, що включають у себе ТЗ тих моделей, які обслуговують на одних постах ТО-2 і ПР. Для кожної групи моделей рухомого складу будують єдину систему диференціальних рівнянь, яка описує функціонування відповідної групи ТЗ.

Контрольні запитання

1. Назвіть основні види випадкових марковських процесів. Поясніть подібність і розбіжності між ними.
2. Дайте визначення марковського ланцюга й подайте його у вигляді матриці переходів.
3. У чому полягає особливість безперервного ланцюга Маркова? Що таке фінальні ймовірності станів?
4. Покажіть на прикладі складання системи диференціальних рівнянь Колмогорова для заданого графа станів системи.
5. Назвіть і поясніть основні властивості випадкових потоків подій. Наведіть приклад логістичного ланцюга, для якого можлива формалізація у вигляді марковського процесу загибелі й розмноження.
6. Поясніть основні особливості методу динаміки середніх. Наведіть приклад.
7. Поясніть правила складання системи диференціальних рівнянь у методі динаміки середніх для заданого графа станів.
8. У чому різниця однорідного й неоднорідного процесів Пуассона? Покажіть різницю за допомогою відповідних формул.
9. Розгляньте процес загибелі й розмноження та його зв'язок з марковськими процесами, зокрема методом динамічних середніх.
10. Розгляньте логістичний процес виконання замовлень на підприємстві й складіть відповідні графи станів системи. Визначіть можливі формальні подання в класі марковських процесів.

Завдання

1. У моменти часу t_1, t_2, t_3 відбувається огляд КС. Можливі такі стани КС:

S_0 – повністю справна;

S_1 – незначні несправності, які дозволяють експлуатувати КС;

S_2 – істотні несправності, що дають можливість вирішувати обмежене число задач;

S_3 – КС повністю вийшла із ладу.

Матриця перехідних ймовірностей має вигляд

$$\left\| P_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Побудуйте граф станів. Знайдіть імовірності станів КС після одного, двох, трьох оглядів, якщо спочатку (при $t = 0$) КС була повністю справна.

2. Система S являє собою технічний пристрій, що складається з m вузлів і час від часу (у моменти $t_1, t_2, \ldots, t_k$) підлягає профілактичному огляду й ремонту. Після кожного кроку (моменту огляду й ремонту) система може опинитися в одному з таких станів:

S_0 – всі вузли справні (жоден не замінявся новим);

S_1 – один вузол замінений новим, інші справні;

S_2 – два вузли замінені новими, інші справні;

S_i – i вузлів замінені новими, інші справні;

S_m – всі m вузлів замінені новими.

Сумарний потік моментів закінчення оглядів для всіх вузлів – пуассонівський з інтенсивністю $\lambda = 4$. Імовірність того, що в момент профілактики вузол необхідно буде замінити новим, дорівнює $P = 0{,}4$.

Розглядаючи процес профілактичного огляду й ремонту (заміни) як марковський процес розмноження, обчисліть імовірності станів системи S у стаціонарному режимі (для $m = 3$), якщо в початковий момент часу всі вузли були справні.

3. Технічний пристрій має два можливі стани:

S_1 – «справний, працює»;

S_2 – «не справний, ремонтується».

Матриця перехідних ймовірностей має вигляд

$$\left\| P_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.8 & 0.2 \end{matrix} \right\|.$$

Побудуйте граф станів. Знайдіть імовірності станів після третього кроку й у стаціонарному режимі, якщо в початковому стані пристрій був справний.

4. Система S складається із двох вузлів – I й II, кожний з яких може в ході роботи системи відмовити (вийти з ладу). Перелічіть можливі стани системи й побудуйте граф станів для двох випадків:

а) ремонт вузлів у процесі роботи системи не проводиться (чистий процес «загибелі» системи);

б) вузол, що відмовив, негайно починає відновлюватися.

5. Логістична система *S* має можливі стани: S_1, S_2, S_3, S_4. Розмічений граф системи з інтенсивностями переходу зображений на рис. 3.14.

Обчисліть імовірності станів у стаціонарному режимі.

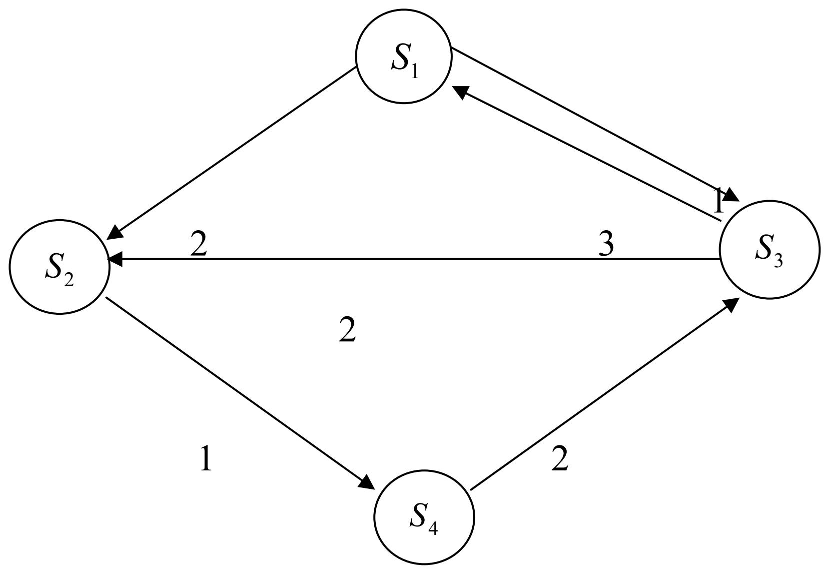

Рис. 3.14. Граф станів логістичної системи

6. На підприємстві використовують комп'ютерну мережу, до складу якої входить *n* = 6 персональних комп'ютерів (ПК). Щорічно обслуговуючий персонал проводить профілактичний огляд кожного ПК. Сумарний потік моментів закінчення профілактичних оглядів для всього персоналу, що бере участь, – пуассонівський з інтенсивністю $\lambda = 0.5ч^{-1}$ (число подій в одиницю часу). Після закінчення огляду з імовірністю *P* = 0,86 встановлюється, що ПК – працездатний. Якщо ПК виявився непрацездатним, то знову проводиться профілактика. У початковий момент часу всі ПК комп'ютерної мережі мають потребу в профілактичному огляді.

Побудуйте граф станів для системи *S* (6ПК), напишіть диференціальні рівняння для ймовірностей станів. Знайдіть імовірності станів $P_i(3)$ і математичне сподівання числа персональних комп'ютерів (M_3), які успішно пройшли профілактику після трьох годин з початку обслуговування (*t* = 3).

7. Розглядається виробництво персональних комп'ютерів на заводі. Потік вироблених комп'ютерів – найпростіший пуассонівський з інтенсивністю $\lambda(t) = \lambda = 1200$ рік$^{-1}$ (число комп'ютерів у рік). Визначіть ймовірність випуску 5000 комп'ютерів. За чотири роки роботи заводу обчисліть характеристики процесу виробництва ПК *m[X(t)]* й *D[X(t)]* при *t* = 4 роки. Побудуйте граф станів процесу виробництва ПК.

Розділ 4. МОДЕЛІ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ ЛОГІСТИЧНИХ СИСТЕМ

4.1. Якісний опис процесів обслуговування на прикладі аеропорту

Продемонструємо поняття теорії масового обслуговування на прикладі зльоту і приземлення літаків у великому аеропорту [47].

Припустимо, що аеропорт має кілька злітно-посадкових смуг (паралельних каналів). Ці смуги ведуть до різної кількості доріжок, які закінчуються на аеровокзалі (послідовні канали). Після того, як літак, що прибув згідно з певним розподілом вхідного потоку, приземляється, він приєднується до черги літаків, що чекають обслуговування (просування по доріжці до місця вивантаження). Таким чином, потік, що виходить із однієї черги, стає вхідним потоком для іншої. Черга існує як на землі (зліт літаків), так й у повітрі (приземлення літаків). Обидві черги мають свій розподіл вхідного потоку. Літаки, що приземляються, можуть прибувати групами, при цьому члени кожної групи мають кружляти над аеропортом і приземлятися по черзі (якщо смуга дуже широка, то неважко надати посадку групам літаків). Тривалість операції обслуговування (час приземлення або зльоту) – біля хвилини. У кожному разі є деякий розподіл часу обслуговування. Якщо для різних типів літаків відведені різні злітно-посадкові смуги, які можуть бути різної довжини, наприклад, для реактивних літаків, то розподіл часу обслуговування може змінюватися від однієї смуги до іншої.

При виборі літаків для приземлення важливо визначити відповідний показник ефективності. Наприклад, якщо бажано мінімізувати загальний час чекання пасажирів, то спочатку потрібно робити посадку літаків із більшою кількістю людей.

Часто практикується обслуговування із пріоритетом, коли дозволяється приземлення літака, що знижується раніше, ніж зліт літака, що чекає. Ця система із пріоритетом поширюється також на випадок аварійної ситуації, коли внаслідок гострої потреби дозволяється приземлити першим літак, що прибув пізніше. Нерідко пріоритет на приземлення дається реактивним літакам через обмежений запас палива.

Іноді порядок обслуговування такий, що літак, який прибуває, приєднується до черги ешелонованих, що чекають посадки, а потім вибір літака на посадку здійснюють випадковим чином (одна з форм обслуговування із пріоритетом). Наприклад, якщо літак перебуває ближче інших до кордону зони чекання, то йому буде дана команда на приземлення. У проміжку часу між одержанням пріоритету на приземлення й командою «приземлення дозволяю» літак виходить із ешелону й направляється до аеродрому. Цей час відомий як час заходу на посадку. Час приземлення витрачається на операцію посадки й триває до того моменту, коли літак звертає із злітно-посадкової смуги [51, 52].

Літак, що чекає посадки, може перебувати в положенні, близькому до критичного (у цей час інші літаки будуть дійсно в критичному положенні). Він може приєднатися до коротшої черги в найближчому аеропорті й приземлитися там. Літак, що прибуває, може не пристроюватися в ешелон, а йти в інший аеропорт (відмова ставати в чергу). У цьому випадку говорять, що аеропорт «втратив» цей літак. Трапляється, що літак відправляється в сусідній аеропорт після того, як, приєднавшись до черги, він чекав більше, ніж передбачалося (залишання черги до початку обслуговування). Можна розглядати літак, який приземляється, що він бере участь у циклі, якщо він приєднується до черги літаків, які чекають зльоту, і знову включається у вхідний потік системи. Якщо літак, що приземляється, має інформацію про розміри черги ешелонованих літаків, які чекають посадки в сусідньому аеропорту, то він може приєднатися до цієї черги. Якщо в нього є інформація ще про один аеропорт, то він може відправитися туди (рідкий випадок). Такий рух за наявності декількох черг називається переходом з однієї черги в іншу (можливість вибору черг).

Аеропорт може тимчасово закриватися, і літак буде змушений відправитися в інший аеропорт, якщо число ешелонованих літаків, які чекають посадки, досягне заданої величини. Операція обслуговування може бути прискорена шляхом використовування спеціальних гасителів швидкості, які дозволяють літакам приземлятися на головній смузі з великою швидкістю.

Основною проблемою при керуванні аеропортом є зв'язок. Якщо вхідний потік як на землі, так й у повітрі великий, то аеропорт має швидко зв'язуватися з літаками й одержувати відповідь. При організації зв'язку важливою проблемою є визначення числа операторів і каналів зв'язку, необхідних для регулювання різних станів перевантаження, які можуть виникнути. У цьому випадку необхідно вибрати оптимальне число каналів для обслуговування вимог, що надходять відповідно до даного розподілу. Можна зробити порівняння вартості додаткового каналу з вартістю зрослого обсягу обслуговування існуючими каналами.

Важливою проблемою є наявність відповідного місця для чекання в черзі. Наприклад, при проектуванні аеропорту істотним моментом є наявність наземної рульової доріжки для літаків, готових до зльоту.

У багатьох задачах теорії масового обслуговування для визначення необхідного показника ефективності досить знати розподіл вхідного потоку, дисципліну черги (наприклад, випадковий вибір обслуговування в порядку надходження або із пріоритетом) і розподіл часу обслуговування. В інших задачах потрібно мати додаткову інформацію. Наприклад, у випадку відмов в обслуговуванні потрібно визначити ймовірність того, що вимога, що надійшла, одержить відмову відразу після прибуття або через деякий час, тобто залише чергу до або після приєднання до неї.

З теоретичної точки зору черги можна розглядати як потоки, що проходять через систему пунктів обслуговування, з'єднаних послідовно або паралельно. На потік впливають різні фактори; вони можуть сповільнювати його, призвести до насичення й т.д.

Розглянемо просту ситуацію для системи з однобічним обслуговуючим пристроєм, наведену в табл. 4.1.

У першому рядку наведено час прибуття клієнта А, а в другому – час, що минув з моменту прибуття попереднього клієнта до моменту прибуття клієнта А. У третьому рядку – час обслуговування клієнта А, а в четвертому – час чекання клієнта А, який дорівнює сумі часу обслуговування й часу чекання попереднього клієнта за винятком проміжку часу між моментом прибуття попереднього клієнта й моментом прибуття клієнта, чий час чекання обчислюють. Так, наприклад, клієнт буде чекати протягом проміжку, що дорівнює часу чекання й часу обслуговування попереднього клієнта, мінус проміжок часу між моментом прибуття попереднього клієнта й моментом прибуття клієнта А. Якщо результат дорівнює нулю або негативний, то час чекання дорівнює нулю.

Таблиця 4.1

Вибірка даних про роботу системи масового обслуговування

Поточний час	0	2	6	11	12	19	22	26	36	38	45	47	49	52	61
Проміжок часу між вимогами	0	2	4	5	1	7	3	4	10	2	7	2	2	3	9
Час обслугову-вання	5	7	1	9	2	4	4	3	1	2	5	4	1	2	1
Час чекання	0	3	6	2	10	5	6	6	0	0	0	3	5	3	0

Для одержання статистично вагомих даних про реальний процес потрібна була б значно більша вибірка, однак деякі важливі характеристики системи масового обслуговування можуть бути проілюстровані й на цьому прикладі. У цьому випадку десять клієнтів з п'ятнадцяти чекають. Середній час чекання для цих клієнтів дорівнює 49/10; середній час чекання для всіх клієнтів дорівнює 49/15.

Можна обчислити також загальний час простою каналу. Канал простоює, чекаючи клієнта А, якщо проміжок часу від моменту прибуття попереднього клієнта до моменту прибуття клієнта А перевищує час чекання й час обслуговування попереднього клієнта. Таким чином, загальний час простою дорівнює сумі позитивних різниць між проміжком часу від моменту прибуття попереднього клієнта до моменту прибуття даного клієнта й проміжком, що дорівнює часу чекання плюс час обслуговування попереднього клієнта. Частка часу, протягом якого канал простоює, дорівнює відношенню останньої величини до загального часу роботи.

Якби вибірка була досить велика, то, підрахувавши число випадків, коли чекає один клієнт, група із двох клієнтів і т.д., можна було б одержати ймовірність того, чого чекає один клієнт, два клієнти й т.д., тобто одержати ймовірність появи таких груп. Яку ж користь можна витягти із цих ймовірностей?

Другою важливою величиною є ймовірність того, чого в довільний момент часу чекає дане число клієнтів. Наприклад, четвертий клієнт чекає разом із третім протягом одиниць часу, а потім залишається й чекає протягом одиниці часу разом із п'ятим клієнтом. Утворилося дві групи, що чекають, по два клієнти у кожній.

Можна побудувати діаграму, що складається з горизонтальних паралельних відрізків. Кожен відрізок пов'язаний з певним клієнтом, а його довжина відповідає тривалості чекання даним клієнтом. Зверху проводять базисну лінію, на якій відкладають поточний час. Кожен відрізок має починатися в момент прибуття клієнта й закінчуватися в момент початку обслуговування. Таким чином, можна визначити число клієнтів, що чекають, і тривалість їхнього чекання. Наприклад, відрізок, що відповідає другому клієнтові, простягнеться від другої до п'ятої одиниці часу, а відрізок, що відповідає третьому клієнтові, – від шостої до дванадцятої одиниці. Ці два відрізки не перетинаються. Однак відрізок, що відповідає четвертому клієнтові, простягнеться від одинадцятої до тринадцятої одиниці часу й перетнеться на одиницю часу з відрізком, що відповідає попередньому клієнтові. Він перетинається також і з відрізком, що відповідає наступному клієнтові. Ймовірність того, що в деякий момент часу чекає група із двох клієнтів, дорівнює відношенню загальної тривалості чекання групами із двох клієнтів до всього часу.

При повторенні експерименту для нових даних виникне нова ситуація. При достатньому числі повторень для практичного випадку можна оцінити ймовірність того, чого в даний момент часу чекає дане число клієнтів. Ця ймовірність відрізняється від попередньої, котра обчислюється для будь-якого моменту часу. Вона являє собою підрахунок частоти випадків, коли в даний момент часу чекає один клієнт, група із двох клієнтів і т.д.

Становлять інтерес три види характеристик числа клієнтів, що чекають:

1) групи клієнтів, що чекають спільно;
2) групи клієнтів, що чекають, у будь-який момент часу;
3) групи клієнтів, що чекають, у даний момент часу.

Зауважимо, що з погляду перевантажень система масового обслуговування має вивчатися з урахуванням того періоду часу, в який потрібна дана дія. Наприклад, перевантаження ресторанів відбувається опівдні й увечері. Іноді доцільно розглядати обидва ці перевантаження внаслідок різної інтенсивності потоків і різного коливання їх у кожний із цих періодів. Якщо перевантаження не залежить від часу доби, тобто є однорідне в часі, то справа простіша. Необхідно з обережністю підходити до вивчення й поділу періодів, у які відбувається перевантаження при даній операції.

Отже, за допомогою отриманих вище даних можна знайти інтенсивність вхідного потоку й інтенсивність обслуговування. Якби дані були значно більшими, то можна було б одержати як розподіл тривалості проміжків часу між моментами прибуття клієнтів, так і розподіл тривалості обслуговування.

Система масового обслуговування включає в себе чотири основних елементи: вхідний потік, черга, обслуговуючий пристрій і вихідний потік. З кожним із них пов'язаний ряд можливих допущень щодо проходження процесів обслуговування. Деякі із цих допущень, як указується в історичному огляді (розд. 1.6), були предметом спеціального дослідження, інші – призводять до ще невирішених задач обслуговування і потребують дослідження. Дамо загальний опис різних варіантів систем масового обслуговування при деякому повторенні понять, наведених у попередньому розділі.

1. Види розподілу вхідного потоку й часу обслуговування

У початковий момент у системі може перебувати деяке число вимог, що чекають. Наступна вимога надходить через випадковий час, що має певну щільність імовірності. Випадкові також і тривалості проміжків між моментами надходження послідовних вимог. Ці проміжки в багатьох випадках можна вважати взаємно незалежними.

Однак, наприклад, у випадку потоку транспорту, що проїжджає перехрестя, вони є залежними. Схожі зауваження відносяться також до моментів надходження на обслуговування й до його тривалості.

2. Початкове число вимог і вхідний потік

Число вимог, що перебувають у системі до початку обслуговування, може бути задано деяким законом розподілу, який для кожної операції різний (наприклад, у той чи інший день). У систему масового обслуговування вимоги можуть надходити зі скінченної або нескінченної сукупності, що може складатися з різних категорій вимог. Вимоги кожної з категорій можуть надходити з різним розподілом, поодинці або в складі групи, і посідати місце в черзі у встановленому порядку. Розподіл вхідного потоку може залежати від розподілу вихідного потоку, наприклад, у лікарню пацієнтів приймають за наявності ліжок, що звільнилися.

3. Поведінка клієнта

Відмова клієнта ставати в чергу

Поведінка клієнта може змінюватися. Клієнти, що прибувають, можуть не ставати в чергу внаслідок розмірів черги або просто тому, що вони взагалі не можуть чекати. Ці клієнти для системи втрачаються. Іноді втрата вимоги відбувається тому, що чекання не має сенсу, як у випадку зайнятої телефонної лінії. Можна також перенести цей виклик, відклавши його до того часу, коли лінія буде вільною.

Клієнти можуть чекати обслуговування в одній або декількох чергах, як у банках або магазинах самообслуговування. Клієнт може приєднатися до найближчої черги, незалежно від її довжини. Якщо прибуття клієнтів чекається через однакові проміжки часу, вони можуть надходити пізніше або раніше відповідно до певного розподілу відхилень щодо заданого моменту надходження як математичного сподівання.

Вплив неповної інформації

У багатьох задачах може знадобитися прийняти рішення, до якої з декількох черг системи приєднатися, якщо в цей момент часу є інформація тільки про деякі з них (випадок неповної інформації). При перевантаженні вуличного руху відсутність відомостей про те, якою дорогою краще проїхати, не перевіряючи всі, – також випадок «неповної інформації».

Пристосування клієнта до умов черги

За досвідом пасажир може знати, коли (пізніше чи раніше) йому потрібно виїжджати, щоб уникнути простоювання в черзі. Такі заходи можуть послабити перевантаження. Наприклад, можна спостерігати, як пароплави, що наближаються до Суецького каналу, сповільнюють хід доти, доки черга в Порт-Саїді скоротиться до прийнятних розмірів. Перед закриттям обслуговуючого каналу клієнти можуть приєднатися до довшої черги, побоюючись, що обслуговування в короткій черзі може зненацька припинитися, – це відомо з досвіду. Існують ситуації, коли клієнт, що прибув раніше іншого, має бути обслужений раніше. Спостерігаються випадки, коли кожен обслуговуючий пристрій має свою власну чергу, як, наприклад, вікно продажу марок, вікно поштових переказів або вікно рекомендованих листів на поштамті.

Угода між клієнтами

Клієнти можуть переходити з однієї черги в іншу, відходити із черги до початку обслуговування. Клієнти можуть домовитися про те, що тільки один із них буде чекати в черзі, а інші в цей час будуть вільні й можуть зайнятися іншими справами. У деяких випадках може бути організовано почергове чекання. Клієнти можуть переходити з однієї черги в іншу, як у банку. Клієнт може втратити терпіння й піти із черги.

4. Варіанти систем і каналів масового обслуговування

Повна й обмежена доступності

Обслуговуючі канали можуть бути доступні будь-якій вимозі, що чекає в системі (повністю доступна система) або можуть бути доступні тільки деяким із них. Інші вимоги затримуються й змушені чекати доти, доки канал, що робить необхідне обслуговування, не стане доступним.

Ідея повних доступностей пов'язана з метою економії допущення усіх можливих сполучень. Це особливо важливо для викликів при далекому зв'язку, коли вони мають проходити через кілька комутаторів.

Порядок обслуговування, або дисципліна черги

Вибір із черги на обслуговування й розподіл клієнтів по каналах може реалізовуватися в порядку прибуття або випадковим чином. За клієнтом може бути закріплений пріоритет (при цьому можуть допускатися помилки, коли спочатку незрозуміло, який пріоритет закріплювати) або призначення пріоритетів може змінюватися з часом. При надходженні в систему вимог із більшим пріоритетом обслуговування інших вимог може перериватися або бути завершено. Вибір клієнтів на обслуговування може відбуватися за принципом «прибув останнім – обслужений першим». Будемо мати на увазі, що коли звільняється канал, вимога, що чекає, негайно, без втрати часу, надходить на обслуговування.

Об'єднання черг

Існують різні способи об'єднання черг. При цьому досягається деяке скорочення середнього часу чекання, особливо, коли є великий інтервал часу обслуговування пристрою, перед яким утворилася окрема черга.

Обслуговуючі пристрої з послідовними й паралельними каналами Обслуговуючий пристрій може складатися з декількох паралельних каналів, при цьому деякі з них можуть з'єднуватися послідовно з іншими каналами або ж кілька паралельних каналів можуть вести до одного або декількох послідовних каналів. У системі з послідовними каналами черга може дозволятися перед кожним каналом або тільки перед деякими з них. У магазині самообслуговування клієнт обслуговує себе відразу ж після прибуття. Таким чином, число каналів обслуговування змінюється залежно від числа клієнтів (хоча число касових апаратів залишається незмінним). Всі клієнти потрапляють в чергу до кас для повторного обслуговування. При обслуговуванні різних категорій клієнтів канал може мати різний розподіл часу обслуговування. Коли черга відсутня, вільні обслуговуючі пристрої можуть виконувати інші задачі; наприклад, при ремонті верстатів у цьому випадку виконуються додаткові роботи. Часто це залежить від необхідного обсягу обслуговування, пропускної здатності обслуговуючого пристрою й розміру черги. Сам канал обслуговування може переміщатися, наприклад, стрічка конвеєра із пристроєм, що обробляє деталі, встановлені на ній.

Спеціалізовані обслуговуючі канали

Деякі обслуговуючі канали можуть бути спеціалізованими, в той час як інші залишаються загальними, як це має місце, наприклад, при обслуговуванні пасажирів в аеропорту, де в деяких віконцях обслуговують тільки тих пасажирів, чий час відльоту перебуває в заданому інтервалі. Потреба прибулого клієнта в спеціальному обслуговуванні може змінюватися залежно від тривалості проміжку між моментом його прибуття й моментом відправлення літака. Паралельні канали можуть поєднуватися для виконання декількох видів обслуговування. Клієнти можуть повертатися в чергу для додаткового обслуговування, створюючи цикл.

Взаємодія черг

Дві черги можуть впливати одна на одну, як це спостерігається в тому випадку, коли один вузький проїзд на частині шосе має використовуватися автомобілями, що рухаються в обох напрямках. На одній із сторін проїзду транспорт чекає, щоб пропустити автомобіль, який рухається назустріч. Якщо ж перш, ніж цей автомобіль проїде, з тієї ж сторони підійдуть інші автомобілі, то й вони також будуть пропущені, досить імовірно, групами.

5. Вихідний потік

Вихідний потік також може відігравати важливу роль, особливо коли він сам створює вхідний потік для іншої черги, послідовно з'єднаної з першою. Розподіл вхідного потоку й розподіл часу обслуговування можуть залежати один від одного. Наприклад, така залежність існує, коли обслуговування впливає на надходження вимог, і навпаки. Так, якщо кілька конкуруючих підприємств однакового характеру розглядати як ряд паралельних каналів, то більше клієнтів буде там, де відбувається більш швидке обслуговування.

Згодом багато із цих положень будуть досліджені.

На рис. 4.1 у короткій формі показано багато з наведених вище понять. Зроблено спробу показати можливі фактори, що роблять вплив на вхідний потік, час надходження вимог і т.д.; зображені різні дисципліни і особливості черг, канали обслуговування й вихідний потік. Як процес, протилежний обслуговуванню, вказується руйнування черги, оскільки не завжди операція обслуговування буде проходити добре.

Рис. 4.1. Варіанти систем масового обслуговування

Рис. 4.1. Закінчення

4.2. Класифікація систем масового обслуговування

Задачі масового обслуговування умовно ділять на дві: аналіз й синтез (оптимізація СМО). Задача аналізу припускає оцінку ефективності функціонування СМО при незмінних, попередньо заданих характеристиках системи:

1) структура системи;
2) дисципліна обслуговування;
3) потоки вимог;
4) закон розподілу часу обслуговування.

Задача синтезу спрямована на пошук оптимальних параметрів СМО. У загальному вигляді СМО можна уявити як сукупність послідовно пов'язаних між собою вхідних і вихідних потоків вимог на обслуговування, (рис. 4.2).

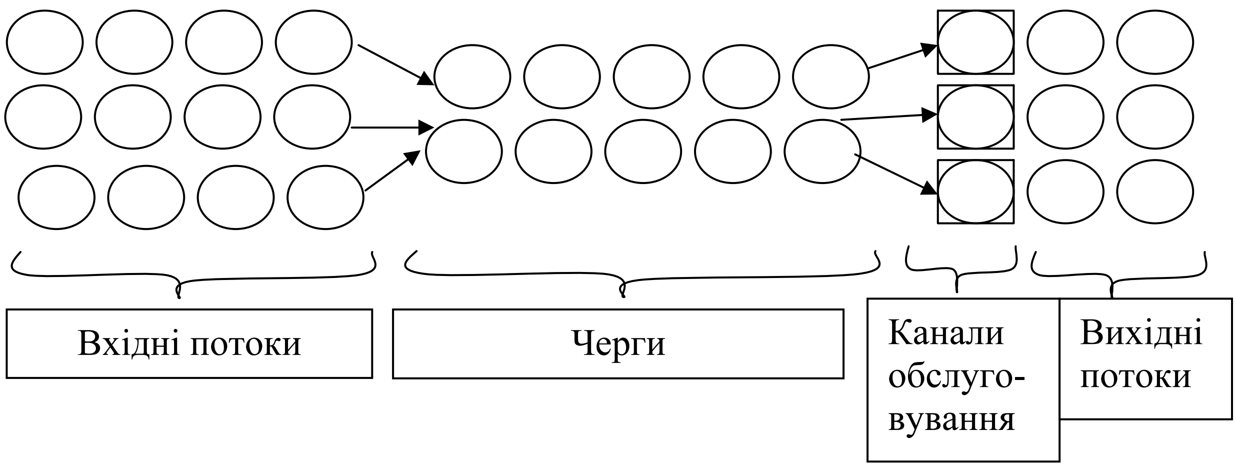

Рис. 4.2. Загальний вигляд системи масового обслуговування

Випадковий характер вхідного потоку вимог (машин, літаків, користувачів і т.д.), а також тривалості обслуговування каналом (станція технічного обслуговування, аеродром, ЕОМ і т.д.) приводять до утворення випадкового процесу в системі, який необхідно досліджувати [25].

Системи масового обслуговування можна розділити за такими критеріями:

1. *Характер вимог до систем із регулярним і випадковим потоками надходження в систему*

Випадковий потік вимог у систему розділяють на стаціонарний і нестаціонарний, ординарний та неординарний, без післядії та з післядією вимог (див. підрозд. 2.1).

2. Характер поведінки вимог у системі з відмовами, обмеженим чеканням й чеканням без обмеження:

а) якщо вимога, що надійшла на обслуговування, застає всі канали обслуговування зайнятими й внаслідок цього залишає систему, то маємо систему з відмовою. Заявка може покинути систему в тому випадку, коли черга досягла певних розмірів. Якщо, наприклад, на станції технічного обслуговування багато автомашин, то доцільно покинути станцію. Якщо при посадці літака смуга приземлення зайнята, він залишає аеродром;

б) якщо вимога, що надійшла, застає всі канали обслуговування зайнятими й стає в чергу, але перебуває в ній обмежений час, після чого, не дочекавшись обслуговування, залишає систему, то маємо систему з обмеженим чеканням. Прикладом «нетерплячої вимоги» може бути автосамосвал із розчином. Якщо час чекання великий, то, щоб уникнути затвердіння розчину, він може бути завантажений на іншому будівництві;

в) якщо вимога, що надійшла, заставши всі канали обслуговування зайнятими, змушена чекати своєї черги доти, доки вона не буде обслужена, то це система з чеканням без обмеження. Наприклад, літак перебуває на аеродромі доти, доки не звільниться злітна смуга.

3. *Спосіб вибору вимог (дисципліна обслуговування): обслуговування із пріоритетом, у міру надходження, випадково, останній обслуговується першим:*

а) якщо СМО охоплює кілька категорій вимог і необхідно дотримуватися різного підходу до їхнього відбору, то маємо систему із пріоритетом. Так, при надходженні виробів в першу чергу монтують ті, які необхідні в даний момент часу;

б) якщо канал, що звільнився, обслуговує вимогу, яка раніше інших надійшла в систему, то маємо систему з обслуговуванням вимог у міру їхнього надходження. Це найпоширеніший клас систем. Наприклад, покупець, що підійшов першим до продавця, обслуговується першим. Цей спосіб вибору вимоги на обслуговування застосовують там, де в силу технічних, технологічних або організаційних причин вимоги не можуть випереджати одна одну;

в) якщо вимоги із черги надходять у канал обслуговування у випадковому порядку, то маємо систему з випадковим вибором вимог на обслуговування. Наприклад, вибір слюсарем-сантехником однієї з декількох заявок, що надійшли від мешканців на усунення деяких несправностей (за умови, що заявки на ту саму несправність). Вибір, як правило, визначається місцем розташування самого робітника: він вибирає заявку, найбільш близьку до нього, якщо ніякі інші фактори не визначають іншого вибору;

г) останній обслуговується першим. Цей спосіб вибору вимог на обслуговування використовують у тих випадках, коли зручніше або ощадливіше брати на обслуговування вимогу, яка пізніше всіх надійшла в систему. Так, при укладанні будівельних матеріалів у штабель зручніше брати зі штабеля (черги) виріб, що надійшов останнім.

4. *Характер обслуговування вимог у системах із детермінованим і випадковим часом обслуговування*

Якщо інтервал часу між моментом надходження вимоги в канал обслуговування й виходу її постійний, то маємо систему з детермінованим часом обслуговування, у противному разі – з випадковим.

5.*Число каналів обслуговування в одноканальній й багатоканальній системах*

Наприклад, при монтажі будинку може бути використано один підіймальний кран (канал обслуговування) або більше для обслуговування виробів, що прибувають на будівництво.

6. *Кількість етапів обслуговування в одно- і багатофазних системах*

Якщо канали обслуговування розташовані послідовно для виконання різних операцій, то маємо багатофазну систему масового обслуговування. Прикладом двофазної СМО може бути обслуговування автомобілів на станції технічного обслуговування (мийка, діагностування й т.д.).

7. *Однорідність вимог, що надходять на обслуговування, в системах з однорідними і неоднорідними потоками вимог*

Наприклад, якщо прибувають автомобілі однієї вантажопідйомності, то такі вимоги називаються однорідними, якщо різної вантажопідйомності – неоднорідними.

8. *Обмеженість потоку вимог у замкнутих й розімкнутих системах*

Якщо потік вимог обмежений і вимоги, що залишили систему, можуть до неї повертатися, то система замкнута, у противному разі – розімкнута. Прикладом замкнутої системи може служити система «ЕОМ – користувач», у якій користувач, як правило, прикріплюється до ЕОМ й обслуговується протягом певного часу. Якщо задані вхідні потоки вимог, механізм (число каналів обслуговування, тривалість обслуговування й т.д.) і дисципліна обслуговування, то можна побудувати математичну модель системи [40].

У задачах СМО як основні показники функціонування системи можуть бути використані:

1) імовірність простою каналу обслуговування – P_0;
2) імовірність того, що в системі перебувають n вимог, – P_n;
3) середнє число вимог, що перебувають у системі (сфері обслуговування):

$$N_{сист} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n ;$$

4) середнє число вимог, що перебувають у черзі:

$$N_{чек} = \sum_{n=N}^{\infty} (n - N_k) P_n ,$$

де N_k – число каналів обслуговування;

5) середній час чекання вимог у черзі – $T_{чек}$:

для розімкнутої системи

$$Т_{чек} = N_{чек} / \lambda ,$$

де λ – інтенсивність надходження потоку вимог у систему;
для замкнутої системи

$$Т_{чек} = N_{чек} / \lambda(m - N_{чек}) ,$$

де m – число вимог, потрібних для обслуговування;

6) середній час чекання вимог у системі $T_{сист}$;

7) середнє число каналів обслуговування:

$$N_{ск} = \sum_{n=0}^{N_{k-1}} (N_k - n)P_n \,;$$

8) середнє число зайнятих каналів обслуговування:

$$N_{зк} = \sum_{n=1}^{N_k} nP_n \,.$$

4.3. Задачі аналізу одноканальних систем масового обслуговування

Розглянемо найпоширенішу класифікацію СМО:

а) детермінована одноканальна;

б) одноканальна розімкнута з чеканням і найпростішим потоком надходження вимог у систему;

в) одноканальна замкнута (потік вимог пуассонівський) із чеканням.

