НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ МЕТОДОВ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ И ДИСКРЕТНОЙ ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ ГОДУНОВА

ДОЦЕНКО П.Д.

Как известно, [1,2,3], численные процессы решения некоторых задач строительной механики обладают слабой устойчивостью. Выражается это в прогрессирующей потере точности при увеличении интервала интегрирования, а объясняется наличием быстро возрастающих и быстро убывающих решений, иначе - наличием так называемых краевых эффектов. Для выхода из этих затруднений используются различные подходы. В частности, метод начальных параметров (МНП), различные варианты методов прогонки, метод конечных элементов (МКЭ). С.К.Годуновым [4] еще в 1961 году был предложен эффективный прием, позволяющий существенно повысить точность и сходимость численных процессов решения краевых задач. Нам представляется возможным предложить некоторые обобщения метода Годунова, значительно расширяющие его возможности, повышающие универсальность и оперативность. Кроме этого, автором исследованы и предложены некоторые общие подходы к повышению точности и сходимости численных процессов МНП и методов прогонки. Укажем некоторые недостатки стандартной схемы метода Годунова, которых, по нашему мнению, можно избежать, изменив эту схему и алгоритм:

1. Отсутствие алгоритма формирования ортогональной матрицы начальных условий задачи Коши при изменении граничных условий.

2. Необходимость многократного численного решения задачи на каждом участке деления интервала интегрирования для построения фундаментальных решений.

3. Необходимость хранить в памяти машины для каждой точки разбиения информацию в виде двух матриц, что при большом числе элементов разбиения становится сравнимым с объемами МКЭ.

4. Практическая невозможность учета промежуточных особенностей, вносящих так называемые "лишние" неизвестные, поскольку усеченнный вектор состояния определен граничными условиями на левом конце.

5. Необходимость в алгоритме обратного рекуррентного хода.

Пусть система уравнений и граничных условий сведена к виду:

$$dZ/ds = A(s)Z + q(s); \quad Z(0) = Z^\circ_\circ; \quad Z(L) = Z^\circ_N. \qquad (1)$$

Здесь Z, q - векторы размерности n; A - квадратная матрица $n\times n$; N - количество участков разбиения (количество конечных элементов). Среди составляющих векторов $Z^\circ_\circ$ и Z°_N часть задана, часть (в любом сочетании) подлежит определению.

I. Пусть построена нормальная фундаментальная система решений H^* однородной задачи (I) на произвольном участке $0 \leqslant s \leqslant s_k$ при начальных условиях $H^*(0) = E$, где E – единичная матрица $n{\times}n$. Дополним эту матрицу $n+1$ столбцом частного решения при $Z(0)=0$ и нулевой строкой, кроме последнего элемента равного единице. Тогда расширенная матрица $H(s)$ будет иметь размерность $(n+1){\times}(n+1)$ с условием $H(0)=E$. Достаточно общий алгоритм построения расширенной матрицы $H(s)$ предложен в п.III ниже. Считая вектор состояния в виде $Z = \{Z_1, Z_2, \ldots Z_n, 1\}$, решение задачи (I) на любом k-том элементе можно представить в виде:

$$Z_k(s) = H_k(s)\, Z_k(0); \quad Z_k(0) = Z_{k-1}(s_{k-1}); \; k = 1,2,3,\ldots N. \quad (2)$$

Решения (2) при $s=s_k$ образуют последовательность, из которой:

$$Z^\circ_N = H\, Z^\circ_0; \qquad H = H_N H_{N-1} \ldots H_2 H_1. \qquad (3)$$

Система алгебраических уравнений (3) позволяет вычислить недостающие компоненты вектора Z°_0. Затем по цепочке (2) повторной прогонкой вычисляется вектор состояния в каждой точке деления на конечные элементы.

Изложенный процесс является некоторым обобщением МНП [5]. Обобщение состоит в использовании нормальных фундаментальных решений на каждом конечном элементе, что заметно повышает точность и сходимость расчетов сложных (так называемых "длинных") систем. Численные исследования сходимости процесса (2)-(3), выполненные автором в задачах с одномерными (разветвленные стержневые конструкции) и двумерными (оболочки) конечными элементами, привели к следующим выводам. Для стержневых систем увеличение общей "длины" конструкции в 1000 раз (соответственно, увеличение количества КЭ с 10 до 10^4), снизило точность в статике с 10^{-14} до 10^{-10}, в динамике – с 10^{-13} до 10^{-8}. Расчеты выполнялись без двойной разрядной сетки. Таким образом, для исследования задач статики и динамики стержневых систем весьма сложной конфигурации можно считать вполне пригодным алгоритм начальных параметров с указанным обобщением. При расчете оболочек МНП, даже с учетом его модификации, обладает значительно худшими свойствами ввиду большого разброса порядков элементов матрицы коэффициентов уравнений (I).

II. Изложим численный процесс, реализующий идею Годунова, но ориентированный на предложенный алгоритм МНП. Формулы (2) обеспечивают в нашем алгоритме линейную независимость решений только в начале каждого КЭ. К концу КЭ, то есть при $s=s_k$, это свойство теряется. Воспользуемся идеей Годунова и обеспечим линейную независимость решений и в конце каждого КЭ, не меняя изложенную выше схему МНП. Для этого в формуле (2) положим $k=1$, $s=s_1$. Получим $Z_1 = HZ^\circ_o$. Ортогонализуем матрицу H (см. [I-4]). Получим

$$Z_1=(H_1G_1^{-1})(G_1Z^\circ_o)=H^*_1Z^*_1; \quad H^*_1=H_1G_1^{-1}; \quad Z^*_1=G_1Z^\circ_o, \tag{4}$$

где G_1 – треугольная матрица размерности $(n+1)\times(n+1)$. При $k=2$ и $s=s_2$ имеем $Z_2=H_2Z_1=(H_2H_1)Z^*_1$. После ортогонализации матрицы $H^1_2=H_2H^*_1$ вектор Z_2 преобразуется к виду:

$$Z_2=[H_2H^*_1)G_2^{-1}]G_2Z^*_1=H^*_2Z^*_2; \quad H^*_2=(H_2H^*_1)G_2^{-1}; \quad Z^*_2=G_2G_1Z^\circ_o. \tag{5}$$

Очевидно, для любого $k=1,2,3\ldots$ $Z_k=H_kZ_{k-1}=(H_kH^*_{k-1})Z^*_{k-1}$, где $H_k=H_k(s)$, H^*_{k-1} – ортогональная постоянная матрица. При желании матрицу H^*_{k-1} для любого $k=1,2,3\ldots$ можно сделать ортонормированной. Процедура ортогонализации матрицы $H^1_k=H_kH^*_{k-1}$ при $s=s_k$ дает

$$Z_k=[(H_k\,H^*_{k-1})G_k^{-1}]G_kZ^*_{k-1}=H^*_kZ^*_k; \quad Z^*_k=G_k\ldots G_1Z^\circ_o. \tag{6}$$

Заметим, что $H^1_k(0)=H_k(0)H^*_{k-1}=E\,H^*_{k-1}=H^*_{k-1}$. Таким образом, если матрица H^*_{k-1} ортонормированная, то матрица $H^1_k=H_k\cdot H^*_{k-1}$ является фундаментальной на каждом КЭ.

Следовательно, ортогональная (ортонормированная) матрица H^*_k в конце каждого элемента имеет вид:

$$H^*_k=(H_k\,H^*_{k-1})G_k^{-1}; \quad H^*_o\equiv E; \quad k=1,2,3,\ldots, \tag{7}$$

а преобразованный вектор состояния

$$Z^*_k=G_k\,Z^*_{k-1}=G^*_k\,Z^\circ_o; \quad G^*_k=G_k\ldots G_1;\ k=1,2,3,\ldots \tag{8}$$

Формулы (7), (8) представляют собой циклический рекуррентный процесс при начальных значениях $H^*_o\equiv E$; $Z^*_o\equiv Z^\circ_o$. В конечной точке разбиения

$$Z^\circ_N=H^*_NZ^*_N\equiv H^*_NG^*_NZ^\circ_o; \quad G^*_N=G_N\ldots G_1. \tag{9}$$

Система уравнений (9) разрешима, поскольку $\det H^*_N\neq0$ (матрица H^*_N ортогональная или ортонормированная), $\det G^*_N\neq0$, так как матрица G^*_N треугольная, на диагонали которой стоят нормирующие матрицу H^*_N множители. В дальнейшем процесс следует МНП со всеми преимуществами этого алгоритма, изложенного в пункте I.

Учет сосредоточенных нагрузок, масс, упругодемпфорующих опор и т.п., реалиется специальной матрицей включений. При наличии промежуточных особенностей, вносящих "лишние" неизвестные в какой-либо k-той точке, на основании формул (6) в разрешающую систему заносятся соответствующие уравнения. Соответствующие компоненты вектора $Z^{\circ}_{\circ}$ исключаются из соотношений (6) и не участвуют в дальнейших преобразованиях, а на их место вводятся новые -"лишние". Размерности матриц H_k, H^{*}_k и G_k остаются неизменными, а соотношения (9) в конце интервала добавят в разрешающую систему дополнительные уравнения, обеспечивающие полноту. Таким образом, в отличие от МКЭ, здесь мы имеем оптимальную по размерности разрешающую систему. Ее порядок будет определен граничными условиями и количеством "лишних" неизвестных и не будет зависеть от количества конечных элементов, суперэлементов, вида и распределения нагрузок, количества упругодемпфирующих опор, и т.д. С другой стороны, предлагаемый ниже вариант построения фундаментальных решений автоматически адаптируется под конкретную задачу и позволяет получить практически точное описание конечного элемента, что выгодно отличает его от МКЭ. Предложенные здесь идеи легко реализуют суперэлементный подход описания или метод подконструкций.

III. Алгоритм построения фундаментальной матрицы $H_k(s)$. Пусть однородная система, соответствующая (I), на любом k-том элементе имеет вид (индекс k опустим):

$$dZ/ds=\mathbf{A}Z; \qquad Z(0)\equiv Z_k(0)=Z^{\circ}. \tag{10}$$

Матрица коэффициентов вычисляется на начало КЭ и в пределах его может считаться постоянной. Вектор состояния Z° с неизвестными компонентами определяет значение Z в конце предыдущего КЭ. Примем решение уравнения (10) в виде матричного степенного ряда

$$\mathbf{Z} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{C}_k [(s\, exp\,(\alpha s))^k/k!]\, Z^{\circ}, \tag{11}$$

где $\mathbf{C}_k$ - матрицы порядка $n\times n$, подлежащие определению, α - коэффициент ($\alpha \geqslant 0$), нормирующий решение. На основании (11) имеем:

$$dZ/ds = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{C}_{k+1} (1+\alpha s)\, exp(\alpha s)[(s\, exp(\alpha s))^k/k!]\, Z^{\circ}. \tag{12}$$

Подставив (11) и (12) в уравнение (10), приходим к зависимости:

$$\mathbf{C}_{k+1}=\mathbf{AC}_k\, exp(-\alpha s)/(1+\alpha s); \qquad \mathbf{C}_{\circ}=\mathbf{E}; \quad k=1,2,3... \tag{13}$$

Легко видеть, что на основании (13)

$$\mathbf{C}_k=(\mathbf{A}\, exp(-\alpha s))^k/(1+\alpha s)^k, \quad k=1,2,3..., \tag{14}$$

а решение (11) принимает вид:

$$\mathbf{Z} = \sum_{k=0}^{\infty} \{(\mathbf{A}s)^k/[(1+\alpha s)^k\, k!]\} Z^{\circ}. \tag{15}$$

Следовательно, матрица фундаментальных решений есть:

$$H_{\Phi}=E+(As)/(1+\alpha s)+(As)^2/2(1+\alpha s)^2+\ldots+(As)^N/\,N!(1+\alpha s)^N+\ldots \quad (16)$$

Сходимость ряда (I6) обеспечена критерием

$$D=(As)/\,N(1+\alpha s); \qquad \lim_{N\to\infty} D = 0, \quad (17)$$

при любой матрице A с конечными элементами и $\alpha=0$. Однако, при численных расчетах (что и наблюдается на практике) при $\max|a_{ik}| = M \gg 1$ сумма ряда (I6), оставаясь конечной, может выходить за пределы разрядной сетки практически по всем элементам H_{Φ}. Подбирая коэффициент α, можно обеспечить надежный сходящийся процесс.

Частное решение уравнения (I) для произвольной нагрузки $q=q(s)$ на рассматриваемом КЭ можно построить следующим образом. Разложим $q(s)$ в степенной ряд, а решение примем в виде:

$$q = \sum_{k=0}^{\infty} q_k s^k/k!; \qquad Z = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k s^k/k!; \qquad Z(0)=0. \quad (18)$$

Тогда на основании уравнения (I) получим для определения неизвестных Z_k рекуррентный процесс

$$Z_{k+1} = AZ_k+q_k, \quad k=0,1,2,3,\ldots, \quad Z_0=0. \quad (19)$$

Следовательно, (n+1)-ый столбец расширенной матрицы $H(s)$, точнее, его n элементов, вычисляются в виде суммы векторного ряда

$$Z = q_0 s + s^2(Aq_0+q_1)/2 + s^3[A(Aq_0+q_1)+q_2] + \ldots \quad (20)$$

Последний n+1 элемент этого столбца равен единице. Численное тестирование предложенного процесса на некоторых задачах [1-3] показало его работоспособность и надежную сходимость.

ЛИТЕРАТУРА

I. Григоренко Я.М., Мукоед А.П., Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. Киев, "Вища школа", I983, 286 стр.

2. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Москва, "Машиностроение", I977, 488 стр.

3. Кармишин А.В., Лясковец В.А. и др. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.,"Машиностр.",I975, 376 стр.

4. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Успехи математических наук, I96I, т.I6, вып. 3, с.I7I-I74.

5. Доценко П.Д. Некоторые обобщения методов начальных параметров и конечных элементов для стержневых систем. Авиационно-космическая техника и технология. Харьков, ХАИ, I994, с.57-6I.