МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

І.В. Брисіна, В.О. Макарічев

ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2009

УДК 519.21

Брисіна І.В. Випадкові процеси: навч. посіб. / І.В. Брисіна, В.О. Макарічев. – Х.: Нац. аерокосм. ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2009. – 36 с.

Запропоновано матеріал з теорії випадкових процесів, рекомендований освітньо-професійною програмою підготовки бакалаврів за напрямами «Прикладна математика» й «Системний аналіз». Наведено теоретичні відомості й методи розв'язання задач з такої тематики: основні поняття теорії випадкових процесів та їх зв'язок із теорією ймовірностей; процеси Маркова з дискретним і неперервним часом та їх застосування у задачах оптимізації систем масового обслуговування; процеси Гаусса, Вінера й Пуассона; поняття стаціонарності й ергодичності.

Для студентів комп'ютерних спеціальностей і студентів, що вивчають системні науки. Може бути корисним інженерним працівникам та аспірантам.

Бібліогр.: 9 назв

Р е ц е н з е н т и: канд. техн. наук, доц. Т. О. Ярхо,

канд. фіз.-мат. наук, доц. В. О. Афанасьєв

ВСТУП

Теорія випадкових процесів є закономірним продовженням теорії ймовірностей. Як і випадкові величини, випадкові процеси залежать від елементарної події та ще від одного параметра, який має зміст часу. Починаючи вивчення курсу випадкових процесів, корисно відновити знання з теорії ймовірностей.

Запитання

1. Чи будуть несумісні події незалежними?
2. Чи будуть незалежні події несумісними?
3. Відомо, що $P(A)=0,3$, $P(B)=0,9$, причому ці випадкові події є незалежними. Знайти ймовірність того, що виникне хоча б одна із цих подій.
4. Дати означення функції розподілу.
5. Що означає вираз: знайти закон розподілу випадкової величини?
6. Який зв'язок існує між щільністю ймовірності неперервної випадкової величини й функцією її розподілу?
7. Чи існують такі випадкові величини, які не є ані дискретними, ані неперервними?
8. Чи кожна випадкова величина має скінченні математичне сподівання й дисперсію?
9. Чи мають математичне сподівання й дисперсія розмірність?
10. Чи може бути від'ємним математичне сподівання?
11. Чи може бути щільність розподілу ймовірностей випадкової величини більшою за 1?
12. Чи буде правильною рівність $M\left(\xi^{-1}\right)=\left(M\xi\right)^{-1}$, де ξ – випадкова величина?
13. Яка величина є більшою: середнє значення квадрата випадкової величини чи квадрат її середнього значення?
14. Чи може мати функція розподілу точки строгого локального екстремуму?
15. Чи існує така величина, дисперсія якої дорівнює нулю?
16. Чи можна відновити розподіл випадкової величини за відомими математичним сподіванням й дисперсією?
17. Скільки параметрів мають такі розподіли: біномний, Пуассона, геометричний, показниковий, рівномірний, нормальний?
18. Відомо, що дискретна величина має математичне сподівання 4 і дисперсію 3. Чи може вона мати розподіл Пуассона?
19. Чи може геометрична величина (кількість випробувань до першого успіху) мати математичне сподівання 0,4?
20. Чи може рівномірна випадкова величина набувати від'ємних значень?
21. Відомо, що нормальна випадкова величина має математичне сподівання 1 і дисперсію 16. Не користуючись таблицями, знайти приблизно ймовірність її попадання в інтервал $\left(-11,\ 13\right)$.
22. Знайти $M\sin\xi$, якщо ξ має розподіл $N(0,1)$.
23. Чи може величина з розподілом Пуассона набувати непарних значень?
24. Чи має зміст величина $cov(\xi,\xi)$?

25. Для яких випадкових величин математичне сподівання їх суми дорівнює сумі математичних сподівань?

26. Чи завжди дисперсія суми дорівнює сумі дисперсій?

27. Відомо, що дві випадкові величини незалежні. Чому дорівнює коефіцієнт кореляції між ними?

28. У якому випадку математичне сподівання добутку випадкових величин дорівнює добутку математичних сподівань?

29. Відомо, що коваріація між двома величинами дорівнює 0. Чи свідчить це про їх незалежність?

30. Знайти коефіцієнт кореляції між величинами ξ і $2\xi + 3$.

31. Чи може коефіцієнт кореляції бути від'ємним?

32. Чи може коефіцієнт кореляції дорівнювати 5?

33. Коефіцієнт кореляції між двома нормальними величинами дорівнює 0. Чи будуть вони незалежними?

34. Навести приклади випадкових величин, зв'язаних між собою функціональною залежністю, а також приклад величин із стохастичною залежністю.

35. Знайти $M(2\xi - 3\eta + 5)$ і $D(2\xi - 3\eta + 5)$, якщо величини ξ і η незалежні, $M\xi = -1$, $M\eta = 2$, $D\xi = D\eta = 4$.

36. Що можна сказати про математичне сподівання й дисперсію величини $\dfrac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}$?

37. Знайти, чому дорівнює другий початковий момент $M\xi^2$ випадкової величини, якщо її математичне сподівання дорівнює 5, а дисперсія дорівнює 4.

38. Які з наведених матриць можуть бути матрицями коваріації двох випадкових величин: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$?

39. Пояснити, чому в технічних та економічних задачах є поширеним нормальний розподіл.

40. Пояснити, завдяки яким результатам теорії ймовірностей вибіркове середнє $\bar{x} = \dfrac{1}{n}(x_1 + ... + x_n)$ є обґрунтованою оцінкою математичного сподівання, а частота – обґрунтованою оцінкою ймовірності.

41. Відомо, що $\xi - \eta$ має так званий розподіл Лапласа, якщо ξ та η є незалежними й мають однаковий показниковий розподіл із параметром a. Знайти математичне сподівання й дисперсію розподілу Лапласа.

42. Знайти $M\sin\xi$, $M\cos\xi$, $M(\sin\xi\cos\xi)$ і $cov(\sin\xi, \cos\xi)$, якщо ξ має рівномірний розподіл на відрізку $[0,\ 2\pi]$. Чи є наведені величини незалежними?

43. Знайти $cov(\xi, \xi^2)$, якщо $P\{\xi = 1\} = P\{\xi = -1\} = 0{,}5$. Бажано розв'язати усно! Прокоментувати результат.

44. Чому функція $\sin t$ не може бути характеристичною функцією випадкової величини?

45. Чи завжди характеристична функція набуває дійсних значень? Які умови повинні задовольняти розподіли, щоб функція була дійсною?

46. Нехай X – випадкова величина, що має властивість $P\{X \neq 0\} > 0$, а функції розподілу величин aX і bX збігаються. Чи справджується рівність $a = b$?

Більш складні запитання

1. Дві гральні кістки підкидають до першої появи хоча б однієї «6». Який закон розподілу має кількість випробувань?
2. Проводять незалежні постріли з імовірністю влучення у кожному випадку 0,6. Відомо, що перші три постріли були влучними. Знайти розподіл величини – кількості випробувань до першого невдалого пострілу.
3. Чи буде квадрат випадкової величини мати нормальний розподіл, якщо сама вона має нормальний розподіл?
4. Нехай вектор $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ має нормальний розподіл, величини ξ і η є незалежними і мають розподіл $N(0,\ 1)$. Чи будуть залежними між собою величини $\xi + \eta$ і $\xi - \eta$?
5. Який закон розподілу має сума двох незалежних випадкових величин, якщо вони мають розподіли: а) нормальний, б) Пуассона, в) показниковий, г) рівномірний, д) гамма-розподіл?
6. Нехай величина ξ має показниковий розподіл. Чи буде мати показниковий розподіл величина $2\xi + 5$?
7. За яких умов випадкова величина $a\xi + b$ має показниковий розподіл, якщо ξ має показниковий розподіл?
8. Величини ξ_i є незалежними й мають однаковий показниковий розподіл. Який розподіл мають $min\{\xi_1,...,\xi_n\}$ та $max\{\xi_1,...,\xi_n\}$? Розв'язати питання для випадку рівномірного розподілу.
9. Випадкова величина має неперервну строго зростаючу функцію розподілу $P\{\xi < x\} = F_\xi(x)$. Який розподіл має функція випадкової величини $\eta = F(\xi)$?
10. Тривалість телефонної розмови між двома подругами має показниковий розподіл із середнім значенням 30 хвилин. Вони розмовляють вже протягом 20 хвилин. Знайти, скільки в середньому ще триватиме їхня розмова.
11. Який розподіл має $\xi - \eta$, якщо $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ – гауссівський вектор?
12. Випадкові величини ξ_i є незалежними й мають однаковий геометричний розподіл. Який розподіл має $min\{\xi_1,...,\xi_n\}$?
13. З яким розподілом імовірності збігається розподіл хі-квадрат, якщо параметр є числом парним?

14. Чи може випадкова величина $\xi_1 - \xi_2$ мати розподіл Пуассона, якщо кожна з двох незалежних величин має розподіл Пуассона з параметром λ?

15. Випадкові величини ξ_i є незалежними та мають однаковий розподіл із середнім значенням a. Випадкова величина N може набувати лише значень 0, 1, 2, … і теж має скінченне математичне сподівання. Знайти $M(\xi_0 + ... + \xi_N)$.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

1.1. Теоретичний матеріал

Випадковий процес $x(t),\ \ t \in T$ – це функція, значеннями якої є випадкові величини. Будемо розглядати лише випадок $T \subset R$.

Оскільки випадкові величини можна розглядати як функції елементарних подій ω, що виникають як результат експерименту, то випадковий процес можна записати у вигляді $x(t) = x(t,\omega),\ \ t \in T,\ \ \omega \in \Omega$. Якщо експеримент, унаслідок якого виникає випадковий процес, уже здійснився, тобто елементарна подія $\omega \in \Omega$ уже відбулася, то залежність x від t набуває вигляду звичайної функції. Її називають траєкторією, або реалізацією, випадкового процесу й зображують у вигляді звичайного графіка.

Якщо розглянути випадковий процес $x(t)$ у будь-який момент t, то будемо мати одновимірну випадкову величину, якщо взяти два моменти t_1 і t_2, то матимемо випадкову двовимірну величину – двовимірний випадковий вектор $(x(t_1),\ \ x(t_2))$. Аналогічно $(x(t_1),\ \ x(t_2),\dots,x(t_n))$ – n-вимірний випадковий вектор. Розподіли ймовірностей таких векторів мають назву **скінченновимірних розподілів** випадкового процесу $x(t)$. Зрозуміло, що такі розподіли можна задавати функцією розподілу

$$F(t_1,\ t_2,\ z_1,\ z_2) = P\{x(t_1) < z_1,\ \ x(t_2) < z_2\},$$

а в окремих випадках дискретних і неперервних величин – таблицею і сумісною щільністю відповідно.

Важливими числовими характеристиками випадкових процесів є **математичне сподівання** $m_x(t)$ і **кореляційна функція** $K_x(t_1,t_2)$:

$$m_x(t) = M[x(t)],\ K_x(t_1,t_2) = cov[x(t_1),x(t_2)]$$

Для процесів, множина значень яких є **дійсною**, маємо основну формулу

$$K_x(t_1,t_2) = M[(x(t_1) - Mx(t_1))(x(t_2) - Mx(t_2))].$$

У випадку комплекснозначних процесів формула дещо змінюється:

$$K_x(t_1,t_2) = M[(x(t_1) - Mx(t_1))\overline{(x(t_2) - Mx(t_2))}],$$

другий множник має знак комплексного спряження.

Зрозуміло, що $K_x(t,t)$ – це дисперсія випадкового процесу:

$$K_x(t,t) = cov[x(t),x(t)] = D[x(t)].$$

Таким чином, математичне сподівання $m_x(t)$ – це невипадкова функція, що характеризує "середнє значення" випадкового процесу, а кореляційна функція характеризує стохастичну залежність значень процесу в різні моменти часу.

Зазначимо, що для процесів із дійсними значеннями виконується рівність

$$K_s(t,s) = K_x(s,t).$$

Крім того, $\left|K_s(t,s)\right|^2 \le K_x(t,t)K_x(s,s)$.

Іноді функцію $K_x(t_1,\ t_2)$ називають **автокореляційною** функцією процесу $x(t)$. Разом з нею розглядають уже для двох різних процесів взаємну кореляційну функцію $K_{x,y}(t_1,\ t_2) = cov\left[x(t_1),\ \ y(t_2)\right]$.

Випадковий процес $x(t)$ називають **стаціонарним у вузькому змісті**, якщо всі його скінченновимірні розподіли не залежать від зсуву часу.

Випадковий процес $x(t)$ називають **стаціонарним у широкому змісті** (часто – просто стаціонарним), якщо його математичне сподівання не залежить від часу, а кореляційна функція залежить лише від різниці між аргументами:

$$m(t) = M\left[x(t)\right] = m,\ K_x(t,s) = K(t-s).$$

Ясно, що дисперсія стаціонарного процесу теж не залежить від t. Часто позначають $k_x(\tau) = K_x(t,\ \ t+\tau)$. Зазначимо, що $k_x(-\tau) = k_x(\tau)$, $\left|k_x(\tau)\right| \le \left|k_x(0)\right| = Dx$ (кореляційна функція $k_x(\tau)$ набуває свого найбільшого значення при $\tau = 0$, і це значення дорівнює дисперсії випадкового процесу).

1.2. Приклади розв'язання задач

1.2.1. Записати одновимірну щільність випадкового процесу $\xi(t) = At^2,\ \ t \in (0,+\infty)$, якщо випадкова величина A має рівномірний розподіл на відрізку $\left[0,\ \ 2\right]$.

Розв'язання. Для неперервної величини знайти розподіл – це означає знайти або щільність, або функцію розподілу:

$$F_\xi(x) = P\{\xi(t) < x\} = P\left\{At^2 < x\right\} = P\left\{A < xt^{-2}\right\}$$

Для даного рівномірного розподілу ця ймовірність дорівнює нулю, якщо праворуч – від'ємне число, і одиниці, якщо праворуч – число, яке перевищує правий кінець інтервалу, тобто 2. Для випадку між 0 та 2 інтегруємо рівномірну щільність:

$$P\left\{A < xt^{-2}\right\} = \int_0^{xt^{-2}} 0{,}5du = 0{,}5xt^{-2}.$$

Залишається записати функцію розподілу випадкової величини

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x}{2t^2}, & x\in\left[0,\ 2t^2\right],\\ 1, & x>2t^2.\end{cases}$$

Зрозуміло, що ця функція відповідає рівномірному розподілу.

1.2.2. Знайти кореляційну функцію випадкової гармоніки з випадковою частотою: $\xi(t)=A\cos kt+B\sin kt$, де A і B – незалежні випадкові величини, що мають математичне сподівання 0 та дисперсію σ^2, а k – випадкова величина, яка має розподіл Коші зі щільністю

$$f(x)=\frac{\alpha}{\pi\left(\alpha^2+x^2\right)},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

Розв'язання. За умови незалежності математичне сподівання добутку дорівнює $M\xi(t)=MA\cdot M\cos kt+MB\cdot M\sin kt=0$. За означенням кореляційної функції $K_\xi\left(t_1,\ t_2\right)=M\left[\left(A\cos kt_1+B\sin kt_1\right)\left(A\cos kt_2+B\sin kt_2\right)\right]=$

$$=MA^2M\cos kt_1\cos kt_2+MB^2M\sin kt_1\sin kt_2=$$

=(ми скористалися тим, що величини незалежні: $MAB=MA\cdot MB=0$, а тепер пригадаємо, що $MA^2=\sigma^2+\left(MA\right)^2$)$=\sigma^2M\cos k\left(t_1-t_2\right)$.

Цікаво, що у випадку, коли k не є випадковою величиною, цей вираз і буде давати кореляційну функцію процесу, що має назву «випадкова гармоніка зі сталою частотою»: $\sigma^2\cos k(t_1-t_2)$. Отримана функція залежить лише від відстані між двома аргументами, тобто процес буде стаціонарним. У подальшому скористаємося тим, що кореляційна функція випадкової гармоніки зі сталою частотою також є гармонікою з такою самою частотою.

Для пошуку необхідного виразу згадаємо, як можна обчислювати математичне сподівання функції випадкової величини, якщо відома її щільність:

$$M\cos k\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos kz\frac{\alpha}{\pi}\frac{dz}{z^2+\alpha^2}=\frac{\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ikz}\frac{dz}{z^2+\alpha^2}=$$

$$=\text{(користуємося лемою Жордана)}=\frac{\alpha}{\pi}2\pi i\operatorname{Res}_{\alpha i}\frac{e^{\tau z i}}{z^2+\alpha^2}=e^{-\alpha\tau}.$$

Перетворення виконано для випадку додатного значення параметра $\tau=t_1-t_2$. Для від'ємного значення перетворення аналогічні.

Відповідь: $K_\xi\left(t_1,t_2\right)=\sigma^2e^{-\alpha\left|t_1-t_2\right|}$.

1.2.3. Знайти кореляційну функцію випадкового процесу $x(t)=\eta(t)\sin(\omega_0 t+\varphi)$, де ϕ має рівномірний розподіл на відрізку $[0,\ 2\pi]$ і не залежить від процесу $\eta(t)$, що має нульове математичне сподівання й кореляційну функцію $k_\eta(\tau)=\sigma^2 e^{-\lambda|\tau|}$.

Розв'язання. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку математичних сподівань. Знаходимо характеристики безпосередньо, застосовуючи формулу для пошуку математичного сподівання функції від неперервної випадкової величини: $Mg(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(u)f(u)du$, у якій $f(u)$ – щільність розподілу ймовірності випадкової величини. У випадку рівномірного розподілу маємо $M\sin(\omega_0 t+\phi)=\int\limits_0^{2\pi}\sin(\omega_0 t+u)\frac{1}{2\pi}du=0$, а тоді й математичне сподівання всього процесу дорівнює нулю. Знайдемо кореляційну функцію, знову використовуючи математичне сподівання добутку незалежних величин:

$$\begin{aligned}
K_x(t,s)&=M[(\eta(t)\sin(\omega_0 t+\phi))(\eta(s)\sin(\omega_0 s+\phi))]=\\
&=M\eta(t)\eta(s)M\sin(\omega_0 t+\phi)\sin(\omega_0 s+\phi)=\\
&=K_\eta(t,s)\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\cos\omega_0(t-s)-\cos(2u+\omega_0(t+s)))\frac{1}{2\pi}du=\\
&=K_\eta(t,s)\frac{1}{2}\frac{2\pi}{2\pi}\cos\omega_0(t-s)=0{,}5k_\eta(\tau)\cos\omega_0\tau.
\end{aligned}$$

Отже, маємо стаціонарний процес.

1.3. Задачі для самостійного розв'язування

1.3.1. Нехай X – випадкова величина з відомою функцією розподілу $F(x)$. Записати скінченновимірні розподіли випадкового процесу $\xi(t)=X+t$ і побудувати його траєкторії.

1.3.2. Дискретні випадкові величини A і B є незалежними й мають однаковий розподіл $P\{A=1\}=P\{A=-1\}=0{,}5$. Знайти одновимірні розподіли випадкового процесу $\xi(t)=A\cos t+B\sin t$ у два моменти часу $t=0$ і $t=\frac{\pi}{4}$. Записати кореляційну функцію. Переконатись у тому, що процес є стаціонарним у широкому змісті і не є стаціонарним у вузькому змісті.

1.3.3. Знайти математичне сподівання, дисперсію й кореляційну функцію випадкових процесів:

1) $\xi(t) = At + B\cos t,$ де математичні сподівання $MA = -1,\ \ MB = 2$, а матриця коваріації між випадковими величинами A і B дорівнює $K = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\xi(t) = At^2 + Bt,\ \ MA = -2,\ \ MB = 3,\ \ K = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$;

3) $\xi(t) = A\cos\lambda t + B\sin\lambda t$, $MA = 1,\ \ DA = 0{,}01$, $MB = -2,\ \ DB = 0{,}04$, при цьому величини незалежні між собою.

1.3.4. Записати одновимірну щільність випадкового процесу $\xi(t) = A + Bt$, якщо відомі щільності $f_A(x),\ \ f_B(x)$.