Наведені системи можуть бути досліджені аналітичними методами, побудованими на основі процесу функціонування системи з безперервним часом і дискретними станами [25].

Аналіз одноканальної детермінованої системи $D \,|\, D \,|\, 1 \,|\! \le \infty \,|\, Fifo$

Постановка задачі

Нехай досліджується виробничий процес, у якому надходження вимог і обслуговування їх відбуваються через однакові проміжки часу $\Delta t_{\text{п}} = const$ (інтенсивність потоку надходжень вимог $\lambda = 1/\Delta t_n = const$), $\Delta t_{об} = const$ (тобто інтенсивність обслуговування $\mu = 1/t_{об} = const$). Існує один канал обслуговування. Передбачається, що в системі є вже n вимог та $\Delta t_{об} / \Delta t_n = \lambda / \mu < 1$ (у противному разі черга буде нескінченно зростати). Визначимо час, через який черга зникне.

Виявлення основних особливостей, взаємозв'язків і кількісних закономірностей

Величину $\psi = \lambda / \mu$ називають коефіцієнтом використання. Черга буде нескінченно зростати, якщо $\psi > 1$. При $\psi = 1$ черга буде мати постійну довжину. Схематично робота розглянутої системи масового обслуговування показана на рис. 4.3.

Поки обслуговується черга з n вимогами протягом часу $t = n\Delta t_{об}$, на обслуговування знову надійдуть n_1 вимог:

$$n_1 = t / \Delta t_n = n\Delta t_{об} / \Delta t_n = n\lambda / \mu = n\psi \,.$$

Аналогічно, поки будуть обслуговуватися n_1 вимог протягом $t_1 = n_1 \Delta t_{об}$, додатково надійдуть на обслуговування n_2 вимог:

$$n_2 = t_1 / \Delta t_n = n_1 \Delta t_{об} / \Delta t_n = n_1 \lambda / \mu = n \psi^2 .$$

Це відбуватиметься доти, доки $n_1 = t_1 + \Delta t_{об}$, після чого черга зникне.

Подамо процес функціонування системи масового обслуговування в аналітичному вигляді.

Побудова математичної моделі

Час, через який черга зникне, можна навести у вигляді

$$T = t + t_1 + ... + t_k = \sum_{i=1}^{k} t_i .$$

Дослідження математичної моделі

Для визначення часу, через який черга зникне, необхідно проаналізувати математичну модель

$$T = n\Delta t_{об} + n_1 \Delta t_{об} + ... + n_k \Delta t_{об} = \Delta t_{об}(n + n_1 + ... + n_k) =$$
$$= \frac{1}{\mu}(n + n\psi + ... + n\psi^k) = \frac{n}{\mu}(1 + \psi + \psi^2 + ... + \psi^k) =$$
$$= \frac{n(1-\psi^{k+1})}{\mu(1-\psi)} .$$

У моделі використано формулу суми геометричної прогресії: чим ближче інтенсивність потоку λ до інтенсивності обслуговування μ, тим через більший проміжок часу зникне черга (при $\lambda / \mu < 1$).

Членом ψ^{k+1} можна для спрощення розрахунків знехтувати. Тоді

$$T \approx m(\mu - \lambda) .$$

4.4. Моделі логістичних детермінованих систем

Почнемо з розгляду простої моделі масового обслуговування. Приймемо, що надходження вимог у систему відбувається у фіксовані моменти часу, а час обслуговування постійний. У цьому випадку виявляється можливим простежити за процесом зміни черги. Така задача є детермінованою й може бути вирішена наведеним нижче способом. Нашою задачею буде визначення числа вимог і загальний час чекання [47, 49].

Якщо вимоги надходять в одноканальну систему через однакові проміжки часу (тобто інтенсивність надходження вимог дорівнює 1/*a*) і обслуговування займає рівні проміжки часу *b* (тобто інтенсивність обслуговування дорівнює 1/*b*), то при *b* < *a* або *b/a* < 1 черга буде поступово зменшуватися.

Якщо *b/a* > 1, то число вимог, що чекають, буде необмежено зростати. При *b* = *a* вимоги чекати не будуть, якщо процес обслуговування почався за відсутності черги. У противному разі буде черга постійної довжини.

Припустимо, що *b/a* < 1 і в системі перебуває *i* вимог ($i \ge 2$, оскільки при *i* = 1 дана вимога буде обслужена раніше, ніж надійде нова, і черги не буде). Всі *i* вимог будуть обслужені до кінця інтервалу тривалістю *ib*. За цей час надійдуть ще [*ib/a*] вимог, які будуть чекати. Квадратні дужки означають, що береться найбільш ціле число, що не перебільшує *ib/a*, тому що вимоги не можуть надходити в проміжні моменти часу. Вимога, що надійшла останньою, буде чекати, поки обслуговуючий пристрій звільниться.

Час обслуговування цих [*ib/a*] вимог дорівнює *b*[ib/a], за цей час надійдуть ще [*b*[*ib/a*]/*a*]+1 вимог. Помітимо, що це число менше [*ib/a*], оскільки $b<a$. Так відбувається до того моменту, коли, поступаючи, вимоги вже не будуть чекати.

Пояснимо це на прикладі. Припустимо, що тривалість обслуговування *b* дорівнює одній часовій одиниці, а тривалість інтервалу *a* між послідовними вимогами дорівнює трьом часовим одиницям. Нехай i = 50. Тоді час обслуговування вимог, що чекають, дорівнюватиме 50 одиницям. У цей інтервал надійде ще 16 часових одиниць. За цей інтервал надійде ще шість вимог, а за час обслуговування – ще дві. У момент закінчення обслуговування надійде ще одна, але вона вже не буде чекати.

Якщо позначити через $P_n(t)$ імовірність того, що в момент t у системі перебуває рівно n вимог, то

$$P_n(0)=\begin{cases}1, \mathrm{n}=1,\\ 0, \ \mathrm{n}\neq 1.\end{cases}$$

Ці можливі значення можна виразити символом Кронекера $P_n(0)=\delta$. Його значення дорівнює одиниці при $n = i$ і дорівнює нулю при $n \neq i$. У цьому випадку число вимог можна визначити однозначно. Всі величини визначають точно. Отже, для будь-якого моменту часу ймовірність $P_n(t)$ дорівнює нулю або одиниці. Цього не буде у випадку недетермінованих систем, розглянутих у наступних розділах навчального посібника.

Очевидно, що через проміжок часу, протягом якого всі вимоги, що чекають, будуть обслужені, черга зникне. Нехай у черзі чекають A вимог. Тоді (A+1) – вимога, що надійде в систему через проміжок часу, необхідний для обслуговування i+A вимог, тобто $(i+A)b \le a(A+1)$ або $ib-a \le A(a-b)$. Але $A=\left[\dfrac{ib-a}{a-b}\right]+1$, тому час, необхідний для обслуговування всіх вимог, що чекають:

$$b\left(i+\left[\frac{ib-a}{a-b}\right]+1\right)=b\left[\frac{ib-a}{a-b}\right].$$

У цьому випадку входить перше з i початкових вимог. Помітимо, що процес починається з надходження на обслуговування однієї із заявок, що чекала. Якщо за час її обслуговування нові вимоги не надійшли, то на обслуговування допускається наступна. Якщо ж під час обслуговування цієї або наступної початкової заявки надходить нова, то вона обслуговується відразу ж, як тільки звільняється обслуговуючий пристрій. Можливо, що під час обслуговування цієї вимоги надійде ще одна. Це залежить від величини різниці *a-b*.

Заявка, що надходить знову, направляється на обслуговування, як тільки система звільняється. Якщо нові вимоги не допускаються, то обслуговується чергова з i початкових вимог. Знову заявка, що надходить, як і раніше, обслуговується відразу ж, як тільки система звільняється. Так триває доти, доки не будуть обслужені всі i вимоги. Як тільки на обслуговування надходить остання з i початкових вимог, черга зникає. Якщо ж під час обслуговування цієї вимоги надійде нова, то вона чекає, а потім надходить на обслуговування. Так відбувається доти, доки заявкам, що надходять, уже не потрібно буде чекати.

Ми розглянули процес обслуговування в такому докладному вигляді для того, щоб краще усвідомити наступний аналіз. Розглянемо збільшення часу обслуговування, який можна одержати внаслідок того, що $a>b$. Так, для кожної нової вимоги маємо резерв a-b часових одиниць. Якщо час обслуговування дорівнює b, то теоретично для кожної з i-1 початкових вимог потрібно додати $\frac{b}{a-b}$ вимог, щоб повністю компенсувати час незайнятості системи. Помітимо, що перша вимога вже надійшла в систему. Таким чином, усього повинно надійти $(i-1)\frac{b}{a-b}$ вимог, щоб канал звільнився.

Отже, загальне число вимог, які будуть чекати в черзі після початку обслуговування:

$$i-1+\frac{(i-1)b}{a-b}=\frac{(i-1)a}{a-b} \ ,$$

якщо включити першу початкову вимогу, то одержимо

$$\frac{(i-1)a}{a-b}+1=\frac{ia-b}{a-b} \ .$$

Звідси знайдемо загальний час до моменту першого звільнення обслуговуючого пристрою:

$$T=\left(\frac{ia-b}{a-b}\right)b\,. \tag{4.1}$$

Якщо вимога надходить у момент $t<T$, то до нього вже надійшло t/a вимог, і загальне число вимог, які чекають обслуговування, дорівнює $t/a+i-1$. За час t буде оброблено t/a вимог. (Помітимо, що без втрати спільності можна вживати позначення t як для безперервного часу, так і в тому випадку, якщо час надходження вимоги t кратний a).

Отже, до моменту t надходження даної вимоги в черзі буде перебувати

$$\frac{t}{a}+(i-1)-\frac{t}{b}=t\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+(i-1) \quad \text{вимог.} \tag{4.2}$$

Помітимо, що якщо $b>a$, то число вимог буде збільшуватися пропорційно t. У системі буде t $(1/a\text{-}1/b)+i$ вимог перед даною.

Для вимоги, що надходить у момент $t+a$, час чекання

$$W(t)=\begin{cases} 0,\ \mathrm{T}\le \mathrm{t}, \\ \left(t\,\dfrac{\mathrm{b-a}}{\mathrm{ab}}+i\right)b,\ \ 0<t\le T, \\ (k-1)b,\ \mathrm{t}=0, \end{cases} \tag{4.3}$$

де $W(0)$ – час перебування в черзі k-го з i початкових вимог.

Таке нестаціонарне рішення залежить від часу й початкового числа вимог. Стаціонарний стан досягається після моменту T, тому що надалі він вже не залежить від часу й початкового числа вимог i.

Для вимоги, що надходить у момент $t+a$, загальний час перебування в системі

$$\begin{cases} b, \mathrm{T} \le \mathrm{t}, \\ \left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{a}} + i - \frac{t}{b}\right) b, \ 0 < t \le T, \\ kb, \mathrm{t} = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Сюди включається й час, витрачений на обслуговування.

Припустимо, що за час T відбулася зміна тривалості обслуговування й тривалості проміжків часу між моментами надходження вимог, а їхні нові значення стали дорівнювати a_1 й b_1. Нехай ця зміна відбувається в момент $t_0 < T$. Обслуговування вимоги, що вже перебуває в обслуговуючому пристрої, буде відбуватися за час b. Потім вимоги, що перебувають у черзі й обслуговують заявку, утворять початковий стан нової черги. Це приведе до нового значення T, який позначимо через T_1, і до зміни виразу для часу чекання. Значення T_1 буде залежати від вибору a_1 й b_1.

Отже, можна одержати T_1<Т. Так, $T_1 = T$ у тому випадку, якщо $a_1 = a$ й $b_1 = b$, що можна показати, проаналізувавши формулу (4.3)

Якщо є c каналів з однаковим часом обслуговування й початкове число вимог $i>c$, то, прийнявши $b/ca<1$, знайдемо, що для звільнення системи буде потрібно збільшення, яке дорівнює $a\text{-}b/c$, і т.д. За вимогами, що надходять у різний час, можна закріпити певні пріоритети й досліджувати цю задачу як для системи з перериванням обслуговування (тобто коли вимога з нижчим пріоритетом повертається в чергу, якщо надходить вимога з вищим пріоритетом), так і для системи без переривання обслуговування. Хоча розглянута задача масового обслуговування досить проста, з її допомогою можна пояснити багато понять. Однак і ця проста задача може виявитися досить складною, у чому легко переконатися, дослідивши систему із двома пріоритетами, що мають різні інтервали між вимогами й різний час обслуговування.

Вправа 1

Як впливатимуть нові вимоги на довжину черги й час чекання, якщо перша вимога надходить у момент $a\text{-}\varepsilon$, друга – $2\mathrm{a}+\varepsilon$, третя – $3\mathrm{a}-\varepsilon$ і т.д. при довільному чергуванні запізнювань і випереджень, де $0 < \varepsilon < a$?

Вправа 2

Нехай $i = 7$, $b = 2$, $a = 4$.

Знайдіть час чекання $W(t)$ і середній час чекання вимоги, вибраної із черги випадковим чином.

Вправа 3

Знайдіть вираз для часу чекання в черзі й часу перебування в системі із двома пріоритетами без переривання обслуговування, якщо проміжки часу між моментами надходження вимог із вищим і нижчим пріоритетами дорівнюють a_1 й a_2 відповідно, а час обслуговування однаковий й дорівнює

b (вважається, що $b/a_1 + b/a_2 < 1$ й $a_1 < a_2$). У момент $t = 0$ у системі перебувають i_1 вимог з вищим і i_2 вимог із нижчим пріоритетами.

Вправа 4

Складіть алгоритм розрахунку ЛС із двох і більше ЛЛС із однаковими параметрами a й b.

Вправа 5

Складіть алгоритм розрахунку ЛС із двох і більше ЛЛС із різними a_i й b_i для відповідних ЛЛС ($i = \overline{1,n}$, n - число ЛЛС у ЛС).

Вправа 6

Складіть алгоритм розрахунку ЛС із 1, 2 і більше ЛЛС із паралельними каналами (так, що $b_{ij} = const,\ \ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n_i}$, n_i – число каналів в i-му ЛЛС).

Вправа 7

Те ж, що і вправа 6, але з різними каналами в кожному ЛЛС ($b_{ij} \neq const$).

Вправа 8

Те ж, що й у вправі 7, але в кожному ЛЛС є потік вимог з інтенсивністю $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots$, де $\frac{1}{a_i}$ – інтенсивність сумарного потоку.

4.5. Задача аналізу одноканальної розімкнутої системи з чеканням (потоки вимог – пуассонівські)

Постановка задачі

Нехай задана система масового обслуговування, для якої справедливі такі гіпотези:

1) імовірність надходження вимог залежить не від прийнятого інтервалу відліку часу, а тільки від тривалості періоду спостережень (стаціонарність потоку);

2) дві або більше вимоги в систему не надходять і не залишають її одночасно (потік ординарний);

3) надходження однієї вимоги не залежить від надходження іншої (відсутність післядії).

Відомі також інтенсивність λ надходження потоку вимог в одиницю часу $1/t_n$ та інтенсивність обслуговування вимог (середнє число обслуговувань в одиницю часу $1/t_{об}$) [3].

Необхідно визначити основні характеристики системи:

а) імовірність простою каналу обслуговування P_0;

б) імовірність того, що в системі перебуває n вимог, P_n;

в) імовірність того, що в системі n вимог (у черзі й обслуговуванні) $N_{сист}$;

г) середнє число вимог $N_{чек}$, що перебувають у черзі ;

д) середній час чекання вимог у системі $T_{сист}$.

Виявлення основних особливостей, взаємозв'язків і кількісних закономірностей

Потік вимог, що має властивість стаціонарності, ординарності й відсутності післядії, називають найпростішим. Основним поняттям при аналізі систем масового обслуговування є стан системи. Знаючи стан системи, можна передбачити її поведінку в імовірнісному сенсі.

Найпростіший потік – це стаціонарний пуассонівський потік. Якщо всі потоки подій, що переводять систему з одного стану в інший, є пуассонівськими, то для цих систем імовірності стану описують за допомогою системи звичайних диференціальних рівнянь [23].

У більшості задач прикладного характеру заміна непуассонівських потоків подій пуассонівськими з тими ж інтенсивностями приводить до одержання рішення, яке мало відрізняється від реального, а іноді й зовсім не відрізняється. Як критерій невеликої відмінності реального стаціонарного потоку від пуассонівського можна прийняти близькість математичного сподівання й дисперсії числа подій, що надходять на певній ділянці часу в реальному потоці.

Існує певний методичний спосіб, що набагато полегшує складання диференціальних рівнянь для ймовірнісних станів. Спочатку будують розмічений граф станів із вказівкою можливих переходів, що полегшує дослідження й робить його більш наочним. Граф станів, на якому проставлені не тільки стрілки переходів, але й інтенсивність відповідних потоків подій, називають розміченим.

Побудова математичної моделі

Відповідно до розміченого графа станів (рис. 4.3) на основі мнемонічного правила (див. підрозд. 3.3) система звичайних диференціальних рівнянь ймовірностей станів матиме вигляд [25]

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -P_0(t)\lambda + P_1(t)\mu, \\ \dfrac{dP_n}{dt}(t) = P_{n-1}(t)\lambda - (\lambda+\mu)P_n(t) + P_{n+1}(t)\mu. \end{cases}$$

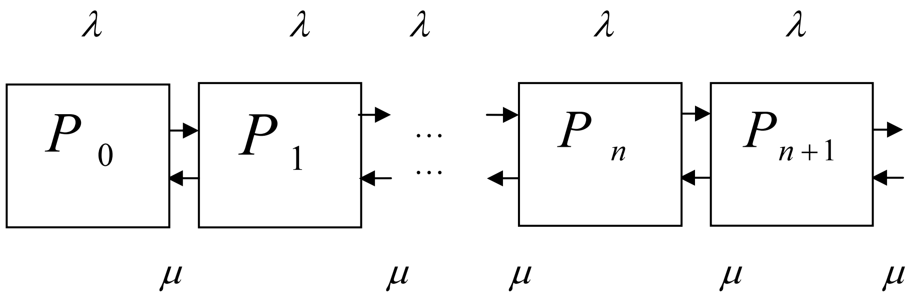

Рис. 4.3. Граф станів одноканальної розімкнутої системи з чеканням

Дослідження математичної моделі

Обмежимося дослідженням сталого режиму роботи розімкнутої одноканальної системи. Тоді

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0 \;\; (n = 0, 1, ...).$$

Замість системи звичайних диференціальних рівнянь одержимо систему алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} -P_0\lambda + P_1\mu = 0, \\ P_0\lambda - (\lambda+\mu)P_1 + P_2\mu = 0, \\ P_{n-1}\lambda - (\lambda+\mu)P_n + P_{n+1}\mu = 0. \end{cases}$$

За допомогою цієї системи легко виразити ймовірності системи у вигляді деякої рекурентної формули.

З першого рівняння визначимо ймовірність наявності однієї вимоги в системі:

$$P_1 = P_0\lambda / \mu = \psi P_0,$$

з другого – ймовірність наявності двох вимог у системі:

$$P_2 = P_1(\lambda+\mu)/\mu - P_0\lambda/\mu = \psi P_1 + P_1 - \psi P_0 = \psi P_1.$$

Одержимо

$$P_2 = \psi^2 P_0.$$

Аналогічно проведемо перетворення для визначення P_3:

$$\mu P_3 - (\lambda+\mu)P_2 + \lambda P_1 = 0;$$

$$P_3 = \frac{\lambda+\mu}{\mu}P_2 - \frac{\lambda}{\mu}P_1 = \psi P_2 + P_2 - \psi P_1 = \psi P_2.$$

Остаточно одержимо

$$P_3 = \psi^3 P_0 \text{ і т.д.}$$

Підсумовуючи отримані значення для $P_0, P_1, ..., P_n$, знаходимо

$$\sum_{i=0}^{n} P_0 + ... + P_i + ... + P_n = P_n + \psi P_0 + ... + \psi^n P_0.$$

Використовуючи формулу суми геометричної прогресії, одержуємо

$$P_0(1 + \psi + ... + \psi^n) = P_0 \frac{(1+\psi^{n+1})}{(1-\psi)}.$$

При $n \to \infty \; (\psi < 1)$ $\sum_{i=0}^{\infty} P_i = P_0 \dfrac{1}{1-\psi} = 1,$

звідки ймовірність простою каналу обслуговування

$$P_0 = 1 - \psi.$$

Імовірність того, що в системі перебувають n вимог:

$$P_n = \psi^n P_0 = \psi^n (1-\psi).$$

Середнє число вимог, що перебувають у системі (математичне сподівання):

$$N_{сист} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n = \sum_{i=1}^{\infty} n\psi^n (1-\psi) = (1-\psi)\sum_{n=0}^{\infty} n\psi^n =$$

$$= (1-\psi)(\psi + 2\psi^2 + 3\psi^3 + ... + n\psi^n + ...) =$$

$$= \psi(1-\psi)(1 + 2\psi + 3\psi^2 + ... + n\psi^{n-1} + ...).$$

Останній вираз у дужках є похідною від виразу

$$\psi + \psi^2 + ... + \psi^{\mathrm{n}} + ... = \psi(1 + \psi + ... + \psi^{n-1} + ...) = \psi/(1-\psi)(\psi < 1)$$

і дорівнює $1/(1-\psi)^2$.

Остаточно маємо

$$N_{сист} = \psi(1-\psi)/(1-\psi^2) = \psi/(1-\psi).$$

Середнє число вимог, що перебувають у черзі:

$$N_{чек} = (\lambda/\mu)N_{сист} = \psi^2/(1-\psi).$$

Середній час чекання вимог в системі:

$$T_{сист} = N_{сист}/\lambda = (\lambda/\mu)(1/(1-\psi)).$$

4.6. Визначення характеристик одноканальної моделі масового обслуговування з пуассонівським вхідним потоком та експоненціальним часом обслуговування із чеканням

Найпростішою одноканальною моделлю з імовірнісними вхідним потоком і процедурою обслуговування є модель, яка характеризується показовим розподілом тривалості інтервалів між надходженнями вимог і тривалістю обслуговування. При цьому щільність розподілу тривалості інтервалів між надходженнями вимог має вигляд

$$f_1(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, \tag{4.5}$$

де λ – інтенсивність надходження заявок у систему [3].

Щільність розподілу тривалості обслуговування:

$$f_2(t) = \mu \cdot e^{-\lambda t},$$

де μ – інтенсивність обслуговування.

Потоки заявок й обслуговувань найпростіші.

Нехай система працює з відмовами.

Необхідно визначити абсолютну й відносну пропускну здатність системи.

Зобразимо дану систему масового обслуговування у вигляді графа рис. 4.5.

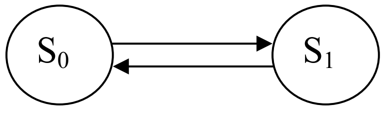

Рис. 4.5. Граф станів одноканальної СМО з відмовами

S_0 – канал вільний (чекання);

S_1 – канал зайнятий (іде обслуговування заявки).

Позначимо ймовірності станів:

$P_0(t)$ – імовірність стану "канал вільний";

$P_1(t)$ – імовірність стану "канал зайнятий".

За розміченим графом станів (рис. 4.5) складемо систему диференціальних рівнянь Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -\mu P_1(t) + \lambda P_0(t). \end{cases} \tag{4.6}$$

Систему лінійних диференціальних рівнянь (4.9) розв’язуємо за допомогою нормувальної умови $P_0(t) + P_1(t) = 1$ Вирішення даної системи називається несталим, оскільки воно безпосередньо залежить від t і має вигляд

$$P_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \tag{4.7}$$

$$P_1(t) = 1 - P_0(t).$$

Неважко переконатися, що для одноканальної СМО з відмовами ймовірністю $P_0(t)$ є не що інше, як одноканальна пропускна здатність системи q.

В момент часу t канал вільний і заявка, що прийшла до моменту t, буде обслужена. Для даного моменту часу t середнє відношення числа обслужених заявок до числа заявок, які надійшли, також дорівнює $P_0(t)$, тобто

$$q = P_0(t). \tag{4.8}$$

Після закінчення інтервалу часу (при $t \to \infty$) досягається стаціонарний (сталий) режим:

$$q = P_0(t) = \frac{\mu}{\mu + \lambda}. \tag{4.9}$$

Знаючи відносну пропускну здатність, легко знайти абсолютну. Абсолютна пропускна здатність А – середнє число заявок, що може обслуговувати система масового обслуговування в одиницю часу:

$$A = \lambda q = \frac{\lambda\mu}{\mu + \lambda}. \tag{4.10}$$

Ймовірність відмови в обслуговуванні заявки буде дорівнювати ймовірності стану "канал зайнятий":

$$P_{відм} = \mathrm{P}_1(t) = 1 - P_0(t) = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \tag{4.11}$$

Величина $P_{відм}$ є середньою частиною необроблених заявок серед поданих [21, 22].

Приклад 4.1

Нехай одноканальна СМО з відмовами являє собою один пост щоденного обслуговування (ПО) для ремонту транспортних засобів (ТЗ). Заявка – ТЗ, що прибув у момент, коли пост зайнятий, одержує відмову в обслуговуванні. Інтенсивність потоку ТЗ – 1,0 (ТЗ у годину). Середня тривалість обслуговування – 1,8 години. Потоки ТЗ і обслуговувань є найпростішими.

Потрібно визначити в стаціонарному режимі граничні значення:

1) відносної пропускної здатності q;
2) абсолютної пропускної здатності A;
3) імовірності відмови $P_{відм}$.

Слід порівняти фактичну пропускну здатність СМО з номінальною, котра була б, якби кожен ТЗ обслуговувався точно 1,8 години й ТЗ підходили б один за одним без перерви.

Розв'язання

1. Визначимо інтенсивність потоку обслуговування

$$\mu = \frac{1}{t_{об}} = \frac{1}{1,8} = 0,555 .$$

Обчислимо відносну пропускну здатність

$$\mathrm{q} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{0.555}{1 + 0.555} = 0.356 .$$

Величина q означає, що в стаціонарному режимі система буде обслуговувати приблизно 35% ТЗ, що прибувають на пост ПО.

3. Імовірність відмови

$$P_{відм} = 1 - \mathrm{q} = 1 - 0.356 = 0.644 .$$

Це означає, що близько 65% ТЗ, які прибули на пост ПО, одержують відмову в обслуговуванні.

4. Визначимо номінальну пропускну здатність системи:

$$A_{ном} = \frac{1}{\mathrm{t}_{\text{обсл}}} = \frac{1}{1,8} = 0,555 \quad \text{(ТЗ в час).}$$

Виявляється, що $A_{ном}$ в 1,5 раза $\left(\frac{0.555}{0.356} \approx 1.5\right)$ більше, ніж фактична пропускна здатність, обчислена з урахуванням випадкового характеру потоку заявок і часу обслуговування.

Розглянемо *одноканальну СМО із чеканням.*

Система масового обслуговування має один канал. Вхідний потік заявок на обслуговування – найпростіший потік з інтенсивністю λ. Інтенсивність потоку обслуговування дорівнює μ. Тривалість обслуговування – випадкова величина, підлегла показовому закону розподілу. Потік обслуговування є найпростішим пуассонівським потоком подій. Заявка, що надійшла в момент, коли канал зайнятий, стає в чергу й чекає обслуговування.

Припустимо, що незалежно від того, скільки вимог надходить на вхід обслуговуючої системи, вона (черга плюс обслуговуючі клієнти) не може вмістити більше N вимог (заявок), тобто клієнти, що не потрапили в чергу, змушені обслуговуватися в іншому місці. Нарешті, джерело, що породжує заявки на обслуговування, має необмежену ємність.

Граф станів СМО в цьому випадку має вигляд, зображений на рис. 4.6.

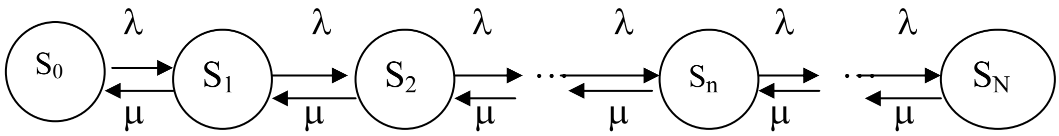

Рис. 4.6. Граф станів одноканальної СМО із чеканням (схема загибелі й розмноження)

Стан СМО має таку інтерпретацію:

S_0 – "канал вільний";

S_1 – "канал зайнятий"(черги немає);

S_2 – "канал зайнятий"(одна заявка перебуває у черзі);

…………………………………......

S_n – "канал зайнятий"(n-1 заявок перебуває у черзі);

…………………………………......

S_N – "канал зайнятий"(N-1 заявок перебуває у черзі).

Стаціонарний процес у даній системі описуватиметься такою системою алгебричних рівнянь:

$$\begin{cases} -\rho P_0 + P_1 = 0,\ n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ -(1-\rho)P_n + P_{n+1} + \rho P_{n-1} = 0,\ 0 < n < N, \\ \dots\dots\dots\dots \\ -P_N + \rho P_{N-1} = 0,\ n = N, \end{cases} \quad (4.12)$$

де $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$;

n – номер стану.

Розв'язок наведеної вище системи рівнянь (4.12) для нашої моделі СМО має вигляд

$$P_n = \begin{cases} \left(\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right)\rho^n,\ \rho \neq 1,\ n = 0,1,2,\dots,N, \\ \dfrac{1}{(N+1)},\ \rho = 1. \end{cases}$$

(4.13)

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}.$$

Тоді $$P_n = \begin{cases} P_0\rho^n, \ \rho \neq 1, \ n = 0,1,2,...,N, \\ \dfrac{1}{(N+1)}, \ \rho = 1. \end{cases}$$

Слід відзначити, що виконання умови стаціонарності $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$ для даної СМО не обов'язково, оскільки число заявок, що допускають в обслуговуючу систему, контролюється шляхом введення обмеження на довжину черги (яка не може перевищувати N-1), а не співвідношенням між інтенсивностями вхідного потоку, тобто не $\dfrac{\lambda}{\mu} = \rho$.

Визначимо характеристики одноканальної СМО із чеканням й обмеженою довжиною черги, яка дорівнює (N-1):

Ймовірність відмови в обслуговуванні заявки:

$$P_{відм} = P_n = \begin{cases} \left(\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right)\rho^N, \ \rho \neq 1, \\ \dfrac{1}{(N+1)}, \ \rho = 1. \end{cases} \tag{4.14}$$

Відносна пропускна здатність системи :

$$q = 1 - P_{відм} = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right)\rho^N, \ \rho \neq 1, \\ 1 - \dfrac{1}{(N+1)}, \ \rho = 1. \end{cases} \tag{4.15}$$

Абсолютна пропускна здатність

$$A = q\lambda. \tag{4.16}$$

Середнє число заявок, що перебувають у системі:

$$L_s = \sum_{n=0}^{N} nP_n = \begin{cases} \dfrac{\rho\left[1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}\right]}{(1-\rho)\left(1-\rho^{N+1}\right)}, \ \rho \neq 1, \\ \dfrac{N}{2}, \ \rho = 1. \end{cases} \tag{4.17}$$

Середній час перебування заявки в системі

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda(1-P_N)}. \tag{4.18}$$

Середня тривалість перебування клієнта (заявки) у черзі

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu}. \tag{4.19}$$

Середнє число заявок (клієнтів) у черзі (довжина черги)

$$\lambda_q = \lambda(1-P_N)W_q. \tag{4.20}$$

Розглянемо приклад одноканальної СМО із чеканням.

Приклад 4.2. Спеціалізований пост діагностики являє собою одноканальну СМО. Число стоянок для ТЗ, що чекають проведення діагностики, обмежене й дорівнює 3[(N-1) = 3]. Якщо всі стоянки зайняті, тобто в черзі вже перебуває три ТЗ, то черговий ТЗ, що прибув для діагностики, у чергу на обслуговування не стає. Потік ТЗ, що прибувають для діагностики, розподілений за законом Пуассона й має інтенсивність λ=0,85 (ТЗ в час). Час діагностики ТЗ розподілений за показовим законом й у середньому дорівнює 1,05 години.

Потрібно визначити ймовірнісні характеристики поста діагностики, що працює в стаціонарному режимі.

1. Параметр потоку обслуговувань ТЗ

$$\mu = \frac{1}{t} = \frac{1}{1{,}05} = 0{,}956.$$

2. Наведену інтенсивність потоку ТЗ визначають як відношення інтенсивності λ і μ, тобто

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}85}{0{,}952} = 0{,}893.$$

3. Обчислимо фінальні ймовірності системи

$$P_0 \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} = \frac{1-0{,}893}{1-0{,}893^5} \approx 0{,}247;$$

$$P_1 = \rho P_0 = 0{,}893 \cdot 0{,}248 \approx 0{,}221;$$

$$P_2 = \rho^2 P_0 = 0{,}893^2 \cdot 0{,}248 \approx 0{,}198;$$

$$P_3 = \rho^3 P_0 = 0{,}893^3 \cdot 0{,}248 \approx 0{,}177;$$

$$P_4 = \rho^4 P_0 = 0{,}893^4 \cdot 0{,}248 \approx 0{,}158.$$

4. Імовірність відмови в обслуговуванні ТЗ

$$P_{відм} = P_4 = \rho^4 P_0 \approx 0{,}158.$$

5. Відносна пропускна здатність поста діагностики

$$q = 1 - P_{відм} = 1 - 0{,}158 = 0{,}842.$$

6. Абсолютна пропускна здатність поста діагностики

$$A = \lambda q = 0.85 \cdot 0.842 = 0.716 \text{ (ТЗ в час).}$$

7. Середнє число ТЗ, що перебувають на обслуговуванні й у черзі (тобто в системі масового обслуговування):

$$L_S = \frac{\rho\left[1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}\right]}{(1-\rho)\left(1-\rho^{N+1}\right)} =$$

$$= \frac{0{,}893\left[1-(4+1)0{,}893^4 + 4 \cdot 0{,}893^5\right]}{(1-0{,}893)\left(1-0{,}893^5\right)} = 1{,}77.$$

8. Середній час перебування ТЗ в системі:

$$\mathrm{W_S} = \frac{L_S}{\lambda(1-P_N)} = \frac{1{,}77}{0{,}85(1-0{,}158)} \approx 2{,}473 \text{ години.}$$

9. Середня тривалість перебування заявки в черзі на обслуговування

$$\mathrm{L}_q = W_S - \frac{1}{\mu} = 2{,}473 - \frac{1}{0{,}952} = 1{,}423 \text{ ч.}$$

10. Середнє число заявок у черзі (довжина черги)

$$\mathrm{L}_q = \lambda(1-\mathrm{P_N})W_q = 0{,}85(1-0{,}158)1{,}423 = 1{,}02.$$

Роботу розглянутого поста діагностики можна вважати задовільною, тому що пост діагностики не обслуговує ТЗ у середньому в 15,8% випадків ($P_{відм}$ = 0,158).

Перейдемо тепер до розгляду одноканальної СМО із чеканням без обмеження на місткість блока чекання (тобто $N \to \infty$). Решта умов функціонування СМО залишаються без змін [21].

Стаціонарний режим функціонування даної СМО існує при $t \to \infty$ для будь-якого n = 0, 1, 2, … і коли $\lambda < \mu$. Систему алгебричних рівнянь, що описують роботу СМО при $t \to \infty$ для будь-якого n=0, 1, 2, …, записуємо як

$$\begin{cases} -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0, \ n = 0, \\ \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} - (\lambda + \mu) P_n = 0, \ n > 0. \end{cases} \tag{4.21}$$

Розв'язання даної системи рівнянь має вигляд

$$P_n = (1-\rho)\rho^n,\ n = 0,1,2,..., \qquad (4.22)$$

де $\rho = \lambda / \mu < 1$.

Характеристики одноканальної СМО із чеканням без обмеження на довжину черги такі:

1. Середнє число клієнтів, що перебувають у системі (заявок)

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \frac{\rho}{1-\rho}. \qquad (4.23)$$

2. Середня тривалість перебування клієнта в системі

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{[\mu(1-\rho)]}. \qquad (4.24)$$

3. Середнє число клієнтів у черзі на обслуговування

$$L_q = L_s \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\rho^2}{1-\rho}. \qquad (4.25)$$

4. Середня тривалість перебування клієнта в черзі

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho}{[\mu(1-\rho)]}. \qquad (4.26)$$

Приклад 4.3

Пост діагностики має у своєму розпорядженні необмежену кількість площадок для стоянки ТЗ, що прибувають на обслуговування, тобто довжина черги необмежена (див. приклад 4.2).

Потрібно визначити фінальні значення таких імовірнісних характеристик:

1) ймовірності станів системи (поста діагностики);
2) середнє число ТЗ, що перебувають у системі (на обслуговуванні й у черзі);
3) середню тривалість перебування ТЗ в системі (на обслуговуванні й у черзі);
4) середнє число ТЗ у черзі на обслуговуванні;
5) середню тривалість перебування ТЗ в черзі.

Розв'язання

1. Параметр потоку обслуговування μ та наведена інтенсивність потоку ТЗ ρ визначені: μ=0,952; ρ=0,893.

2. Обчислимо граничні ймовірності системи за формулами

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - 0{,}893 = 0{,}107;$$
$$P_1 = (1-\rho)\rho = (1-0{,}893)0{,}893 = 0{,}096;$$
$$P_2 = (1-\rho)\rho^2 = (1-0{,}893)0{,}893^2 = 0{,}085;$$
$$P_3 = (1-\rho)\rho^3 = (1-0{,}893)0{,}893^3 = 0{,}076;$$
$$P_4 = (1-\rho)\rho^4 = (1-0{,}893)0{,}893^4 = 0{,}068;$$
$$P_5 = (1-\rho)\rho^5 = (1-0{,}893)0{,}893^5 = 0{,}061$$

і т.д.

Слід зазначити, що P_0 визначає частку часу, протягом якого пост діагностики вимушено не діє (простоює). У нашому прикладі вона становить 10,7%, тому що P_0=0,107.

1. Середнє число ТЗ, що перебувають у системі (на обслуговуванні й у черзі)

$$L_S = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0{,}893}{1-0{,}893} = 8{,}346\,од.$$

2. Середня тривалість перебування клієнта в системі

$$W_S = \frac{L_S}{\lambda} = \frac{1}{[\mu(1-\rho)]} = \frac{1}{[0{,}952(1-0{,}893)]} = 9{,}817\,ч.$$

3. Середнє число ТЗ у черзі на обслуговування

$$L_q = L_S - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0{,}893^2}{(1-0{,}893)} = 7{,}453.$$

4. Середня тривалість перебування ТЗ в черзі

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{0{,}893}{0{,}952(1-0{,}893)} = 8{,}766\,ч.$$

5. Відносна пропускна здатність системи q = 1, тобто кожна заявка, що прийшла в систему, буде обслужена.

6. Абсолютна пропускна здатність

$$A = \lambda q = 0{,}85 \cdot 1 = 0{,}85.$$

Слід зазначити, що підприємство, яке здійснює діагностику ТЗ, насамперед цікавить кількість клієнтів, що відвідають пост діагностики при знятті обмеження на довжину черги.

Припустимо, що кількість місць для стоянки ТЗ, що прибувають, дорівнює трьом (див. попередній приклад). Частота m виникнення ситуацій, коли прибуває на пост діагностики ТЗ, який не має можливості приєднатися до черги: $m = \lambda P_N$.

В нашому прикладі при N=3+1=4 й $\rho = 0{,}893$

$m = \lambda P_0 \rho^4 = 0{,}85 \cdot 0{,}248 \cdot 0{,}8934 = 0{,}134$ ТЗ в час.

При 12-годинному режимі роботи поста діагностики це еквівалентно тому, що пост діагностики в середньому за зміну (день) буде відмовляти $12 \cdot 0{,}134 = 1{,}6$ ТЗ.

Зняття обмеження на довжину черги дозволяє збільшити кількість обслужених клієнтів у нашому прикладі в середньому на 1,6 ТЗ за зміну (12 часів роботи) поста діагностики. Зрозуміло, що розрахунок щодо розширення площі для стоянки ТЗ, які прибувають на пост діагностики, повинно ґрунтуватися на оцінці економічного збитку, обумовленого втратою клієнтів за наявності всього трьох місць для стоянки цих ТЗ.

Багатоканальна модель із пуассонівським вхідним потоком і експоненціальним розподілом тривалого обслуговування

У переважній більшості випадків на практиці системи масового обслуговування є багатоканальними (де n>1). Процес масового обслуговування, який описується даною моделлю, характеризується інтенсивністю вхідного потоку λ, при цьому паралельно може обслуговуватися не більше n клієнтів (заявок). Середня тривалість обслуговування однієї заявки дорівнює $1/\mu$. Вхідний і вихідний потоки є пуассонівськими. Режим функціонування того чи іншого обслуговуючого каналу не впливає на режим функціонування інших обслуговуючих каналів системи, причому тривалість процедури обслуговування кожним із каналів є випадковою величиною, яка підпорядковується експоненціальному закону розподілу. Кінцева мета використання n паралельно включених обслуговуючих каналів полягає у підвищенні (у порівнянні з одноканальною системою) швидкості обслуговування вимог.

Граф станів багатоканальної системи масового обслуговування з відмовами має вигляд, показаний на рис. 4.7.

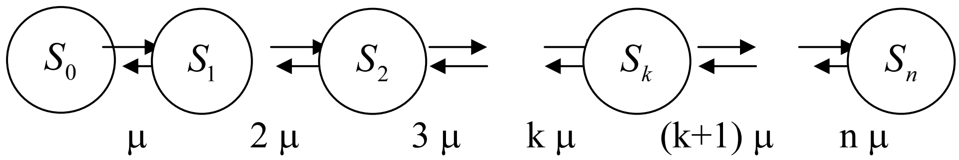

Рис. 4.7. Граф станів багатоканальної СМО з відмовами

Стани даної СМО мають таку інтерпретацію:

S_0 – всі канали вільні;

S_1 – зайнятий один канал, інші вільні;

…………

S_k – зайняті рівно k каналів, інші вільні;

…………

S_n – зайняті всі n каналів, заявка одержує відмову в обслуговуванні.

Рівняння Колмогорова для ймовірностей стану системи

$P_0, \ldots, P_k, \ldots, P_n$ матимуть вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dP_k(t)}{dt} = -(\lambda + k\mu)P_k(t) + \mu(k+1)P_{k+1}(t), \quad 1 \le k \le n-1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) + \mu n P_n(t). \end{cases} \tag{4.27}$$

Початкові умови розв'язку системи такі:

$$P_0(0) = 1, P_1(0) = P_2(0) = \ldots = P_k(0) = 0.$$

Стаціонарне рішення системи має вигляд

$$P_k = \frac{\dfrac{\rho^k}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\rho^k}{k!}} = \frac{\rho^k}{k!} P_{0, k=0,1,2,\ldots,n},$$
$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\rho^k}{k!}\right]}, k = 0,1,2,\ldots,n, \tag{4.28}$$

де $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Формули для обчислення ймовірностей P_k називаються формулами Ерланга.

Визначимо ймовірнісні характеристики функціонування багатоканальної СМО з відмовами в стаціонарному режимі:

Імовірність відмови

$$P_{відм} = P_{\text{n}} = \frac{\rho^n}{n!} P_0 . \tag{4.29}$$

Заявка одержує відмову, якщо приходить у момент, коли всі n каналів зайняті.

Величина $P_{відм}$ характеризує повноту обслуговування вхідного потоку;

Відносна пропускна здатність системи

$$q = 1 - P_{\text{відм}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} P_0 . \tag{4.30}$$

Абсолютна пропускна здатність

$$A = \lambda \text{q} = \lambda(1 - P_{відм}). \tag{4.31}$$

Середнє число каналів, зайнятих обслуговуванням:

$$k' = \sum_{k=1}^{n} k P_k = \rho(1 - P_{відм}). \tag{4.32}$$

Величина *k*' характеризує ступінь завантаження СМО.

Приклад 4.4

Нехай *n*-канальна СМО являє собою комп'ютерний центр (КЦ) із трьома (n=3) персональними комп'ютерами (ПК). Потік заявок, що надходять у КЦ, дорівнює одиниці λ=1. Середня тривалість обслуговування $t_{обсл} = 1{,}8$ часа. Потік заявок і потік обслуговування є найпростішими.

Потрібно обчислити в стаціонарному режимі:

1. Імовірності станів КЦ.
2. Імовірності відмови в обслуговуванні заявки.
3. Відносну пропускну здатність КЦ.
4. Абсолютну пропускну здатність КЦ.
5. Середнє число зайнятих ПК у КЦ.

Визначити, скільки додатково треба придбати ПК, щоб збільшити пропускну здатність КЦ у два рази.

Розв'язання

Визначимо параметр μ потоку обслуговувань: $\mu = \dfrac{1}{\mathrm{t}_{\text{обсл}}} = \dfrac{1}{1{,}8} = 0{,}555$.

Наведена інтенсивність потоку заявок $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = 1/0{,}555 = 1{,}8$.

Граничні ймовірності станів знайдемо за формулами Ерланга (4.28):

$$\begin{cases} P_1 = \dfrac{\rho}{1!}P_0 = 1{,}8P_0 = 1{,}8 \cdot 0{,}186 = 0{,}334, \\ P_2 = \dfrac{\rho^2}{2!}P_0 = 1{,}62P_0 = 1{,}62 \cdot 0{,}186 = 0{,}301, \\ P_3 = \dfrac{\rho^3}{3!}P_0 = 0{,}97P_0 = 0{,}97 \cdot 0{,}186 = 0{,}180, \\ P_0 = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{3}\dfrac{\rho^k}{k!}} = \dfrac{1}{1 + 1{,}8 + 1{,}62 + 0{,}97} = 0{,}186. \end{cases}$$

Імовірність відмови в обслуговуванні заявки $P_{відм} = \mathrm{P}_3 = 0{,}180$.

Відносна пропускна здатність КЦ $\mathrm{q} = 1 - P_{відм} = 1 - 0{,}180 = 0{,}820$.

Абсолютна пропускна здатність КЦ $A = \lambda \mathrm{q} = 1 \cdot 0{,}820 = 0{,}820$.

Середнє число зайнятих каналів ПК

$$\mathrm{k}' = \rho\left(1 - P_{відм}\right) = 1{,}8\left(1 - 0{,}180\right) = 1{,}476.$$

Таким чином, при сталому режимі роботи СМО в середньому буде зайнято 1,5 комп'ютера із трьох – інші півтора будуть простоювати. Роботу розглянутого ОКЦ навряд чи можна вважати задовільною, тому що центр не обслуговує заявки в середньому в 18% випадків ($P_3 = 0{,}180$). Очевидно, що пропускну здатність КЦ при даних λ і μ можна збільшити тільки за рахунок збільшення ПК.

Визначимо, скільки потрібно використати ПК, щоб скоротити число необслужених заявок, що надходять на КЦ, в 10 разів, тобто щоб імовірність відмови у вирішенні задач не перевершувала 0,0180. Для цього використаємо формулу (3.28):

$$P_{відм} = \frac{\rho^{n}}{n!} P_0 .$$

Складемо таку таблицю:

Таблиця 4.2

n	1	2	3	4	5	6
P_0	0,357	0,226	0,186	0,172	0,167	0,166
$P_{відм}$	0,643	0,367	0,18	0,075	0,026	0,0078

Аналізуючи табл. 4.2, слід зазначити, що розширення числа каналів КЦ при даному значенні λ і μ до шести одиниць ПК дозволить забезпечити задоволення заявок на 99,22%, тому що при n = 6 імовірність відмови в обслуговуванні ($P_{відм}$) становить 0,0078.

Розглянемо багатоканальну систему масового обслуговування із чеканням. Процес масового обслуговування при цьому характеризуються: вхідним і вихідним потоками, які є пуассонівськими з інтенсивностями λ і μ відповідно; паралельно обслуговуватися можуть не більше *і* клієнтів. Система має *С* каналів обслуговування. Середня тривалість обслуговування одного клієнта дорівнює $\frac{1}{\mu}$.

У сталому режимі функціонування багатоканальної СМО із чеканням і необмеженою чергою може бути описане за допомогою системи алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} 0 = \lambda P_{n-1} - (\lambda + n\mu)P_n + (n+1)\mu P_{n+1}, \quad 1 \le n < C, \\ 0 = \lambda P_{n-1} - (\lambda + C\mu)P_n + C\mu P_{n+1}, \quad n \ge C. \end{cases} \tag{4.33}$$

Розв’язання системи рівнянь (4.32) має вигляд

$$P_n = \frac{\rho^{n}}{n!} P_0 \quad \text{при } 0 \le n < C, \tag{4.34}$$

$$P_{вn} = \frac{\rho^{n}}{C!C^{n-c}} P_0 \quad \text{при } n \ge C, \tag{4.35}$$

де

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{C!\left[1 - \left(\frac{\rho}{C}\right)\right]} \right\}^{-1} . \tag{4.36}$$

Рішення буде дійсним, якщо виконується така умова: $[\frac{\lambda}{\mu C}] < 1$.

Імовірнісні характеристики функціонування в стаціонарному режимі багатоканальної СМО із чеканням і необмеженою чергою одержують за формулами (4.34) і (4.35).

Середнє число клієнтів у черзі на обслуговування

$$L_q = \left[\frac{C\rho}{(C-\rho)^2} \right] P_C . \quad (4.37)$$

Середнє число клієнтів, що перебувають у системі (заявок на обслуговування у черзі):

$$L_S = L_q + \rho . \quad (4.38)$$

Середня тривалість перебування клієнта (заявки на обслуговування) у черзі:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} . \quad (4.39)$$

Середня тривалість перебування клієнта в системі

$$W_S = W_q + \frac{1}{\mu} . \quad (4.40)$$

Розглянемо приклади багатоканальной системи масового обслуговування із чеканням.

Приклад 4.5

Механічна майстерня заводу із трьома постами (каналами) виконує ремонт малої механізації. Потік несправних механізмів, що прибувають у майстерню, пуассонівський і має інтенсивність λ=2,5 механізма в добу, середній час ремонту одного механізму розподілено за показовим законом і дорівнює t = 0,5 доби. Припустимо, що іншої майстерні на заводі немає і черга механізмів перед майстернею може рости перед майстернею практично необмежено.

Потрібно обчислити такі граничні значення ймовірнісних характеристик системи:

1. Імовірності станів системи.
2. Середнє число заявок у черзі на обслуговування.
3. Середнє число заявок, що перебувають у системі.
4. Середню тривалість перебування заявки в черзі.
5. Середню тривалість перебування заявки в системі.

1. Визначимо параметр потоку обслуговувань $\mu = \frac{1}{t} = 1/0,5 = 2$.

2. Наведена інтенсивність потоку заявок $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 2,5/2,0 = 1,25$, при цьому $\frac{\lambda}{\mu} \cdot c = \frac{2,5}{2} \cdot 3 = 0,41$.

Оскільки $\frac{\lambda}{\mu} c < 1$, то черга не росте й у системі наступає граничний стаціонарний режим роботи.

3. Обчислимо ймовірності станів системи

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!\left[1 - \left(\frac{\rho}{c}\right)\right]} \right\}^{-1} = \frac{1}{\left[1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!\left(1 - \frac{\rho}{3}\right)}\right]} =$$

$$= \frac{1}{\left[1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{6\left(1 - \frac{\rho}{3}\right)}\right]} = \frac{1}{\left[1 + 1,25 + \frac{1,25}{2} + \frac{1,25^3}{6\left(1 - \frac{1,25}{3}\right)}\right]} = 0,279,$$

$$\begin{cases} P_1 = \frac{\rho}{1!} P_0 = 1,125 \cdot 0,279 = 0,349, \\ P_2 = \frac{\rho^2}{2!} P_0 = 0,218, \\ P_3 = \frac{\rho^3}{3!} P_0 = 0,091, \\ P_4 = \frac{\rho^4}{4!} P_0 = 0,028. \end{cases}$$

4. Імовірність відсутності черги в майстерні

$$P_{відм.п} = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 0,279 + 0,347 + 0,218 + 0,091 = 0,937.$$

5. Середнє число заявок у черзі на обслуговування $L_q = \left[\frac{C\rho}{(C - \rho)^2}\right] P_C = 0,111$.

6. Середнє число заявок, що перебувають у системі:

$$L_S = L_q + \rho = 0{,}111 + 1{,}25 = 1{,}361.$$

7. Середня тривалість перебування механізму в черзі на обслуговування $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0{,}111}{2{,}5} = 0{,}044$ доби.

8. Середня тривалість перебування механізму в майстерні (у системі) $W_S = W_q + \frac{1}{\mu} = 0{,}044 + 0{,}5 = 0{,}544$ доби.

Модель обслуговування виробничого підприємства машинного парку

Модель обслуговування виробничого підприємства машинного парку являє собою модель замкнутої системи масового обслуговування.

Ми розглядали тільки такі системи масового обслуговування, для яких інтенсивність λ вхідного потоку заявок не залежить від стану системи. У цьому випадку джерело заявок є зовнішнім стосовно СМО й генерує необмежений потік вимог. Розглянемо системи масового обслуговування, для яких λ залежить від стану системи, причому джерело вимог є внутрішнім і генерує обмежений потік заявок [3].

Наприклад, обслуговують машинний парк, що складається з N машин, бригадою R механіків ($N>R$), причому кожна машина може обслуговуватися тільки одним механіком. Тут машини є джерелами вимог (заявок на обслуговування), а механіки – обслуговуючими каналами. Несправну машину після обслуговування використовують за своїм прямим призначенням, і вона стає потенційним джерелом виникнення вимог на обслуговування. Очевидно, що інтенсивність λ залежить від того, скільки машин у цей момент перебуває в експлуатації (N-k) і скільки машин обслуговується або перебуває в черзі, очікуючи обслуговування (k).

У розглянутій моделі ємність джерела вимог варто вважати обмеженою. Вхідний потік вимог виходить із обмеженого числа експлуатованих машин (N-k), які у випадкові моменти часу виходять із ладу й вимагають обслуговування. При цьому кожна машина з (N-k), яка перебуває в експлуатації, генерує пуассонівський потік вимог з інтенсивністю λ. Загальний (сумарний) вхідний потік має інтенсивність (N-k)λ. Вимога, що надійшла в систему в момент, коли вільним є хоча б один канал, негайно йде на обслуговування. Якщо вимога застає всі канали зайнятими, то вона не залишає систему, а стає в чергу й чекає, поки один із каналів не стане вільним.

Таким чином, у замкнутій системі масового обслуговування вхідний потік вимог формується з вихідного [24].

Стан S_k системи характеризується загальним числом вимог, що перебувають на обслуговуванні й у черзі. Для розглянутої замкнутої системи k = 0, 1, 2, …, N. При цьому якщо система перебуває в стані S_k, то число об'єктів, що перебувають в експлуатації, дорівнює (N-k).

Якщо λ – інтенсивність потоку вимог для однієї машини, то

$$\lambda_k = \begin{cases} (N-k)\lambda, \ 0 \le k \le N \\ 0, \ k > N, \end{cases}$$

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu, 0 \le k < R \\ R\mu, \ R \le k \le N \\ 0, \ k > N. \end{cases}$$

Система алгебричних рівнянь, що описує роботу стаціонарної СМО в замкнутому режимі, має вигляд

$$\begin{aligned} &0 = -\rho N P_0 + P_1, \\ &0 = (N-k+1)\rho P_{k-1} - [(N-k)\rho + k]P_k + (k+1)P_{k+1}, \ 0 < k < R, \\ &0 = (N-k+1)\rho P_{k-1} - [(N-k)\rho + R]P_k + RP_{k+1}, \ R \le k < N, \\ &0 = \rho P_{N-1} - RP_N. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Розв'язуючи дану систему, знаходимо ймовірність k-го стану:

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{N!\rho^k}{k!(N-k)!} P_0, \ 1 \le k < R, \\ \dfrac{N!\rho^k}{R! R^{k-R} (N-k)!} P_0, \ R \le k \le N. \end{cases} \tag{4.42}$$

Величина P_0 визначається з умови нормування $\sum_{k=0}^{N} P_k$ отриманих результатів за формулами (4.42) для P_k, $k = 1, 2, \ldots, N$.

Визначимо такі *ймовірнісні характеристики системи:*

Середнє число вимог у черзі на обслуговування:

$$L_q = \sum_{k=R}^{N} (k-R)P_k \ . \tag{4.43}$$

Середнє число вимог, що перебувають у системі (на обслуговуванні в черзі):

$$L_S = \sum_{R=1}^{N} kP_k \ . \tag{4.44}$$

Середнє число механіків (каналів), що простоюють через відсутність роботи:

$$R_n' = \sum_{k=0}^{k-1} (R-k)P_k \ . \tag{4.45}$$

Коефіцієнт простою обслуговуючого об'єкта (машини) у черзі

$$\alpha_1 = \frac{L_q}{N} \ . \tag{4.46}$$

Коефіцієнт використання об'єктів (машин)

$$\alpha_2 = 1 - \left(\frac{L_S}{N} \right). \tag{4.47}$$

Коефіцієнт простою обслуговуючих каналів (механіків)

$$\alpha_3 = \frac{R_n^{'}}{R}. \qquad (4.48)$$

Середній час чекання обслуговування (час чекання обслуговування в черзі) $W_q = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2}\right) - \frac{1}{\mu}$.

Приклад 4. 6

Нехай для обслуговування десяти персональних комп'ютерів (ПК) виділено два інженери однакової працездатності. Потік відмов (несправностей) одного комп'ютера – пуассонівський з інтенсивністю λ = 0,2. Час обслуговування ПК підпорядковується показовому закону. Середній час обслуговування одного ПК одним інженером становить $t^{'}$=1,25 часа.

Можливі такі варіанти обслуговування ПК:

1. Обоє інженери обслуговують всі десять комп'ютерів, при відмові ПК його обслуговує один із вільних інженерів. У цьому випадку R = 2, N = 10.
2. Кожний із двох інженерів обслуговує по п'ять закріплених за ним ПК. У цьому випадку R = 1, N = 5.

Необхідно вибрати найкращий варіант організації обслуговування ПК.

Розв'язання

Обчислимо параметр обслуговування

$$\mu = \frac{1}{t^{'}} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8.$$

Наведена інтенсивність

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}2}{0{,}8} = 0{,}25.$$

Обчислимо ймовірнісні характеристики СМО для двох варіантів обслуговування ПК.

Варіант 1

Визначимо ймовірності станів системи

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{N!\rho^k}{k!(N-k)!}P_0, \ 1 \le k < R, \\ \dfrac{N!\rho^k}{R!R^{k-R}(N-k)!}P_0, \ R \le k \le N; \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 = 2{,}5P_0, \\ P_2 = 2{,}812P_0, \\ P_3 = 1{,}875P_0, \\ P_4 = 2{,}461P_0, \\ P_5 = 1{,}846P_0, \\ P_6 = 1{,}154P_0, \\ P_7 = 0{,}577P_0, \\ P_8 = 0{,}054P_0, \\ P_9 = 0{,}054P_0, \\ P_{10} = 0{,}007P_0. \end{cases}$$

З огляду на те, що $\sum_{k=0}^{N} P_k = 1$, й використовуючи результати розрахунку P_k, обчислимо P_0:

$$\sum_{k=0}^{N} P_k = P_0 + 2{,}5P_0 + 2{,}812P_0 + 2{,}81P_0 + ... + 0{,}007P_0 = 1.$$

Звідки P_0=0,065, тоді

P_1≅0,162; P_2≅0,183; P_3≅0,182; P_4≅0,160; P_5≅0,11; P_6≅0,075; P_7≅0,037; P_8≅0,014; P_9≅0,003; P_{10}≅0,000.

Визначимо середнє число комп'ютерів у черзі на обслуговування:

$$L_q = \sum_{k=R}^{N} (k-R)P_k = 0 + (3-2)\cdot 0{,}182 + (4-2)\times$$
$$\times 0{,}160 + (5-2)\cdot 0{,}11 + (6-2)\cdot 0{,}075 +$$
$$+ (7-2)\cdot 0{,}037 + (8-2)\cdot 0{,}014 + (9-2)\cdot 0{,}003 = 0{,}182 + 0{,}32 + 0{,}33 + 0{,}3 +$$
$$0{,}185 + 0{,}084 + 0{,}021 = 1{,}42.$$

Визначимо середнє число ПК, що перебувають у системі (на обслуговуванні й у черзі):

$$L_s = \sum_{k=1}^{N} kP_k = 1P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5 + 6P_6 + 7P_7 + 8P_8 + 9P_9 + 10P_{10} =$$
$$= 0{,}162 + 2\cdot 0{,}183 + 3\cdot 0{,}182 + 4\cdot 0{,}16 + 5\cdot 0{,}11 + 6\cdot 0{,}075 + 7\cdot 0{,}037 + 8\cdot 0{,}014 +$$
$$+ 9\cdot 0{,}003 + 10\cdot 0{,}000 = 0{,}162 + 0{,}366 + 0{,}546 + 0{,}64 + 0{,}55 + 0{,}45 + 0{,}259 +$$
$$+ 0{,}112 + 0{,}027 + 0 = 3{,}112.$$

Визначимо середнє число інженерів, що простоюють через відсутність роботи:

$$R_n' = \sum_{k=0}^{R-1} (R-k)P_k = (2-0)\cdot P_0 + (2-1)\cdot P_1 = 2\cdot 0{,}065 + 1\cdot 0{,}162 = 0.292.$$

Коефіцієнт простою персонального комп'ютера в черзі такий:

$$\alpha_1 = \frac{L_q}{N} = \frac{1,42}{10} = 0,142.$$

Коефіцієнт використання комп'ютерів визначають за формулою

$$\alpha_2 = 1 - \left(\frac{L_S}{N}\right) = 1 - \left(\frac{3,11}{10}\right) = 0,689.$$

Коефіцієнт простою обслуговуючих інженерів розраховують таким чином:

$$\alpha_3 = \frac{R_n^{'}}{R} = \frac{0,292}{2} = 0,146.$$

Середній час чекання ПК обслуговування

$$W_q = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2}\right) - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0,2} \cdot \frac{1-0,689}{0,689} - \frac{1}{0,8} = 1,01 \text{ години.}$$

Варіант 2

Визначимо ймовірності станів системи:

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{N!\rho^k}{k!(N-k)!}P_0, \ 1 \le k < R, \\ \dfrac{N!\rho^k}{R!R^{k-R}(N-k)!}P_0, \ R \le k \le N; \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 = \dfrac{5! \cdot 0,25}{(5-1)!}P_0 = 1,25P_0, \\ P_2 = \dfrac{5! \cdot 0,25^2}{1!1^{2-1}(5-2)!}P_0 = 1,25P_0, \\ P_3 = \dfrac{5! \cdot 0,25^3}{(5-3)!}P_0 = 0,938P_0, \\ P_4 = \dfrac{5! \cdot 0,25^4}{(5-4)!}P_0 = 0,469P_0, \\ P_5 = \dfrac{5! \cdot 0,25^5}{(5-5)!}P_0 = 0.117P_0, \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{5} P_k = P_0 + 1,25P_0 + 1,25P_0 + 0,938P_0 + 0,469P_0 0,117P_0 = 1.$$

Звідки P_0=0,199, тоді

$P_1 \cong 0,249$; $P_2 \cong 0,249$; $P_3 \cong 0,187$; $P_4 \cong 0,093$; $P_5 \cong 0,023$.

Середнє число комп'ютерів у черзі на обслуговування

$$L_q = \sum_{k=R}^{N}(k-R)P_k = (2-1)\cdot 0,249 + (3-1)\cdot 0,187 + (4-1)\cdot 0,093 +$$
$$+ (5-1)\cdot 0,023 = 0,994.$$

Середнє число комп'ютерів, що перебувають на обслуговуванні й у черзі, розраховують так:

$$L_s = \sum_{k=1}^{N} kP_k = 1P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5 = 0{,}249 + 2 \cdot 0{,}249 + 3 \cdot 0{,}187 + 4 \cdot 0{,}093 +$$
$$+ 5 \cdot 0{,}023 = 1{,}8.$$

Середнє число інженерів, що простоюють через відсутність роботи

$$R_n' = \sum_{k=0}^{R-1} (R-k)P_k = (1-0) \cdot P_0 = 0{,}199.$$

Коефіцієнт простою персонального комп'ютера в черзі

$$\alpha_1 = \frac{L_q}{N} = \frac{0{,}994}{5} = 0{,}199.$$

Коефіцієнт використання комп'ютерів

$$\alpha_2 = 1 - \left(\frac{L_S}{N}\right) = 1 - \left(\frac{3{,}8}{5}\right) = 0{,}64.$$

Коефіцієнт простою обслуговуючих інженерів

$$\alpha_3 = \frac{R_n'}{R} = \frac{0{,}199}{1} = 0{,}199.$$

Середній час чекання ПК обслуговування

$$W_q = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2}\right) - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0{,}2} \cdot \frac{1-0{,}64}{0{,}64} - \frac{1}{0{,}8} = 1{,}56 \text{ год.}$$

Зведемо отримані результати за двома варіантами у табл. 4.3.

Таблиця 4.3

Підсумкові ймовірнісні характеристики	*Варіанти*	
	1	2
α_1	0,142	0,199
α_2	0,689	0,64
α_3	0,146	0,199
W_q, год	1,01	1,56

Таким чином, у варіанті 1 кожен комп'ютер перебуває в черзі, чекаючи початку його обслуговування, приблизно 0,142 частини робочого часу, що менше при варіанті 2. У варіанті 1 імовірність того, що ПК у будь-який момент часу буде працювати краще, дорівнює $\alpha_2^1 = 0{,}689 > \alpha_2^2 = 0{,}64$. Таким чином, варіант 1 організації робіт з обслуговування ПК ефективніше, ніж варіант 2.

Контрольні запитання

1. Розкажіть коротко про роботу аеропорту з позиції моделі масового обслуговування.
2. Поясніть основні поняття систем обслуговування, які зображені на рис. 4.1.
3. Поясніть різноманітність систем обслуговування при використанні класифікації Кендалла.
4. Покажіть за спрощеною моделлю D/D/1 можливість розрахунку нагромадження й зникнення черги.
5. Розгляньте модель $M/M/1/K_c<\infty/\infty/Fifo$ і покажіть різницю розрахункових характеристик у випадку $K_c<\infty$ і $K_c=\infty$.
6. Розгляньте модель D/D/1 за умови наявності в початковий момент у системі деякого числа вимог і поясніть особливості розрахунку характеристик у такій системі.
7. Розгляньте модель із відмовами $M/M/1/1/\infty/Fifo$, складіть систему диференціальних рівнянь для відповідного графа станів системи й зобразьте графіки функцій $P_0(t)$; $P_1(t)$.
8. Розгляньте схему загибелі й розмноження, що відповідає одноканальній СМО з чеканням і покажіть порядок визначення основних характеристик системи.
9. Поясніть основні особливості багатоканальної СМО з відмовами. Наведіть приклад для випадку двох каналів.
10. Розгляньте багатоканальну СМО із чеканням, покажіть порядок одержання основних характеристик системи.

Завдання

1. В обчислювальному центрі працює п’ять персональних комп'ютерів (ПК). Найпростіший потік завдань, що надходить на обчислювальний центр (ОЦ), має інтенсивність 10 завдань в час. Середній час виконання завдання дорівнює 12 хв. Заявка одержує відмову, якщо всі ПК зайняті. Знайдіть імовірнісні характеристики системи обслуговування (СО).
2. На пункт техогляду надходить найпростіший потік заявок (ТЗ) з інтенсивністю чотири ТЗ в годину. Час огляду розподілений за показовим законом і дорівнює в середньому 17 хв, у черзі може перебувати не більше п’яти ТЗ. Визначте ймовірнісні характеристики пункту техогляду в стаціонарному режимі.
3. На промисловому підприємстві вирішується питання про те, скільки буде потрібно механіків для роботи в ремонтному цеху. В експлуатації підприємство має 10 машин, що вимагають ремонту. Відмови машин відбуваються із частотою 10 відм/год. Для усунення несправності механікові потрібно в середньому t = 3 хв. Розподіл моментів виникнення відмов є пуассонівським, а тривалість виконання ремонтних робіт розподілений за

експоненціальним законом. Можна організувати чотири чи шість робочих місць у цеху для механіків підприємства. Необхідно вибрати найбільш ефективний варіант забезпечення ремонтного цеху робітниками та місцями для механіків.

4. В інструментальному відділенні складального цеху працює три комірники. У середньому за 1 хв за інструментом приходить 0,8 робітника. Обслуговування одного робітника займає в комірника t = 1,0 хв. Черга не має обмеження. Відомо, що потік робітників за інструментом – пуассонівський, а час обслуговування змінюється за експоненціальним законом розподілу. Вартість однієї хвилини роботи робітника дорівнює 30 ум.од., а комірника – 15 ум.од. Знайдіть середні втрати цеху при даній організації обслуговування в інструментальному відділенні (вартість простою) при стаціонарному режимі роботи.

5. На залізничну сортувальну гірку прибувають потяги з інтенсивністю 2 вагони/год. Середній час, протягом якого гірка обслуговує потяг, дорівнює 0,4 години. Вагони, які приходять в момент, коли гірка зайнята, стають у чергу й чекають у парку прибуття, де є три запасних шляхи, на кожному з яких може чекати один вагон. Потяг, що прибув у момент, коли всі три запасних шляхи в парку прибуття зайняті, стає в чергу на зовнішній шлях. Всі потоки подій найпростіші.

При сталому режимі знайдіть:

1. Середнє число потягів, що чекають у черзі (як у парку прибуття, так і поза ним).
2. Середній час чекання в парку прибуття й на зовнішніх шляхах.
3. Середній час чекання складу системою обслуговування.
4. Імовірність того, що прибулий потяг посяде місце на зовнішніх шляхах.

6. В обчислювальному центрі працює дев’ять персональних комп'ютерів (ПК). Найпростіший потік несправностей має інтенсивність 0,3 відмови в день. Середній час усунення однієї несправності одним інженером дорівнює 1,5 години. Комп'ютери обслуговують три інженери з однаковою продуктивністю. Всі потоки подій найпростіші. Можливі такі варіанти організації обслуговування ПК: три інженери обслуговують всі дев’ять комп'ютерів, так що при відмові ПК його обслуговує один із вільних інженерів. У цьому випадку R = 3; N = 9; кожний із трьох інженерів обслуговує по три закріплених за ним ПК. У цьому випадку R = 1; N = 3.

Необхідно вибрати найкращий варіант обслуговування ПК.

7. Мале транспортне підприємство експлуатує 10 моделей ТЗ однієї марки. Найпростіший потік відмов ТЗ має інтенсивність 0,25 відм/день. Середній час усунення однієї відмови ТЗ одним механіком – 2 години. Всі потоки подій найпростіші. Можливі два варіанти обслуговування:

1) всі ТЗ обслуговують два механіки з однаковою продуктивністю;
2) всі ТЗ підприємства обслуговують три механіки з однаковою продуктивністю.

Необхідно вибрати найкращий варіант організації обслуговування ТЗ.

Розділ 5. ІМОВІРНІСНІ МОДЕЛІ У ЛОГІСТИЧНИХ ВИРОБНИЧИХ СИСТЕМАХ

5.1. Виробничий процес як логістичний процес

Виробничий процес являє собою сукупність певних впливів на об'єкт праці, результатом яких є створення певного виробу. Можна сказати, що виробнича система функціонує за вимогами заздалегідь заданого набору правил, які утворюють технологічний процес. Якщо уявити собі надходження вихідного матеріалу (деякої вимоги) на вхід виробничої системи, що змушує її функціонувати відповідно до правил технології, то свідчать про те, що система обслуговує цю вимогу. Тому виробничий процес можна подати як процес обслуговування [15].

Слід зазначити ще одну обставину, про яку вище вже не раз згадувалося. При формалізації широкого кола виробничих процесів часто доводиться мати справу з випадковими факторами. Поява браку, відмова верстатів, пристроїв й окремих елементів устаткування, надходження різного типу деталей на окремі технологічні установки, моменти досягнення параметрами граничних значень - ось деякі приклади випадкових подій у виробничих процесах.

Здійснюючи обслуговування вимог до обробки виробів (напівфабрикатів, вихідних заготовок і т. ін.), автоматичні й ергодичні виробничі системи випробовують впливи цих випадкових факторів, реагуючи на них випадковими змінами самого процесу обслуговування. Так, надходження вихідного матеріалу на вхід досліджуваної виробничої системи відбувається не в точно розраховані інтервали, тобто моменти надходження вихідного матеріалу можуть характеризуватися деяким розподілом. Тоді свідчать про те, що потік вимог на обслуговування - випадковий. Крім того, і сама виробнича система може змінювати свої характеристики випадково хоча б тому, що вона має обслуговувати вихідний матеріал, що характеризується вже деяким розкидом параметрів.

Якщо задача автоматичної (ергодичної) виробничої системи полягає в тому, щоб обробляти потоки випадкових сигналів (виконувати випадковий потік вимог на обслуговування), то формалізація роботи цієї системи може бути проведена за допомогою теорії масового обслуговування.

Предмет теорії масового обслуговування становить кількісна сторона процесів, пов'язаних із масовим обслуговуванням.

При уважному вивченні окремих виробничих процесів, що характеризуються випадковими факторами, неважко встановити в них наявність елементів масового обслуговування. Робота одного наладника, який обслуговує автоматичну лінію, або цілої бригади ремонтників, що роблять поточний ремонт устаткування, що вийшов з ладу, має явний характер обслуговування. Людина-оператор, задача якого полягає в регулюванні деякого параметра процесу, обслуговує вимогу на керування. Очевидно, що й у цьому випадку потік вимог є випадковим, у повній відповідності з вимогами теорії масового обслуговування. Час обслуговування вимоги також є випадковим. Він залежить від стану інших параметрів процесу та зовнішніх і внутрішніх збурень.

Під час роботи людини-оператора може виникнути черга вимог. За той час, поки оператор робить керуючий вплив на процес по i-му параметру, може виникнути необхідність у керуванні по j-му, а потім по R-му параметрах. Заявки можуть бути нерівноцінними. Якщо R-й параметр є головним, то оператор, не закінчивши керування по i-му й j-му параметрах почне робити керування по R-му параметру [22, 23].

Тип системи масового обслуговування може залежати від числа приладів, встановлених на пульті керування, числа операторів і розподілу обов'язків між ними. При цьому велику увагу приділяють характеру поведінки керованого об'єкта (потік вимог) і закону керування (потік обслуговування).

Залучення теорії масового обслуговування при формалізації виробничих процесів, що проходять за участю людини-оператора (երготичних процесів), дозволяє вирішити багато питань автоматизації (необхідне число операторів, кількість приладів на індивідуальному пульті оператора, необхідна швидкодія каналів керування, оптимальна інструкція поведінки оператора в різних ситуаціях і його взаємини з іншими операторами й т.д.). Дуже якісним виявляється можливість обчислення із задовільною точністю ймовірностей стану системи «оператор - машина», у тому числі й різних небажаних станів (аварійних ситуацій). Теорія масового обслуговування дає кількісні методи опису виробничих процесів. Без цих методів автоматизація виробництва була б багато в чому незручною. Створення математичних моделей виробничих процесів масового обслуговування й їхнє вивчення дозволяє скласти найбільш повний і закінчений план автоматизації виробництва.

При автоматизації виробництва все частіше доводиться розглядати такі системи масового обслуговування, в яких участь людини повністю виключена. Наприклад, при формалізації процесів автоматизованих потокових ліній методами теорії масового обслуговування описуються процеси автоматичного поповнення верстатів деталями з бункера, процеси діагностики й автоматичного усунення типових неполадок у роботі встаткування, процеси кругового контролю технологічних операцій та ін. Кінцеві установки потокових ліній, що виконують функції термічної або гальванічної обробки виробів, контролю якості готової продукції, покриття маслом й упакування деталей та ін., описуються математично також за допомогою методів теорії масового обслуговування. Якщо ці установки обслуговують кілька потокових ліній відразу, то вхідний потік деталей цих установок можна прийняти випадковим. Результати розрахунків з достатньою точністю можуть бути використані при створенні формалізованих схем.

Іноді формалізацію виробничих процесів можна провести за допомогою як методів теорії масового обслуговування, так й інших методів теорії ймовірностей, математичної статистики, надійності й т.п. Наприклад, виходи елементів якого-небудь пристрою потокової лінії можна розглядати як заявки на обслуговування.

Час обслуговування заявки складається із часу пошуку і усунення несправності. При автоматизації потокової лінії виникає альтернатива: даний пристрій можна проектувати з дешевих, але менш надійних елементів або ж з дорогих, але більше надійних. При цьому вважаємо відомими витрати на один ремонт і втрати від часу простою встаткування. Виникає запитання про те, коли окупляться додаткові витрати на більш дорогі елементи. Можлива й така постановка проблеми: яка надійність має бути у елементів пристрою, щоб надійність усього пристрою в цілому була не нижче заданої?

Відповіді на наведені вище запитання можна отримати як за допомогою теорії масового обслуговування, так і за допомогою теорії надійності. Однак вирішення задачі методами теорії масового обслуговування вимагає одних вхідних даних, а при використанні теорії надійності – інших. Природно, слід користуватися тими методами, вихідні дані для яких у конкретній ситуації легше всього одержати.

Які ж типи систем масового обслуговування існують, яких вихідних даних вони вимагають, які характеристики мають та які результати можна одержати за допомогою методів теорії масового обслуговування при формалізації виробничих процесів?

5.2. Математичний опис потоків у виробничих системах за допомогою ймовірнісних моделей

З теорії ймовірності (розділу, присвяченого дискретним випадковим величинам) можна визначати вхідний потік як послідовність вимог, що виникають одна за одною у випадкові моменти часу.

Вхідні потоки вимог, з якими доводиться мати справу у системах масового обслуговування, за своїм характером різноманітні. Проте існує так званий найпростіший потік вимог, що має найбільше теоретичне й практичне значення [41-43].

Потік вимог можна розглянути як функцію часу й описати таким виразом:

$$p_l(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^l e^{-\lambda\tau}}{l!}, \tag{5.1}$$

де $l(\tau)$ – імовірність появи l вимог за проміжок часу τ ;

λ – параметр потоку;

l – кількість вимог.

Це відомий розподіл Пуассона для дискретних випадкових величин. Параметр потоку вимог λ є математичним сподівання числа вимог, що надійшли за одиницю часу. Дійсно, математичне сподівання числа вимог, що мали місце за час τ, знаходять за формулою

$$M_\tau(l) = \sum_{l=1}^{\infty} l p_l(\tau). \tag{5.2}$$

Підставивши (5.1) в (5.2), отримаємо

$$M_{\tau}(l) = \sum_{l=1}^{\infty} l \frac{(\lambda\tau)^{l} e^{-\lambda\tau}}{l!} = \lambda\tau e^{-\lambda\tau} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{l-1}}{(l-1)!},$$

$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{l-1}}{(l-1)!}$ є розкладанням $e^{\lambda\tau}$ по степенях $\lambda\tau$, тоді

$$M_{\tau}(l) = \lambda\tau e^{-\lambda\tau} \cdot e^{\lambda\tau} = \lambda\tau. \qquad (5.3)$$

Звідси виходить, що середнє число вимог, що надходили в одиницю часу (τ=1), дорівнює $M_1(l) = \lambda$. Цієї величини цілком достатньо для математичного опису найпростішого потоку вимог.

Для вхідного потоку вимог можлива побудова універсальних залежностей $l(\tau)$ і функції $\lambda\tau$ (рис. 5.1). Для середнього числа вимог λ, що надійшли за одиницю часу, потрібно тільки встановити відповідний масштаб на осі

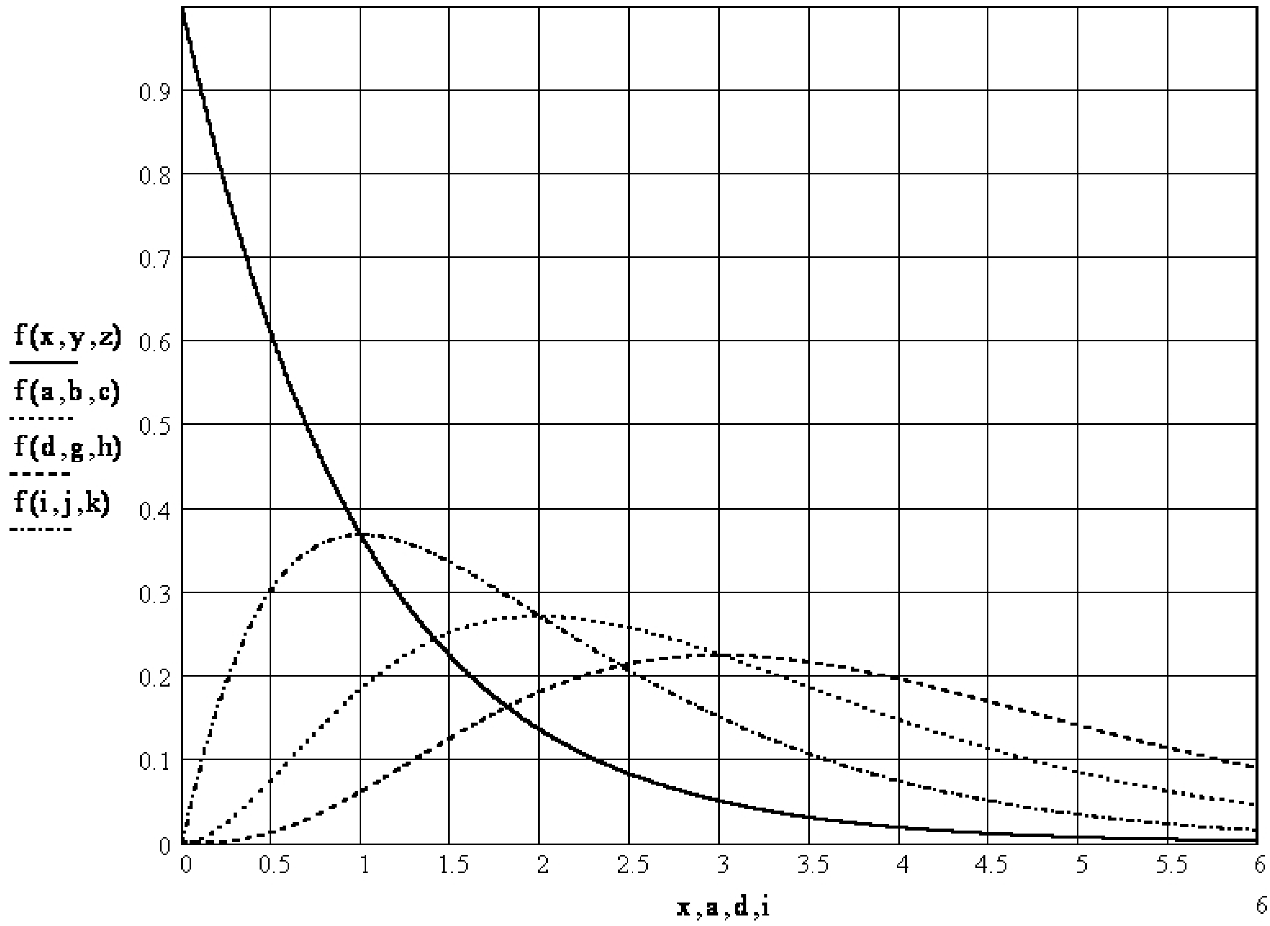

Рис. 5.1.Універсальні криві ймовірності появи l вимог за проміжок часу тривалістю τ при найпростішому потоці вимог

абсцис. Криві $p_l(\tau) = f(\lambda\tau)$ дозволяють установити характерну властивість найпростішого потоку вимог, тобто ймовірність появи l вимог протягом деякого проміжку часу. Час тривалістю τ має максимум при $\lambda\tau = l$ або $\tau = \frac{l}{\lambda}$. В цей момент зазначена ймовірність збігається з імовірністю появи l-1 вимоги протягом того ж проміжку часу тривалістю τ. Важливою характеристикою вхідного потоку вимог є закон розподілу тривалістю проміжку часу (τ_n) між сусідніми моментами появи вимог. Відповідну функцію розподілу записують у вигляді

$$F(\tau) = p(\tau_n < \tau),$$

де $p(\tau_n < \tau)$– ймовірність того, що протягом проміжку часу тривалістю τ, що починається з певного моменту часу, прийнятого за початок відліку, виникає хоча б одна вимога.

Перейдемо до залежності F(τ), використовуючи ймовірності протилежної події:

$$F(\tau) = 1 - p(\tau_n \geq \tau),$$

де $p(\tau_n \geq \tau)$ – імовірність того, що протягом проміжку часу тривалістю τ, що починається з певного моменту часу, прийнятого за початок відліку, не виникає жодної вимоги.

Для найпростішого потоку вимог початок відліку часу не впливає на $p(\tau_n \geq \tau)$, причому

$$p(\tau_n \geq \tau) = p_0(\tau) = e^{-\lambda\tau},$$

тобто

$$F(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}.$$

Щільність розподілу тривалості проміжку часу між сусідніми моментами появи вимог у найпростішому потоці має вигляд

$$f(\tau) = \frac{\partial F(\tau)}{\partial \tau} = \lambda e^{-\lambda\tau} \quad . \tag{5.4}$$

Відповідна крива розподілу зображена на рис. 5.2. (крива 1).

Закон розподілу тривалості проміжку часу між сусідніми моментами появи вимог у найпростішому потоці називається «показовим законом з параметром λ». Параметр λ являє собою середнє число вимог, що надходять за одиницю часу. Якщо параметр вхідного потоку вимог не постійний, а є функцією часу, то закон розподілу довжини проміжку часу між сусідніми моментами появи вимог уже не буде показовим. Причому, закон розподілу буде визначатися не тільки залежністю $\lambda(t)$, але й моментом часу t_0, прийнятим за початок відліку. У тому випадку, коли для потоку вимог зі змінним параметром збережені умови відсутності післядії й ординарності, ймовірність появи l вимог протягом проміжку часу $(t_0, t_\tau + \tau)$ може бути визначена за законом Пуассона

$$p_l(t_0, \tau) = \frac{a^l e^{-a}}{l!},$$

де a – математичне сподівання числа вимог на інтервалі $(t_0, t_\tau + \tau)$:

$$a = \int_{t_0}^{t_0 + r} \lambda(t) dt.$$

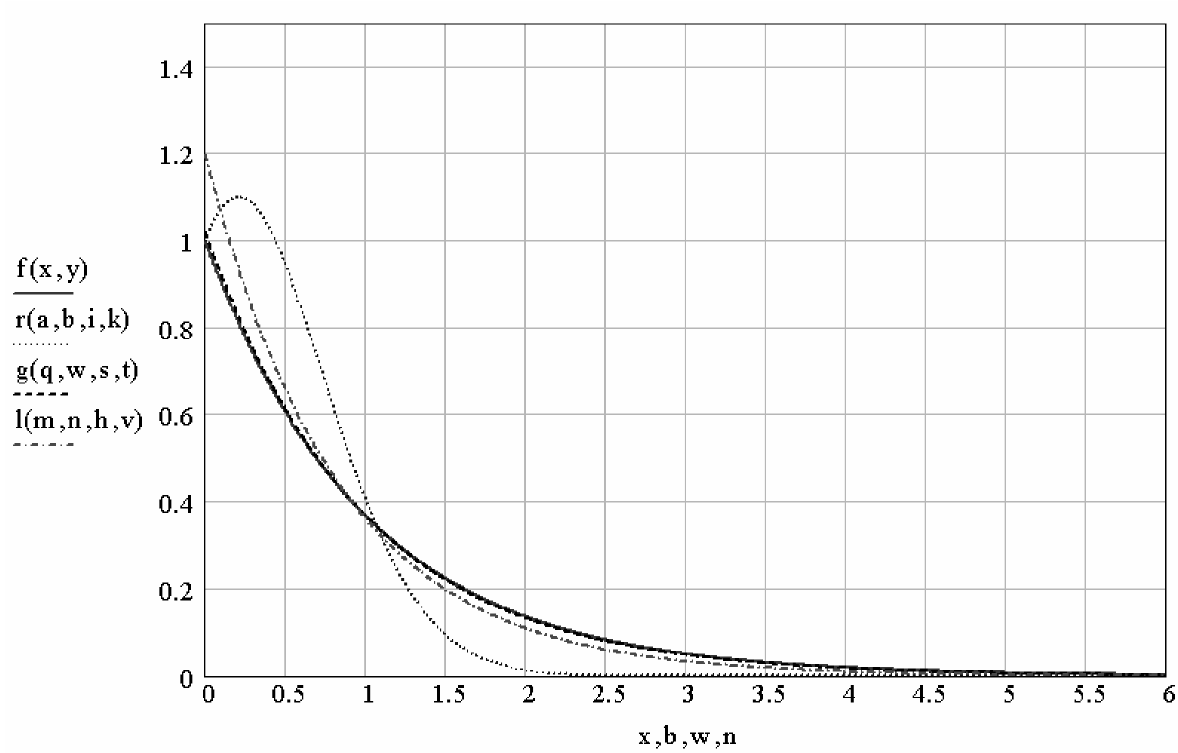

Рис. 5. 2. Закон розподілу тривалості проміжку часу між двома сусідніми вимогами: 1 – стаціонарний пуассонівський потік, 2, 3, 4– нестаціонарні пуассонівські потоки

Звичайно за цих умов потік вимог називають нестаціонарним пуассонівським потоком.

Для нестаціонарного пуассонівського потоку функція розподілу тривалості проміжку часу між вимогою, що з'явилася в момент t_0,і наступною така:

$$F(t_0,r)=1-e^{-a}=1-e^{-\int\limits_{t_0}^{t_0+r}\lambda(t)dt}.$$

Відповідну щільність розподілу визначають за формулою

$$f(t_0,r)=\lambda(t_0+\tau)e^{-\int\limits_{t_0}^{t_0+r}\lambda(t)dt}. \quad (5.5)$$

При старінні елементів, наприклад, миттєва щільність вимог на ремонт радіоелектронних апаратур часто змінюється за лінійним законом

$$\lambda(t)=\lambda_0+Kt.$$

При цьому щільність розподілу тривалості проміжку часу між вимогою, що надійшла в момент часу t_0, і наступною має вигляд

$$f(t_0,\tau)=[\lambda_0+K(t_0+\tau)]e^{-\lambda_0\tau-K(t_0-\tau)}\cdot\frac{K\tau^2}{2}. \qquad (5.6)$$

Для порівняння на рис. 5.2 побудовані відповідні закони розподілу при $\lambda_0=\lambda=1$. Крива 2 побудована для K = 0,1; t_0 = 0: крива 3 для K=0,1; t_0 = 1: крива 4 для K=2; t_0 = 0. Таким чином, для кривих 2 і 3 коефіцієнт той самий, а момент початку відліку проміжку часу τ – різний. Для кривих 3 та 4, навпаки, момент той самий, а коефіцієнт K різний. Аналіз законів розподілу (рис. 5.4) показує, що при відповідних значеннях K та λ_0 закон розподілу для нестаціонарного потоку вимог мало відрізняється від закону розподілу для найпростішого потоку (крива 1).

При більших значеннях коефіцієнта K, що задовольняє нерівність

$$\sqrt{K}-\lambda_0-Kt_0\geq 0,$$

закон розподілу має максимум при τ >0, а саме:

$$\tau_{f\max}=\frac{\sqrt{K}-\lambda_0-Kt_0}{K}.$$

Цей максимум виник, наприклад, на кривій 4 (рис. 5.4). Формалізація нестаціонарних пуассонівських потоків вимог вимагає, насамперед, визначення $\lambda(t)$, що викликає необхідність у значному обсязі досліджувати даний виробничий процес. Відсутність післядії в потоці спрощує дослідження, що у більшості практичних випадків приводить до одержання досить точної формалізації [44].

В ординарних потоках іноді має місце обмежена післядія. Коли вихідний потік вимог однієї системи масового обслуговування є одночасно вхідним потоком вимог іншої системи масового обслуговування (у так званих багатофазних системах), післядію в потоці майже завжди варто враховувати навіть у тому випадку, якщо вхідний потік першої системи є найпростішим. Ступінь післядії залежить від організації роботи першої системи й, у першу чергу, від числа обслуговуючих апаратів у ній. Позначимо через τ_{ni} (i =1, 2, 3....) проміжки часу між сусідніми моментами появи вимог. Величини τ_{ni} (i = 1, 2, 3, ...) становлять послідовність взаємно незалежних величин, якщо потік вимог – найпростіший. Однак зворотне висловлення буде несправедливим. Тільки в окремому випадку при взаємній незалежності величин у послідовності τ_{ni} (i = 1, 2, 3, ...) потік вимог виявиться найпростішим. У загальному випадку стаціонарний ординарний потік вимог із взаємно незалежними величинами τ_{ni} (i = 1, 2, 3, ...) має обмежену післядію. Такий потік називають потоком Пальма.

Можна показати, що потік Пальма повністю визначається функцією Пальма $\varphi_0(\tau)$, що являє собою імовірність того, що за проміжок часу ($t_0;t_0+\tau$) не надійде жодної вимоги, за умови, що в початковий момент t_0 надійшла одна вимога. Параметр потоку вимог за відомою функцією Пальма знаходять із виразу

$$\lambda = \frac{1}{\int\limits_0^\infty \varphi_0(t)dt}. \tag{5.7}$$

Функція розподілу проміжку часу $\tau_{n_1} = t_1 - t_0$, де t_1 і t_0 – моменти появи сусідніх вимог, причому t_0 – початковий момент визначається формулою

$$F_1(\tau) = \lambda \int\limits_0^\tau \varphi_0(t)dt. \tag{5.8}$$

Функції розподілу проміжків часу $\tau_{nj} = t_j - t_{j-1} (j = 1,2,3,4....)$, де t_j, t_{j-1} – моменти появи сусідніх вимог, виражені через $\varphi_0(\tau)$, мають вигляд

$$F_j(\tau) = 1 - \varphi_0(\tau). \tag{5.9}$$

Розбіжність виразів $F_1(\tau), F_j(\tau)$ свідчить про наявність післядії. Якщо функція Пальма для потоку вимог

$$\varphi_0(\tau) = e^{-a\tau}, \tag{5.10}$$

то відповідно до формули (5.7) маємо [46]

$$\lambda = \frac{1}{\int\limits_0^\infty e^{-at}} = \frac{1}{\left[-\frac{1}{a}e^{-at}\right]_0^\infty} = a.$$

Коефіцієнт a у виразі функції Пальма (5.10) є параметром потоку

$$\varphi_0(\tau) = e^{\lambda\tau}. \tag{5.11}$$

Підставляючи функцію Пальма (5.11) в (5.8) і (5.9), одержимо

$$\begin{aligned} F_1(\tau) &= \lambda \int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau}dt = \lambda \left| -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} \right|_0^\tau = 1 - e^{\lambda t}, \\ F_j(\tau) &= 1 - e^{\lambda t} (j = 2,3,4,...). \end{aligned} \tag{5.12}$$

Таким чином, якщо в окремому випадку функція Пальма має вигляд (5.11), то функції розподілу $F_l(\tau)$ й $F_j(\tau)(j = 2,3,4,.....)$ збігаються, що свідчить про відсутність післядії. Отже, в цьому випадку має місце найпростіший потік вимог з параметром $\lambda = a$ і з показовим законом розподілу тривалості проміжку часу між будь-якими двома сусідніми моментами появи вимог. Перейдемо до математичного опису роботи обслуговуючих апаратів. Найважливішим показником роботи обслуговуючого апарата є час обслуговування вимоги, що встановлює тривалість перебування вимоги в обслуговуючому апараті.

Власне кажучи, час обслуговування є штучним часом для даної операції, яка виконується розглянутим пристроєм (обслуговуючим апаратом).

У загальному випадку час обслуговування є випадковою величиною, тому що вимоги не є зовсім ідентичними, а стан і можливість виконання обслуговування для різних обслуговуючих апаратів одного типу змінюються від одного апарата до іншого в часі й у межах допусків. Позначимо час обслуговування однієї вимоги через $\tau_{об}$. Оскільки цей час є випадковою величиною, то її можна описати певним законом розподілу:

$$F_{об}(\tau) = p(\tau_{об} < \tau)(\tau \geq 0). \tag{5.13}$$

У цьому випадку функція $F_{об}(\tau)$ визначає ймовірність, що $\tau_{об}$ буде менше деякого проміжку час τ, тобто ймовірність того, що за інтервал час $(t_0; t_0 + \tau)$ обслуговуватиметься хоча б одна вимога, де t_0 – початок часу відліку, що збігається з початком обслуговування першої вимоги. Очевидно, що вираз (5.13) можна записати у вигляді

$$F_{об}(\tau) = 1 - p(\tau_{об} \geq \tau), \tag{5.14}$$

де $p(\tau_{об} \geq \tau)$ – ймовірність того, що за інтервал $(t_0, t_0 + \tau)$ не буде обслуговуватися жодна вимога.

Імовірність того, що за інтервал $(t_0; t_0 + \tau)$ обслуговуватиметься m вимог, може бути знайдена при відповідному законі розподілу кількості обслужених вимог за формулою Пуассона

$$P_m(\tau) = \frac{(\mu\tau)^m e^{-\mu\tau}}{m!},$$

де μ – параметр обслуговуючого апарата, що дорівнює середньому числу вимог, які можуть бути обслужені даним апаратом за одиницю часу;

m – кількість обслужених вимог.

Оскільки $p(\tau_{об} \geq \tau) = p_{m=0}(\tau) e^{-\mu t}$, то функцію розподілу часу обслуговування однієї вимоги відповідно до (5.12) наводять у вигляді

$$F_{об}(\tau) = 1 - e^{-\mu\tau} = 1 - e^{-\frac{\tau}{M(\tau_{об})}}, \tag{5.15}$$

де M ($\tau_{об}$) — математичне сподівання часу обслуговування. Із цього виразу видно, що час обслуговування має показовий закон розподілу.

Цей закон має місце в багатьох практичних випадках і може бути використаний для формалізації процесів масового обслуговування. Однак основні результати при формалізації процесів масового обслуговування залежать головним чином від середнього значення часу обслуговування однієї вимоги $M(\tau_{об}) = \frac{1}{\mu}$, а характер закону розподілу часу обслуговування на ці результати майже зовсім не впливає. Тому практично прийнятні результати можна одержати в більшості випадків, приймаючи показовий закон розподілу. Універсальна функція показового розподілу часу обслуговування показана на рис. 5.3 для конкретного μ, потрібно тільки встановити відповідний масштаб часу по осі абсцис.

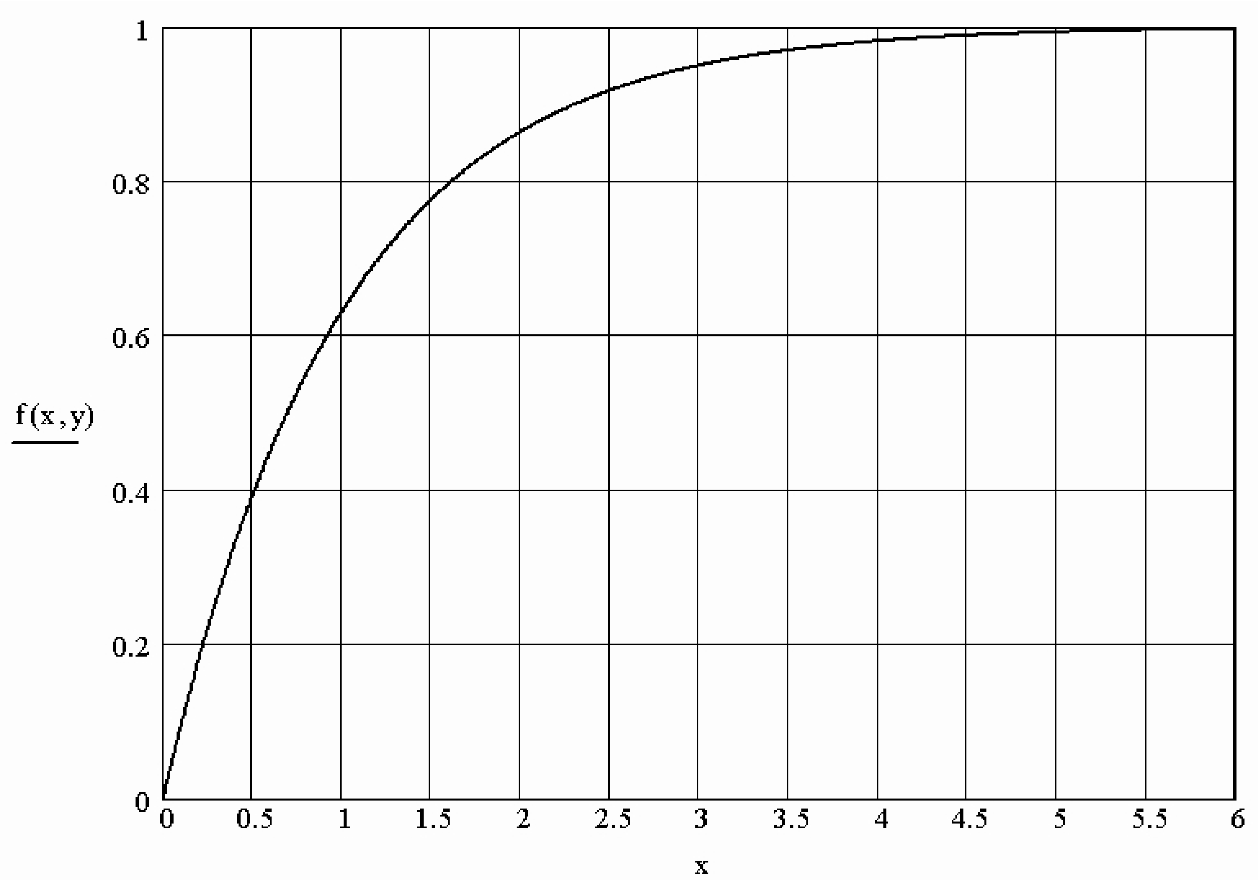

Рис. 5.3. Універсальна крива показової функції розподілу часу обслуговування однієї вимоги

5.3. Формалізація основних типів систем масового обслуговування

Задача формалізації конкретної системи масового обслуговування полягає у встановленні типу даної системи, у з'ясуванні кількісних характеристик вхідного потоку вимог й обслуговуючих апаратів і, нарешті, у математичному поданні залежностей характеристик ефективності обслуговування від характеристик вхідного потоку вимог й обслуговуючих апаратів [8, 10].

У даному параграфі ми не маємо можливості зупинятися на конкретних виробничих процесах масового обслуговування. Як і раніше, міркування будемо вести для відокремлених систем масового обслуговування з абстрактним вхідним потоком вимог. Причому, основна увага буде приділятися вихідним даним і математичним залежностям, за допомогою яких вирішують задачі формалізації та їх використання в практиці.

Система масового обслуговування з відмовами

Нагадаємо, що у виробничих системах обслуговування з відмовами вхідна вимога обслуговується тільки в тому випадку, якщо в момент надходження вимоги вільний хоча б один обслуговуючий апарат. У противному разі вимога відразу ж залишає систему, виявлячись без обслуговування [12, 14].

Будемо розглядати найпростіший вхідний потік вимог, який описується законом розподілу Пуассона. Відповідно до нього поява однієї вимоги за проміжок часу τ знаходять за формулою

$$P_l(\tau)=\frac{(\lambda\tau)^l e^{-\lambda\tau}}{l!},$$

де λ – параметр потоку вимог, який дорівнює математичному сподіванню числа вимог за одиницю часу. У попередньому розділі було показано, що функція розподілу тривалості проміжку часу між сусідніми моментами появи вимог є показовою:

$$F(\tau)=1-e^{-\lambda\tau}. \qquad (5.16)$$

Розподіл часу обслуговування приймемо також показовим з параметром

$$F_{об}(\tau)=1-e^{-\mu\tau}. \qquad (5.17)$$

Таким чином, вихідними даними при формалізації системи масового обслуговування з відмовами мають бути параметри λ й μ, які знаходять у результаті статистичних досліджень потоку вимог й обслуговуючих апаратів або шляхом аналітичних розрахунків. Причому при статистичних дослідженнях часто спочатку легше визначити не сам параметр μ, а величину $M(\tau_{об})=\frac{1}{\mu}$ – математичне сподівання часу обслуговування однієї вимоги.

Прийнявши функції розподілу тривалості проміжку часу між сусідніми моментами появи вимог на обслуговування й часу їхнього обслуговування показовими, одержуємо, що кількість обслуговуючих апаратів, зайнятих у момент часу t_2, залежить від кількості зайнятих обслуговуючих апаратів у попередній момент часу t_1 й не залежить від того, яким чином система обслуговування прийшла в стан, який характеризується моментом t_1. Це випливає безпосередньо із властивості показового закону розподілу, відповідно до якого будь-які відомості про тривалість часу τ, розподіленого за показовим законом, не впливають на закон розподілу часу, що залишився.

Випадкові процеси, в яких імовірність будь-якого стану системи в майбутньому залежить тільки від стану системи в даний момент і не залежить від того, яким чином система прийшла в цей стан, називаються марковськими процесами [15, 17].

5.4. Аналіз показників надійності на основі теорії систем масового обслуговування

В наш час все частіше ставиться задача створення кібернетичних систем керування автоматичними лініями, складними виробничими об'єктами або комплексом технологічних процесів. Основою таких систем керування в більшості випадків є цифрова керуюча машина. Для спільності міркувань будемо оперувати поняттям «цифрова керуюча система» [23].

Звичайно цифрова керуюча система має *n* паралельних трактів керування. Одним з основних показників надійності її роботи можна вважати ймовірність того, що в момент часу *t* цифрова керуюча система готова до прийняття вимоги на керування за даним трактом. Проведемо формалізацію роботи цифрової керуючої системи з метою одержання зазначеного показника надійності.

Розрізняють два цикли станів цифрової керуючої системи за даним трактом керування: нормальний й аварійний (рис. 5.4).

Нормальний цикл складається зі станів C_0, C_1, C_2. Припустимо, що спочатку цифрова керуюча система за даним трактом перебувала в стані C_0 готовності до прийняття вимоги на керування. Тоді після появи вимоги на керування за даним трактом система перейде в новий стан C_1, що відповідає випадку, коли вимога на керування системою прийнята, однак керування за даним трактом ще не почато [11].

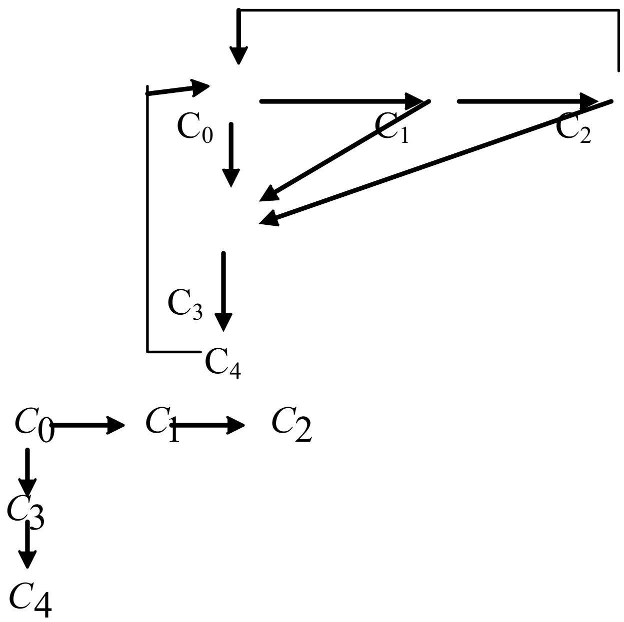

Рис. 5.4. Діаграма станів цифрової керуючої системи

Наявність стану C_1 пов’язана з тим, що в цифрових керуючих системах має місце оббігаючий контроль трактів керування. Його здійснюють одночасно лише за одним трактом, у якому до моменту контролю може з'явитися вимога на керування. Стан керування за даним трактом позначається через C_2. Після завершення керування система знову переходить у стан C_0 [22].

Аварійний цикл містить у собі стани C_3 і C_4. Перший з них характеризується проміжком часу з моменту відмови якого-небудь приладу цифрової керуючої системи до моменту виявлення цієї відмови обслуговуючим персоналом. Цей стан чекання ремонту потім змінюється безпосередньо станом ремонту C_4. У стані C_3 система може перейти з будь-якого стану C_0, C_1 або C_2. Однак зі стану C_4 система р може переходити тільки у стан C_0.

Аналіз роботи цифрової керуючої системи показує, що процеси в нормальному й аварійному циклах можна уявити як процеси масового обслуговування.

Вхідний потік вимог на керування за даним трактом у більшості випадків можна прийняти найпростішим, тобто ймовірність того, що протягом проміжку часу тривалістю τ, що починається з певного моменту часу, прийнятого за початок відліку, не виникне жодної вимоги, можна знайти за формулою

$$p(\tau_n > \tau) = e^{-\lambda_1 \tau}, \tag{5.18}$$

де λ_1 – середня кількість вимог за одиницю часу.

Вимога, що з'явилася, на керування за даним трактом виявляється системою оббігаючого контролю через деякий проміжок часу після його появи. Цей проміжок часу є випадковою величиною, підлеглою показовому закону розподілу з параметром μ_1:

$$p(\tau_1 > \tau) = e^{-\mu_1 \tau}, \tag{5.19}$$

причому $\mu_1 = \dfrac{1}{M(\tau_1)}$, де $M(\tau_1)$ – середнє значення проміжку часу τ_1 появи вимоги на керування за даним трактом до моменту виявлення цієї вимоги системою оббігаючого керування за даним трактом, також є величиною випадковою з показовим законом розподілу:

$$p(\tau_2 > \tau) = e^{-\mu_2 \tau}, \tag{5.20}$$

параметр μ_2 якого пов'язаний обернено пропорційною залежністю із середнім значенням часу керування

$$\mu_2 = \frac{1}{M(\tau_2)}.$$

Практика експлуатації цифрових керуючих систем показує, що потік відмов у системі із задовільною точністю можна описати показовим законом розподілу:

$$p(\tau_0 > \tau) = e^{-\lambda_2 \tau}, \tag{5.21}$$

де параметр λ_2 – середня кількість відмов за одиницю часу.

Показовий закон може бути прийнятий також для розподілу проміжку часу τ_3 з моменту відмови якого-небудь пристрою в цифровій керуючій системі до моменту виявлення цієї відмови й для розподілу часу усунення виявленої несправності в системі τ_4. Відповідно можемо записати:

$$p(\tau_3 > \tau) = e^{-\lambda_3 \tau}, \tag{.5.22}$$

$$p(\tau_4 > \tau) = e^{-\lambda_4 \tau}. \tag{5.23}$$

За аналогією з попередніми рівностями маємо

$$M(\tau_3) = \frac{1}{\mu_3},$$

$$M(\tau_4) = \frac{1}{\mu_4}.$$

Середнє значення проміжку часу – відповідно τ_3, τ_4.

Процеси масового обслуговування в обох циклах виявляються тісно пов'язаними, тому для визначення ймовірності станів C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 потрібно скласти диференціальні рівняння, що описують одночасно обидва цикли.

Складемо спочатку диференціальне рівняння для ймовірності стану C_0, тобто стану готовності цифрової керуючої системи до прийняття вимоги на керування за даним трактом. Позначимо зазначену ймовірність для моменту часу t через $p_0(t)$. Тоді через нескінченно малий проміжок часу тривалістю τ ця ймовірність дорівнює $p_0(t+\tau)$. Складемо вираз для останньої ймовірності за умови, що в момент часу t цифрова керуюча система могла перебувати в будь-якому можливому стані.

Очевидно, що в момент часу $t+\tau$ цифрова керуюча система може виявитися в стані C_0 тільки в тому випадку, якщо має місце одне із трьох складних подій.

Перша складна подія полягає в тому, що система в момент часу t перебувала в стані C_0 і за проміжок часу τ із цього стану не вийшла (вимога на керування не прийшла, і система не відмовила). Імовірність p' такої складної події може бути знайдена як добуток трьох ймовірностей, а саме: $p_0(t)$ – з того, що в момент t система перебуває в стані C_0; $p(\tau_n > \tau)$ – з того, що вимога на керування за проміжки часу не прийшла; $p(\tau_0 > \tau)$– імовірності того, що за проміжок часу система не відмовила. Маючи на увазі (5.18) і (5.21), можемо записати

$$p' = p_0(t) p(\tau_n > \tau) p(\tau_0 > \tau) = p_0 e^{-\lambda_1 \tau} e^{-\lambda_2 \tau},$$

або з точністю до величини другого порядку малості

$$p' = p_0 [1 - \lambda_1 \tau - \lambda_2 \tau]. \tag{5.24}$$

Друга складна подія полягає в тому, що система, перебуваючи в момент часу t у стані (C_2) керування за даним трактом, за проміжок часу τ перейшла в стан C_0, тобто рівняння закінчилося, і система стала готовою до прийняття наступної вимоги на керування. Імовірність p'' такої складної події дорівнює добутку $p_2(t)$ ймовірності того, що в момент часу t система перебуває в стані керування, і $p(\tau_2 < \tau)$ ймовірності того, що за проміжок часу τ керування закінчено. З урахуванням (5.20) можемо записати

$$\begin{aligned} p'' &= p_2(t) \cdot p(\tau_2 < \tau) = p_2(t)[1 - e^{-\mu_2 \tau}], \\ p'' &\cong p_2(t) \mu_2 \tau. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Третя складна подія полягає в тому, що система, перебуваючи в момент часу t у стані (C_4) ремонту несправності, за проміжок часу t перейшла в стан C_0, тобто ремонт закінчився, і система стала готовою до прийняття чергової вимоги на обслуговування. За аналогією з попереднім випадком можемо, маючи на увазі (5.23), записати вираз для ймовірності p''' розглянутої складної події

$$p''' = p_4(t) \cdot p(\tau_4 < \tau) = p_4(t)[1 - e^{-\mu_4 \tau}],$$
$$p''' \cong p_4(t)\mu_4\tau, \tag{5.26}$$

де $p_4(t)$ – імовірність того, що в момент часу t система перебуває в стані (C_4) ремонту, а $p(\tau_4 \subset \tau)$– ймовірність того, що за проміжок часу t ремонт закінчився, і система стала готовою до прийняття чергової вимоги на обслуговування.

Таким чином, вираз для ймовірності $p_0(t+\tau)$ має вигляд

$$p_0(t+\tau) = p' + p'' + p''' = p_0(t)[1 - \lambda_1\tau - \lambda_2\tau] + p_2(t)\mu_2\tau + p_4(t)\mu_4\tau \quad \text{або}$$

$$\frac{p_0(t+\tau) - p_0(t)}{\tau} = \mu_2 p_2(t) + \mu_4 p_4(t) - (\lambda_1 + \lambda_2) p_0(t).$$

Переходячи до межі при $\tau \to 0$, одержимо шукане диференціальне рівняння

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \mu_2 p_2(t) + \mu_4 p_4(t) - (\lambda_1 + \lambda_2) p_0(t). \tag{5.27}$$

Тепер складемо диференціальне рівняння для ймовірності стану C_1, коли вимога на керування системою прийнята, однак саме керування за даним трактом ще не почато. Позначимо зазначену ймовірність для моменту часу t через $p_1(t)$, а для моменту часу $t+\tau$ відповідно через $p_1(t+\tau)$

У момент часу $t+\tau$ цифрова керуюча система може виявитися в стані C_1 тільки в тому випадку, якщо має місце одна із двох складних подій:

1. Система в момент часу t перебувала в стані C_1 і за проміжок часу τ із цього стану не вийшла (керування за даним трактом ще не почато, і система не відмовила).
2. Система, перебуваючи в момент часу t у стані C_0 готовності до прийняття вимоги на керування за даним трактом, за проміжок часу τ перейшла в стан C_1, тобто вимога на керування з'явилася, але саме керування ще не почате. Ймовірності цих складних подій, позначені відповідно через p^{IV} й p^{V}, за аналогією з (5.24) і (5.25) можуть бути подані у вигляді

$$p^{IV} = p_1(t) \cdot p(\tau_1 > \tau) \cdot p(\tau_0 > \tau) = p_1(t) e^{-\mu_1\tau} \cdot e^{-\lambda_2\tau} = p_1(t)[1 - \mu_1\tau - \lambda_2\tau], \tag{5.28}$$
$$p^{V} = p_0(t) \cdot p(\tau_n < \tau) = p_0(t)[1 - e^{-\lambda_1\tau}] \cong p_0(t)\lambda_1\tau.$$

Тоді

$$p_1(t+\tau)=p^{IV}+p^{V}=p_1(t)[1-\mu_1 r-\lambda_2 r]+p_0(t)\lambda_1\tau\,,$$

$$\frac{p_1(t+\tau)-p_1(t)}{\tau}=\lambda_1 p_0(t)-(\mu_1+\lambda_2)p_1(t)\,,$$

$$\frac{dp_1(t)}{dt}=\lambda_1 p_0(t)-(\mu_1+\lambda_2)p_1^{'}(t)\,.$$

Диференціальні рівняння для станів C_2, C_3, C_4 знаходять аналогічними виділеннями для складання виразів для ймовірностей $p_2(t+\tau)$, $p_3(t+\tau)$, $p_4(t+\tau)$. Відповідні міркування й викладення остаточно дадуть:

$$\frac{dp_2(t)}{dt}=\mu_1 p_1(t)-(\mu_2+\lambda_2)p_2(t)\,, \tag{5.29}$$

$$\frac{dp_3(t)}{dt}=\lambda_2[p_0(t)+p_1(t)+p_2(t)]-\mu_3 p_3(t)\,, \tag{5.30}$$

$$\frac{dp_4(t)}{dt}=\mu_3 p_3(t)-\mu_4 p_4(t)\,. \tag{5.31}$$

Шукана ймовірність $p_0(t)$, тобто ймовірність того, що в момент часу t цифрова керуюча система готова до прийняття вимоги на керування за даним трактом, може бути знайдена вирішенням системи диференціальних рівнянь (5.27) — (5.31) за початкових умов

$$p_0(0)=1, p_1(0)=p_2(0)=p_3(0)=p_4(0)=0\,.$$

Це рішення виходить досить громіздким.

У переході в системі диференціальних рівнянь (5.27) — (5.31) до межі при $t\to\infty$ варто пам'ятати, що

$$\lim_{\to\infty} p_s(t)=p_s\,,\ \lim_{\to\infty}\frac{dp_s(t)}{dt}=0\,, s=0,1,2,3,4\,.$$

Після переходу до межі одержимо

$$\mu_2 p_2+\mu_4 p_4-(\lambda_1+\lambda_2)p_0=0\,, \tag{5.32}$$

$$\lambda_1 p_0-(\mu_1+\lambda_2)p_1=0\,, \tag{5.33}$$

$$\mu_1 p_1-(\mu_2+\lambda_2)p_2=0\,, \tag{5.34}$$

$$\lambda_2(p_0+p_1+p_2)-\mu_3 p_3=0\,, \tag{5.35}$$

$$\mu_3 p_3-\mu_4 p_4=0\,. \tag{5.36}$$

Отримана система алгебричних рівнянь дозволяє легко одержати граничні значення ймовірностей p_0, p_1, p_2, p_3, p_4.

Рівняння (5.33) дає:

$$p_1=\frac{\lambda_1}{\mu_1+\lambda_2}p_0. \tag{5.37}$$

З рівняння (5.34) з урахуванням (5.37) маємо

$$p_2=\frac{\mu_1}{\mu_2+\lambda_2}p_1=\frac{\mu_1\lambda_1}{(\mu_1+\lambda_2)(\mu_2+\lambda_2)}p_0. \tag{5.38}$$

При підстановці (5.37) і (5.38) у рівняння (5.35) одержимо

$$p_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3}\left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1 + \lambda_2} + \frac{\mu_1 \lambda_1}{(\mu_1 + \lambda_2)(\mu_2 + \lambda_2)}\right)p_0. \quad (5.39)$$

Підстановка (5.39) у рівняння (5.36) так само, як і підстановка (5.37) і (5.38) у рівняння (5.32), дозволяє записати

$$p_4 = \frac{\lambda_2}{\mu_4}\left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1 + \lambda_2} + \frac{\mu_1 \lambda_1}{(\mu_1 + \lambda_2)(\mu_2 + \lambda_2)}\right)p_0. \quad (5.40)$$

Скориставшись очевидною рівністю

$$\sum_{s=0}^{4} p_s = 1,$$

остаточно одержуємо

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_2}{\mu_3} + \frac{\lambda_2}{\mu_4}} - \frac{1}{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_1 \mu_1}{(\mu_1 + \lambda_2)(\mu_2 + \lambda_2)}}. \quad (5.41)$$

Звичайно в цифрових керуючих системах мають місце такі нерівності:

$$\lambda_2 << \mu_1, \lambda_2 << \mu_2.$$

У цьому випадку ймовірність готовності системи до прийняття вимоги на керування подається у вигляді

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_2}{\mu_3} + \frac{\lambda_2}{\mu_4}} - \frac{1}{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_1}{\mu_2}}. \quad (5.42)$$

Нормальний й аварійний цикли у виразі (5.42) наведені окремими співмножниками. Це дозволило ввести як критерії оцінки ефективності роботи цифрової керуючої системи коефіцієнти готовності системи по нормальному й аварійному циклах.

Вирази для цих коефіцієнтів записують відповідно у вигляді

$$k_н = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_1}{\mu_2}}, \quad (5.43)$$

$$k_a = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_2}{\mu_3} + \frac{\lambda_2}{\mu_4}}. \quad (5.44)$$

Імовірність (5.4) знаходиться, таким чином, як добуток попередньо знайдених коефіцієнтів готовності $k_н$, k_a:

$$p_0 = k_H k_a.$$

Звернувшись до співвідношень (5.37) — (5.39), (5.41), можна показати, що інший показник надійності роботи цифрової керуючої системи, обумовлений як імовірність ($p_н$) того, що система перебуває в нормальному циклі роботи, у точності дорівнює коефіцієнту готовності системи при аварійному циклі. Дійсно,

$$p_{н}p_0 + p_1 + p_2 = p_0\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1+\lambda_2}+\frac{\lambda_1\mu_1}{(\mu_1+\lambda_2)\mu_2+\lambda_2}\right)=\frac{1}{1+\frac{\lambda_2}{\mu_3}+\frac{\lambda_2}{\mu_4}}=k_a.$$

Тоді ймовірність того, що в цифровій керуючій системі є несправність, дорівнює

$$p_a = p_3 + p_4 = 1 - k_a.$$

Коефіцієнт готовності цифрової керуючої системи при нормальному циклі $k_н$, що входить тільки у вираз (5.42) для ймовірності p_0, характеризує швидкодію пристроїв оббігаючого контролю, а також середню тривалість процесів керування, що залежить як від самої керуючої системи, так і від об'єктів керування.

Формалізація роботи системи керування виробничими процесами дозволяє на стадії складання плану автоматизації висунути вимоги до параметрів керуючої системи. Коефіцієнти готовності системи k_a й $k_н$ повинні мати максимально можливі значення [8].

Аналіз формули (5.44) показує, що коефіцієнт готовності системи при аварійному циклі збільшується зі збільшенням параметрів μ_3 і μ_4 при незмінному параметрі λ_2.

Обидва параметри μ_3, μ_4 збільшуються при введенні в цифрову керуючу систему додаткових пристроїв апаратного захисту. Однак це призводить до деякого збільшення параметра потоку відмов λ_2. Очевидно, що для μ_3 й μ_4 щодо цього існують оптимальні значення.

У цифрових керуючих системах є можливість збільшення параметра μ_3 також за рахунок збільшення частоти періодично реалізованих тестових програм або за допомогою додаткових логічних способів контролю роботи встаткування керуючої системи, вбудованих у робочу програму. Слід мати на увазі, що при цьому зменшується коефіцієнт готовності системи за нормальним циклом $k_н$, тому що параметр μ_2 зменшується зі збільшенням часу, витраченого в процесі нормальної роботи системи на тестовий і логічний контроль. Тут теж треба проводити необхідну оптимізацію параметра μ_3.

Збільшення параметра μ_4 можна добитися також введенням додаткового діагностичного контролю встаткування керуючої системи, призначенням на обслуговування керуючої системи висококваліфікованого персоналу й передбаченням при проектуванні системи зручної й швидкої заміни пристроїв, що відмовили.

Аналогічний аналіз можна провести для коефіцієнта готовності керуючої системи при нормальному циклі (5.43).

Таким чином, формалізація роботи системи керування виробничими процесами дозволяє не тільки розробити науково обґрунтований план автоматизації, але й виробити вимоги до проектування керуючої системи й основні пункти інструкції для майбутнього обслуговуючого персоналу [9].

Контрольні запитання

1. Покажіть можливість і корисність подання виробничого процесу як логістичного. Наведіть приклади.

2. Назвіть основні типи систем обслуговування та їхніх можливих застосувань для модулювання виробничих процесів (механообробки, гальванічного покриття, термічної обробки і т. ін.).

3. Покажіть особливість і специфіку СМО для аналізу реальних матеріальних інформаційних потоків.

4. Покажіть різницю між стаціонарним і нестаціонарним пуассонівськими потоками.

5. Покажіть особливості потоку Пальма і його формалізацію за допомогою функцій Пальма. У чому його відмінність від найпростішого пуассонівського потоку?

6. Покажіть основні етапи розрахунку надійності систем керування виробничими процесами.

7. Розгляньте процес виробництва у вигляді трьох послідовних фаз - постачання, виробництво продукції, збут продукції. Покажіть можливість застосування моделей СМО для аналізу зазначеного трифазного процесу.

8. Розгляньте нормальний та аварійний цикли станів керуючої системи і покажіть можливість формалізації зазначених режимів за допомогою засобів теорії масового обслуговування.

9. Які вихідні дані необхідні для розрахунку виробничого процесу як логістичної системи за допомогою моделей СМО з відмовами й з чеканням?

10. Які основні типи систем обслуговування можуть бути використані для розрахунку завантаження виробничого встаткування, часу виробничого циклу й ін. ?

Завдання

1. Скласти модель обслуговування для технологічного процесу з людиною-оператором. Показати можливість застосування розрахункових формул для робіт основних характеристик досліджуваного процесу.

2. На основі опису матеріальних й інформаційних процесів скласти логістичний ланцюг, а потім для нього зобразити послідовну мережу СМО єдиного проведення ймовірнісного аналізу потоків.

3. Обґрунтувати застосування моделі $\mu/\mu/\infty/\infty/\infty/$ Fifo для аналізу процесів (ЛПП) на основі опису, пропонованого в підрозд. 5.2. Одержати вираз для математичної оцінки числа вимог, що надійшли за одиницю часу у випадку розподілу Пуассона для моделі потоку.

4. Обчислити розрахунки й побудувати криві ймовірності появи рівно однієї вимоги за проміжок часу τ від $\lambda\tau$ при найпростішому потоці вимог.

5. Розрахувати й побудувати криві законів розподілу проміжку часу між двома сусідніми вимогами.

6. Показати, що функція Пальма дозволяє формально визначити факт наявності післядії при описі потоків.

7. Скласти алгоритм розрахунку показників надійності систем керування виробничими процесами.

8. Скласти систему диференціальних рівнянь станів систем з метою проведення надійного розрахунку.

9. Одержати вираз для p_0 (формула (5.41)).

Розділ 6. ІМОВІРНІСНІ МОДЕЛІ БАГАТОФАЗНИХ ЛОГІСТИЧНИХ СИСТЕМ

6.1. Логістична система із двох послідовних каналів

У випадку необмеженого вхідного пуассонівського потоку з параметром λ, що надходить у перший із двох послідовних каналів, які мають експоненціальний час обслуговування з параметрами μ_1 й μ_2, відповідна вимога має пройти через обидва обслуговуючих каналів [8, 9].

Маємо таке рівняння для перехідного стану (їхнє виведення відбувається звичайним чином):

$$P'(0,0,t) = -\lambda P(0,0,t) + \mu_2 P(0,1,t),\ n_1 = n_2 = 0; \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} P'(0,n_2,t) &= -(\lambda(+\mu_2) + P(0,n_2,t) + \mu_1 P(1,n_2-1,t) + \\ &+ \mu_2 P(0,n_2+1,t),\ n_1 = 0,\ n_2 > 0; \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned} P'(n_1,0,t) &= -(\lambda + \mu_1) P(n_1,0,t) + \mu_2 P(n_1,1,t) + \\ &+ \lambda P(n_1-1,0,t),\ n_1 > 0,\ n_2 = 0; \end{aligned} \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned} P'(n_1,n_2,t) &= -(\lambda + \mu_1 + \mu_2) P(n_1,n_2,t) + \mu_1 P(n_1+1,n_2-1,t) + \\ &+ \mu_2 P(n_1,n_2+1,t) + \lambda P(n_1-1,n_2,t),\ n_1 > 0,\ n_2 > 0. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Нехай $P(n_1, n_2, t)$ – імовірність того, що в момент часу t у першій фазі є n_1 вимог (включаючи й ті, що перебувають на обслуговуванні), а в другій фазі перебуває n_2 вимог. Тоді розв'язок рівнянь для стаціонарного стану має вигляд

$$p(n_1,n_2) = \rho_1^{n_1} \cdot \rho_2^{n_2} \cdot p(0,0),$$

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}, \quad \rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}. \tag{6.5}$$

Оскільки

$$\sum_{\substack{n_1=0 \\ n_2=0}}^{\infty} p(n_1,n_2) = 1, \tag{6.6}$$

то

$$p(0,0) = (1-\rho_1)(1-\rho_2). \tag{6.7}$$

Математичне сподівання числа вимог, що перебувають у системі, можна обчислити, перемножуючи $p(n_1,n_2)$ на (n_1+n_2) і підсумовуючи спочатку за n_1, а потім за n_2. Одержимо

$$L = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} + \frac{\rho_2}{1-\rho_2} \quad . \tag{6.8}$$

Імовірність того, що в першій фазі перебуває n_1 вимог, знайдемо, зробивши підсумовування за n_2.

Одержимо $\rho_1^{n_1}$ (1-ρ_1).

Аналогічно $\rho_2^{n_2}$ (1-ρ_2) – імовірність того, що в другій фазі перебуває n_2 вимог.

Якщо є N однакових джерел вхідного потоку і для кожної вимоги існує ймовірність того, що за час Δt вона надійде в систему (дорівнює $\lambda\Delta t$), а вся решта умов залишається без зміни, то рівняння набувають вигляду:

1. Те ж саме, що і (6.1).
2. Те ж саме, що і (6.2) при $n_1 = 0; n_2 = 1,...,N-1$.
3. $P'(0,N,t) = -\mu_2 P(0,N,t) + \mu_1 P(1,N-1,t); n_1 = 0; n_2 = N$.
4. Те ж саме, що і (6.3) при $n_1 = 1,...,N-1; n_2 = 0$.
5. $P'(N,0,t) = -\mu_1 P(N,0,t) + \lambda P(N-1,0,t); n_1 = N, n_2 = 0$.
6. Те ж саме, що і (6.4) при $n_1 0 > 0, n_2 > 0, n_1 + n_2 < N$.
7. $P'(n_1,n_2,t) = -(\mu_1+\mu_2)P(n_1,n_2,t) + \mu_1 P(n_1+1,n_2-1,t) +$
$+\lambda P(n_1-1,n_2,t); n_1 > 0, n_2 > 0, n_1 + n_2 = N.$

У цьому випадку розв'язання для стаціонарного стану має вигляд

$$p(n_1,n_2) = \rho_1^{n_1} \cdot \rho_2^{n_2} \cdot p(0,0). \tag{6.9}$$

Просумувавши за n_1 й n_2 від нуля до N ($n_1+n_2 \le N$) і прирівнявши результат до одиниці, одержимо

$$\mathrm{p}(0,0) = \frac{(\rho_1-\rho_2)(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{(\rho_1-\rho_2)-(\rho_1^{N+2}-\rho_2^{N+2})+\rho_1\rho_2(\rho_1^{N+1}-\rho_2^{N+1})}. \tag{6.10}$$

Середнє число вимог, що перебувають у системі при $n_1+n_2 \le N$:

$$\mathrm{L} = \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N} (n_1+n_2)\, p\,(n_1, n_2) =$$

$$= \frac{1}{\rho_1-\rho_2} \left\{ \frac{\rho_1^2[1-(N+1)\rho_1^N + N\rho_1^{N+1}]}{(1-\rho_1)^2} - \frac{\rho_2^2[1-(N+1)\rho_2^N + N\rho_2^{N+1}]}{(1-\rho_2)^2} \right\} p(0,0). \tag{6.11}$$

Середнє число вимог, що обслуговуються:

$$\frac{(\rho_1+\rho_2)\left[(\rho_1-\rho_2)-(\rho_1{}^{N+1}-\rho_2{}^{N+1})+\rho_1\rho_2(\rho_1{}^N-\rho_2{}^N)\right]p(0,0)}{(1-\rho_1)(1-\rho_2)(\rho_1-\rho_2)}. \tag{6.12}$$

Середнє число вимог, що чекають:

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}\left[\frac{\rho_1}{1-\rho_1}+\frac{\rho_2}{1-\rho_2}\right]+\\&+\frac{1}{\rho_1-\rho_2}\left[\frac{\rho_2^{N+2}}{(1-\rho_2)^2}-\frac{\rho_1^{N+2}}{(1-\rho_1)^2}\right]+\\&+\frac{N}{\rho_1-\rho_2}\left[\frac{\rho_2^{N+2}}{1-\rho_2}-\frac{\rho_1^{N+2}}{1-\rho_1}\right]-\\&-(\rho_1-\rho_2)\left[\frac{\rho_2^{N+1}}{(1-\rho_2)(\rho_1-\rho_2)}-\frac{\rho_1^{N+1}}{(1-\rho_1)(\rho_1-\rho_2)}\right]\end{aligned}\right\}p(0,0). \quad (6.13)$$

Дані положення можна застосувати й до трифазної системи при необмеженому джерелі вхідного потоку.

6.2. Логістична система з послідовними й паралельними каналами

Викладені вище результати можна поширити на k послідовних фаз із чергою перед кожною фазою й необмеженим пуассонівським потоком, що надходить у кожну фазу. Кожна *i-а* фаза (i - будь-яке число) складається з r_i паралельних каналів з експоненціальним часом обслуговування та параметром μ_i (таким чином, імовірність того, що за час Δt буде закінчено обслуговування однієї з n_i вимог, що перебувають в *i-й* фазі, дорівнює $n_i\mu_i\Delta t+0(\Delta t)$ при $n_i<r_i$,а $r_i\mu_i\Delta t+0(\Delta t)$ при $n_i \geq r_i$). При $\rho_i=\frac{\lambda}{r_i\mu_i}$ (i=1,…,k) розв'язання для стаціонарного стану мають вигляд [47]

$$[\lambda+\sum_{j=1}^{k}\delta(n_j)a(n_j)\mu_j]\,\mathrm{p}(n_1,\ldots,n_k)=$$

$$\begin{aligned}&=\sum_{j=1}^{k}\delta(n_j+1)a(n_j+1)\mu_j p(n_1,\ldots,n_j+1,n_{j+1}-1,n_{j+2},\ldots,n_k)+\\&+\lambda p(n_1-1,n_2,\ldots,n_k).\end{aligned} \quad (6.14)$$

Якщо кожний з аргументів є негативним, то ймовірність дорівнює нулю й остання сума не містить членів *c-1,* а містить один член *c+1*. Крім того,

$$a(n_j)=\begin{cases}n_j, & n_j<r_j,\\ r_j, & n_j\geq r_j,\end{cases} \quad (6.15)$$

$$\delta\left(n_j\right)=\begin{cases}1_j, n_j \neq 0, \\ 0_j, n_j = 0_j,\end{cases} j=1,2,\dots,k. \tag{6.16}$$

Розв'язок має вигляд

$$p(n_1,\dots,n_k)=p(0,\dots\dots..,0)\prod_{j=1}^{k} b(n_j)\ , \tag{6.17}$$

$$b\left(n_j\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{n_j!}\left(r_j,\rho_j\right)^{n_j},\ n_j<r_j, \\ \dfrac{1}{r_j!}\left(r_j,\rho_j\right)^{r_j}\cdot\left(\rho_j\right)^{n_j-r_j},\ n_j\geq r_j.\end{cases} \tag{6.18}$$

Сума за всіма значеннями n_j має дорівнювати одиниці

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\dots\sum_{nk=0}^{\infty}[\prod_{j=1}^{k} b(n_j)]=\prod_{j=1}^{k}\ \ \sum_{j=0}^{\infty} b(n_j)\equiv\prod_{j=1}^{k} A_j,\ j=1,\dots\dots,k, \tag{6.19}$$

$$p(0,\ \dots,0)=\prod_{j=1}^{k} A_j^{\ -1}\ \dots \tag{6.20}$$

Розподіл ймовірностей для будь-якої фази знаходять шляхом підсумовування за числом вимог, що перебувають у всіх інших фазах. Звідси ймовірність того, що в *j-й* фазі є n_j вимог, визначається формулою [19]

$$p(n_j)=\frac{\mathrm{b(n_j)}}{A_j}\ .$$

Щоб знайти ймовірність того, що в *j-й* фазі перебуває n вимог, покладемо $n_j = n$. Цей результат можна одержати також, вирішуючи задачу для системи із паралельними каналами при $c= r_j$.

Поклавши r_j=1 (*j=1*,…...,*k*) для одного з послідовних каналів, одержимо

$$p\left(n_1,\dots,n_k\right)=p\left(0,\dots,0\right)\prod_{j=1}^{k}\rho_j^n\ , \tag{6.21}$$

$$p\left(0,\dots,0\right)=\prod_{j=1}^{k}\left(\rho_j-1\right) \tag{6.22}$$

Оскільки фази взаємно незалежні, то ймовірність того, що в *j-й* фазі перебуває *n* вимог, дорівнює

$$\rho_j^n\left(1-\rho_j\right). \qquad (6.23)$$

Середнє число вимог, що чекають в *i*-й фазі, становить

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\ \rho_j^n\ (1-\rho_j)=\frac{\rho_j}{1-\rho_j}. \qquad (6.24)$$

Середнє число вимог, що перебувають на обслуговуванні в *j-й* фазі:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_j^n\left(1-\rho_j\right)=\rho_j\ . \qquad (6.25)$$

Середнє число вимог, що чекають початку обслуговування в *j-й* фазі:

$$\rho_j^2\left(1-\rho_j\right)^{-1}. \qquad (6.26)$$

Математичне сподівання числа вимог, що перебувають у системі, дорівнює сумі математичних сподівань числа вимог, що перебувають у фазах [21].

Розподіл часу чекання для клієнта, що надходить із (*j*-1)-ї фази в *j-у*, як показано для одноканальної системи, має вигляд

$$f_j(\zeta)d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\rho_j\right)\rho_j^n\mu_j^n\zeta^{n-1}\frac{e^{-\mu_j\zeta}}{(n-1)!}d\zeta = \\ = \lambda\left(1-\rho_j\right)e^{-\left(\mu_j-\lambda\right)\zeta}d\zeta \qquad (6.27)$$

Імовірність відсутності чекання в *j*-й фазі дорівнює 1-ρ_j, а ймовірність чекання така:

$$(\mu_j-\lambda)e^{-(\mu_j-\lambda)\xi}\, d\xi\ . \qquad (6.28)$$

При $\mu_j=\mu$ $\sum(n_j)=n$. Нехай *p(n)* –- імовірність того, що в системі чекає *n* вимог. Тоді

$$p(n)=\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}\rho^n(1-\rho)^k\ , \qquad (6.29)$$

де $\rho=\lambda/\mu$.

6.3. Нерегулярний процес послідовного обслуговування в логістичній системі

Якщо в *j*-у фазу (з r_j паралельними каналами) допускається також зовнішній пуассонівський потік із параметром λ_j, а після закінчення обслуговування в цій фазі з імовірністю q_{jm} вимоги надходять в *m*-у фазу й потім обслуговування починається в порядку прибуття. При цьому інтенсивність надходження вимог в *j*-у фазу:

$$\overline{\lambda_j} = \lambda_j + \sum_m q_{mj} \cdot \overline{\lambda_m}. \tag{6.30}$$

Параметр λ_j відіграє в j-й фазі ту ж роль, що й параметр λ у попередньому випадку. Маємо

$$p(n_1, ..., n_k) = p_{n_1}^1 \cdot p_{n_2}^2 ... p_{n_k}^k, \tag{6.31}$$

де $\overline{\lambda_j} < \mu_j$, $j=1,...,k$.

Ймовірність того, що в j-й фазі перебуває n_j вимог:

$$p_{n_j}^j = \begin{cases} \dfrac{p_0^j \left(\dfrac{\overline{\lambda}_j}{\mu_j}\right)^{nj}}{n_j}, & n_j = 0, 1, ..., r_j, \\ \dfrac{p_0^j \left(\dfrac{\overline{\lambda}_j}{\mu_j}\right)^{nj}}{r_j!(r_j)^{n_j - r_j}}, & n_j = r_j, ... \end{cases} \tag{6.32}$$

Постійну p_0^j знайдемо із співвідношення $\sum_{n_j} p_{n_j}^j = 1$.

Цей результат ґрунтується на тому, що розподіл числа вимог, що перебувають у кожній фазі, не залежить від розподілу числа вимог, які перебувають у будь-якій іншій фазі [23].

6.4. Розрахункові формули для часу чекання в послідовній логістичній системі з паралельними каналами

Припустимо, що $P(x_j > t) = K_j e_j^{ct}$ (6.40) є ймовірність того, що час чекання в j-й фазі, що складається з r_j паралельних каналів, більше t. Нехай у цьому виразі [47]

$$c_j = -r_j \cdot \mu_j (1 - \rho_j), \tag{6.33}$$

$$K_j = P(x_j > 0). \tag{6.34}$$

Можна показати, що в цьому випадку функція розподілу часу чекання у всіх k фазах має вигляд

$$P\left(\sum_{j=1}^{k} x_j \le \tau\right) = 1 - \sum_{j=1}^{k} A_{jk} e^c j^\tau, \tag{6.35}$$

де

$$A_{jk} = K_j \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i=j}}^{k} 1 - \frac{K_i}{c_j - c_i}\right), \; j = 1, ..., k \tag{6.36}$$

і $c_i \ne c_j$ при $i \ne j$.

Доказ відбувається за методом індукції. Приймаємо результат при $y=\sum_{j=1}^{k-1} x_j$ і доведемо його справедливість для k.

Таким чином,

$$P(y+x_k \le \tau)=P(y=0,x_k=0)+ \\ +P(y=0,0<x_k\le\tau)+P(0<y\le\tau,x_k=0)+P(0<y\le\tau,0<x_k\le\tau). \quad (6.37)$$

Кінцеву формулу одержимо, замінивши кожну величину її еквівалентом.

Використаємо розподіл χ- квадрата для апроксимації суми декількох експоненціальних розподілів шляхом прирівнювання математичних сподівань і дисперсій математичних сподівань до дисперсій щільності розподілу, отриманої з функції розподілу.

Якщо в системі із двома послідовними каналами час чекання n-ї вимоги в першій черзі дорівнює ω_n, а час чекання в другій черзі – ω_n^* (вимога має надійти в обидва канали) і сумісний розподіл (ω_n, ω_n^*) при $n\to\infty$ прагне до власного розподілу ймовірностей, то говорять, що система масового обслуговування є ергодичною [19].

6.5. Виробничі циклічні системи обслуговування

Розглянемо видобуток вугілля, коли вибій вугільної шахти відбувається врубовою машиною, відбійними молотками, бригадою взривників і т.д. Після закінчення роботи в такому ж порядку відновляється робота в іншому вибої, а після закінчення роботи у всіх N вибоях знову починається робота в першому. У цій задачі можна розглянути ряд послідовних систем масового обслуговування, що обслуговують N вимог (вибоїв) у порядку надходження, коли вимога, що залишає останню фазу, чекає обслуговування в першій фазі, надходячи послідовно (у черзі на обслуговування) у кожну фазу. Звідси й назва – циклічні системи [47].

Припустимо, що вимога після закінчення обслуговування в останній фазі з певною ймовірністю p_j повернеться в j-у фазу. Розглянемо ще один випадок, коли існує ймовірність $p_j<1$ того, що відразу ж після закінчення обслуговування в j-й фазі вимога надійде у чергу цієї фази. З визначенням p_j видно, що існує ймовірність того, що вимога може надійти й у наступну фазу.

Циклічні системи без зворотного зв'язку

Нехай n_j – число вимог, що чекають у черзі й перебувають на обслуговуванні в j-й фазі, якщо загальне число фаз дорівнює k.

Тоді $\sum_{j=1}^{k} n_j = N$.

Розподіл часу обслуговування в *j*-й фазі, що складається з одного обслуговуючого каналу, є експоненціальним з інтенсивністю μ_j. Таким чином, $\mu_j \Delta t-$ імовірність того, що в проміжку часу ($t,t+\Delta t$) буде закінчено обслуговування в *j*-й фазі. Рівняння, які описують систему через імовірності того, що в момент часу *t* в *j*-й фазі (*j=1,...,k*) перебуває n_j вимог, мають вигляд

$$\begin{aligned} &P(n_1, ..., n_k; t + \Delta t) = [1 - (\mu_1 + ... + \mu_k)\Delta t]P(n_1, ..., n_k) + \\ &+ \mu_1 \Delta t P(n_1 + 1, n_2 - 1, n_3, ..., n_k; t) + \mu_2 \Delta t(n_1, n_2 + 1, n_3 - 1, n_4, ..., n_k; t) + \\ &+ \mu_k \Delta t(n_1 - 1, n_2, ..., n_k + 1; t). \end{aligned} \quad (6.38)$$

Після спрощення маємо

$$\begin{aligned} P(n_1, ..., n_k; t) = &- \sum_{j=1}^{k} \mu_j P(n_1, ..., n_k; t) + \\ &+ \sum_{j=1}^{k} \mu_j P(n_1, ..., n_j + 1, n_{j+1} - 1, n_k; t). \end{aligned} \quad (6.39)$$

Якщо для деяких *m* маємо n_m=0, або $n_{m+1} - 1 < 0$, то *m*-й член також дорівнює нулю. Помітимо, що *k*-а фаза пов'язана з першою фазою, тобто можливі переходи зі стану $(n_1 - 1, ..., n_k + 1)$ у стан $(n_1, ..., n_k)$. Оскільки вся сукупність розподілена між фазами, то не має сенсу говорити про надходження вимог. Рівняння для стаціонарного стану виводяться із наведених вище рівнянь звичайним шляхом. Маємо таке розв'язання цієї системи рівнянь:

$$p(n_1, ..., n_2) = \frac{\mu_1^{N-n}}{\mu_2^{n_2} ... \mu_k^{n_k}} p(N, 0, ..., 0). \quad (6.40)$$

Останню величину в правій частині цього виразу знайдемо, просумувавши ліву частину по всіх розбиваннях *N* на $(n_1, ..., n_k)$ і прирівнявши цю суму до одиниці. Якщо не буде обговорено противне, то суми, що зустрічаються далі, розуміються як розповсюджені на всі *N*. Помітимо, що спочатку вся сукупність чекає обслуговування в першій фазі. Частка часу D_j, протягом якого вільно обслуговувався пристрій в *j*-й фазі, знайдемо, прирівнявши в $p(n_1, ..., n_k)$значення n_j до нуля й підсумовуючи по всіх розбивках *N*, в яких $n_j = 0$. Ймовірність того, що обслуговуючий пристрій *j*-ї фази зайнятий, одержимо відніманням з одиниці отриманого результату. Таким чином, 1-D_j є завантаженням обслуговуючого пристрою *j*-ї фази. Введемо позначення $x_j = \mu_1 / \mu_2$ (тоді x_1 =1), одержимо

$$p(N,0,\dots,0)=\frac{1}{\sum x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots {}_k^{n_k}}=\left[\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j^{N+k-1}}{\prod\limits_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{k}(x_j-x_m)}\right]^{-1}. \qquad (6.41)$$

Можна обчислити зворотне значення останньої величини в правій частині формули при k=1,...,5. Середнє число вимог, що перебувають в j-й фазі (включаючи й ті, що обслуговуються):

$$\bar{n}_j=\sum n_j p(n_1,\dots,n_j,\dots,n_k)=\frac{x_j}{\sum x_1^{n_1}\dots x_k^{n_k}}\frac{d}{dx_j}\sum x_1^{n_1}\dots x_k^{n_k}\,. \qquad (6.42)$$

Середнє число вимог, що чекають обслуговування в j-й фазі:

$$\sum(n_j-1)p(n_1,\dots,n_k)=(\overline{n_j}-1+D_j). \qquad (6.43)$$

Суму беруть по всіх розбиваннях N, у яких $n_j\geq 1$. Маємо

$$D_j=\sum p(n_1,n_2\dots,n_{j-1},0,n_{j+1},\dots,n_k). \qquad (6.44)$$

Якщо $\mu_1=\mu_2=\ldots=\mu_k=\mu$, то $x_j=1$ й $p(N,0,\dots,0)=\dfrac{(n+k-1)!}{(k-1)!N!}$,

$D_j=\dfrac{k-1}{N+k-1}$ (не залежить від j й, отже, має те саме значення для всіх j). Середнє число вимог, що чекають в j-й фазі, дорівнює

$$\frac{N(N-1)}{k(N+k-1)}.$$

Середній час чекання в j-й фазі знайдемо, розділивши останню величину на μ. Час, необхідний для проходження всіх фаз, тобто для завершення всього циклу, дорівнює

$$\frac{1}{\mu}\left[k+\frac{N(N-1)}{N+k-1}\right]. \qquad (6.45)$$

Частка часу, протягом якого зайнятий обслуговуючий пристрій j-ї фази, становить

$$(1-D_j)\mu_j = \frac{N}{N+k-1}\mu. \qquad (6.46)$$

Якщо μ_j – інтенсивність вихідного потоку й загальний час дії H відомий, то загальне число вихідних вимог можна знайти, помноживши останній вираз на H.

Щоб проілюструвати окремий випадок для $m = j$, у виразі для p $(N,0,...,0)$ покладемо $x_1 = x_2 = x_3$ при $k = 4$. Тоді, міркуючи аналогічно, при однакових інтенсивностях обслуговування одержимо

$$p(N,0,0,0) = \left[\sum_{n_4=0}^{N} x_4^{n_4} \frac{(N+k-n_4-2)!}{(k-2)!(N-n_4)!}\right]^{-1}. \qquad (6.47)$$

Якщо, наприклад, j-а фаза містить два паралельних канали з однаковими значеннями μ_j, то μ_j заміняється на $2\mu_j$ при $n_j \geq 2$, у противному разі рівняння не змінюються.

Таким чином,

$$p(n_1,...,n_k) = x_1^{n_1} ... \frac{x_j^{n_j}}{2!2^{n_j-2}} ... x_k^{n_k}\, p(N,0,...,0). \qquad (6.48)$$

При обчисленні p $(N,0,\ldots,0)$ у попередній формулі x_j заміняється на $\frac{x_j}{2}$.

Циклічні системи зі зворотним зв'язком

Скінченний зворотний зв'язок

Нехай $p_j < 1$ $\left(j = 1,...,k\right)$ – імовірність того, що після завершення обслуговування в останній k-й фазі вимога повертається в j-у фазу та $p = \sum_{j=1} p_j$, а $q = 1 - p$ – імовірність того, що вимога не повертається в систему.

Такий процес обслуговування називається обслуговуванням із скінченним зворотним зв'язком.

Нехай

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 1, n_j > 0, \\ 0, n_j = 0, \end{cases}, \quad a = \begin{cases} 1, \sum_j n_j < N, \\ 0, \sum_j n_j = N. \end{cases} \qquad (6.49)$$

При $n_j = 0,...,N$ і $\sum_{j=1}^{k} n_j \le N$ рівняння для ймовірностей стану (у стаціонарному випадку) можна записати в такому вигляді:

$$0 = -\left(\lambda a + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \varepsilon_j\right) p(n_1,...,n_k) + \lambda \varepsilon_1 p(n_1 - 1, n_2,...,n_k) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k-1} \mu_k p_j \varepsilon_j p(n_1,...,n_{j-1}, n_j - 1, n_{j+1},...,n_{k-1}, n_k + 1) + \mu_k p_k \varepsilon_k p(n_1,...,n_k) + \tag{6.50}$$
$$+ \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j \varepsilon_j p(n_1,...,n_{j-1}, n_j + 1, n_{j+1} - 1,...,n_{k-1}, n_k) + (1-p)\mu_k a p(n_{1,...,} n_{k-1}, n_k + 1).$$

Ця система рівнянь має єдиний розв'язок:

$$p(n_1,...,n_k) = x_1^{n_1} ... x_k^{n_k} \, p(0,...,0), \tag{6.51}$$

де
$$x_j = \frac{\lambda(1 - p + p_1 + ... + p_j)}{\mu_j (1-p)}, \ \mathrm{j} = 1,...,\mathrm{k}. \tag{6.52}$$

Знову знаходимо p (0,…,0), прирівнявши до одиниці суму ймовірностей при n_{j}=1,…, N; $\sum n_j \le N$.

Якщо p_{j}=0 для всіх j, $\lambda / \mu_{\mathrm{j}} < 1$ і $N \to \infty$, то одержимо розв'язок для системи з послідовними каналами.

Якщо $x_j < 1 (j = 1,...,k)$, то при $N \to \infty$ значення p (0,…,0) прагне до кінцевої межі, відмінної від нуля, у противному разі воно прагне до нуля. Звідси випливає, що $p(n_1,...,n_k)$ також прагне до нуля. В останньому випадку маємо

$$p(0,...,0) = \prod_{j=1}^{k} (1 - x_j) \ \text{і}$$

$$p(n_1,...,n_k) = \prod_{j=1}^{k} x_j^{n_j} (1 - x_j). \tag{6.53}$$

Одноканальна система зі зворотним зв'язком

Нехай $p_j > 1$ – ймовірність того, що після закінчення обслуговування в j-й фазі вимога повертається в чергу j-ї фази (введемо також $q_j = 1 - p_j$ – ймовірність того, що вимога переходить в j-у фазу або залишає систему, якщо j = 1). Тоді рівняння для рівноважного стану матиме вигляд

$$0=-\left(\lambda a+\sum_{j=1}^{k}\mu_j q_j \varepsilon_j\right)p(n_1,...,n_k)+\lambda\varepsilon p(n_1-1,n_2,...,n_k)+$$

$$+\sum_{j=1}^{k-1}\mu_j q_j \varepsilon_{j+1} p(n_1,...,n_j+1,n_{j+1}-1,...,n_k)+ \qquad (6.54)$$

$$+\mu_k q_k a p(n_1,...,n_k+1).$$

Одержимо єдиний розв'язок

$$p(n_1,...,n_k)=x_1^{n_1}...x_k^{n_k}\,p(0,...,0), \qquad (6.55)$$

де

$$x_j=\frac{\lambda}{\mu_j q_j}. \qquad (6.56)$$

Якщо $x_j < 1$, то при $N\to\infty$ розраховуємо, як й у попередньому випадку. Отримані раніше рівняння справедливі й при використанні виразу для x_j. У випадку одноканальної системи обидва розглянутих вище випадки збігаються [42].

Контрольні запитання

1. Розгляньте особливості моделей багатофазних систем в умовах промислової логістики.
2. Розгляньте принципи побудови багатоканальних систем і відповідні розподіли для вхідного потоку й часу обслуговування.
3. Розгляньте двофазну систему для моделювання логістичних систем із двох послідовно з'єднаних ланок.
4. Покажіть основні етапи одержання ймовірнісних характеристик для системи з послідовними й паралельними каналами.
5. У чому особливості моделювання нерегулярного процесу послідовного обслуговування в логістичній системі?
6. У чому особливості моделі, в якій не дозволяється черга перед послідовними фазами?
7. Розгляньте модель циклічної системи зі зворотним і прямим зв'язками.
8. У чому особливості й специфіка циклічного обслуговування в системі з декількома чергами?
9. Розгляньте одноканальну систему зі зворотним зв'язком. У чому відмінність її від подібної системи зі зворотним зв'язком?
10. Розгляньте окремий випадок з однією чергою на основі моделі з декількома чергами.

Завдання

1. Скласти систему диференціальних рівнянь імовірнісних станів для

випадку N однакових джерел вхідних потоків вимог.

2. Одержати розв’язання для P (N_1, N_2) при стаціонарному режимі (формула (6.3)).

3. Провести аналіз системи рівнянь для стаціонарного режиму (формула (6.8)) й визначити основні кроки її вирішення.

4. Виконати аналіз виразу для ймовірності того, що в j-й фазі перебуває n_j вимоги. Обчислити значення для конкретних числових даних.

5. Виконати розрахунковий приклад ЛС, у якій не дозволяється черга перед послідовними фазами.

6. Одержати вираз для функції розподілу часу чекання для системи M/M/M/∞/∞/Fifo на основі формули (6.44).

7. Навести приклад із практики реальних підприємств для розрахунку за допомогою моделі циклічної системи без зворотного зв'язку.

8. Те ж, що в п.7, але зі зворотним зв'язком.

9. Провести аналіз циклічної системи з декількома операціями.

10. Показати, що при $N \to \infty$ імовірність має пуассонівський розподіл із параметром f (формула (6.73)).

Розділ 7. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ В СИСТЕМАХ ЗВ'ЯЗКУ Й ТРАНСПОРТІ

7.1. Формула Ерланга для повнодоступної системи із втратами

Нехай $P_n(t)$ – імовірність того, що зайнято рівно n із c каналів, якщо в момент $t = 0$ всі канали вільні. Нехай вхідний потік виходить із необмеженого джерела й підпорядковується закону Пуассона з параметром λ, а розподіл часу обслуговування у всіх каналах є експоненціальним із тим самим параметром μ. Тоді система рівнянь для даної моделі в перехідному режимі роботи матиме такий вигляд [19, 21]:

$$\begin{cases} -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) = \dfrac{dP_0(t)}{dt}, \\ -(\lambda + i\mu)P_i(t) + \lambda P_{i-1}(t) + (i+1)\mu P_{i+1}(t) = \dfrac{dP_i(t)}{dt}, 1 \le i < c, \\ -c\mu P_c(t) + \lambda P_{c-1}(t) = \dfrac{dP_c(t)}{dt}. \end{cases} \quad (7.1)$$

Для стаціонарного режиму роботи праві частини рівнянь у системі (7.1) дорівнюватимуть нулю, тоді одержимо систему лінійних алгебричних рівнянь щодо ймовірностей $P_i(t) = p_i$.

$$\begin{cases} -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1 = 0, \\ -(\lambda + i \cdot \mu) p_i + \lambda \cdot p_{i-1} + (i+1)\mu \cdot p_{i+1} = 0, 1 \le i < c, \\ -c \cdot \mu \cdot p_c + \lambda \cdot p_{c-1} = 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

Перетворимо систему (7.2), поділивши всі рівняння на μ й підставивши $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$:

$$\begin{cases} -\rho \cdot p_0 + p_1 = 0, \\ -(\rho + i) p_i + \rho \cdot p_{i-1} + (i+1) p_{i+1} = 0, 1 \le i < c, \\ -c \cdot p_c + \rho \cdot p_{c-1} = 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

Для розв'язування даної системи скористаємося засобом підстановок. Будемо виражати значення $p_i, 1 \le i \le c$ через значення p_0. З першого рівняння одержимо

$$p_1 = \rho \cdot p_0. \quad (7.4)$$

Запишемо друге рівняння системи, для чого підставимо $i = 1$.

$$-(\rho + 1) p_1 + \rho \cdot p_0 + 2\mu \cdot p_2 = 0. \quad (7.5)$$

Підставивши (7.4) в (7.5), одержимо

$$p_2 = \frac{\rho^2}{2} p_0. \quad (7.6)$$

Далі припустимо, що для якогось i, $1 \le i < c - 1$ справедливі такі вирази:

$$p_{i-1} = \frac{\rho^{i-1}}{(i-1)!} p_0, \quad (7.7)$$

$$p_i = \frac{\rho^i}{i!} p_0. \quad (7.8)$$

Підставивши вираз (7.7) і (7.8) в i-е рівняння системи (7.3), маємо

$$-(\rho + i) \frac{\rho^i}{i!} p_0 + \rho \frac{\rho^{i-1}}{(i-1)!} p_0 + (i+1) p_{i+1} = 0. \quad (7.9)$$

Виконавши лінійні перетворення, одержимо

$$p_{i+1} = \frac{\rho^{i+1}}{(i+1)!} p_0. \quad (7.10)$$

Таким чином, розв'язання системи (7.3) мають вигляд

$$p_i = \frac{\rho^i}{i!} p_0, \forall i : 0 \le i \le c. \quad (7.11)$$

Значення p_0 знаходимо з умови нормування, яка означає, що сума ймовірностей для повної групи подій

$$\sum_{i=0}^{c} p_i = 1. \quad (7.12)$$

Підставивши вираз для ймовірностей станів (7.11) у рівняння (7.12), одержимо

$$\sum_{i=0}^{c}\frac{\rho^i}{i!}p_0=1. \qquad (7.13)$$

З (7.13) випливає, що

$$p_0=\frac{1}{\sum_{i=0}^{c}\frac{\rho^i}{i!}}=\frac{1}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^c}{c!}}. \qquad (7.14)$$

Остаточний вираз для ймовірностей стану системи набуває вигляду [23]

$$p_i=\frac{\frac{\rho^i}{i!}}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^c}{c!}}, 1\le i\le c. \qquad (7.15)$$

Вираз (7.15) має назву першої формули Ерланга для системи із втратами. При $i=c$ дана формула дає ймовірність повної зайнятості системи в довільний момент часу. Ймовірність того, що виклик втрачається, дорівнює ймовірності того, що всі канали зайняті (тобто ймовірність повної зайнятості в будь-який момент часу збігається з імовірністю повної зайнятості в момент надходження виклику, що справедливо тільки у випадку пуассонівського вхідного потоку). При $c\to\infty$ формула (7.15) перетворюється в розподіл Пуассона

$$p_i=\frac{\rho^i}{i!}e^{-\rho}. \qquad (7.16)$$

7.2. Розподіл Енгсета-О'Делла

Припустимо, що в c- канальну систему надходить пуассонівський потік і відношення інтенсивності вхідного потоку до інтенсивності обслуговування залежить від числа вільних каналів. Таким чином, y_0 – значення зазначеної величини, коли немає зайнятих каналів, y_1 – та ж величина у випадку, коли зайнятий один канал, і т.д. до y_c. При цьому [47]

$$y_i=\frac{\lambda_i}{\mu}, 0\le i\le c. \qquad (7.17)$$

Нехай $p_i, 0\le i\le c$ – імовірність того, що зайнято i каналів. Тоді для системи з однаковим експоненціальним часом обслуговування з параметром μ одержимо таку систему рівнянь для стаціонарного режиму роботи:

$$\begin{cases}-y_0\cdot p_0+p_1=0,\\ -(y_i+i)\cdot p_i+y_{i-1}\cdot p_{i-1}+(i+1)p_{i+1}=0, 1\le i<c,\\ -c\cdot p_c+y_{c-1}\cdot p_{c-1}=0.\end{cases} \qquad (7.18)$$

Проробивши дії, аналогічні діям вирішення системи (7.3), одержимо розв'язок системи (7.18).

$$p_i= p_0\frac{y_0y_1\ldots y_{i-1}}{i!}, \qquad (7.19)$$

де p_0 знаходять зі співвідношення (7.12).

Число втрачених викликів в одиницю часу становить $y_c \cdot p_c$. Загальне число викликів в одиницю часу дорівнює

$$\sum_{i=0}^{c} y_i p_i. \tag{7.20}$$

Перетворимо вираз (7.20), використовуючи залежність

$$ip_i = y_{i-1} p_{i-1}. \tag{7.21}$$

У результаті одержимо

$$\sum_{i=0}^{c} y_i p_i = \sum_{i=1}^{c} ip_i + y_c p_c. \tag{7.22}$$

Частина втрачених викликів дорівнює частині від ділення числа втрачених викликів на загальне число викликів:

$$\begin{aligned}\frac{y_c p_c}{\sum\limits_{i=0}^{c} y_i p_i} &= \frac{y_c \dfrac{y_0 \cdots y_{c-1}}{c!} p_0}{p_1 + 2p_2 + \ldots + cp_c + y_c p_c} = \\ &= \frac{\dfrac{y_0 \cdots y_c}{c!} p_0}{y_0 p_0 + y_0 y_1 p_0 + \ldots + \dfrac{y_0 \cdots y_{c-1}}{(c-1)!} p_0 + y_c \dfrac{y_0 \cdots y_{c-1}}{c!} p_0}.\end{aligned} \tag{7.23}$$

Скориставшись тим, що $y_0 p_0 \neq 0$, спростимо формулу (7.23)

$$\frac{\dfrac{y_1 \cdots y_c}{c!}}{1 + y_1 + \ldots + \dfrac{y_1 \cdots y_{c-1}}{(c-1)!} + \dfrac{y_1 \cdots y_c}{c!}}. \tag{7.24}$$

Приймаючи, що число джерел N кінцеве і $y_i = (N-i)\lambda$, одержуємо важливий додаток формули (7.24). Залежно від того, чи залежить λ від втрат або є постійною величиною, маємо розподіл Енгсета або ж розподіл О'Делла

$$\begin{aligned}&\frac{\dfrac{(N-1)\ldots(N-c)\lambda^c}{c!}}{1 + (N-1)\lambda + \ldots + \dfrac{(N-1)\ldots(N-c+1)\lambda^{c-1}}{(c-1)!} + \dfrac{(N-1)\ldots(N-c)\lambda^c}{c!}} = \\ &= \frac{\dfrac{(N-1)\ldots(N-c)\lambda^c}{c!}}{\sum\limits_{i=0}^{c} \dfrac{(N-1)!}{i!(N-1-i)!} \lambda^i}.\end{aligned} \tag{7.25}$$

7.3. Системи змішаного типу із пріоритетами

Розглянемо повнодоступну систему, в яку надходять два пуассонівських потоки з параметрами λ_1 й λ_2. Канали мають однаковий експоненціальний розподіл часу обслуговування з однаковим параметром μ. Якщо всі канали зайняті, то виклики з першого джерела можуть чекати, а виклики із другого джерела втрачаються [16].

Нехай p_n при $n \le c$ – імовірність того, що зайнято n каналів, а при $n > c$ – імовірність того, що чекає $n-c$ вимог з першого джерела. Тоді за графом станів і переходів для даної системи одержимо систему рівнянь при $\rho_1 = \dfrac{\lambda_1}{\mu}$ й $\rho_2 = \dfrac{\lambda_2}{\mu}$:

$$\begin{cases} -(\rho_1 + \rho_2)p_0 + p_1 = p_0^{/}, \\ -(\rho_1 + \rho_2 + n)p_n + (\rho_1 + \rho_2)p_{n-1} + (n+1)p_{n+1} = p_n^{/}, \qquad 1 \le n < c, \\ -(\rho_1 + c)p_c + (\rho_1 + \rho_2)p_{c-1} + c \cdot p_{c+1} = p_c^{/}, \\ -(\rho_1 + c)p_n + \rho_1 \cdot p_{n-1} + c \cdot p_{n+1} = p_n^{/}, \qquad n > c, \end{cases} \tag{7.26}$$

де $p_i^{/} = \dfrac{dp_i(t)}{dt}$.

У випадку стаціонарного режиму система (7.26) має вигляд

$$\begin{cases} -(\rho_1 + \rho_2)p_0 + p_1 = 0, \\ -(\rho_1 + \rho_2 + n)p_n + (\rho_1 + \rho_2)p_{n-1} + (n+1)p_{n+1} = 0, \quad 1 \le n < c, \\ -(\rho_1 + c)p_c + (\rho_1 + \rho_2)p_{c-1} + cp_{c+1} = 0, \\ -(\rho_1 + c)p_n + \rho_1 \cdot p_{n-1} + c \cdot p_{n+1} = 0, \quad n > c. \end{cases} \tag{7.27}$$

Знайдемо розв'язок системи (7.27) рекурентним шляхом вираження ймовірностей стану через імовірність простою системи. З першого рівняння знаходимо

$$p_1 = (\rho_1 + \rho_2)p_0. \tag{7.28}$$

Підставимо дане значення в друге рівняння системи й одержимо вираз для такої невідомої [20, 21]:

$$-(\rho_1 + \rho_2 + 1)(\rho_1 + \rho_2)p_0 + (\rho_1 + \rho_2)p_0 + 2p_2 = 0;$$

$$p_2 = \frac{(\rho_1 + \rho_2)^2}{2} p_0. \tag{7.29}$$

Із третього рівняння знаходимо

$$p_3 = \frac{(\rho_1 + \rho_2)^3}{2 \cdot 3} p_0. \tag{7.30}$$

Припустимо, що справедливий вираз

$$p_{c-2} = \frac{(\rho_1 + \rho_2)^{c-2}}{(c-2)!} p_0, \tag{7.31}$$

$$p_{c-1}=\frac{(\rho_1+\rho_2)^{c-1}}{(c-1)!}p_0. \qquad (7.32)$$

Підставимо вирази (7.30) і (7.31) у відповідне рівняння системи (7.27) при $n=c-1$ і знайдемо вираз для ймовірності p_c:

$$-(\rho_1+\rho_2+c-1)\frac{(\rho_1+\rho_2)^{c-1}}{(c-1)!}p_0+(\rho_1+\rho_2)\frac{(\rho_1+\rho_2)^{c-2}}{(c-2)!}p_0+cp_c=0;$$

$$p_c=\frac{(\rho_1+\rho_2)^{c}}{c!}p_0. \qquad (7.33)$$

Узагальнимо отриманий результат

$$p_n=\frac{(\rho_1+\rho_2)^{n}}{n!}p_0, 1\le n\le c. \qquad (7.34)$$

Аналогічним чином одержимо значення для p_n при $n>c$. З рівняння, що має порядковий номер $c+1$ системи (7.27) шляхом підстановки значень для p_{c-1} й p_c, з формули (7.34) одержимо

$$cp_{c+1}+(\rho_1+\rho_2)\frac{(\rho_1+\rho_2)^{c-1}}{(c-1)!}p_0-(\rho_1+c)\frac{(\rho_1+\rho_2)^{c}}{c!}p_0=0,$$

$$p_{c+1}=\frac{\rho_1}{c}\frac{(\rho_1+\rho_2)^{c}}{c!}p_0. \qquad (7.35)$$

Наступне рівняння системи (7.27) буде таким:

$$cp_{c+2}+\rho_1\frac{(\rho_1+\rho_2)^{c}}{c!}p_0-(\rho_1+c)\frac{\rho_1}{c}\frac{(\rho_1+\rho_2)^{c}}{c!}p_0=0,$$

$$p_{c+2}=\left(\frac{\rho_1}{c}\right)^2\frac{(\rho_1+\rho_2)^{c}}{c!}p_0. \qquad (7.36)$$

Використовуючи індуктивні міркування, аналогічні написаним вище, можна переконатися в тому, що

$$p_n=\left(\frac{\rho_1}{c}\right)^{n-c}\frac{(\rho_1+\rho_2)^{c}}{c!}p_0, \forall n>c. \qquad (7.37)$$

Знайдемо значення ймовірності простою системи p_0, використовуючи ту обставину, що сума ймовірностей всіх станів системи дорівнює

$$p_0+\sum_{i=1}^{c}\frac{(\rho_1+\rho_2)^{i}}{i!}p_0+\sum_{j=c+1}^{\infty}\left(\frac{\rho_1}{c}\right)^{j-c}\frac{(\rho_1+\rho_2)^{c}}{c!}p_0=1. \qquad (7.38)$$

Перетворимо формулу (7.38) для одержання ймовірності простою системи, одночасно із цим спростимо вирази, що входять у зазначену формулу. Помітимо, що перший доданок можна внести в суму, що є другим доданком, а в третьому доданку винести константу за знак суми. Одержимо

$$p_0\left(\sum_{i=0}^{c}\frac{(\rho_1+\rho_2)^{i}}{i!}+\frac{(\rho_1+\rho_2)^{c}}{c!}\sum_{j=c+1}^{\infty}\left(\frac{\rho_1}{c}\right)^{j-c}\right)=1. \qquad (7.39)$$

Очевидно, що другий доданок у формулі (7.39) утворює нескінченну геометричну прогресію із знаменником, який дорівнює першому члену прогресії, що, в свою чергу, дорівнює відношенню ρ_1 до числа каналів системи c. Скористаємося виразом для суми нескінченної геометричної прогресії:

$$S = \frac{u_1}{1-q}, \tag{7.40}$$

де u_1 – перший член прогресії,

q – знаменник прогресії.

Формула (7.40) справедлива при $|q| < 1$. У нашому випадку дана умова є очевидною, тому що вона необхідна для існування стаціонарного режиму функціонування СМО. Виразимо p_0 з (7.39), застосувавши для спрощення формулу (7.40):

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{c}\frac{(\rho_1+\rho_2)^i}{i!} + \frac{(\rho_1+\rho_2)^c}{c!}\frac{\frac{\rho_1}{c}}{1-\frac{\rho_1}{c}}} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{c}\frac{(\rho_1+\rho_2)^i}{i!} + \frac{(\rho_1+\rho_2)^c}{c!}\frac{\rho_1}{c-\rho_1}}. \tag{7.41}$$

Пропонується ввести дві функції для спрощення вигляду формули (7.41):

$$N_c(\rho) = \sum_{i=0}^{c}\frac{\rho^i}{i!} \text{ і } E_c(\rho) = \frac{\frac{\rho^c}{c!}}{N_c(\rho)}.$$

З урахуванням зазначених функцій запишемо

$$p_0 = \frac{1}{N_c(\rho_1+\rho_2) + \frac{\rho_1}{c-\rho_1}N_c(\rho_1+\rho_2)E_c(\rho_1+\rho_2)};$$

$$p_0 = \frac{c-\rho_1}{c-\rho_1+\rho_1E_c(\rho_1+\rho_2)}\frac{1}{N_c(\rho_1+\rho_2)}. \tag{7.42}$$

Тепер, знаючи вираз для ймовірності простою системи, можна записати кінцеві вирази для знаходження ймовірності будь-якого стану системи. З формул (7.34) і (7.37) одержимо

$$p_n = \frac{c-\rho_1}{c-\rho_1+\rho_1E_c(\rho_1+\rho_2)}\frac{\frac{(\rho_1+\rho_2)^n}{n!}}{N_c(\rho_1+\rho_2)}, 0 \le n \le c, \tag{7.43}$$

$$p_n = \frac{(c-\rho_1)E_c(\rho_1+\rho_2)}{c-\rho_1+\rho_1E_c(\rho_1+\rho_2)}\left(\frac{\rho_1}{c}\right)^{n-c}, \forall n \ge c. \tag{7.44}$$

Визначимо ймовірність того, що втратиться заявка із другого джерела. Очевидно, що оскільки виклики з першого джерела можуть чекати при зайнятості всіх каналів обслуговування, то шукану ймовірність знайдемо як суму всіх імовірностей p_n при $n \ge c$. Позначимо ймовірність втрат заявки як $P(>0)$, тоді

$$P(>0)=\sum_{i=c}^{\infty}\frac{(c-\rho_1)E_c(\rho_1+\rho_2)}{c-\rho_1+\rho_1E_c(\rho_1+\rho_2)}\left(\frac{\rho_1}{c}\right)^{i-c}.$$

Використовуючи формулу (7.40), остаточно маємо

$$P(>0)=\frac{cE_c(\rho_1+\rho_2)}{c-\rho_1+\rho_1E_c(\rho_1+\rho_2)}. \qquad (7.45)$$

Загальне число втрачених заявок дорівнює числу втрачених викликів від другого джерела $\rho_2 P(>0)$. Імовірність того, що час чекання виклику з першого джерела більше t, дорівнює

$$P(>t)=\int_t^{\infty}\sum_{n=c}^{\infty}p_n\cdot e^{-\mu\cdot c\cdot t}\frac{(\mu\cdot c\cdot t)^{n-c}}{(n-c)!}c\cdot\mu\cdot dt=P(>0)e^{-(c-\rho_1)\mu\cdot t}. \qquad (7.46)$$

Середній час чекання всіх викликів з першого джерела дорівнює

$$\frac{P(>0)}{\mu(c-\rho_1)}, \qquad (7.47)$$

а середній час чекання для затриманих викликів –

$$\frac{1}{\mu(c-\rho_1)}. \qquad (7.48)$$

Можна розглянути також систему, в якій виклики з першого джерела мають перевагу над викликами із другого джерела й виклики з обох джерел можуть чекати. Середні тривалості чекання для всіх викликів із першого й другого джерел становлять відповідно

$$\frac{P(>0)}{\mu(c-\rho_1)} \qquad (7.49)$$

і

$$\frac{cP(>0)}{\mu(c-\rho_1)(c-\rho_1-\rho_2)}. \qquad (7.50)$$

Середній час чекання для затриманих викликів з першим пріоритетом дорівнює

$$\frac{1}{\mu(c-\rho_1)}, \qquad (7.51)$$

а для затриманих викликів із другим пріоритетом -

$$\frac{c}{\mu(c-\rho_1)(c-\rho_1-\rho_2)}. \qquad (7.52)$$

Досліджували також одноканальну систему з експоненціальним розподілом часу обслуговування, різним для кожного із двох джерел, з параметрами μ_1 й μ_2, коли виклики з першого джерела можуть чекати, а виклики із другого – втрачаються.

Нехай $p(n,1)$ – імовірність стану, коли канал зайнятий вимогою із другого джерела, а n вимог з першого джерела чекають обслуговування, і $p(n,0)$ – імовірність стану, коли канал зайнятий обслуговуванням вимоги з першого джерела, і $n-1$ вимог із цього ж джерела перебувають у черзі.

Умова нормування для даної системи має вигляд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[p(n,0)+p(n,1)\right]=1. \qquad (7.53)$$

Запишемо рівняння для стаціонарного стану системи:

$$\begin{cases} p(1,0)+\alpha\cdot p(0,1)-(\rho_1+\alpha\cdot\rho_2)p(0,0)=0, \\ \rho_2\cdot p(0,0)-\left(1+\dfrac{\rho_1}{\alpha}\right)\cdot p(0,1)=0, \\ p(n+1,0)+\rho_1\cdot p(n-1,0)+\alpha\cdot p(n,1)-(\rho_1+1)\cdot p(n,0)=0,\ n>0, \\ \dfrac{\rho_1}{\alpha}\cdot p(n-1,1)-\left(\dfrac{\rho_1}{\alpha}+1\right)\cdot p(n,1)=0,\ n>0, \end{cases} \qquad (7.54)$$

де $\alpha=\dfrac{\mu_2}{\mu_1}$, $\rho_1=\dfrac{\lambda_1}{\mu_1}$ і $\rho_2=\dfrac{\lambda_2}{\mu_2}$.

Для розв'язання системи (7.54) будемо всі ймовірності стану виражати через імовірність $p(0,0)$. Розглянемо друге рівняння системи й знайдемо з нього вираз для $p(0,1)$.

$$\rho_2 p(0,0)=\left(1+\frac{\rho_1}{\alpha}\right)\cdot p(0,1);$$

$$p(0,1)=\frac{\alpha\rho_2}{\alpha+\rho_1}\cdot p(0,0). \qquad (7.55)$$

У перше рівняння системи (7.54) підставимо значення $p(0,1)$ й знайдемо

$$p(1,0)+\alpha\frac{\alpha\rho_2}{\alpha+\rho_1}p(0,0)-(\rho_1+\alpha\rho_2)p(0,0)=0;$$

$$p(1,0)=\rho_1\left\{1+\frac{\alpha\rho_2}{\rho_1+\alpha}\right\}p(0,0). \qquad (7.56)$$

Перетворимо вираз (7.56) до іншого виду, щоб одержати узагальнений вираз для ймовірностей

$$p(1,0)=\rho_1^1\left\{1+\frac{\alpha\rho_2}{\rho_1+\alpha-1}\left[1-\frac{1}{(\rho_1+\alpha)^1}\right]\right\}p(0,0). \qquad (7.57)$$

Запишемо четверте рівняння системи (7.54) при $n=1$

$$\rho_1 p(0,1)-(\rho_1+\alpha)p(1,1)=0,$$

з якого одержимо

$$p(1,1)=\frac{\alpha\rho_2}{\alpha+\rho_1}\frac{\rho_1}{\rho_1+\alpha}p(0,0). \qquad (7.58)$$

Із четвертого рівняння можна одержати рекурентну формулу для знаходження ймовірностей $p(n,1)$ шляхом нескладних перетворень:

$$p(n,1)=\frac{\rho_1}{\rho_1+\alpha}p(n-1,1). \qquad (7.59)$$

З урахуванням (7.58) можна одержати більш загальну формулу

$$p(n,1)=\frac{\alpha\rho_2}{\rho_1+\alpha}\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+\alpha}\right)^n p(0,0). \tag{7.60}$$

Підставивши (7.58) і (7.56) у третє рівняння системи (7.54) при $n=1$, одержимо

$$p(2,0)+\rho_1 p(0,0)+\alpha\frac{\alpha\rho_2}{(\rho_1+\alpha)^2}\rho_1 p(0,0)-(\rho_1+1)\left[\rho_1\left(1+\frac{\alpha\rho_2}{\rho_1+\alpha}\right)\right]p(0,0)=0.$$

Після нескладних математичних перетворень запишемо

$$p(2,0)=\rho_1^2\left\{1+\frac{\alpha\rho_2}{\rho_1+\alpha-1}\left[1-\frac{1}{(\rho_1+\alpha)^2}\right]\right\}p(0,0). \tag{7.61}$$

Значення для ймовірностей $p(n,0)$ знаходять шляхом підстановки значень $p(n-1,0)$, $p(n-1,1)$ і $p(n-2,1)$ в третє рівняння системи (7.54). У такий спосіб на підставі індуктивних міркувань можна одержати таку формулу:

$$p(n,0)=\rho_1^n\left\{1+\frac{\alpha\rho_2}{\rho_1+\alpha-1}\left[1-\frac{1}{(\rho_1+\alpha)^n}\right]\right\}p(0,0). \tag{7.62}$$

Очевидно, що для повного розв'язання системи необхідно знайти ймовірність того, що в системі не буде заявок. Згадана ймовірність знаходиться з того міркування, що сума всіх імовірностей дорівнює одиниці. Маємо

$$p(0,0)+\sum_{n=1}^{\infty}p(n,0)+\sum_{n=0}^{\infty}p(n,1)=1. \tag{7.63}$$

Підставимо в (7.63) вирази (7.60) і (7.62):

$$\begin{aligned}&p(0,0)+\sum_{n=1}^{\infty}\rho_1^n\left\{1+\frac{\alpha\rho_2}{\rho_1+\alpha-1}\left[1-\frac{1}{(\rho_1+\alpha)^n}\right]\right\}p(0,0)+\\&+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha\rho_2}{\rho_1+\alpha}\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+\alpha}\right)^n p(0,0)=1.\end{aligned} \tag{7.64}$$

Спростимо складові згаданого вище рівняння, для чого скористаємося формулою суми нескінченної геометричної прогресії (7.40):

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\rho_1^n\left\{1+\frac{\alpha\rho_2}{\rho_1+\alpha-1}\left[1-\frac{1}{(\rho_1+\alpha)^n}\right]\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\rho_1^n+\frac{\alpha\rho_2}{\rho_1+\alpha-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\rho_1^n-\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+\alpha}\right)^n\right]=\\&=\frac{\rho_1}{1-\rho_1}+\frac{\alpha\rho_2}{\rho_1+\alpha-1}\left[\frac{\rho_1}{1-\rho_1}-\frac{\frac{\rho_1}{\rho_1+\alpha}}{1-\frac{\rho_1}{\rho_1+\alpha}}\right]=\frac{\rho_1(1+\rho_2)}{1-\rho_1};\end{aligned} \tag{7.65}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha\rho_2}{\rho_1+\alpha}\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+\alpha}\right)^n=\frac{\alpha\rho_2}{\rho_1+\alpha}\frac{1}{1-\dfrac{\rho_1}{\rho_1+\alpha}}=\rho_2. \tag{7.66}$$

Підставивши (7.65) і (7.66) в (7.64), запишемо

$$p(0,0)+\frac{\rho_1(1+\rho_2)}{1-\rho_1}p(0,0)+\rho_2 p(0,0)=1,$$

звідки маємо

$$p(0,0)=\frac{1-\rho_1}{1+\rho_2}. \tag{7.67}$$

Підставивши знайдене значення ймовірності $p(0,0)$ у формули (7.60) і (7.62) для $p(n,1)$ й $p(n,0)$ відповідно, одержимо розрахункові вирази для знаходження ймовірностей стану системи:

$$p(n,1)=\frac{\alpha\rho_2}{\rho_1+\alpha}\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+\alpha}\right)^n\frac{1-\rho_1}{1+\rho_2}\quad; \tag{7.68}$$

$$p(n,0)=\rho_1^n\left\{1+\frac{\alpha\rho_2}{\rho_1+\alpha-1}\left[1-\frac{1}{(\rho_1+\alpha)^n}\right]\right\}\frac{1-\rho_1}{1+\rho_2}. \tag{7.69}$$

Імовірність того, що вимога, що надходить із першого джерела, має чекати, або ймовірність того, що вимога, що надходить із другого джерела, втрачається, дорівнює:

$$P(>0)=1-p(0,0)=\frac{\rho_1+\rho_2}{1+\rho_2}. \tag{7.70}$$

Середнє число вимог, що чекають:

$$L=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)p(n,0)+\sum_{n=0}^{\infty}np(n,1)=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\left\{\rho_1^n+\frac{\alpha\rho_2}{\rho_1+\alpha-1}\left[\rho_1^n-\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+\alpha}\right)^n\right]\right\}\times$$
$$\times\frac{1-\rho_1}{1+\rho_2}+\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{\alpha\rho_2}{\rho_1+\alpha}\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+\alpha}\right)^n\frac{1-\rho_1}{1+\rho_2}. \tag{7.71}$$

Після математичних перетворень одержимо

$$L=\frac{\rho_1\rho_1}{\alpha(1+\rho_2)}+\frac{\rho_1^2}{1-\rho_1}. \tag{7.72}$$

Середній час чекання вимог із першого джерела за формулою Літтла $-\dfrac{L}{\lambda_1}$.

Розглянемо випадок, коли можуть чекати виклики, що надходять з обох джерел (виклики з першого джерела мають перевагу над викликами із другого).

Позначимо через $p_1(n_1,n_2)$, $(n_1>0, n_2\geq 0)$ імовірність того, що канал зайнятий вимогою з першого джерела, а n_1-1 вимог з першого джерела й n_2 вимог із другого джерела чекають. Аналогічно через $p_2(n_1,n_2)$ $(n_1\geq 0, n_2>0)$ позначимо ймовірність того, що в каналі перебуває вимога із другого джерела, а n_1 вимог із першого джерела й n_2-1 вимог із другого джерела чекають. Імовірність того, що в системі немає вимог, позначимо через $p(0,0)$.

Середнє число вимог, які чекають, з першого джерела:

$$\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}(n_1-1)\cdot p_1\cdot(n_1,n_2)+\sum_{n_2=1}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}n_2\cdot p_2\cdot(n_1,n_2)=\frac{\rho_1\cdot\left(\rho_1+\dfrac{\rho_2}{\alpha}\right)}{1-\rho_1}. \tag{7.73}$$

Для другого джерела аналогічно маємо

$$\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}n_1\cdot p_1\cdot(n_1,n_2)+\sum_{n_2=1}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}(n_2-1)\cdot p_2\cdot(n_1,n_2)=\frac{\rho_2\cdot(\alpha\cdot\rho_1+\rho_2)}{(1-\rho_1)\cdot(1-\rho_1-\rho_2)}. \tag{7.74}$$

Загальне число вимог, що чекають, дорівнює сумі виразів (7.73) і (7.74). Середній час чекання знайдемо, розділивши вираз (7.73) на λ_1, а вираз (7.74) – на λ_2. Щоб знайти середній час чекання для затриманих вимог із кожного джерела, потрібно розділити середній загальний час чекання для вимог із цього джерела на $\rho_1+\rho_2$.

Якщо вимоги не мають пріоритету, то для знаходження середнього числа вимог, що чекають, можна використати формулу Полячека-Хінчіна. Таким чином,

$$L=\frac{\rho^2}{2(1-\rho)}\int_0^{\infty}\frac{t^2}{h^2}b(t)dt=\frac{(\rho_1+\alpha\cdot\rho_2)\left(\rho_1+\dfrac{\rho_2}{\alpha}\right)}{1-\rho_1-\rho_2}, \tag{7.75}$$

де $\rho=\rho_1+\rho_2$, $h=\dfrac{\rho_1+\rho_2}{\lambda_1+\lambda_2}$,

а $b(t)$ – щільність розподілу часу обслуговування.

У цьому випадку

$$b(t)=\mu_1\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-\mu_1\cdot t}+\mu_2\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-\mu_2\cdot t}.$$

Середнє число вимог, що чекають, з першого джерела дорівнює

$$\frac{\rho_1\left(\rho_1+\dfrac{\rho_2}{\alpha}\right)}{1-\rho_1-\rho_2}. \tag{7.76}$$

Аналогічно з другого джерела –

$$\frac{\rho_2(\alpha\cdot\rho_1+\rho_2)}{1-\rho_1-\rho_2}. \tag{7.77}$$

Середній час чекання знаходять діленням виразів (7.75) і (7.76) відповідно на λ_1 й λ_2 у системі за формулою Літтла.

Порівняння величини L (загального числа вимог, що чекають) для цього випадку з L із попереднього показує, що якщо віддається перевага викликам із джерела з меншим часом обслуговування, то при $\alpha<1$ у такій системі чекає менше число вимог, чим у системі з обслуговуванням у порядку надходження.

7.4. Системи зв'язку

Комбінаторний метод. У системі зв'язку багато джерел може мати обмежений доступ до абонентів. Системи зв'язку досліджувалися за допомогою досить складних рівнянь станів. Припустимо, наприклад, що зайнято *p* ліній, а *m-p* ліній вільні (загальне число ліній дорівнює *m*). Позначимо через *G(p)* імовірність того, що зайнято *p* ліній, а через *H(m-p)* – імовірність того, що зайнято інші *m-p*. Добуток *H(m-p)* · *G(p)* є ймовірність того, що телефонний виклик може губитися за умови, що зайнято *p* ліній. Загальну ймовірність того, що виклик може губитися, знайдемо таким чином [45, 46]:

$$\sum_{p=0}^{m} H(m-p)G(p) \equiv E. \tag{7.78}$$

Щоб знайти *H(m-p),* припустимо, що *j*-виклик надходить випадковим чином і розподіляється серед *m* ліній. Припустимо, що *i*-й виклик направляється в *m-p* вільних ліній, а j-й виклик – в *p* зайнятих ліній. Імовірність цієї події описується гіпергеометричним розподілом

$$\frac{\begin{pmatrix} p \\ j-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m-p \\ i \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix}}. \tag{7.79}$$

Якщо число $i = m - p$ є єдино можливим, то одержимо

$$H(m-p) = \sum_{i=m-p}^{m} \frac{\begin{pmatrix} p \\ j-m+p \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix}} F(j), \tag{7.80}$$

де $F(j)$ – функція розподілу вхідного потоку.

Якщо, наприклад, $F(j) = \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} b^j (1-b)^{m-j}$, то

$$H(m-p) = b^{m-p}. \tag{7.81}$$

Інакше

$$G(p) = \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} c^p (1-c)^{m-p},$$

$$E = (b + c - bc)^m. \tag{7.82}$$

Справедливість цієї формули можна перевірити інтуїтивно.

Розглянемо *m* пари ліній. Якщо *b* – імовірність того, що зайнято першу лінію пари, а *c* – імовірність того, що зайнято другу лінію пари, то $(b + c - bc)^m$ – імовірність зайняття *m* ліній.

7.5. Керування вхідним потоком у системі із втратами

У системі зв'язку цього типу є прилад, керуючий вхідним потоком. Вступний виклик губиться, якщо зайняті всі c каналів або зайнятий керуючий прилад. Спочатку кожен виклик надходить до оператора, що управляє вхідним потоком (ніби звертаючись за дозволом на телефонну розмову), а потім надходить у канал. Нехай P_j – імовірність того, що зайнято j ліній і керуючий прилад вільний, а Q_i – імовірність того, що зайнято j ліній і зайнятий керуючий прилад. Тоді, якщо вимоги утворюють пуассонівський потік із параметром λ, а час обслуговування в каналах і керуючому приладі є експоненціальним з параметрами μ й η відповідно, то

$$(\lambda + i\mu)P_j = \eta Q_{j-1} + (j+1)\mu P_{j+1}, \tag{7.83}$$

$$(m + i\mu)P_j = \lambda P_j + (j+1)\mu Q_{j+1}.$$

Помітимо, що переходи зі стану в стан (j,1) і в стан (j,1), коли лінії зайняті, а керуючий прилад вільний, відбуваються [40]:

1) коли система перебуває в стані (j,1) і залишається в ньому;

2) коли система переходить зі стану (j+1,1) і стану (j-1,0) (якщо керуючий прилад зайнятий й зайнято j-1 каналів);

3) коли система переходить зі стану (j,1) у стан (j,0), якщо надходить одна вимога.

У наведених рівняннях можна обчислити P_j і Q_j й одержати рівняння четвертого порядку. Ймовірність того, що система зайнята, дорівнює сумі ймовірностей того, що зайнято всі обслуговуючі пристрої й зайнятий керуючий прилад:

$$E = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)(\kappa + K)}{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)r + \left(\frac{\lambda}{\mu} + r\right)K}, r = \frac{\eta}{\mu}. \tag{7.84}$$

Якщо число каналів дорівнює *c*, то

$$K = \sum_{i=0}^{c-1} \frac{c!}{(c-i-1)!} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\mu} + r + 1 + \mathrm{i}\right)}{\Gamma(\mu + r + 1)} \cdot \frac{1}{\left[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)r\right]^i}. \tag{7.85}$$

7.6. Керування вхідним потоком у системі з чеканням

Розглянемо схему для системи із чеканням. Нехай імовірність *P (i,1)* – імовірність того, що в черзі перебуває i вимог, що чекають, і керуючий прилад вільний, а *Q(i,0)* – ймовірність того, що є i вимог, які чекають, і керуючий прилад зайнятий. Нехай обслуговування виробляється одним каналом. *P(0,0)* – ймовірність відсутності вимог у системі. Одержуємо

$$\begin{aligned}
&(\lambda+\mu)P(i,1)=\lambda P(i-1,1)+\eta Q(i,0), i\geq 1,\\
&\lambda P(0,0)=\mu P(0,1), i=0,\\
&(\lambda+\eta)Q(i,0)=\lambda Q(i-1,0)+\mu P(i+1,1), i\geq 1.\\
&(\lambda+\eta)Q(0,0)=\lambda P(0,0)+\mu P(1,1), i=0,\\
&\qquad\sum[P(i,1)+Q(i,0)]=1.
\end{aligned}\tag{7.86}$$

Ця система рівнянь має розв'язок

$$\begin{aligned}
P(i,1)&=\frac{\lambda(1-\rho)}{\mu(\alpha_2-\alpha_1)}\left(\alpha_2^{i+1}-\alpha_1^{i+1}\right), i\geq 0,\\
P(0,0)&=1-\rho\ ,\\
Q(i,0)&=\frac{\lambda}{\mu\eta}\frac{1-\rho}{\alpha_2-\alpha_1}\left[(\lambda+\mu)(\alpha_1^{i+1}-\alpha_2^{i+1})-\lambda(\alpha_2^{i}-\alpha_1^{i})\right], i\geq 0,
\end{aligned}\tag{7.87}$$

де α_1 й α_2 – корінь рівняння

$$\mu\eta\alpha^2-\lambda(\lambda+\mu+\eta)\alpha+\lambda^2=0.$$

У цьому випадку $\rho=\lambda\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\mu}\right).$

При $\eta\to\infty$ одержуємо геометричний розподіл, що є рішенням рівнянь для одноканальної системи [19].

Для нескінченного числа каналів маємо

$$\begin{aligned}
P(j,0)&=\left(1-\frac{\lambda}{\eta}\right)e^{-\frac{\lambda}{\mu}}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i}, j=0,1,..,\\
Q(j,i)&=\left(1-\frac{\lambda}{\eta}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i+1}e^{-\frac{\lambda}{\mu}}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j}, \begin{matrix} i=0,1,...,\\ j=0,1,..., \end{matrix}
\end{aligned}\tag{7.88}$$

де *P (0,j)* – імовірність того, що зайнято j ліній, а керуючий прилад вільний, отже, немає вимог, які чекають.

Q (i,j) – імовірність того, що зайнято *j* ліній й *i* вимог чекає, оскільки зайнято керуючий прилад. Для нескінченного числа каналів маємо три рівняння, для *c* каналів – дев'ять, а для розглянутої вище одноканальної системи – чотири [21, 23].

Вивчення цього випадку буде продовжено в завданнях.

7.7. Використання теорії до руху автомобільного транспорту

Нескінченна послідовність точок *{A$_i$} (i = 1,c = 2, ...)*, розташованих на прямій *OX*, має пуассонівський розподіл з математичним сподіванням $\lambda = 1$, тобто одиниця масштабу дорівнює середній щільності. Таким чином, імовірність того, що на відрізку довжиною L перебуває *n* точок, дорівнює

$$L^n\frac{e^{-L}}{n!}.$$

Нехай ρ – фіксована довжина. Розподіл точок A_i можна виразити через ρ у такий спосіб. Нехай A_1 – перша точка, розташована праворуч від початку відліку. Виберемо точку B_1 праворуч від точки A_1 таким чином, щоб довжина інтервалу $A_1У_1$ дорівнювала ρ. Якщо в цьому інтервалі немає точок A_i, то це свідчить, що він утворить послідовність, що складається з одного інтервалу. Якщо ж інтервал α_1 містить точок A_i, то вправо від точки B_1 відкладаємо новий відрізок довжиною $\alpha_1\rho$, що закінчується в точці B_2. Якщо в інтервалі $B_1У_2$ не міститься нових точок A_i, то цей інтервал утворить послідовність, що складається з $1 + \alpha_1$ інтервалів. Якщо ж у ньому втримується α_2 точок A_i, відміряємо вправо від B_2 інтервал довжиною $\alpha_2\rho$, і т.д. Цей процес триває нескінченно [3].

Послідовність може закінчитися, якщо буде досягнутий останній інтервал $B_{n-1}B_n$, що не містить нових точок A_i. За початок нової послідовності приймемо першу точку послідовності A_i, розташовану праворуч від B_n. Тепер обчислимо p_n (імовірність того, що послідовність складається рівно з n інтервалів довжиною ρ) і знайдемо p_∞ (імовірність того, що число таких інтервалів ρ нескінченно) [27, 28].

Імовірність того, що послідовність містить дане число інтервалів:

$$n = 1 + \alpha_1 + ... + \alpha_k,$$

дорівнює ймовірності $\dfrac{\rho^{\alpha_1} e^{-\rho}}{\alpha_1!}$ того, що в першому інтервалі $A_1У_1$ утримується α_1 точок, помноженої на ймовірність того, що в другому інтервалі $B_1У_2$ (довжиною $e^{-\alpha_1\rho}$) утримується α_2 точок, тобто на $\dfrac{(\alpha_1\rho)^{\alpha_1} e^{-\alpha_1\rho}}{\alpha_2!}$, і т.д. до останнього інтервалу, в якому немає точок (імовірність цієї події дорівнює $\dfrac{(\alpha_k\rho)^0 e^{-\alpha_k\rho}}{0!}$) .

Цей добуток дорівнює

$$\frac{\alpha_1^{\alpha_2}\alpha_2^{\alpha_3}...\alpha_{k-1}^{\alpha_k}\rho^{n-1}e^{-n\rho}}{\alpha_1!\alpha_2!...\alpha_k!}. \qquad (7.89)$$

Щоб знайти p_n, необхідно розглянути всі можливі розкладання

$$n = 1 + \sum_{i=1}^{k}\alpha_i .$$

Для кожного такого розкладання одержимо вираз, аналогічний (7.86), що в загальному вигляді можна записати як

$$p_n = a_n\rho^{n-1}e^{-n} . \qquad (7.90)$$

Якщо $\rho<1$, то $p_\infty=0$; зі збіжності ряду, складеного з p_n, випливає співвідношення $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. Маємо

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n , \qquad (7.91)$$

де

$$z = \rho e^{-\rho} . \qquad (7.92)$$

Це рівняння має два нулі: $\rho_1 < 1$ й $\rho_2 > 1$ для всіх z, що лежать між нулем й e^{-1}. Помітимо, що при зростанні ρ від нуля до одиниці z зростає до e^{-1}, а при зростанні ρ нескінченно спадає до нуля.

Маємо

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\rho dz}{z^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(1-\rho)e^{n\rho}}{\rho^n}d\rho\,. \qquad (7.93)$$

Розклавши підінтегральний вираз у ряд і вибравши коефіцієнти при ρ^{-1}, одержимо

$$a_n = \frac{n^{n-2}}{(n-1)!}.$$

Тому

$$p_n = \frac{n^{n-2}}{(n-1)!}\rho^{n-1}e^{-n\rho}. \qquad (7.94)$$

Цей результат справедливий також і при $\rho \geq 1$. У співвідношенні (7.11) ρ_1 виражається як функція від z. Однак це співвідношення справедливо й при $\rho = 1$, тобто при $z = e^{-1}$.

Отже, $p_\infty = 0$. При $\rho > 1$ покладемо $\rho = \rho_2$. У цьому випадку сума ймовірностей дорівнює $e^{\rho_1 - \rho_2}$ й $p_\infty = 1 - e^{\rho_1 - \rho_2}$. При $\rho < 1$ середнє число інтервалів

$$\sum np_n = \frac{1}{1-\rho}, \qquad (7.95)$$

а ймовірна довжина послідовності, до якої належить точка A_i:

$$\frac{\sum n^2 p_n}{\sum np_n} = \frac{1}{(1-\rho)^2}. \qquad (7.96)$$

Середнє число послідовностей інтервалів, що втримуються у відрізку довжиною A, дорівнює $A(1-\rho)$.

Формула (7.14) дає ймовірність того, що в послідовності втримується n точок, включаючи й першу точку цієї послідовності, якщо інтервал $A_1У_1$ дорівнює ρ. Якщо ж інтервал $A_1У_1$ дорівнює $r\rho$, то $n = r + \alpha_1 + ... + \alpha_k$ і, як раніше, одержимо

$$p_n = r\frac{n^{n-r-1}}{(n-r)!}\rho^{n-r}e^{-n\rho}, \quad n = r, r+1, ... \qquad (7.97)$$

Отриманий результат знаходить важливе застосування. Нехай проїзд автомобілів повз світлофор дозволяється через однакові проміжки часу T. Допустимо, що потік транспорту є пуассонівським із параметром λ, який дорівнює одній часовій одиниці. Нехай $\rho = \lambda T$. Припустимо, що в момент появи червоного сигналу в черзі перебуває Z автомобілів, а в момент попередньої появи зеленого сигналу число автомобілів, що чекали, дорівнювало X. Чому дорівнює ймовірність того, що в черзі перебуває Z автомобілів при заданому X й за умови, що число автомашин, пропущених за час α зеленого сигналу, - постійна величина N? Значення ρ приблизно дорівнює $\alpha\lambda/N$.

Нехай $f(z; x) \equiv P(Z = z \mid X = x)$, тоді

$$f(z; x) = \frac{(\alpha\lambda)^{z-x+N} e^{-\alpha\lambda}}{(z-x+N)!}, \quad x > N,$$

$$f(0; x) = \sum_{j=x}^{N} R(j; x), \quad z = 0, \ x \le N,$$

де $$R(n; r) = r\frac{n^{n-r-1}}{(n-1)!} e^{-n\rho} \rho^{n-r} \qquad (n = r, r+1, \ldots);$$

$$f(z; x) = e^{\rho z}\left[R(N+z; x) - \sum_{j=1}^{z-1} R(z; j) f(j; x)\right], \quad z > 0, \ \ x \le N\ldots$$

Перше рівняння показує, що при $x > N$ число автомобілів, які чекають, залежатиме від числа автомобілів, що прибувають у зеленому світлі. Третє рівняння отримано в такий спосіб. При фіксованих значеннях $x \le N$ й $z > 0$ число автомобілів, що чекають, буде дорівнювати z, після того як запалюється червоне світло, протягом часу, необхідного для проїзду автомобілів, що чекають, нові автомобілі не прибувають. Імовірність цієї події дорівнює $f(z; x)e^{-\rho z}$. Це ймовірність того, що перша черга зникне після проїзду $N + z$ автомобілів. Імовірність останньої події дорівнює $R(N + z; x)$. Таким чином:

$$\left[R(N+z; x) - f(z; x)e^{-\rho z}\right] = \sum_{j=1}^{z-1} f(j; x) R(z; j).$$

Це являє собою ймовірність того, що черга, в якій перебуває $N + z$ автомобілів, зникне, а число автомобілів, які чекають, буде дорівнювати j. Звідси одержимо третє рівняння. Хейт наводить таблиці, в яких обчислені ці вирази. Він показує, що при фіксованому x виконується співвідношення $\sum_{z} f(z; x) = 1$. Крім того, він розглядає транспортний потік із бічних вулиць і його вплив на зміну тривалості світлового сигналу.

Розглянемо дорогу, частина якої довжиною AB має ширину, достатню для проїзду тільки в одному напрямку, а за межами її існує вільний проїзд в обох напрямках. Автомобілі V_1 випадковим чином (за законом Пуассона) з інтенсивністю q_1 в одиницю часу прибувають у пункт A, маючи намір проїхати з пункту A в пункт B. Аналогічно автомобілі V_2 випадковим чином з інтенсивністю q_2 прибувають у пункт B, маючи намір проїхати з пункту B у пункт A. Прибувши в пункт A, автомобіль відразу ж направиться на ділянку AB, якщо на цій ділянці немає зустрічних автомобілів і якщо в попередньому проміжку часу β_1 жоден автомобіль V_1 не направився на неї. (Конкретний сенс величини β_1 з'ясується пізніше). У противному разі автомобіль V_1 буде чекати доти, доки не будуть виконані обидві ці умови. За аналогічних умов у попередньому проміжку часу β_2 автомобіль V_2 направляється на ділянку AB. Припустимо, що кожному автомобілю V_1 для проїзду через ділянку AB буде потрібно рівно α_1, а автомобілю V_2 – α_2 часових одиниць. Нехай всі автомобілі пересуваються з постійною швидкістю, а час, протягом якого автомобіль набирає швидкість або зупиняється, дуже малий з деякою тривалістю β_1 й β_2. Ці величини можна врахувати, скорегувавши відповідним чином α_1 й α_2. Необхідно, щоб $\alpha_1>\beta_1$, $\alpha_2>\beta_2$.

Позначимо через VB_1 проміжок часу, коли ділянка AB зайнята автомобілями V_1. Аналогічно визначається VB_2, VB_0 – проміжок часу, коли ділянка AB вільна. Тривалість періодів VB_0, VB_1 й VB_2 дорівнює відповідно t_2, t_1 й t_2. Тривалість кожного періоду має розподіл, функція моментів якого $E(e^{t_i T})$ за аргументом T дорівнює M_i *(T)*. Число автомобілів V_1 й V_2, що чекають на початку інтервалів VB_1 й VB_2, дорівнює відповідно r_1 й r_2. Запишемо $M_1(-q_1) = M_1$ й $M_2(-q_2) = M_2$.

Нехай n - число вимог, які будуть обслуговуватись (тобто число автомобілів, які пройдуть через цю ділянку) до моменту, коли більше не буде вимог, що обслуговуються. Будемо розглядати $n\beta_1$ як час, необхідний для проїзду автомобілів в одному напрямку. Якщо в момент, коли починається проїзд через ділянку, у черзі чекає r автомобілів. Це час на величину β_1 більше проміжку часу, що пройде до моменту, коли в черзі більше не буде автомобілів, які чекають.

Нехай $\varphi(r)$ – середня загальна тривалість чекання в черзі для автомобілів за час проїзду через ділянку всіх автомобілів, що чекають у черзі, в якій спочатку було r автомобілів. Середня загальна тривалість чекання в черзі за час проїзду через ділянку автомобілів, що чекають у черзі, у якій спочатку був один автомобіль, дорівнює $\left[e^{(\alpha_1-\beta_1)q_1}-1\right]\varphi(1)$, де α_1 – час, необхідний для проїзду через ділянку автомобіля, який чекає в цій черзі. Для автомобілів, що прибувають у момент, коли останній автомобіль, що чекав у черзі, вже вступив на ділянку, і для автомобілів, які прибувають в останньому проміжку $\alpha_1 - \beta_1$, час чекання дорівнює нулю. Таким чином, середній час чекання дорівнює сумі цих величин:

$$\varphi(r)+\left[e^{(\alpha_1-\beta_1)q_1}-1\right]\varphi(1). \tag{7.98}$$

Після усереднення за r одержимо середній загальний час чекання.

Для знаходження $\varphi(r)$ використаємо метод Бореля. Розглянемо групи автомобілів, що проїжджають через ділянку. Нехай за той час, коли проїжджає початкове число r автомобілів, прибуває a машин, а за час їхнього проїзду – ще b автомобілів і т.д. Імовірність того, що число автомобілів у послідовних групах дорівнює *r, a, b, c, …,* становить:

$$\frac{e^{-\rho_1 r}(\rho_1 r)^a}{a!}\cdot\frac{e^{-\rho_1 a}(\rho_1 a)^b}{b!}\frac{e^{-\rho_1 b}(\rho_1 b)^c}{c!}\ldots, \tag{7.99}$$

де $\rho_1=\beta_1 q_1$.

Помітимо, що якщо ρ_2 – відповідна величина для іншої черги (обумовлена аналогічно), то для існування рішення для стаціонарного стану повинно виконуватися співвідношення $\rho_1 + \rho_2 < 1$.

Середня загальна тривалість чекання при такому законі розподілу дорівнює:

$$\frac{1}{2}\beta_1[r(r-1)+a(a-1)+b(b-1)+...]+ \\ +\frac{1}{2}\beta_1[ra+ab+bc+...]. \qquad (7.100)$$

Вираз у перших квадратних дужках описує час затримки автомобілів внаслідок проїзду через ділянку автомобілів своєї групи, а вираз у других квадратних дужках – час затримки автомобілів внаслідок проїзду через ділянку автомобілів попередніх груп.

Після виконання перетворень одержуємо вираз

$$\varphi(r)=\frac{1}{2}\beta_1\left[\frac{r(2\rho_1-1)}{(1-\rho_1)^2}+\frac{r^2}{1-\rho_1}\right].$$

Після усереднення по r знаходимо

$$\overline{\varphi(r)}=\frac{1}{2}\beta_1\left[\frac{2\rho_1-1}{(1-\rho_1)^2}E(r)+\frac{E(r^2)}{1-\rho_1}\right].$$

Вираз для середнього часу чекання автомобілів V_1 має вигляд

$$W_1=\frac{1}{2(1-\rho_1)}\left[\beta_1\rho_1+\frac{\rho_1 E(t_2^2)(1-\rho_1-\rho_2)}{\gamma+\varepsilon_1\delta_2+\varepsilon_2\delta_1}\right], \qquad (7.101)$$

де $\delta_1=q_1+q_2-q_1M_1$; $\quad\delta_2=q_1+q_2-q_2M_2$;

$$\gamma=M_1+M_2+M_1M_2;$$

$$\varepsilon_1=\frac{e^{(\alpha_1-\beta_1)q_1}-1}{q_1};$$

$$\varepsilon_2=\frac{e^{(\alpha_2-\beta_2)q_1}-1}{q_2}.$$

$M_1(\theta)$ – твірна функція моментів розподілу випадкової величини t_1 (часу, у плині якого автомобілі першої черги займають проїзд) за аргументом θ. Те ж саме ставиться до M_2 й t_2.

У свою чергу, середній час чекання для автомобілів

$$W_2=\frac{1}{2(1-\rho_2)}\left[\beta_2\rho_2+\frac{\rho_2 E(t_1^2)(1-\rho_1-\rho_2)}{\gamma+\varepsilon_1\delta_2+\varepsilon_2\delta_1}\right]. \qquad (7.102)$$

При $\beta_1=\beta_2=0$ маємо

$$W_1=\frac{e^{\alpha_1 q_2}(q_2+q_1^{\alpha_2(q_1+q_2)})}{q_2 e^{\alpha_1 q_2}(e^{(\alpha_1-\alpha_2)q_1}-e^{\alpha_2 q_1}+1)+q_1 e^{\alpha_2 q_1}(e^{(\alpha_1+\alpha_2)q_2}-e^{\alpha_2 q_2}+1)}\times \\ \times\frac{e^{\alpha_2 q_2}-\alpha_2 q_2-1}{q_2}. \qquad (7.103)$$

Щоб знайти W_2, замінимо α_1 на α_2, q_1 на q_2 й q_2 на q_1.

При $\alpha_2=\beta_2=0$ запишемо

$M_2=1$, $\quad\delta_2=q_1$, $\quad\varepsilon_2=0$, $\quad W_1=\dfrac{\rho_1^2}{2q_1(1-\rho_1)}$, $\qquad$ (7.104)

$$W_2 = \frac{1}{2(1-\rho_1)^2 q_1 q_2} q_2[2\rho_1 - 3\rho_1^2 + 2\rho_1^3 + 2q_1\varepsilon_1(1-\rho_1) -$$

$$-2q_1\alpha_1(1-\rho_1^2)] = \frac{e^{(\alpha_1-\beta_1)q_1}}{q_1(1-\rho_1)} - \alpha_1 - \quad (7.105)$$

$$-\frac{1}{q_1} + \frac{2\rho_1^3 - \rho_1^2}{2q_1(1-\rho_1)^2}.$$

При $\alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ маємо

$$W_1 = 0, \qquad W_2 = \frac{e^{\alpha_1 q_1} - \alpha_1 q_1 - 1}{q_1}.$$

Ці положення можна застосовувати й до пересічних потоків пішоходів при однобічному русі. Наприклад, у вузьких проходах, при вході в приміщення, у проходах між рядами, на пішохідних мостах і т.д. У цьому випадку може бути прийнято таке припущення: $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

Якщо два транспортних потоки перетинаються під прямими кутами, то середній час чекання при $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ або $\beta_1 = \beta_2 = 0$ таке, що й наведене раніше.

7.8. Зупинки транспорту в тунелі

Для надання допомоги автомобілям, що втратили керування, і виведення їх з тунелю в нью-йоркських тунелях були обладнані аварійні гаражі, оснащені спеціальними тягачами. Коли тунель мав один проїзд, він був обладнаний одним гаражем. Сучасні тунелі із двома проїздами обладнані двома гаражами. При проектуванні третього проїзду для тунелю передбачалося будівництво третього. На основі методів теорії ймовірностей для визначення числа автомобілів, що зупиняються в тунелях, показано, що обладнання третього гаража буде використовуватися занадто рідко, і більші капіталовкладення в будівництво, а також витрати на обладнання й обслуговування додаткового гаража не будуть виправдані [3, 28].

Було встановлено, що зупинка одного автомобіля може затримати 200 машин. В 1951 р. у тунелі із двома проїздами пройшло 2714 таких зупинок середньою тривалістю 5 хв. У сімох випадках відбулася зупинка двох автомобілів одночасно. Допускаючи, що зупинки автомобілів мають пуассонівський розподіл, можна знайти ймовірність того, що відбудеться зупинка відразу двох автомобілів у будь-якому п'ятихвилинному проміжку часу:

$$P(2) = \frac{1}{2!}e^{-m}m^2 = \frac{1}{2}e^{-0{,}0129}(0{,}0129)^2 = 82{,}5\cdot 10^{-6},$$

де m – середнє число зупинок тривалістю 5 хв, що припадають на один проїзд.

У році міститься 105 – 120 п'ятихвилинних проміжків. Тому середньорічне число зупинок відразу двох автомобілів, що припадають на один проїзд, дорівнює

$$nP(2) = 105120 \cdot (82{,}5 \cdot 10^{-6}) = 8{,}7\,,$$

а для двох – $2nP(2) = 17{,}4$.

Отриманий результат не відповідає фактичним даним. Він значно перевищує число зупинок, яке дорівнює 7. Однак після ретельної перевірки виявилося, що в дійсності була 31 одночасна зупинка двох машин. Алі й це число відрізняється від обчисленого значення. Причина помилки обчислення виявилася, коли був розглянутий погодинний розподіл зупинок. Приблизно три чверті зупинок відбувалося протягом найбільш напруженого восьмигодинного періоду, n – число зупинок протягом інших 16 часів, а М – середнє число зупинок, що доводяться на один проміжок тривалістю 5 хв для найбільш напруженого восьмигодинного періоду. У році міститься близько 35 000 таких проміжків. Імовірність того, що в кожному із них зупиниться один автомобіль, дорівнює

$$P = \frac{1}{35000} = 28{,}6 \cdot 10^{-6}.$$

Середнє число зупинок одного автомобіля, що доводиться на один проїзд, дорівнює 1357.

Таким чином,

$$N = \frac{3}{4}1357 = 1020 \text{ і } M = NP = 1020(28{,}6 \cdot 10^{-6}) = 29{,}2 \cdot 10^{-3},$$

$$P(2) = \frac{1}{2!}e^{-0{,}0292}(0{,}0292)^2 = 405 \cdot 10^{-6}.$$

Середнє число зупинок двох автомобілів, що проходять протягом найбільш напруженого восьмигодинного періоду одночасно, дорівнює

$$35000(405 \cdot 10^{-6})=14{,}2.$$

Аналогічно знаходимо, що середнє число випадків одночасних зупинок двох автомобілів, що відбуваються протягом інших 16 годин, дорівнює 0,8. Таким чином, загальне число зупинок двох автомобілів одночасно дорівнює 2(14,2+0,8)=30. Цей результат відповідає числу таких зупинок, що мали місце в дійсності, яке дорівнює 31. Виконавши аналогічні підрахунки, одержуємо, що для Голландського тунелю середнє число таких зупинок дорівнює 140, у дійсності ж було 149 зупинок.

Для обчислення числа зупинок трьох автомобілів можна використовувати той же метод.

Таким же чином була зроблена оцінка роботи тунелю із трьома проїздами. Отримано, що в цьому випадку за рік відбудеться 2533 зупинки одного автомобіля, 57 зупинок двох автомобілів одночасно й одна зупинка трьох автомобілів. Таким чином, при одночасній зупинці двох машин потрібно обслужити 114 автомобілів. Досвід показав, що в Голландському тунелі для обслуговування 149 таких автомобілів було досить двох гаражів. Була дана рекомендація не будувати третій гараж для обслуговування третього проїзду. В результаті аналізу забезпечена економія приблизно в 130 тис. дол. Витрачено ж було близько п'яти людино-днів.

7.9. Використання теорії до руху повітряного транспорту

Розглянемо додаток деяких ідей теорії масового обслуговування до організації посадки літаків. У цьому випадку звичайно становить інтерес скорочення часу посадки. Обчислимо спочатку ймовірність того, що *n -1* літаків чекають приземлення [42].

Припустимо, що літаки наближаються до зони керування з випадкових напрямків через випадкові проміжки часу, розподілені за експоненціальним законом, із постійною інтенсивністю прибуття, що приймається такою, що дорівнює одній одиниці. Отже, e^{-t} – розподіл проміжків часу між моментами прибуття. Літак, що прибуває через проміжок часу, менший мінімального часу, необхідного для безпечного приземлення попереднього літака, затримується на мінімальний час. Відношення мінімального часу, необхідного для безпечної посадки, до середньої тривалості проміжку часу між літаками, що прибувають, позначається T (для простоти будемо вважати, що для даного аеропорту ця величина постійна). Становить інтерес випадок, коли T<1. Імовірність того, що прибулий літак не затримується, дорівнює

$$\int_T^{\infty} e^{-t}dt = e^{-T} . \tag{7.106}$$

Імовірність того, що буде затриманий один літак, знайдемо, розглянувши всі затримки окремих літаків між двома незатримуваними літаками. Літак, що буде затриманий, має прибути через проміжок часу $t_1 < T$ після прибуття незатримуваного літака, що безпосередньо прибуває за ним, через проміжок часу $t > 2T - t_1$. Таким чином, імовірність спільної появи цих двох подій

$$\int_0^T e^{-t_1}dt_1 \int_{2T-t}^{\infty} e^{-t}dt = Te^{-2T} .$$

Імовірність того, що буде затримано два літаки, знаходиться (розглядаються два затриманих літаки між двома незатримуваними) аналогічним чином обчисленням імовірності спільної появи подій:

$t_1 < T$ – для першого затриманого літака, що прибуває за незатримуваним;

$t_2 < 2T - t_1$ – для другого затримуваного літака, що прибуває за першим затримуваним;

$t > 3T - t_1 - t_2$ – для незатриманого літака, що прибуває безпосередньо за двома затримуваними [47].

У результаті для двох затримуваних літаків одержуємо

$$\int_0^T e^{-t_1}dt_1 \int_0^{2T-t_1} e^{-t_2}dt_2 \int_{3T-t_1-t_2}^{\infty} e^{-t}dt = \frac{3T^2}{2}e^{-3T} . \tag{7.107}$$

Загальний вираз для ймовірності затримання (*n*-1)-го літака має вигляд

$$\alpha_n T^{n-1} e^{-nT} ,$$

де α_n – коефіцієнт, що залежить тільки від *n*.

Очевидно, що повинно виконуватись співвідношення

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T^{n-1} e^{-nT} = 1, \tag{7.108}$$

$$\text{або} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u^n = T\ , \tag{7.109}$$

де величина $u = Te^{-T}$ для малих T визначається однозначно.
Отже, Т можна виразити як функцію від u:

$$T(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u^n\ . \tag{7.110}$$

Якщо початок координат - кратний полюс, маємо

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{T(u)}{u^{n+1}} du = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^{nT}}{T^n}(1-T)dT = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{n^{n-2}}{(n-2)!} = \frac{n^{n-1}}{n!}\ . \tag{7.111}$$

Таким чином, розклавши підінтегральний вираз у ряд і вибравши коефіцієнт при T^{-1}, можна знайти розв’язок.

Імовірність того, що один за іншим затримуються n-1 літаків, дорівнює

$$\frac{n^{n-1}}{n!} T^{n-1} e^{-nt} \approx \frac{n^{n-1}}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} T^{n-1} e^{nT} = \frac{T^{n-1} e^{n(1-T)}}{n\sqrt{2\pi n}}\ . \tag{7.112}$$

Використовуючи формулу Стірлінга для $n!$, Пірсі наводить ряд кривих для цього розподілу.

Середнє число літаків, що перебувають у системі (з урахуванням першого літака, що робить посадку без чекання):

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n T^{n-1} e^{-nT} = \frac{1}{1-T}\ . \tag{7.113}$$

Цю формулу можна легко знайти, продиференціювавши вираз (7.110) по Т і зробивши спрощення. (Відзначимо, що при Т=1 затримуються всі літаки). Аналогічно знаходимо другий початковий момент, він дорівнює $\frac{1}{(1-T)^3}$.

Частину затримуваних літаків визначають як відношення середнього числа літаків, що перебувають у системі, без урахування літака, що робить посадку, до середнього числа літаків: $\frac{L-1}{L} = T$.

Розподіл тривалості посадки знайдемо шляхом таких міркувань. Всі проміжки часу тривалістю t<T мають нульову частоту; проміжки часу тривалістю t=T з'являються із частотою t; частина затримуваних літаків, тобто проміжки часу тривалістю t>T, з'являється із частотою 1-T появи незатримуваних літаків, помноженої на ймовірність їхнього прибуття, тобто на $e^{-(t+T)}$. Використаємо одиничну функцію *H(T-t)* (яка дорівнює одиниці для позитивних значень аргументу і нулю для негативних; її похідна є дельта-функцією) і дельта-функцію $\delta(T-t)$, щоб навести цей розподіл у вигляді

$$(1-T)e^{-(t-T)}H(T-t)+T\delta(T-t).$$

Тепер, використовуючи інтегральне рівняння Ліндлі, можна одержати розподіл часу чекання. Шляхом детального аналізу Пірсі знаходять вираз для розподілу проміжку часу $t, mT < t < (m+1)T$:

$$Q_t(t)dt = (1-T)e^{t-T}dt\sum_{r=0}^{\infty}\frac{[(m+r+1)T-t]^{m+r}}{(m+r+1)!}\times$$

$$\times[t+(m+r+1)(1-T)]e^{-(m+r)T},$$

звідки після інтегрування за $t(0 \le t \le \infty)$ визначаємо Т як частину затримуваних літаків. Помітимо, що при підсумовуванні за m необхідно розглядати інтервали $[mT,(m+1)T]$. Звідси знаходимо також середній час чекання $\dfrac{T^2}{2(1-T)}$.

Відзначимо, що час чекання збільшується з ростом Т. Наведений вище розподіл дає критерії для визначення необхідної пропускної здатності аеропорту. Більш важливим є критерій, який встановлює, що тільки невелике число літаків має чекати довше певного проміжку часу.

Інтенсивність прибуття літаків у район Нью-Йорка розглядається з періодом, що дорівнює одній добі. Передбачається, що протягом даної доби час приземлення постійний, але набуває одного із двох різних значень (одна й дві хвилини). Доба була розділена на проміжки, які дорівнюють постійному часу приземлення (яке повільно змінюється із часом). В *i*-му проміжку середня інтенсивність прибуття λ_i постійна, і розподіл числа літаків, що прибувають у цьому проміжку часу, є пуассонівським:

$$\frac{\lambda_i^n e^{-\lambda_i}}{n!} \equiv a_n^i, n = 0,1....$$

Літаки обслуговуються у порядку прибуття. Число каналів, наявних наприкінці *(i-1)* -го проміжку часу для використання в *i*-му проміжку, дорівнює c_i. Для обчислення стаціонарних імовірностей p_n^i того, що наприкінці *i*-го проміжку часу в системі перебуває *n* літаків, виражених через ці ж імовірності для *(i-1)*-го проміжку, використовують формулу Кромеліна.

Якщо ймовірності p_n^i відомі, то ймовірності для більших *i* можна обчислити рекурентним способом. Для позначення номера проміжку застосовують верхній індекс. Рівняння мають вигляд

$$p_0^i = \alpha_0^i P_{c_i}^{i-1},$$

$$p_1^i = \alpha_1^i P_{c_i}^{i-1} + \alpha_0^i P_{c_{i+1}}^{i-1}, \qquad (7.114)$$

$$p_n^i = \alpha_n^i P_{c_i}^{i-1} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_{n-j}^i P_{c_{i+j}}^{i-1},$$

де $P_n^i = \sum_{i=0}^{n} p_{c_i}^i$.

Якщо ймовірності p_n^i обчислюються наприкінці проміжків часу (тобто для вкладеного марковського ланцюга), то проміжні значення ймовірностей знаходимо шляхом інтерполяції. Звичайним способом можна вивести також різні показники ефективності. Для обробки даних, отриманих за добу (включаючи визначення середнього числа літаків, що чекають і перебувають у системі), на обчислювальній машині потрібно небагато часу (всього сім хвилин). Ці дані використовують для обчислення числа літаків, що чекають, і визначення інших показників [45].

Коротко зупинимося на важливій роботі, присвяченій організації процесу вивантаження, навантаження й підготовки до рейсу літаків у Лондонському аеропорту. Пасажир, що прибуває не пізніше заданого моменту часу напередодні вильоту літака, проходить звичайну систему реєстрації. Якщо він прибуває в останню хвилину, то стає до вікна з більш короткою чергою, щоб прискорити оформлення документів.

Робота аеропорту у великому ступені залежить від того, наскільки швидко й економічно відбуваються прийом і передача інформації. Контроль за передачею інформації здійснює центральний пост, що міститься на площадці стоянки аеропорту. Повідомлення про стан готовності літаків до вильоту передаються безупинно за допомогою рухомого приймача-передавача. Один оператор одночасно стежить за підготовкою двох-трьох літаків. Дані про готовність до польоту нагромаджуються на центральному пості й висвічуються на табло. Якщо надходять повідомлення про затримки, то із центрального поста по телефону наводиться довідка у відповідального за певні операції про причини перешкод і з'ясовується час затримки. Після того, як стане відомим час затримки, центральний пост повідомляє, в якому із проходів необхідно затримати посадку пасажирів [46].

Однією із причин, що викликає затримку відправлення літаків, є перевантаження каналів зв'язку. Раніше з рухомих передавачів повідомляли про завершення кожної операції в процесі підготовки літака до вильоту. Це призводило до перевантажень у роботі центрального поста й до затримок відправлення літаків. Після вивчення цієї проблеми була дана вказівка передавати повідомлення на центральний пост тільки у разі наявності яких-небудь затримок. Застосування теорії масового обслуговування до передачі повідомлень на центральний пост й обробки їх відповідно до пріоритетів дозволило значно спростити роботу центрального поста. Труднощі в роботі зв'язку, що виникають внаслідок перевантаженості ліній, скоротилися до мінімуму. Згодом, також за допомогою методів теорії масового обслуговування, був досліджений порядок реєстрації пасажирів. Мета дослідження – добитися відносної економії при виконанні цього виду обслуговування. Потрібно було визначити кількість персоналу для успішної роботи різних варіантів системи реєстрації. Було запропоновано кілька варіантів, кожний з яких перевірявся на практиці. Була прийнята система реєстрації, що забезпечувала найменшу кількість обслуговуючого персоналу й не приводила до довгого чекання в черзі. Для Лондонського аеропорту була прийнята змішана система, при якій пасажири, що спізнюються, проходять прискорене обслуговування біля останнього віконця. Однак для інших аеропортів отримана схема може не підійти. Як не дивно, виявилося, що для деяких аеропортів загальна система реєстрації є непрактичною.

7.10. Забезпечення запасними частинами й агрегатами

Припустимо, що безупинно працює m авіаційних двигунів, і як тільки один із них виходить із ладу, його негайно замінюють запасним (за умови, що такий запасний двигун є), а несправний двигун відразу ж направляється в ремонтну майстерню. Ці m двигунів виходять із ладу випадковим чином із постійною інтенсивністю, яка дорівнює λ двигунів в одиницю часу. Час, необхідний для обслуговування одного двигуна, має експоненціальний розподіл, і його математичне сподівання дорівнює $1/\mu$. Одночасно може обслуговуватися c двигунів. Нехай загальне число запасних двигунів дорівнює n. Доти, доки ремонтується не більше n двигунів, число діючих двигунів буде дорівнювати m. Як тільки число двигунів, що надійшли в ремонтну майстерню, стане дорівнювати $n+1$, число діючих двигунів стане менше m. У цьому випадку можливі два варіанти:

1. Робота всіх двигунів припиняється доти, доки з майстерні не надійде заміна.
2. Продовжує працювати число двигунів, менше m.

Розглянемо перший випадок. Імовірність того, що в будь-який момент часу в майстерні буде перебувати i несправних двигунів, позначимо через $P_i(t)$. Система рівнянь для цього випадку має вигляд

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \qquad i=0,$$

$$P_i'(t) = \lambda P_{i-1}(t) - (\lambda + i\mu)P_i(t) + (i+1)\mu P_{i+1}(t), \qquad 0 < i < c, \qquad (7.115)$$

$$P_i'(t) = \lambda P_{i-1}(t) - (\lambda - c\mu)P_i(t) + c\mu P_{i+1}(t), \quad c \le i < n+1,$$

$$P_{n+1}'(t) = \lambda P_n(t) - c\mu P_{n+1}(t), \quad i = n+1.$$

Становить інтерес стаціонарне рішення, що записують у вигляді

$$p_i = \frac{(c\rho)^i}{i!} p_0, \qquad i \le c,$$

$$p_i = \rho^{i-c} \frac{(c\rho)^c}{c!} p_0, \qquad c \le i \le n+1. \qquad (7.116)$$

де $\rho = \dfrac{\lambda}{c\mu}$;

із співвідношення $\sum_{i=0}^{n+1} p_i = 1$ знаходимо

$$p_0 = \left[e^{c\rho} - \sum_{i=c+1}^{\infty} \left(\frac{c\rho}{i!} \right)^i + \rho \left(\frac{c\rho}{c!} \right)^c \frac{1-\rho^{n+1-c}}{1-\rho} \right]^{-1} .$$

Середнє число несправних двигунів

$$U = \sum_{i=0}^{n+1} i p_i . \qquad (7.117)$$

Середнє число несправних двигунів, що перебувають на обслуговуванні:

$$S = \sum_{i=0}^{e} i p_i + c \sum_{c+1}^{n+1} p_i . \qquad (7.118)$$

Середнє число двигунів, що чекають обслуговування:

$$L_q = \sum_{i=c+1}^{n+1} (i-c) p_i . \qquad (7.119)$$

Розглянемо випадок, коли $\rho = 1$, тобто коли інтенсивність обслуговування дорівнює інтенсивності появи несправних двигунів. З рішення, отриманого для стаціонарного стану, видно, що розподіл числа несправних двигунів є монотонно зростаючою послідовністю. За допомогою міркувань, аналогічних описаним нижче для випадку, коли $\rho < 1$, можна показати, що збільшення числа запасних двигунів не викликає істотного зменшення ймовірності появи аварійної обстановки (p_{n+1}). Крім того, збільшення числа запасних двигунів приводить до того, що число двигунів, що чекають обслуговування, зростає за лінійним законом.

Розглянемо випадок, коли $\rho < 1$.

При $c \le i \le n+1$ маємо таке співвідношення:

$$p_i < \frac{1-\rho}{1-\rho^{n-c+2}} \cdot \rho^{\ i-c} , \qquad (7.120)$$

права частина якого є спадною функцією n й i. Середнє число двигунів, що чекають обслуговування, має таку границю: $L_q < \dfrac{\rho}{1-\rho}$. (7.121)

Це означає, що середнє число двигунів, що чекають обслуговування, не залежить від n. Отже, у цьому випадку збільшення числа запасних двигунів не приводить до збільшення числа двигунів, що чекають ремонту, а збільшує лише експлуатаційну ефективність [5-7].

Контрольні запитання

1. Покажіть особливості моделі з чеканням, у якій здійснюється керування вхідним потоком.

2. Покажіть особливості моделі із втратами, в якій здійснюється керування вхідним потоком.

3. Розгляньте принципи застосування теорії масового обслуговування для аналізу потоків транспортних засобів.

4. Які особливості ймовірнісних моделей для аналізу повітряного транспорту?

5. Покажіть особливості кінцевого джерела вхідного потоку до обслуговування виробничого встаткування.

6. Розгляньте окремий випадок системи обслуговування $|M|M|1|m|m|Fifo$, у якому процес обслуговування заявок здійснюється за експоненціальним законом.

7. Покажіть особливості системи $M|D|1|m|m|$ *Fifo*. У чому відмінність характеристик цієї й попередньої моделі?

8. Розгляньте процес обслуговування верстатів одним майстром з появою двох різних типів зупинок?

9. У чому відмінність моделі за наявності декількох типів зупинок?

10. Розгляньте модель забезпечення виробництва запасними частинами й агрегатами.

11. Розгляньте особливості моделі СМО для вирішення задач керування запасами.

Завдання

1. Розрахувати параметри в системі із втратами за наявності керування вхідним потоком.
2. Те ж, що й у п.1, але для системи з чеканням.
3. Підібрати числові дані й обчислити приклад руху автомобільного транспорту.
4. Визначити основні параметри потоків ТС у випадку зупинки транспорту в тунелі.
5. Підібрати числові дані й обчислити приклад визначення основних характеристик потоку повітряного транспорту.
6. Розрахувати приклад системи з кінцевим джерелом вхідного потоку з довільним розподілом часу обслуговування (модель M/G/1/m/m/ *Fifo*).
7. Виконати числовий приклад розрахунку системи M/M/N/m/m/ *Fifo* .
8. Навести приклад розрахунку системи обслуговування верстатів одним майстром за наявності зупинок різного типу.
9. Обчислити приклад розрахунку системи забезпечення запасними частинами.
10. Навести числовий приклад розрахунку керування запчастинами.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Абовский Н.П. Творчество: системный подход, законы развития, принятие решений. Сер. Информатизация России на пороге XXI века. – М.: СИНТЕГ, 1998. – 312 с.
2. Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы теории надежности. – М.: Наука,1962. – 524 с.
3. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 308 с.

4. Боровков А.Н. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. – М.: Наука, 1972. – 368 с.

5. Вагнер Г. Основы исследования операций. – М.: Мир,1972. – 333 с.

6. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Сов. радио,1972. – 488 с.

7. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. – М.: Радио и связь,1983. – 415 с.

8. Верещагин А.А. Логистические принципы организации материальных потоков в деятельности предприятия // Изв. вузов. Машиностроение. – 2001.– №2 – 3. – С. 108 – 116.

9. Гаджинский А.М. Логистика: Учебник для высш. и ср. спец. заведений. – М.: Информационно-внедренческий центр «Маркетинг», 1998. – 228 с.

10. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.:Физматиз, 1961. – 387 с.

11. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы теории надежности. – М.: Наука, 1962. – 524 с.

12. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука,1966. – 336 с.

13. Голиков Е.А. Маркетинг и логистика: Учеб. пособие. – М.: Изд. Дом "Дашков и Ко",1999. – 412 с.

14. Горчаков А.А., Орлова И.В. Компьютерные экономико-математические модели. – М.: Компьютер, 1995. – 135 с.

15. Дабагян А.В., Кононенко Н.В. Моделирование процессов развития и реконструкции гибких производственных систем. – К.: Вища школа, 1989. – 156 с.

16. Дмейсуол Н.К. Очереди с приоритетами.– М.: Мир, 1973. –280 с.

17. Иозайтис В.С., Львов Ю.А. Экономико-математическое моделирование производственных систем. – М.: Высш. шк., 1991. – 192 с.

18. Kendall D.G. Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and their Analysis by the Method of the im bedded Markov chain // Annals of Mathematical statistics. – 1953. – 24. – P. 338-354.

19. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания: Пер. з англ. И. И. Глушко / Под. ред. В. И. Неймана. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с .

20. Конвей Р.В., Максвелл В.Л., Миллер Л.В. Теория расписаний. – М.: Наука,1975. – 300 с.

21. Кокс Д., Смит У. Теория очередей: Пер. с англ. – М.: Мир, 1966. – 218 с.

22.Кофанов Ю.Н., Таран В.А., Брудник С.С. Математические вопросы автоматизации производственных процессов. – М.: Высш. шк., 1968. – 215 с.

23. Кофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание: теория и применение: Пер. с фр. / Под ред. И.Н. Коваленко. – М.: Мир,1965. – 302 с.

24. Крамер Г. Математические методы статистики: Пер. з англ. / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: МУЛ, 1948. – 631 с.

25. Кудрявцев Е.М. Исследование операций в задачах, алгоритмах и

программах. – М.: Радио и связь, 1984. – 184 с.

26. Кузин Ф.А. Методика написания. Правила оформления. Порядок защиты: Практ. пособие для докторантов, аспирантов, магистров.– М.: «Ось-89», 2000. – 320 с.

27. Лабскер Л.Г., Бабешко Л.О. Теория массового обслуживания в экономической сфере. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 319 с.

28. Логистика: управление в грузовых транспортно-логистических системах: Учеб. пособие / Под ред. д-ра техн. наук, проф. Л.Б. Миротина. – М.: Юристъ, 2002. – 414 с.

29.Логистика: Учеб. пособие / Под. ред. Б.А. Аникина. – М.: ИНФРА – М, 1997. – 327 с.

30.Логистика: Учебник / Под ред. Б.А. Аникина. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 368 с.

31. Математические модели информационных процессов и управление / В.А.Попов, И.В.Дронова: Учеб. пособие. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2001. – 59 с.

32.Миротин Л.Б., Ташбаев Ы.Э. Системный анализ в логистике: Учебник. – М.: Экзамен, 2002. – 480 с.

33. Могилевский В.Д. Методология систем. – М.: Экономика, 1999. –251с.

34. Неруш Ю.М. Логистика: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2000. – 389 с.

35. Николайчук В.Е. Заготовительная и производительная логистика. – СПб: Питер, 2001. –160 с.

36.Николайчук В.Е. Логистика в сфере распределения. – СПб: Питер, 2001. – 160 с.

37. Окландер М.А. Контуры экономической логистики. – К.: Наук. думка, 2000. – 176 с.

38. Основы логистики: Учеб. пособие / Под ред. Л.Б. Миротина и В.И. Сергеева. – М.: ИНФРА-М, 2000.–200 с.

39. Основы моделирования сложных систем: Учеб. пособие для студентов вузов / Под общ. ред. д-ра техн. наук И.В. Кузьмина. – К.: Вища шк., 1981. – 360 с.

40. Основы теории алгоритмов и математических моделей / В.А. Попов, Н. В. Нечипорук, И.В. Дронова: Учеб. пособие по лаб. практикуму. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2001. – 65 с.

41. Первозванский А.А. Канбан-система как система управления производством с обратной связью // Техническая кибернетика. – 1993. - №2. – С. 209 – 215.

42. Первозванский А.А. Математические модели в управлении производством. – М.: Наука, 1975. – 616 с.

43. Промышленная логистика / Под. ред. А.А. Колобова, И.Н. Омельченко. – М.: МИПК, 1997. – 204 с.

44. Расчет характеристик УВК в гибких производственных системах: Учеб. пособие / В.А.Попов, Л.Н. Коняева. – Х.: Харьк. авиац. ин-т, 1987. – 42 с.

45. Риордан Дж. Вероятностные системы обслуживания: Пер. с англ. – М.: Связь,1966. – 184 с.

46.Розенберг В.Я., Прохоров А.И. Что такое теория массового обслуживания. – М.: Сов. радио, 1965. – 254 с.

47. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения: Пер. с англ. / Под ред. И.Н. Коваленко. – М.: Сов. радио, 1971. – 520 с.

48. Семененко А.И. Предпринимательская логистика. – СПб.: Политехника, 1997. – 348 с.

49.Сергеев В.И. Логистика – аналитический обзор. – СПб.: Знание, 1996. – 27 с.

50.Сергеев В.И. Логистика в бизнесе: Учебник. – М.: ИНФРА-М, 2001. – 608 с.

51. Смирнов Н.В., Дунин - Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. – М.: Наука, 1969. – 511 с.

52. Стабин И.П., Моисеева В.С. Автоматизированный системный анализ. – М.: Машиностроение, 1984. – 260 с.

53.Топка В.В. Вероятностное моделирование в управлении проектами. – М.: Ин-т пробл. упр., 1995. – 33 с.

54.Чорнописька Н.В., Матвій І.Є., Марценюк І.В. Інформатизація управління логістичними системами // Логістика: Зб. наук. пр. – 2001. – №446. – С. 411 – 419.

55.Юдицкий С.А., Владиславлев П.Н. Технология выбора целей при проектировании бизнес-систем // Экономика Украины. – 2002. – №12. – С. 60 – 65.

Навчальне видання

Попов В'ячеслав Олексійович

ІМОВІРНІСНІ МОДЕЛІ ПРОМИСЛОВОЇ ЛОГІСТИКИ

Редактор Т. Г. Кардаш

Зв. план, 2006
Підписано до друку 27.06.2006
Формат $60 \times 84\, {}^{1}\!/_{16}$. Папір офс. № 2. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 10,5. Обл.-вид.арк.11,87. Наклад 100 прим.
Замовлення 380. Ціна вільна

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu