ТРУДЫ ХАРЬКОВСКОГО АВИАЦИОННОГО ИНСТИТУТА

Выпуск 16. **1955**

Канд. физико-матем. наук, доцент **С. М. Бронштейн**

О МНОГОЧЛЕНАХ С. Н. БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Как известно [1; 2; 3], если $f(x)$ произвольная непрерывная в замкнутом интервале $[0,1]$ функция, то последовательность многочленов С. Н. Бернштейна

$$B_n[f, x] = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

сходится равномерно относительно всех значений x из $[0,1]$ к $f(x)$.

Из очень важных и ценных свойств многочленов С. Н. Бернштейна отметим следующее: если приближаемая функция $f(x)$ всюду в $[0,1]$ имеет производную $f'(x)$, то производные от приближающих многочленов $B_n[f, x]$ имеют своим пределом $f'(x)$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} B_n'[f, x] = f'(x).$$

В некотором смысле обратной теоремой является
теорема: если $f(x)$ ограниченная, интегрируемая в $[0,1]$ функция, то

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^x B_n[f, t]\,dt - B_n\left[\int_0^x f(t)\,dt, x\right]\right\} = 0.$$

Доказательство.
Пусть

$$\Delta_n(x) = \int_0^x B_n[f, t]\,dt - B_n\left[\int_0^x f(t)\,dt, x\right],$$

тогда

$$|\Delta_n(x) \ldots| = \left|\ldots\int_0^x B_n[f, t]\,dt - \int_0^x f(t)\,dt\right| + |F(x) - B_n[F, x]|,$$

где

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

и, следовательно, достаточно доказать, что каждая из этих разностей стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно для всех значений x из $[0,1]$.

Вторая разность оценивается сразу, если заметить, что

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

есть непрерывная в $[0,1]$ функция и следовательно, по теореме С. Н. Бернштейна, ее многочлены Бернштейна стремятся к ней же равномерно для всех значений x из интервала $[0,1]$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} B_n[F, x] = F(x)$$

равномерно для $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Для оценки первой разности введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \leqslant t \leqslant x \\ 0, & x < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда разность

$$\varphi(t) - f(t) = \psi(t)$$

есть непрерывная в $[0, x]$ функция и по обобщенной теореме С. Н. Бернштейна [3]

$$\lim_{n\to\infty} B_n[\psi, t] = \psi(t) = 0$$

равномерно для всех t из $[0, x]$.

Для остальных же значений t, то есть для $t > x + \delta$, где $\delta > 0$ достаточно малое

$$\lim_{n\to\infty} B_n[\varphi, t] = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^x B_n[\varphi, t]\,dt - \int_0^x B_n[f, t]\,dt\right\} = 0$$

и

$$\int_0^x \varphi(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Значит, для доказательства предельного равенства

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x B_n[f, t]\,dt - \int_0^x f(t)\,dt$$

достаточно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x B_n[\varphi, t]\,dt = \int_0^x \varphi(t)\,dt.$$

Так как для каждого фиксированного значения x из $[0, 1]$

$$\int_0^x B_x[\varphi, t]\,dt = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^n C_n^k \varphi\left(\frac{k}{n}\right) t^k (1-t)^{n-k}\right) dt =$$

$$= \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \int_0^x C_n^k t^k (1-t)^{n-k}\,dt = \sum_{k=1}^n \lambda_{kn} \varphi\left(\frac{k}{n}\right),$$

то достаточно показать, что квадратурный процесс сходится для функции $\varphi(t)$, то есть, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \lambda_{kn} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^x \varphi(t)\,dt.$$

Сходимость же квадратурного процесса для функции $\varphi(t)$ следует из того, что

$$\int_0^1 B_n[\varphi, t]\,dt = \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k t^k (1-t)^{n-k}\right] dt =$$

$$= \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \int_0^1 C_n^k t^k (1-t)^{n-k}\,dt = \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k B(k+1,\ n-k+1) =$$

$$= \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n+1}.$$

Но последняя сумма есть интегральная сумма и ее предел при $n \to \infty$ равен

$$\int_0^1 \varphi(t)\,dt.$$

Следовательно

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 B_n[\varphi, t]\,dt = \int_0^1 \varphi(t)\,dt,$$

а так как

$$\int_0^1 B_n[\varphi, t]\,dt = \int_0^x B_n[\varphi, t]\,dt + \int_x^{x+\delta} B_n[\varphi, t]\,dt + \int_{x+\delta}^1 B_n[\varphi, t]\,dt,$$

где последние два слагаемые равномерно стремятся к нулю (первое за счет выбора δ, второе за счет функции $\varphi(t)$), то наше утверждение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн С. Н., СХМО, серия вторая, т. XIII, 1912.

2. Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций. Гос. тех.-теорет. издательство, Москва — Ленинград, 1934.

3. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. Госуд. издательство тех.-теоретической литературы, Москва — Ленинград, 1949.