1.3.5. Записати одновимірну щільність випадкового процесу $\xi(t) = At^2$, якщо $t > 0$, а величина A має рівномірний розподіл на відрізку $[0,\ 2]$.

1.3.6. Довести, що $K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2)\phi(t_1)\varphi(t_2)$, якщо $x(t)$ – випадковий процес, $\phi(t)$ і $\varphi(t)$ – невипадкові функції, $y(t) = \phi(t)x(t) + \varphi(t)$.

1.3.7. Пояснити, чому додавання до випадкового процесу невипадкової функції не приводить до змінення кореляційної функції. Як додавання невипадкової функції впливає на математичне сподівання?

1.3.8. Знайти кореляційну функцію випадкового процесу $y(t) = x(t)e^{-t^2} + \cos 2t$, якщо $k_\eta(\tau) = \sigma^2 e^{-\lambda|\tau|}$.

1.3.9. З'ясувати, чи можуть випадкові процеси мати однакові середнє значення та кореляційну функцію й різні одновимірні розподіли.

1.3.10. Довести стаціонарність процесу $\xi(t) = A\sin(2t + \Phi)$, де A та Φ – незалежні випадкові величини, Φ має рівномірний розподіл на $[0,\ 2\pi]$, $MA = 0,\ \ DA = \sigma^2$.

1.3.11. Нехай $f(t)$ – періодична функція з періодом T, а Φ – випадкова величина з розподілом, рівномірним на $[0,\ T]$. Довести, що процес $\xi(t) = f(t + \Phi)$ є стаціонарним.

1.3.12. Користуючись означенням кореляційної функції комплекснозначного випадкового процесу, знайти кореляційну функцію процесу $\xi(t) = Ue^{iVt}$, якщо $MU = 0,\ \ DU = \sigma^2$, а випадкова величина V не залежить від U і має щільність

$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)},\ \ x \in (-\infty, +\infty).$$

1.3.13. Знайти математичне сподівання, дисперсію й кореляційну функцію випадкового процесу $\xi(t)=m(t)+\sum_{k=1}^{N}V_k\phi_k(t)$, де $m(t),\ \phi_k(t)$ – невипадкові функції, а V_k – незалежні випадкові величини, які мають нульове математичне сподівання й дисперсії σ_k^2.

1.3.14. Записати одновимірну щільність випадкового процесу $\xi(t)=At+b$ і знайти його кореляційну функцію, якщо $A\cong N(a,\sigma^2)$, а b – невипадкова константа.

1.3.15. Знайти кореляційну функцію випадкового процесу $y(t)=x(t)sin(\omega t+\varphi)$, якщо $k_x(\tau)=\sigma^2 e^{-\lambda|\tau|}$, $Mx=0$, $\omega=const$, а φ не залежить від процесу $x(t)$ і має рівномірний розподіл на відрізку $[0,\ 2\pi]$.

1.3.16. Знайти кореляційну функцію випадкового процесу $\xi(t)=A_1e^{i\varphi_1}e^{i\omega t_1}+A_2e^{i\varphi_2}e^{i\omega t_2}$, якщо $A_1,A_2,\varphi_1,\varphi_2$ – незалежні величини, а φ_1,φ_2 мають рівномірний розподіл на $[0,\ 2\pi]$.

1.3.17. Випадковий процес подано у вигляді $x(t)=A\,sin(\lambda t+\Phi)$, де $A,\ \lambda$ – сталі, а Φ – випадкова величина, що має рівномірний розподіл на відрізку $[0,\ 2\pi]$. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію й дисперсію випадкового процесу $y(t)=x^2(t)$.

1.3.18. Нехай $x(t)$ і $y(t)$ – незалежні один від одного стаціонарні процеси. Відомо, що $k_x(\tau)=e^{-|\tau|}$, $k_y(\tau)=cos\,2\pi\tau$. Знайти кореляційну функцію процесу $z(t)=x(t)+y(t)$.

1.3.19. Нехай $x(t)$ і $y(t)$ – незалежні один від одного стаціонарні процеси. Відомо, що $k_x(\tau)=e^{-2\tau^2}$, $k_y(\tau)=\sigma^2\,cos\,\omega\tau$. Знайти кореляційну функцію процесу $z(t)=x(t)-y(t)$.

1.3.20. Знайти математичне сподівання й кореляційну функцію процесу $z[t]=e^{i\Lambda t}$, де Λ має рівномірний розподіл на відрізку $[-a,\ a]$.

1.3.21. Знайти кореляційну функцію випадкового процесу $x(t)=\eta(t)sin(\omega_0 t+\varphi)$, де ϕ має рівномірний розподіл на відрізку $[0,\ 2\pi]$ і не залежить від процесу $\eta(t)$, що має нульове математичне сподівання й кореляційну функцію $k_\eta(\tau)=\sigma^2e^{-\lambda|\tau|}$.

1.3.22. Нехай X_i – незалежні випадкові величини з однаковим розподілом, математичним сподіванням 0 і дисперсією σ^2. Чи буде процес $X_1 + ... + X_n$ стаціонарним?

1.3.23. Розглянемо випадковий процес $X_1 + ... + X_n$ із дискретним часом для величин, що мають однаковий розподіл $P\{X_i = +1\} = p$, $P\{X_i = -1\} = q$. Знайти кореляційну функцію.

1.3.24. Центрований стаціонарний процес має кореляційну функцію $k_x(\tau) = e^{-\frac{|\tau|}{2}}$. Знайти $Mx^2(5)$ і $M[x(5) - x(3)]^2$.

1.3.25. Розглянемо стаціонарний центрований випадковий процес із кореляційною функцією $k_x(\tau) = e^{-|\tau|}$. Знайти середнє значення процесу $y(t) = tx^2(t^{-1})$ і зробити висновок щодо його стаціонарності.

1.3.26. Знайти кореляційну функцію процесу $x(t) = \xi^3 t$, якщо $t \geq 0$, а випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на відрізку $[-1,\ 1]$.

1.3.27. Знайти математичне сподівання, дисперсію й кореляційну функцію випадкового процесу $x(t) = e^{-\xi t}$, якщо ξ має показниковий розподіл із параметром 1.

2. НОРМАЛЬНІ (ГАУССІВСЬКІ) ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

2.1. Теоретичний матеріал

Випадковий процес називають нормальним, або гауссівським, якщо всі його скінченновимірні розподіли – нормальні. Нагадаємо, що щільність нормальної величини ξ дорівнює

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right), -\infty < x < \infty, M\xi = a, D\xi = \sigma^2.$$

Щільність двовимірної нормальної величини (ξ, η) має вигляд

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right]},$$

де $M\xi = a, M\eta = b, D\xi = \sigma_1^2, D\eta = \sigma_2^2, \rho = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$.

Узагалі багатовимірний вектор має нормальний розподіл, якщо його щільність дорівнює

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det K}} e^{-\frac{1}{2}(\bar{x}-\bar{a})^T K^{-1}(\bar{x}-\bar{a})},$$

де $\bar{x}$ – вектор-стовпець, $\bar{a}$ – вектор із математичних сподівань, $(\bar{x}-\bar{a})^T$ – вектор-рядок, а K – матриця коваріацій, $K_{ij} = cov(\xi_i, \xi_j)$.

2.2. Приклади розв'язання задач

2.2.1. Нормальний стаціонарний випадковий процес має нульове математичне сподівання й кореляційну функцію $k_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-|\tau|} \cos\tau$. Записати вирази для його одновимірних і двовимірних щільностей. Знайти ймовірності випадкових подій $P\{|\xi(t)| < 2\sigma\}$ і $P\left\{\xi(t)\xi\left(t+\frac{\pi}{2}\right) > 0\right\}$.

Розв'язання. Одновимірна щільність нормальної величини з нульовим середнім і дисперсією $k_\xi(0) = \sigma^2$ має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Нехай t_1, t_2 – два довільні моменти часу, що знаходяться один від одного на відстані τ. Для скорочення запису позначимо $q = e^{-|\tau|} \cos\tau$. Тепер двовимірну щільність нормальної величини можна записати у стандартному вигляді

$$f(t_1, t_2, x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-q^2}} e^{-\frac{1}{2\left(1-q^2\right)\sigma^2}\left(x^2 - 2qxy + y^2\right)}.$$

Згадаємо, що для пошуку ймовірностей подій, зв'язаних із неперервними величинами, слід знайти інтеграл від їх щільності. У випадку нормальної величини це можна зробити лише наближено, користуючись функцією

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

значення якої знаходимо, наприклад, з таблиць.

Маємо $P\{|\xi(t)| < 2\sigma\} = P\{-2\sigma < \xi(t) < 2\sigma\} = 2\Phi\left(\frac{2\sigma - 0}{\sigma}\right) = 2\Phi(2) \approx 0{,}9542.$

Для пошуку другої ймовірності знадобиться знання таких фактів: по-перше, якщо відстань між двома моментами часу дорівнює $\frac{\pi}{2}$, то коефіцієнт кореляції між ними при даній кореляційній функції дорівнює нулю; по-друге, некорельовані нормальні величини завжди є незалежними. Отже,

$$P\left\{\xi(t)\xi\left(t+\frac{\pi}{2}\right)>0\right\}=P\{\xi(t)<0\}P\left\{\xi\left(t+\frac{\pi}{2}\right)<0\right\}+$$

$$+P\{\xi(t)>0\}P\left\{\xi\left(t+\frac{\pi}{2}\right)>0\right\}=0{,}5.$$

2.2.2. У деяких технічних задачах, пов'язаних, наприклад, із кутами крену корабля, потрібно обчислити умовні характеристики випадкових процесів. Наприклад, нормальний стаціонарний випадковий процес має нульове математичне сподівання й $k_\theta(\tau)=\sigma^2\rho(\tau)$. Знайти умовну ймовірність $P\{\theta(t_1+\tau)>y/\theta(t_1)=x\}$.

Розв'язання. Запишемо двовимірну щільність у вигляді

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2\left(1-\rho^2\right)}\left(x^2-2\rho xy+y^2\right)\right\}.$$

Поділивши двовимірну (сумісну) щільність на маргінальну, тобто щільність однієї координати нормального вектора $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<\infty$, отримаємо вираз (переконайтесь!)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{1-\rho^2}}exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)\sigma^2}(y-\rho x)^2\right\}.$$

А це означає, що випадкова величина $\theta(t_1+\tau)$ має умовний нормальний розподіл $N\left(\rho(\tau)x;\sigma^2\left(1-\rho^2(\tau)\right)\right)$ за умови $\theta(t_1)=x$.

Імовірність попадання нормальної випадкової величини в довільний інтервал буде такою:

$$P\{\theta(t_1+\tau)>y|\ \theta(t_1)=x\}=\frac{1}{2}-\Phi\left(\frac{y-\rho(\tau)x}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\tau)}}\right).$$

2.3. Задачі для самостійного розв'язування

2.3.1. Нормальний стаціонарний випадковий процес має нульове математичне сподівання й $k(\tau)=\sigma^2 e^{-|\tau|}\cos\tau$. Знайти: $M|\xi(t)|$; $P\{|\xi(t)|<\sigma\}$; $P\left\{\xi(t)\xi\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)<0\right\}$.

2.3.2. Знайти сумісну щільність випадкового вектора $(\xi(t_2)-\xi(t_1),\ \xi(t_4)-\xi(t_3))$, якщо $t_1<t_2<t_3<t_4$, а $\xi(t)$ – нормальний центрований процес, $K_\xi(t_1,\ t_2)=\min\{t_1,\ t_2\}$.

2.3.3. Скласти матрицю коваріацій нормального стаціонарного випадкового процесу для моментів часу $t,\ t+1,\ t+2,\ t+3$, якщо процес має кореляційну функцію: а) $k_x(\tau)=\begin{cases}\dfrac{6\sin\pi\tau}{\pi\tau}, & \tau\neq 0,\\ 6, & \tau=0;\end{cases}$ б) $k_x(\tau)=6e^{-\frac{|\tau|}{2}}$.

2.3.4. Розглянемо стаціонарний центрований нормальний випадковий процес із кореляційною функцією $k_x(\tau)=2e^{-4|\tau|}$. Нехай $s\geq 0$. Для процесів $y(t)=x(t-s)$ і $z(t)=x(t+s)$ довести, що $My(t)z(t)=2e^{-8s}$, $D(y+z)=4\left(1+e^{-8s}\right)$.

3. ЛАНЦЮГИ МАРКОВА

3.1. Теоретичний матеріал

Розглянемо випадковий процес $\xi(t)=\xi_t$ із дискретним часом $t=0,\ 1,\ 2,\ldots$. Нехай випадкові величини ξ_t у кожний момент часу мають так звану множину станів $X=\{1,\ 2,\ \ldots,N\}$, тобто вони дискретні й набувають лише значень із скінченної множини N.

Випадковий процес ξ_t має назву *ланцюга Маркова*, якщо виконуються дві умови:

1) $\sum\limits_{k=1}^{N}P\{\xi(t)=k\}=1$ для будь-якого t;

2) для будь-яких підмножин $B_1,\ldots,B_m\subset N$, будь-яких $i,j\in X$ і будь-яких моментів $\vec{\pi}=(\pi_1,\ldots,\pi_N)$ справджується рівність

$$P\{\xi_t=j\mid\xi_t\in B_1,\ldots,\xi_{t_m}\in B_m,\xi_s=i\}=P\{\xi_t=j\mid\xi_s=i\}.$$

Надзвичайно корисно запам'ятати, як можна сформулювати основну, так звану марковську властивість: «Майбутнє не залежить від минулого за умови сучасного».

Ланцюг називається однорідним, якщо ймовірність $P\{\xi_{t+1} = j \mid \xi_t = i\} = p_{ij}$ не залежить від t.

Ці ймовірності називають імовірностями переходу (перехідними ймовірностями) ланцюга зі стану i в стан j за один крок. Кажуть, що p_{ij} – імовірність випадкової події: «ланцюг, який знаходився у стані i, за один крок перейшов у стан j».

Числа p_{ij} утворюють матрицю P імовірностей переходу ланцюга за один крок, сума чисел у кожному рядку дорівнює 1. Така матриця має назву стохастичної.

Із формули повної ймовірності маємо

$$P\{\xi_{t+2} = j \mid \xi_s = i\} = \sum_{k=1}^{N} p_{ik} p_{kj},$$

що відповідає добутку матриць. Отже, імовірності переходу з одного стану у другий за два кроки – це елементи матриці P^2. Аналогічно матриця P^n утворена з імовірностей переходу за n кроків.

Зрозуміло, що розподіл випадкової величини ξ_1 задається вектором $\vec{q}_1 = \vec{q}_0 P$, аналогічно $\vec{q}_n = \vec{q}_0 P^n$, де $\vec{q}_n$ – вектор, що відповідає розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини ξ_n.

Теорема (ергодична теорема для ланцюгів Маркова).

Нехай P – матриця ймовірностей переходу ланцюга Маркова ξ_n за один крок, а множина станів процесу ξ_n скінченна $X = \{1,2,...,N\}$. Якщо існує такий степінь матриці P, усі елементи якого додатні (тобто P^n не має жодного нульового елемента), то існують такі числа $\pi_1,...,\pi_N$, що для будь-яких $i \in X$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j,\ \pi_j > 0,\ \sum_j \pi_j = 1,$$

де $p_{ij}^{(n)}$ – імовірність переходу із стану i в стан j за n кроків.

Числа π_j можна знайти із системи рівнянь

$$\vec{\pi} = \vec{\pi} \cdot P,$$

де $\vec{\pi} = (\pi_1,...,\pi_N)$ – вектор-рядок.

Розв'язок системи утворює розподіл імовірностей, який має назву стаціонарного, або інваріантного розподілу ланцюга Маркова.

Якщо в деякому степені матриці P немає жодного нуля, ланцюг називають *ергодичним.*

Отже, якщо ланцюг ергодичний, то обов'язково існує стаціонарний розподіл.

Зазначимо, що числа π_j мають ще одну вельми наочну інтерпретацію, а саме: якщо розглядати досить великий проміжок часу, то π_j показуватиме, яку частину часу в середньому ланцюг перебуває в стані з номером j.

3.2. Приклади розв'язання задач

3.2.1. Довести, що ланцюг Маркова з $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ не є ергодичним. Пояснити, що $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j$ не існує. Знайти розв'язок рівняння $\vec{\pi}P = \vec{\pi}$.

Розв'язання. Зрозуміло, що $P^{2k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Отже, за означенням ланцюг не є ергодичним – кожний степінь матриці має нулі. Жодний елемент P^n не має границі.

Водночас система $\begin{cases} (\pi_1 \pi_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_1 \pi_2), \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$ має очевидний розв'язок $(0{,}5;\ 0{,}5)$. Цей приклад показує, що ергодичність – достатня, але не необхідна умова існування стаціонарного розподілу.

3.2.2. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} P^n$, якщо $P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. З боку безпосередніх обчислень методами лінійної алгебри задача не є простою. Краще згадати, який зміст має вектор $\vec{\pi}$. Його координати $\pi_j = \lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ є границями елементів степеня матриці P. Їх можна знайти із системи $\begin{cases} (\pi_1 \pi_2)\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix} = (\pi_1 \pi_2), \\ \pi_1 + \pi_2 = 1, \end{cases}$ звідки маємо $\pi_1 = \frac{7}{13}$, $\pi_2 = \frac{6}{13}$.

Відповідь: матриця складається з двох однакових рядків $\begin{pmatrix} \frac{7}{13} & \frac{6}{13} \end{pmatrix}$.

3.2.3. На маршруті протягом години працювали три автомобілі. Кожен із них з імовірністю 0,5 незалежно від інших потребує ремонту. Наприкінці години замість одного зламаного автомобіля на маршрут виходить новий. Нехай $\xi(n)$ – кількість непрацюючих автомобілів із трьох на маршруті в момент початку години. Записати P. Знайти, скільки відсотків часу в середньому кількість несправних дорівнює 0, 1 та 2.

Розв'язання. Маємо:

P_{00} = (усі автомобілі працюють або один зламався і його замінили)= $= (0{,}5)^3 + C_3^1 \cdot 0{,}5 \cdot (0{,}5)^2 = 0{,}5;$

P_{01} = (два зламались, один замінили) $= C_3^2 \cdot 0{,}5 \cdot (0{,}5)^2 = 0{,}375;$

P_{02} = (три зламались, один замінили) $= (0{,}5)^3 = 0{,}125;$

P_{10} = (працювали два, обидва не зламалися, один замінили) $= (0{,}5)^2 = 0{,}25;$

P_{11} = (із двох один зламався, стало два зламаних) $= C_2^1 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$;

P_{12} = (обидва зламалися) $= (0{,}5)^2 = 0{,}25.$

Аналогічно інші числа

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}375 & 0{,}125 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що вже P^n не містить нулів, тобто ланцюг буде ергодичним. Знайдемо $\vec{\pi}$:

$$\begin{cases} (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3) \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}375 & 0{,}125 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} = (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3), \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1, \end{cases}$$

звідки $\vec{\pi} = \left(\frac{4}{17}; \quad \frac{8}{17}; \quad \frac{5}{17} \right)$. Знайдено розподіл часу перебування ланцюга в станах у далекому майбутньому.

3.3. Задачі для самостійного розв’язування

3.3.1. Знайти стаціонарний розподіл ланцюга Маркова й матрицю переходів за два кроки, якщо $P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$. Визначити розподіл імовірностей по станах у момент часу $t = 2$, якщо відомо початковий розподіл: $q_0 = (0{,}6; \ 0{,}4)$.

3.3.2. Для ланцюга Маркова з $P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ і початковим розподілом $q_0 = \left(\frac{1}{3}; \ \frac{2}{3} \right)$ знайти математичне сподівання процесу в момент $t = 2$.

3.3.3. Довести, що $M\left(x_2 \middle| x_0 = 0\right) = \frac{2}{3}$, якщо x_n – випадкове блукання, $p_{ii+1} = \frac{2}{3}$, $p_{ii-1} = \frac{1}{3}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

3.3.4. На початку року 60 % споживачів віддавали перевагу продукції компанії A, а 40 % – продукції компанії B. Щороку 2/3 покупців, що віддавали перевагу продукції A, змінюють уподобання на користь B, а 1/2 тих, що користувалися продукцією B, навпаки, переходять до стану шанувальників A. Знайти розподіл кількості шанувальників обох компаній через два роки. Визначити, як розподіляться споживачі через велику кількість років.

3.3.5. Матриця переходу за один крок однорідного ланцюга Маркова з можливими станами 0 і 1 має вигляд $P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, де $p \in (0,1)$. Відомо, що $x(0) = 0$. Знайти ймовірність переходу зі стану 1 у стан 1 за 10 кроків. Записати вираз для $K_x(1;\ 13)$.

3.3.6. Розглянемо ланцюг, утворений у такий спосіб: $y_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$. Доданки є незалежними випадковими величинами, що мають розподіл Пуассона з параметром 1. Знайти ймовірність переходу зі стану 1 у стан 3 за чотири кроки. Відповідь: 0,1465.

3.3.7. Ланцюг із множиною станів 0, 1, 2 і 3 має матрицю переходів $P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 & 0{,}75 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Відомо, що $x(0) = 1$. Довести, що ймовірність діс-татися стану 0 раніше, ніж стану 3, дорівнює 2/3.

3.3.8. Знайти стаціонарний розподіл ланцюга, якщо ймовірності переходів дорівнюють $p_{k0} = \frac{k+1}{k+2}$, $p_{k,k+1} = \frac{1}{k+2}$.

3.3.9. Знайти стаціонарний розподіл ланцюга, якщо його задано умовами $p_{i0} = \frac{2}{3}$, $p_{i,k} = \left(\frac{1}{4}\right)^k$, $i = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ k = 1,\ 2, \ldots$. Відповідь: $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$.

3.3.10. Маємо ланцюг Маркова з множиною станів 1, 0 і -1, розподілом імовірностей по станах у початковий момент (6/17, 5/17, 6/17) і матрицею $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$. Обчислити ймовірності $P\left\{x^2(2) = 0 \mid x^2(1) = 1\right\}$ і $P\left\{x^2(2) = 0 \mid x^2(1) = 1, x^2(0) = 0\right\}$. Результат прокоментувати.

3.3.11. Нехай ξ_n, η_n – незалежні ланцюги зі станами 0 і 1, початковими розподілами $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ і $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $P_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$. Знайти ймовірності двох подій: $P\{\xi_2 + \eta_2 = 0 \mid \xi_1 + \eta_1 = 1, \xi_0 + \eta_0 = 0\}$ і $P\{\xi_2 + \eta_2 = 0 \mid \xi_1 + \eta_1 = 1\}$.

3.3.12. Матриця переходу однорідного ланцюга Маркова з можливими станами 0, 1 і 2 за один крок має вигляд $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, де $p \in (0,1)$. Довести, що $P^n = \begin{pmatrix} 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \end{pmatrix}$.

4. ОДНОРІДНІ ПРОЦЕСИ МАРКОВА З НЕПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ В СИСТЕМАХ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

4.1. Теоретичний матеріал

Розглянемо випадковий процес $x(t)$, який має дискретну (скінченну або зчисленну) множину станів, наприклад, $x(t)$ може дорівнювати $0,\ 1,\ 2, \ldots$ Але на відміну від ланцюгів Маркова час t вважається неперервним. Це більш поширений для застосування клас випадкових процесів, оскільки на практиці перехід системи з одного стану в інший здійснюється, як правило, не у фіксовані моменти часу, а в будь-які випадкові.

Нехай знов-таки майбутнє не залежить від минулого при фіксованому сучасному:

$$P\{x(s+t) = j \mid x(s_1) = i_1, \ldots, x(s_m) = i_m,\ x(s) = i\} = p_{ij}(t)$$

для будь-яких $s_1 < \ldots < s_m < s$, а також для будь-яких $i,\ j,\ t$. Цю умову називають **марковською** властивістю, а процес $x(t)$ – марковським процесом із дискретною множиною станів і неперервним часом. У випадку, коли $P\{x(s+t) = j \mid x(s) = i\} = p_{ij}(t)$ не залежить від розташування проміжку $(s,\ s+t)$ на осі, а залежить лише від його довжини t, марковський процес матиме назву «однорідний».

Для ймовірностей переходів $p_{ij}(t)$ додамо умову $p_{ij}(0)=\begin{cases}1, & j=i,\\ 0, & j\neq i.\end{cases}$ Нехай задано розподіл імовірностей по станах у початковий момент $p_i^0=P\{x(0)=i\}$, тоді для будь-яких $0=t_0<t_1<\ldots<t_n$ виконується рівність

$$P\{x(t_1)=j_1,\ldots,x(t_n)=j_n\}=\sum_i p_i^0 p_{ij_1}(t_1-t_0)\ldots p_{j_{n-1}j_n}(t_n-t_{n-1}).$$

В окремому випадку ймовірність того, що система в момент $t>0$ буде знаходитися в стані j, дорівнює $p_j(t)=P\{x(t)=j\}=\sum_i p_i^0 p_{ij}(t)$.

Зрозуміло, що наведено окремі випадки звичайної формули повної ймовірності.

Введемо параметри λ_{ij} як похідні $p'_{ij}(0)$:

$$\lambda_{ij}=\lim_{h\to 0}\frac{p_{ij}(h)}{h},\ j\neq i;\ \ \lambda_{ii}=\lim_{h\to 0}\frac{p_{ii}(h)-1}{h}.$$

Якщо перехідні ймовірності $p_{ij}(t)$ мають похідні, то вони задовольняють системі диференціальних рівнянь $p'_{ij}(t)=\sum_k \lambda_{ik}p_{kj}(t)$ (обернені рівняння Колмогорова – Чепмена).

Якщо перехідні ймовірності мають похідні та додатково $p_{ij}(\Delta t)=\lambda_{ij}\Delta t+\alpha_{ij}(\Delta t)$, де величини λ_{ij} обмежені і $\dfrac{\alpha_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}\to 0$ рівномірно відносно $i,\ j$, то перехідні ймовірності задовольняють системі $p'_{ij}(t)=\sum_k p_{ik}(t)\lambda_{kj}$ (прямі рівняння Колмогорова – Чепмена), а ймовірності того, що в момент t система перебуватиме в стані j, теж задовольняють прямій системі диференціальних рівнянь Колмогорова – Чепмена

$$p'_j(t)=\sum_k p_k(t)\lambda_{kj},\ j=0,\ 1,\ldots.$$

Нагадаємо, що в будь-який момент t виконується $\sum_i p_i(t)=1$.

За деяких умов процес $x(t)$ є ергодичним: імовірність того, що система через великий проміжок часу перебуває в стані i, не залежить від того, яким був стан у початковий момент: $p_i=\lim_{t\to\infty} p_i(t)$, і не залежить від $p_k^{(0)}$. Умови ергодичності схожі з умовами аналогічного випадку в ланцюгах Маркова. Числа p_i називають **стаціонарними ймовірностями** перебування процесу в станах. Зрозуміло, що вони задовольняють уже системі лінійних алгебричних рівнянь

$$0=\sum_k p_k\lambda_{kj},\ j=0,\ 1,\dots$$

Система масового обслуговування з очікуванням

Розглянемо систему, що складається з m однакових приладів, що здійснюють обслуговування деяких клієнтів або заявок. Заявки надходять до системи у випадкові моменти часу згідно з пуассонівським потоком інтенсивністю λ. Якщо заявка не знаходить вільного приладу, то вона чекає у черзі. Пояснимо, за яких умов випадковий процес $x(t)$ – кількість заявок у системі в момент t – утворює процес Маркова з дискретною множиною станів і неперервним часом.

Нехай час обслуговування будь-якої заявки – випадкова величина з показниковим розподілом. Завдяки відомим властивостям саме цього розподілу виникає марковський процес:

1) показникова величина задовольняє умову відсутності післядії, а саме: $P\{\xi>x+T\mid\xi>T\}=P\{\xi>x\}=e^{-\mu x}$;
2) якщо $\xi_1,\dots,\xi_n$ – незалежні показникові величини, то $\xi=min(\xi_1,\dots,\xi_n)$ також має показниковий розподіл з параметром μn.

Отже, у будь-який момент часу t розподіл випадкового часу до появи наступної заявки буде показниковим з параметром λ, а часу до найближчого звільнення приладу – показниковим з параметром μk, де k – кількість заявок, що обслуговувались у момент t. Тоді виконується основна властивість марковського процесу.

Запишемо рівняння Колмогорова:

$$p_0'(t)=p_1(t)\mu-p_0(t)\lambda;$$

$$p_1'(t)=p_0(t)\lambda+p_2(t)\cdot 2\mu-p_1(t)(\mu+\lambda);$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$p_k'(t)=p_{k-1}(t)\lambda+p_{k+1}(t)(k+1)\mu-p_k(t)(\lambda+k\mu),\ \text{якщо}\ 1\le k<m;$$

$$p_k'(t)=p_{k-1}(t)\lambda+p_{k+1}(t)m\mu-p_k(t)(\lambda+m\mu),\ \text{якщо}\ k\ge m.$$

Розв'яжемо систему рівнянь для стаціонарних імовірностей. Нехай $t\to+\infty$. Як завжди, $\lim\limits_{t\to\infty} p_k(t)=p_k$. Маємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} 0=-\lambda p_0+\mu p_1; & \\ 0=\lambda p_{k-1}-(\lambda+k\mu)p_k+(k+1)\mu p_{k+1}, & k<m; \\ 0=\lambda p_{k-1}-(\lambda+m\mu)p_k+m\mu p_{k+1}, & k\ge m. \end{cases}$$

Послідовно знайдемо

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0, \; p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \frac{p_0}{2}, \dots, p_m = \frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m p_0.$$

Для $k \geq m$ маємо $p_k = \dfrac{p_0}{m!\, m^{k-m}}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k$. Число $\dfrac{\lambda}{\mu}$ називають завантаженням і позначають ρ. Імовірність p_0 можна знайти з умови $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Цей ряд для випадку $\rho < m$ є збіжним, і тоді $p_0^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{\rho^k}{k!} + \dfrac{\rho^{m+1}}{m!(m-\rho)}$. А всі інші ймовірності p_k раніше були виражені через знайдену.

У системах із очікуванням важливою характеристикою процесу обслуговування є розподіл часу очікування початку обслуговування. Наведемо закон розподілу цієї неперервної величини γ: $P\{\gamma > t\} = \pi \cdot e^{-t(m\mu - \lambda)}$, де коефіцієнт π дорівнює ймовірності того, що в стаціонарному режимі всі робочі прилади є зайнятими. Зрозуміло, що він може бути знайдений як $\pi = \sum\limits_{k=m}^{\infty} p_k = \dfrac{m p_m}{m-\rho}$ (формулу одержано спрощенням).

Найцікавішим з боку теорії ймовірностей є те, що величина γ не є ані дискретною, ані неперервною: час до початку обслуговування може дорівнювати нулю, якщо знайдеться хоча б один вільний прилад!

Отже, $P\{\gamma = 0\} = p_0 + p_1 + \dots + p_{m-1}$. Тепер

$$M\gamma = 0 \cdot P\{\gamma = 0\} + \int_0^{\infty} dP\{\gamma > 0\} = \frac{\pi}{\mu(m-\rho)}, \quad D\gamma = \frac{\pi(2-\pi)}{\mu^2(m-\rho)^2}.$$

Відомо, що на проміжку часу довжиною T надходить у середньому λT клієнтів, отже, загальні середні втрати часу становлять $\dfrac{\pi\rho T}{m-\rho}$, що значно зростає зі зростанням завантаження.

Розглянемо однорідний процес Маркова, який має скінченну або зчисленну множину станів $E_0, E_1, \dots$. Нехай імовірності переходів зі стану в стан задовольняють такі умови:

1) імовірність переходу $E_n \to E_{n+1}$ протягом часу Δt дорівнює
$$\lambda_n \Delta t + o(\Delta t);$$
2) імовірність переходу $E_n \to E_{n-1}$ протягом часу Δt дорівнює
$$\mu_n \Delta t + o(\Delta t);$$
3) імовірність переходу $E_n \to E_n$ протягом часу Δt дорівнює
$$1 - \lambda_n \Delta t - \mu_n \Delta t + o(\Delta t);$$

4) імовірність переходу із E_n в інші, «не сусідні» стани $E_{n\pm k}, k > 1$ протягом часу Δt дорівнює $o(\Delta t)$.

Константи λ_n, μ_n залежать від номера, але не залежать від часу. Такий процес називають процесом загибелі й розмноження, в окремих випадках, коли $\mu_n = 0,$ – процесом чистого розмноження, а коли $\lambda_n = 0$, – процесом чистої загибелі.

Відомо, що для процесів чистого розмноження система має розв'язок з властивістю $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1$ для будь-якого t у тому і лише тому випадку, коли ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$ є розбіжним (теорема Феллера).

4.2. Приклади розв'язання задач

4.2.1. Розглянемо два незалежні один від одного потоки Пуассона з інтенсивностями λ і μ, а також інтервал між двома послідовними надходженнями точок першого потоку. На цьому випадковому відрізку відбудеться деяка випадкова кількість ξ подій другого потоку. Наприклад, до зупинки у випадкові моменти часу приходять автобуси, а на будь-який інтервал між двома автобусами прибувають пасажири. Знайти розподіл випадкової величини ξ.

Розв'язання. Скористаємося інтегральним аналогом формули повної ймовірності: $P\{\xi = k\} = \int\limits_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t} dt$, а також тим, що інтервал між послідовними точками потоку має показниковий розподіл, а кількість точок – розподіл Пуассона. Залишається знайти інтеграл, або перетворивши вираз для використання Г-функції Ейлера, або застосовуючи таблицю перетворення Лапласа. Остаточно $P\{\xi = k\} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^k$. Такий розподіл у теорії ймовірностей має назву геометричного.

4.2.2. Лінійне зростання популяції з еміграцією. Наведемо приклад застосування процесів загибелі й розмноження в демографії. Нехай у процесі відомі $\lambda_n = \lambda n + a$ і $\mu_n = \mu n$. Перший доданок є характеристикою звичайного приросту населення, а другий – зростання населення за рахунок притоку емігрантів. Складаємо систему рівнянь Колмогорова – Чепмена:

$$\begin{cases} p_0'(t) = -ap_0(t) + \mu p_1(t), \\ p_j'(t) = [\lambda(j-1) + a]p_{j-1}(t) - [(\lambda + \mu)j + a]p_j(t) + \mu(j+1)p_{j+1}(t). \end{cases}$$

Далі можна перейти до системи відносно стаціонарних імовірностей, але у цьому випадку легко знайти ще одну цікаву характеристику випадкового процесу – середній розмір популяції. Для цього помножимо кожне рівняння на j та додамо всі рівняння одне до одного:

$$[M(t)]' = a(p_0 - p_1 + 2p_1 - 2p_2 + 3p_2 + ...) +$$
$$+ \lambda(-p_1 + 2p_1 - 4p_2 + 6p_2 - 9p_3 + 12p_3 + ...) +$$
$$+ \mu(-p_1 + 2p_2 - 4p_2 + 6p_3 - 9p_3 + ...).$$

Легко побачити, що $[M(t)]' = a + (\lambda - \mu)M(t)$ – диференціальне рівняння, яке при додаванні початкової умови $M(0) = N$ приводить до розв'язку:

$$M(t) = \begin{cases} at + N, & \lambda = \mu, \\ \dfrac{a}{\lambda - \mu}\left[e^{(\lambda-\mu)t} - 1\right] - Ne^{(\lambda-\mu)t}, & \lambda \neq \mu. \end{cases}$$

Корисно проаналізувати результати при $t \to \infty$ окремо у випадках $\lambda = \mu$ і $\lambda < \mu$.

4.3. Задачі для самостійного розв'язування

4.3.1. Знайти ймовірність того, що в системі $M / M / 2 / \infty$ у стаціонарному режимі всі прилади зайняті (вважаємо, що $\rho < 2$). Відповідь: $\dfrac{\rho^2}{2 + \rho}$.

4.3.2. Визначити середні витрати часу для $T = 1$ у системі обслуговування $M / M / 2 / \infty$. Порівняти відповіді для випадків різних значень ρ: $\rho = 0{,}1, \quad \rho = 1, \quad \rho = 1{,}5, \quad \rho = 1{,}9$.

4.3.3. Знайти стаціонарні ймовірності системи $M / M / 3 / 2$. Розглянути випадок: $\lambda = 12$ чол. у год., $\dfrac{1}{\mu} = 10$ хв. Відповідь: $p_0 = \dfrac{27}{211}$.

4.3.4. Розглянемо $M / M / 2 / \infty$. Нехай $\dfrac{1}{\mu} = 9$ хв. Яке найбільше значення може мати інтенсивність потоку, щоб середня черга не перевищувала 3?

4.3.5. Майстерня ремонтує в середньому п'ять автомобілів за день. У середньому час ремонту становить один день. Розглянемо $M / M / m / 0$. Знайти необхідну кількість ремонтних одиниць, щоб імовірність втрати клієнта не перевищувала 0,9. Відповідь: не менше 8.

4.3.6. Розглянемо $M / M / 3 / \infty$. Знайти середню чергу. Знайти середній час очікування.

4.3.7. Каса з продажу квитків обслуговує в середньому 30 клієнтів за годину. Скільки потрібно мати відчинених кас, щоб середня черга до всіх разом не перевищувала 3, якщо в середньому за годину прибуває 150 пасажирів? Відповідь: 6.

4.3.8. Нехай N незалежних споживачів користуються електроенергією. На проміжку $(t,\ t+\Delta t)$ кожний споживач може підімкнутися з імовірністю $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$, а якщо його вже підімкнено, то, навпаки, відімкнутися з імовірністю $\mu\Delta t+o(\Delta t)$. Знайти стаціонарний розподіл кількості підімкнених споживачів. Відповідь: $p_j=\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^j\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-j}C_n^j$, тобто розподіл є біномним.

4.3.9. Нехай $S(t)=X_1+X_2+...+X_{N(t)}$, де доданки – незалежні випадкові величини з однаковим розподілом, які також не залежать від випадкової величини $N(t)$, що має розподіл Пуассона з параметром λt. Довести, що твірна функція $G_{S(t)}=Mz^{S(t)}$ для випадку, коли доданки є дискретними величинами, може бути знайдена за формулою $G_{S(t)}(z)=G_{N(t)}\left(G_X(z)\right)$. Записати відповідь для випадків, коли доданки мають біномний і геометричний розподіл.

4.3.10. Скласти систему рівнянь Колмогорова – Чепмена для стаціонарних імовірностей системи $M|M|1$, якщо клієнт, що зустрів у системі n клієнтів, залишається чекати з імовірністю $\frac{1}{n+1}$.

4.3.11. Довести, що $P\{T<x|N(t)=1\}=x/t$, де T – момент появи першої точки пуассонівського потоку, $N(t)$ – кількість точок на відрізку $[0,\ t]$, а $x<t$.

4.3.12. Розглянемо два незалежних пуассонівських потока з інтенсивностями λ і μ. Знайти розподіл випадкової величини, що дорівнює кількості точок другого потоку, що з'являються між двома послідовними точками першого.

5. ПРОЦЕСИ З ОРТОГОНАЛЬНИМИ ПРИРОСТАМИ. ПРОЦЕСИ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ПРИРОСТАМИ. ПРОЦЕС ПУАССОНА. ВІНЕРІВСЬКИЙ ПРОЦЕС

5.1. Теоретичний матеріал

Розглянемо випадкові процеси з дійсними значеннями, причому $t\geq 0$ і $x(0)=0$. Процес називають процесом із ортогональними приростами, якщо для будь-яких моментів часу $0\leq t_1\leq t_2\leq t_3\leq t_4$ виконується умова $cov((x(t_4)-x(t_3)),(x(t_2)-x(t_1)))=0$.

Процес називають процесом із незалежними приростами, якщо для будь-яких моментів часу $0\leq t_1\leq t_2\leq...\leq t_n\leq...$ випадкові величини $x(t_1)-x(0),x(t_2)-x(t_1),...,x(t_n)-x(t_{n-1}),...$ є незалежними в сукупності. Зрозуміло, що будь-який процес із незалежними приростами водночас є процесом із ортогональними приростами. Протилежне твердження – несправедливе, але для нормальних процесів воно справджується, оскільки для нормальних величин незалежність випливає з рівності коваріацій нулю.

Процес називають однорідним, якщо для будь-яких моментів часу закон розподілу приросту $x(t+s)-x(s)$ залежить лише від s, тобто збігається з розподілом $x(s)-x(0)=x(s)$. Цей розподіл може бути як абсолютно неперервним (наприклад, далі буде розглянуто так званий вінерівський процес), так і дискретним.

Процес Пуассона

Однорідний процес із незалежними приростами називають процесом Пуассона, якщо для будь-якого моменту часу випадкова величина $x(t)$ (або переріз процесу) має розподіл Пуассона з параметром λt. Властивості процесу Пуассона:

1. $Mx(t)=\lambda t$.
2. $Dx(t)=\lambda t$.
3. $P\{x(t)-x(s)=k\}=\dfrac{(\lambda(t-s))^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)},\ k=0,\ 1,\ldots,\ \ t-s>0$.
4. Фізичний зміст процесу Пуассона: $x(t)$ дорівнює кількості точок пуассонівського потоку інтенсивністю λ, що надійшли від моменту 0 до моменту t.
5. $K_x(t_1,t_2)=\lambda\, min\{t_1,t_2\}$, тобто процес – нестаціонарний.

Вінерівський процес, або процес броунівського руху

Випадковий процес $w(t)$ називають вінерівським, якщо:

1) він виходить із нуля $w(0)=0$;

2) він є процесом із незалежними приростами;

3) процес однорідний: розподіл приросту залежить лише від довжини інтервалу часу, а не від розташування цього інтервалу на числовій прямій, тобто випадкові величини $w(t+s)-w(s)$ і $w(t)-w(0)$ мають однаковий розподіл;

4) випадкова величина $w(t)$ має нормальний розподіл, причому $Mw(t)=0$, $Dw(t)=\sigma^2 t$ для $t>0$.

Можна показати, що такий процес буде гауссівським. Знайдемо кореляційну функцію вінерівського процесу. Користуючись тим, що вінерівський процес має нульове математичне сподівання, маємо $K_w(t_1,t_2)=M[w(t_1)w(t_2)]$. Величини у дужках залежать одна від одної. Перетворимо їх добуток так, щоб скористатися незалежністю **приростів** вінерівського процесу:

$$w(t_1)w(t_2)=(w(t_1))^2+(w(t_1)-w(0))(w(t_2)-w(t_1)).$$

Нагадаємо, що $w(0)=0$, а випадкові величини в другому доданку є незалежними, математичне сподівання їх добутку дорівнює добуткові математичних сподівань:

$$K_w(t_1,t_2)=M(w(t_1))^2+M(w(t_1))M(w(t_2)-w(t_1))=Dw(t_1)=\sigma^2 t_1.$$

Зрозуміло, що перетворення виконано для $t_1 < t_2$. Остаточно

$$K_w(t_1,t_2)=\sigma^2\, min\{t_1,t_2\}.$$

5.2. Приклади розв'язання задач

5.2.1. Процес $x(t)=e^{-\beta t}w\left(\alpha e^{2\beta t}\right)$ має назву процесу Орнштейна – Уленбека з параметрами $\alpha>0,\ \ \beta>0$. Можна довести, що він є гауссівським. Довести, що процес стаціонарний.

Розв'язання. Оскільки вінерівський процес є центрованим, $Mx(t)=e^{-\beta t}Mw\left(\alpha e^{2\beta t}\right)=0$. Кореляційна функція для $t_1 < t_2$ дорівнює

$$K_x(t_1,t_2)=M\left[\left(e^{-\beta t_1}w\left(\alpha e^{2\beta t_1}\right)\right)\left(e^{-\beta t_2}w\left(\alpha e^{2\beta t_2}\right)\right)\right]=$$

$$=e^{-(t+t_2)\beta}Mw\left(\alpha e^{2\beta t_1}\right)\left(w\left(\alpha e^{2\beta t_2}\right)-w\left(\alpha e^{2\beta t_1}\right)+w\left(\alpha e^{2\beta t_1}\right)\right)=$$

$$=e^{-(t_1+t_2)\beta}M\left[w^2\left(\alpha e^{2\phi t_1}\right)+w\left(\alpha e^{2\beta t_1}\right)\left(w\left(\alpha e^{2\beta t_2}\right)-w\left(\alpha e^{2\beta t_1}\right)\right)\right].$$

Математичне сподівання добутку незалежних величин дорівнює добутку математичних сподівань, а незалежність забезпечена тим, що вінерівський процес є процесом із незалежними приростами. Математичне сподівання квадрата центрованої величини дорівнює її дисперсії, отже, після завершення перетворень

$$K(t_1,t_2)=\sigma^2\alpha e^{-\beta(t_1-t_2)},$$

а для випадку $t_1 > t_2$ доведення аналогічне. Відповідь: $k_x(\tau)=\sigma^2\alpha e^{-\beta|\tau|}$, тобто процес стаціонарний.

.

Нагадаємо, що існують декілька видів збіжності для випадкових величин і, відповідно, існують різні означення неперервності й похідної випадкового процесу. Так, наприклад, випадковий процес називають стохастично неперервним у точці t_0, якщо $x(t)\xrightarrow[t\to t_0]{}x(t_0)$, де збіжність розуміється **за ймовірністю,** тобто $\forall\varepsilon>0\ \ P\{|x(t)-x(t_0)|>\varepsilon\}\xrightarrow[t\to t_0]{}0$.

Випадковий процес називають неперервним у середньоквадратичному, якщо $M|x(t)-x(t_0)|^2\xrightarrow[t\to t_0]{}0$. Похідною процесу в середньоквадратичному (або СК-похідною) називають

$$\underset{\Delta t\to 0}{l.i.m.}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}.$$

Границю в цьому випадку розуміємо знов у середньоквадратичному, тобто $M\left|\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}-\frac{dx}{dt}\right|^2 \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} 0$. Слід звернути увагу на те, що, незважаючи на наявність квадрата, у формулі присутній знак модуля – процес може мати комплексні значення!

Наведемо умови СК-неперервності й СК-диференційовності, оскільки саме такий вид збіжності використовується найчастіше. Отже, процес називають СК-неперервним у тому і тільки тому випадку, коли $Mx(t)$ неперервна і $K_x[t_1,t_2]$ неперервна за двома змінними. Далі: процес має СК-похідну тоді і тільки тоді, коли $Mx(t)$ має похідну й існує $\frac{\partial^2 K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$ при $t_1=t_2$. Можна показати, що

$$K_{\frac{dx}{dt}}(t_1,t_2)=\frac{\partial^2 K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

Зауваження. Неперервність і наявність похідної випадкового процесу не збігається з властивостями його траєкторій! Далі наведемо відповідні приклади.

5.2.3. Доведемо, що процес Пуассона має такі властивості:

1. Процес є неперервним і навіть має похідну, що дорівнює 0, за ймовірністю! Дійсно, для будь-якого числа $\varepsilon>0$ імовірність випадкової події дорівнює $P\left\{\left|\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}-0\right|>\varepsilon\right\}=P\{|x(t+\Delta t)-x(t)|>\varepsilon|\Delta t|\}=$ (ліворуч – кількість подій на відрізку, як відомо, вона має розподіл Пуассона, а праворуч – маленьке додатне число, отже, така подія виконується у тому випадку, коли випадкова величина просто не дорівнює 0) $=1-P\{\xi=0\}=1-e^{-\lambda\Delta t}=\lambda\Delta t+o(\Delta t)\to 0$, коли $\Delta t\to 0$, що й треба було довести.

2. Процес буде неперервним у середньоквадратичному. Дійсно, $M(x(t+\Delta t)-x(t))^2=D\xi+(M\xi)^2=\lambda\Delta t+(\lambda\Delta t)^2 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ (тут ξ – кількість подій на відрізку, як відомо, ξ має розподіл Пуассона з параметром $\lambda\Delta t$). Зауважимо, що траєкторії пуассонівського процесу – «східці» – ніяк не є неперервними!

3. Похідної процесу у СК-змісті не існує. Дійсно,

$$M\left(\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\right)^2=\frac{1}{(\Delta t)^2}\left(\lambda\Delta t+\lambda^2\Delta t^2\right)\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}\infty.$$

5.2.4. Вінерівський процес не має СК-похідної, що безпосередньо випливає з вигляду кореляційної функції $K_w(t,s)=min\{t,s\}$. Але корисно проаналізувати також з боку означення: $\frac{w(t+\Delta t)-w(t)}{\Delta t}$ є гауссівською випадковою величиною з нульовим математичним сподіванням, отже,

$$M\left(\frac{w(t+\Delta t)-w(t)}{\Delta t}\right)^2=\frac{1}{(\Delta t)^2}D(w(t+\Delta t)-w(t))=\frac{\Delta t}{(\Delta t)^2}\xrightarrow[t\to 0]{}\infty.$$

5.3. Задачі для самостійного розв'язування

5.3.1. Знайти математичне сподівання й кореляційну функцію процесу $y(t)=\lambda_1 w_1(t)+\lambda_2 w_2(t)$.

5.3.2. Чому процес $w^2(t)$ не буде вінерівським?

5.3.3. Процес $B(t)=w(t)-tw(1)$ для $t\in[0,\ 1]$ називають броунівським містком. Знайти його кореляційну функцію. Довести, що величини $B(1-t)$ і $B(t)$ мають однаковий розподіл.

5.3.4. Довести, що для будь-якого однорідного неперервного у середньоквадратичному процесу з ортогональними приростами виконуються рівності: 1) $Dx(t)=\sigma^2 t$; 2) $K_x(s,t)=\sigma^2 \min\{s,t\}$.

5.3.5. Нехай $X(t),\ t\ \geq\ 0$ – процес Пуассона з параметром λ. Довести, що процес $Y(t)=X(t+1)-X(t),\ t\geq 1$ є стаціонарним.

5.3.6. Довести, що дисперсія випадкового процесу $x(n)=w(1)+w(2)+\ldots+w(n)$ дорівнює $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\sigma^2$.

5.3.7. Записати щільність розподілу величини $w(t)+w(s)$.

5.3.8. Розглянемо випадковий процес $y(t)=(-1)^{X(t)}$, де $X(t),\ t\ \geq\ 0$ – процес Пуассона із параметром λ. Довести, що $P\{y(t)=1\}=e^{-\lambda t}cht$, $P\{y(t)=-1\}=e^{-\lambda t}sht$. Довести, що $My(t)=e^{-2\lambda t}$, $K_y(t,s)=2e^{-2\lambda t}sh2\lambda s$, якщо $s<t$.

5.3.9. Знайти математичне сподівання й кореляційну функцію процесів $N(t)-\frac{t}{c}N(c)$ і $\frac{N(t)}{t}$, де $0\leq t\leq c$.

5.3.10. Довести, що для процесу $x(t)=N(t^2)-t^2N(1)$, $t\in[0,\ 1]$ виконано $P\{x(t)>0|N(t)=1|\}=t^2$. Знайти кореляційну функцію для моментів часу $t=0{,}25,\ \ s=0{,}5$.

5.3.11. Розглянемо два незалежні процеси Пуассона. Чому $N_1(t)-N_2(t)$ не є процесом Пуассона?

5.3.12. Знайти розподіл випадкової величини $N(t)-N(s)$.

5.3.13. Довести, що $N^2(n)$ – ланцюг Маркова, знайти перехідні ймовірності.

5.3.14. Знайти коефіцієнт кореляції між $w(t)$ і $w\left(t^2\right)$.

5.3.15. Знайти $D[w(t)-2w(s)]$ для $0 \le t \le s$.

5.3.16. Для процесу $w(t)+w\left(t^2\right)$ знайти математичне сподівання й кореляційну функцію.

5.3.17. Пояснити, чому процес $|w(t)|$ не є гауссівським.

5.3.18. Нехай $x(0)=0$, $Mx(t)=mt$, $K_x(t,s)=2t+m^2t(t+s)$. Знайти дисперсію процесу $y(t)=x(t)-mt$.

5.3.19. Довести, що $My(t)=1$, якщо $y(t)=t^{-1}w^2(t)$, а $\sigma=1$.

5.3.20. Знайти розподіл випадкової величини $x(1)+x(2)$, де
$$x(t)=e^{-t}w\left(e^{2t}\right).$$

5.3.21. Нехай ξ – випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на відрізку $[0,\ 1]$. Довести, що випадковий процес $x(t)=e^{\xi}t$ не є процесом із незалежними приростами і що $Mx(t)=t(e-1)$, $K(t,s)=ts\frac{\left(e^2-1\right)}{2}-ts(e-1)^2$.

5.3.22. Нехай $x(t)$ – процес Пуассона. Знайти $Mx^2(t),\ M(x(t)-x(s))^2$. Нехай ξ – момент надходження n-ї точки. Знайти математичне сподівання й дисперсію ξ. Ускладнене завдання: знайти умовний розподіл $P\{x(t-d)=k|\ x(t)=j\},\ d>0$.

5.3.23. Знайти математичне сподівання й дисперсію процесу $y(t)=\int_0^t w(u)du$.

5.3.24. Користуючись нерівністю Чебишова, довести, що вінерівський процес є неперервним за ймовірністю.

5.3.25. Нехай $x(t),\ y(t)$ – незалежні один від одного стаціонарні процеси з незалежними приростами. Довести, що їх сума теж є стаціонарним процесом з незалежними приростами.

6. МАРТИНГАЛИ

6.1. Теоретичний матеріал

Випадковий процес із дискретним часом $\{X_0, X_1, ...\}$ і множиною станів S, що задовольняє умову $M|X_n| < \infty$, називають *мартингалом*, якщо для будь-якого вектора $(x_0, ..., x_n)$, де $x_i \in S$, виконується рівність

$$M(X_{n+1} | X_n = x_n, ..., X_0 = x_0) = x_n.$$

Інший вигляд означення:

$$M(X_{n+1} | X_n, ..., X_0) = X_n \text{ або } M(X_{n+1} - X_n | X_n = x_n, ..., X_0 = x_0) = 0.$$

Стохастичний процес із неперервним часом і скінченним $M|X| < \infty$ називають мартингалом, якщо для будь-якого $s < t$ виконано $M(X(t) | X(u), u \le s) = X(s)$. Відомо, що для мартингалів математичне сподівання є сталою величиною, тобто

$$MX_{n+1} = MX_n = MX_0.$$

6.2. Приклади розв'язання задач

Під час розв'язування прикладів на мартингали основним є застосування деяких властивостей умовного математичного сподівання. Нагадаємо, що $M(X|Y) = MX$, якщо випадкова величина X не залежить від випадкової величини Y. Також надзвичайно корисно згадати, що випадкову величину, що є функцією від Y, можна виносити за знак умовного математичного сподівання відносно Y: $M(Xf(Y)|Y) = f(Y)M(X|Y)$.

6.2.1. Розглянемо послідовність випадкових величин $Y_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_1 + ... + X_n}$, де незалежні величини X_n мають однаковий розподіл $P\{X_n = 1\} = p, \quad P\{X_n = -1\} = 1 - p$. Доведемо, що Y_n – мартингал. Дійсно,

$$M\left(Y_{n+1} \middle| Y_1, ..., Y_n\right) = M\left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_1 + ... + X_{n+1}} \middle| Y_1, ..., Y_n\right) =$$

$$= M\left(Y_n \left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_{n+1}} \middle| Y_1, ..., Y_n\right) = Y_n M\left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_{n+1}}.$$

Залишається перевірити, що

$$M\left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_n}=\left(\frac{1-p}{p}\right)p+\left(\frac{1-p}{p}\right)^{-1}(1-p)=1.$$

6.2.2. Доведемо, що будь-який процес із незалежними приростами й умовами $x(0)=0$ і $Mx(t)=0$ буде мартингалом. Дійсно, знайдемо умовне математичне сподівання

$$M(x(t)-x(s)+x(s)-x(0)|x(s))=M(x(t)-x(s)|x(s))+M(x(s)=x(s))=$$
$$=M(x(t)-x(s))+M(x(s)|x(s))=0+x(s),$$ що й треба було довести.

6.3. Задачі для самостійного розв'язування

6.3.1. Чи утворює мартингал сума $X_n=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2$, доданки якої є незалежними величинами з розподілом $N(0,1)$?

6.3.2. За яких умов відносно T добуток незалежних величин $Y_1...Y_n$ утворює мартингал, якщо множники мають рівномірний розподіл на відрізку $[0,T]$?

6.3.3. Нехай $Y_i=e^{Z_i}$, де Z_i – величини, що мають розподіл $N(\mu,\sigma^2)$. Перевірити, що послідовність $X_n=Y_1...Y_n$ утворює мартингал, якщо $\sigma^2=-2\mu$.

6.3.4. Кожного тижня прибуток інвестора зростає на одну одиницю з імовірністю $p>0{,}5$ і спадає на одну одиницю з імовірністю $1-p$. Нехай N – випадкова величина – момент часу, коли сумарний прибуток вперше досягне величини n. Довести, що $MN=\frac{n}{2p-1}$.

6.3.5. Нехай $S_n=X_1+...+X_n$. Довести, що послідовність $Z_n=\left(\frac{q}{p}\right)^{2S_n-n}$ утворює мартингал, якщо $P\{X_n=1\}=p,\quad P\{X_n=0\}=q$.

6.3.6. Довести, що послідовність $\frac{e^{\theta S_n}}{(\varphi(\theta))^n}$ утворює мартингал, якщо $S_n=X_1+...+X_n$, а $\phi(\theta)=Me^{\theta X_i}$.

6.3.7. Довести, що послідовність S_n^2-n утворює мартингал, якщо $S_n=X_1+...+X_n$, а $P\{X_n=1\}=P\{X_n=-1\}=0{,}5$.

6.3.8. Довести, що послідовність $Z_n=(-1)^n\cos\pi X_n$ утворює мартингал, якщо $P\{X_n=1\}=P\{X_n=-1\}=0{,}5$.

6.3.9. Довести, що для процесу з незалежними приростами й умовами $x(0)=0$, $Mx(t)=0$, $M(x(t)-x(s))^2=F(t)-F(s)$ випадковий процес $x^2(t)-F(t)$ буде мартингалом.

6.3.10. Довести, що процеси $w^2(t)-t$ і $N(t)-\lambda t$ – мартингали.

6.3.11. Величина X_0 має рівномірний розподіл на відрізку $[0,T]$, величина X_1 має рівномірний розподіл на $[0,X_0]$ і т.д. Довести, що послідовність X_n утворює супермартингал.

6.3.12. Ланцюг Маркова має ймовірності переходів $p_{ij}=C_n^j\left(\frac{i}{n}\right)^j\left(1-\frac{i}{n}\right)^{n-j}$. Переконатись у тому, що послідовність X_n утворює мартингал.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов / А.Д. Вентцель. – М. : Наука, 1975. – 320 с.

Вентцель Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М. : Наука,1991. – 384 с.

Волков И.К. Случайные процессы / И.К. Волков, С.М. Зуев, Г.М. Цветкова. – М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 448 с.

Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – М. : Наука, 1987. – 336 с.

Миллер Б.М. Теория случайных процессов в примерах и задачах / Б.М. Миллер, А.Р. Панков. – М. : Физматлит, 2002. – 320 с.

Практичний курс вищої математики : навч. посіб. для вузів : у 4 кн. / І.В. Брисіна, О.В. Головченко, Г.І. Кошовий та ін.; під заг. ред. О.Г. Ніколаєва, В.С. Проценка, В.О. Рвачова. – Х. : Нац. аерокосм. ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2004. – 1043 с.

Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика / Ю.А. Розанов. – М. : Наука, 1985. – 320 с.

Сборник задач по математике для втузов. Специальные курсы / под ред. А.В. Ефимова. – М. : Наука, 1990. – 608 с.

Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / под ред. А.А. Свешникова. – М. : Наука, 1970. – 656 с.

ЗМІСТ

Брисіна Ірина Вікторівна

Макарічев Віктор Олександрович

ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

Редактор Т. О. Іващенко

Зв. план, 2009
Підписано до друку 28.05.2009
Формат 60×84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк
Ум. друк. арк. 2. Обл.-вид. арк. 2,25. Наклад 200 прим.
Замовлення 209. Ціна вільна

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http: //www. khai. Edu
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu