МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

С.М. Вознюк, Ю.А. Щербакова

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2010

УДК 519.6

Вознюк С. М. Числові методи системного аналізу : навч. посіб. / С. М. Вознюк, Ю. А. Щербакова. – Х. : Нац. аерокосм. ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2010. – 88 с.

Викладено теоретичні відомості з деяких принципових питань числового аналізу, що є частиною відповідного курсу. Теореми супроводжуються докладними доведеннями. Читач має знати диференціальне й інтегральне числення, а також основи функціонального аналізу.

Для студентів, що навчаються за фахом „Системний аналіз і керування”. Може бути використаний також студентами інших спеціальностей, інженерами й аспірантами.

Бібліогр.: 4 назви

Рецензенти: канд фіз.-мат. наук, доц. В.О. Афанасьєв,
канд. техн. наук, доц. В.В. Бізюк

ЗМІСТ

ВСТУП

Розв'язання багатьох задач, що так чи інакше пов'язані із системним аналізом, неможливе без застосування числових методів. Числові методи зазвичай передбачають, що складний математичний об'єкт позбавляється певних своїх властивостей, і замість нього розглядається фактично інший об'єкт. Цю заміну часто називають дискретизацією. Дискретизація складається з двох етапів. На першому етапі з математичної точки зору відбувається заміна нескінченновимірних компактів скінченновимірними, тобто, з точністю до ізоморфізму, компактами з R^n. Другий етап передбачає кодування елементів скінченновимірних компактів за допомогою скінченної кількості бітів.

Залишаючи поза розглядом складні питання другого етапу (виклад цих питань міститься в монографії [1]), зосередимо увагу на математичних питаннях першого, що традиційно відносять до теорії наближення функцій. Належний розгляд цих питань неможливий без застосування функціональних просторів. Найбільш поширеними є простори неперервних і сумованих із квадратом функцій. У першому розділі посібника викладено результати теорії наближення в просторах неперервних функцій, що стосуються побудови елементів найкращого наближення.

Другий розділ присвячено теорії інтерполяції, яка не тільки є зручним засобом наближення, але й набуває великого значення при роботі з функціями, заданими таблично. Задача інтерполяції полягає в заміні однієї функції іншою за умови однаковості значень цих функцій (а в певних випадках також значень похідних) у певному наборі точок. Інтерполювальна функція найчастіше є многочленом, тригонометричним многочленом або сплайном. При цьому великого значення набуває задача вибору точок інтерполяції, що є водночас важливим питанням теорії табуляції. Для повноти викладу розглянуто також питання про різноманітні форми інтерполяційних многочленів.

Безпосередньо пов'язану із двома попередніми питаннями теорію побудови квадратурних формул викладено в третьому розділі. Разом із формулою Ньютона – Котеса та її частинними випадками розглядаються гаусові квадратури (у тому числі із довільною ваговою функцією).

Розділ 1. РІВНОМІРНЕ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

В обчислювальній практиці виникають ситуації, коли складну функцію *f(x)*, задану на деякому проміжку [*a,b*], треба замінити на іншу, простішу в обчисленнях функцію φ*(x),* таку, що значення функції φ*(x)* відрізняються від значень функції *f(x)* на всьому проміжку [*a,b*] не більше, ніж на ε. Очевидно, що при заданій функції *f(x)* і заданій точності ε бажано вибрати функцію φ*(x)* так, щоб вона була найбільш зручною для обчислень. Крім того, може виникнути потреба у відшуканні такої функції φ*(x)*, що належить до певного класу функцій, яка в певному розумінні найкраще наближає *f(x)*. Тому під час розгляду питання про рівномірне наближення функцій виникають такі задачі:

1. Задано *R* – клас функцій, визначених на деякому проміжку [*a, b*] і деяку підмножину $\overline{R}$ функцій цього класу. Для заданої функції $f(x)\in R$ і заданого числа ε > 0 треба знайти таку функцію $\varphi(x)\in \overline{R}$, щоб виконувалася нерівність

$$| f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

для всіх $x\in [a, b]$. Зазвичай за R беруть множину неперервних функцій на деякому проміжку (або множину неперервних періодичних функцій), а за $\overline{R}$ – деяку множину алгебраїчних многочленів (або множину тригонометричних многочленів).

2. Для заданої функції $f(x)\in R$ треба знайти функцію $\varphi_0(x)\in \overline{R}$, для якої виконується рівність

$$\max_{x\in[a,b]} | f(x) - \varphi_0(x)| = \inf_{\varphi(x)\in \overline{R}} \max_{x\in[a,b]} | f(x) - \varphi(x) |.$$

Якщо така функція $\varphi_0(x)$ існує, то її називають *функцією найкращого рівномірного наближення для f(x)* у класі $\overline{R}$.

Якщо *R* – множина неперервних функцій на проміжку [*a,b*] (або множина неперервних періодичних функцій), а $\overline{R}$ – множина алгебраїчних многочленів (або множина тригонометричних многочленів), то відповідь на питання про розв’язуваність задачі 1 дають теореми Вейєрштрасса.

1.1. Рівномірне наближення функцій класу C[*a,b*]

Розглянемо питання про рівномірне наближення функцій, неперервних на проміжку [*a,b*], алгебраїчними многочленами.

Теорема 1 (перша теорема Вейєрштрасса). Якщо $f(x) \in C[a,b]$, то для будь-якого ε>0 існує такий алгебраїчний многочлен P(x), що для всіх $x \in [a,b]$ виконується нерівність $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ **.**

Доведення. Спочатку доведемо дві леми й теорему Бернштейна.

Лема 1. Правильними є такі тотожності:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1; \qquad (1.1)$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x). \qquad (1.2)$$

Доведення. Запишемо формулу бінома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

При $a = x$, $b = 1 - x$ одержимо формулу (1.1).

Доведемо тепер тотожність (1.2). Зауважимо, що при $x = 0$ і $x = 1$ тотожність очевидна. Тому доведемо її при $x \neq 0, x \neq 1$. Візьмемо похідну від тотожності (1.1) і одержимо

$$\sum_{k=1}^{n} k C_n^k x^{k-1} (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} (n-k) C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} = 0.$$

При $x \neq 0$ і $x \neq 1$ маємо

$$\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - \frac{1}{1-x}\sum_{k=0}^{n} (n-k) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 0,$$

або $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x}\right)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \dfrac{n}{1-x}\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.

Якщо врахувати тотожність (1.1), то

$$\sum_{k=1}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx. \qquad (1.3)$$

Здиференціюємо рівність (1.3) і отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k x^{k-1} (1-x)^{n-k} - \sum_{k=1}^{n} k(n-k) C_n^k x^k (1-x)^{n-k-1} = n,$$

або $\dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - \dfrac{1}{1-x}\sum_{k=1}^{n} k(n-k) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = n$,

звідки

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{n}{1-x}\sum_{k=1}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + n.$$

З урахуванням (1.3) маємо

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = n^2x^2 + nx(1-x). \tag{1.4}$$

Запишемо ліву частину тотожності (1.2) у вигляді

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - 2nx\sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^k (1-x)^{n-k} + n^2x^2 \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Урахувавши (1.1), (1.3) і (1.4), маємо

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = n^2x^2 + nx(1-x) - 2n^2x^2 + n^2x^2 = nx(1-x).$$

Лему доведено.

Із тотожності (1.2) випливає, що при $x \in [0,1]$ виконується нерівність

$$0 \le \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{n}{4}. \tag{1.5}$$

Справді, ліва частина нерівності очевидна, а права – випливає з того, що функція $x(1-x)$ набуває максимального значення $\frac{1}{4}$ при $x = \frac{1}{2}$.

Нехай задано число $\delta > 0$. Позначимо через $N_\delta(x)$ множину значень індексу k (k = 0,1,…,n), для яких виконується нерівність

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| \ge \delta, \tag{1.6}$$

де x – фіксоване число, $x \in [0,1]$.

Лема 2. Для будь-якого $x \in [0,1]$ виконується нерівність

$$\sum_{k \in N_\delta(x)} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Доведення. Зазначимо спочатку, що із (1.6) випливає нерівність

$$\frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2} \ge 1.$$

Урахувавши одержану нерівність і нерівність (1.5), маємо

$$\sum_{k \in N_\delta(x)} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le \sum_{k \in N_\delta(x)} \frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le$$

$$\leq \frac{1}{n^2\delta^2} \sum_{k \in N_\delta(x)} (k - nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^2\delta^2} \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{n^2\delta^2} \frac{n}{4} = \frac{1}{4n\delta^2},$$

що й треба було довести. Лему доведено.

Розглянемо многочлен степеня n $B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$, який називають многочленом Бернштейна.

Теорема 2 (теорема Бернштейна). Якщо $f(x) \in C[0, 1]$, то $\lim_{n\to\infty} B_n(f;x) = f(x)$ рівномірно для всіх $x \in [0,1]$.

Доведення. Згідно з тотожністю (1.1) маємо

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

тому

$$B_n(f;x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

$$\left| B_n(f;x) - f(x) \right| \leq \sum_{k=o}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Із неперервності функції $f(x)$ на проміжку [0, 1] випливає її рівномірна неперервність на цьому проміжку. Тобто для будь-якого $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-яких $x', x'' \in [0,1]$ виконується нерівність $\left| f(x') - f(x'') \right| < \frac{\varepsilon}{2}$, як тільки $\left| x' - x'' \right| < \delta$.

Нехай $x' = \frac{k}{n}, x'' = x$, тоді для будь-якого $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ існує таке $\delta > 0$, що $\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$, як тільки $\left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta$.

Нехай для заданого $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ і фіксованого $x \in [0,1]$ знайдено таке $\delta > 0$, що для тих значень індексу k, для яких $\left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta$, правильною є нерівність $\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. Множину значень індексу k, для яких $\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta$, позначимо через $M_\delta(x)$, а для яких $\left|\frac{k}{n}-x\right|\ge\delta$ – через $N_\delta(x)$.

Тоді

$$|B_n(f;x)-f(x)|\le S_1+S_2,$$

$$S_1=\sum_{k\in M_\delta(x)}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k},$$

$$S_2=\sum_{k\in N_\delta(x)}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}.$$

Знайдемо оцінки для S_1 і S_2. Для S_1 одержуємо

$$S_1=\sum_{k\in M_\delta(x)}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}<$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in M_\delta(x)}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\le\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\frac{\varepsilon}{2},$$

тобто $S_1<\frac{\varepsilon}{2}$.

Якщо позначити $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$, то

$$S_2=\sum_{k\in N_\delta(x)}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\le$$

$$\le 2M\sum_{k\in N_\delta(x)}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\le 2M\frac{1}{4n\delta^2}=\frac{M}{2n\delta^2}.$$

Виберемо тепер n настільки великим, щоб виконувалася нерівність $\frac{M}{2n\delta^2}<\frac{\varepsilon}{2}$.

Нехай ця нерівність виконується при $n>N$. Тоді при $n>N$

$$|B_n(f;x)-f(x)|\le S_1+S_2<\frac{M}{2n\delta^2}<\frac{\varepsilon}{2},$$

що й треба було довести. Теорему доведено.

З теореми Бернштейна випливає теорема Вейєрштрасса для функцій $f(x)\in C[0,1]$.

Доведемо теорему Вейєрштрасса. Нехай $f(x)\in C[a,b]$. Зробимо заміну $x=a+(b-a)t$. Тоді $f(a+(b-a)t)\equiv g(t)\in C[0,1]$. Тому за теоремою Бернштейна для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий алгебраїчний многочлен P(t), що $\left| g(t) - P(t) \right| < \varepsilon$ для всіх $t \in [0,1]$.

Зробимо обернену заміну $t = \dfrac{x-a}{b-a}$. Одержимо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий алгебраїчний многочлен $P\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$, що виконується умова $\left| f(x) - P\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)\right| < \varepsilon$ для всіх $x \in [a,b]$.

Теорему Вейєрштрасса доведено.

Розглянемо тепер питання про швидкість збіжності многочленів Бернштейна до функції $f(x)$.

Теорема 3. Якщо функція $f(x) \in C[0,\,1]$ і задовольняє на проміжку [0, 1] умову Ліпшиця зі сталою L, тобто для будь-яких $x', x'' \in [0,1]$ виконується умова $\left| f(x') - f(x'')\right| \le L\left| x' - x''\right|$, то $\left| B_n(f;x) - f(x)\right| \le \dfrac{L}{2\sqrt{n}}$.

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ на проміжку [0,1] задовольняє умову Ліпшиця, то

$$\left| B_n(f;x) - f(x)\right| \le \sum_{k=0}^{n}\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le L \sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n} - x\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \frac{L}{n}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{(k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}}\sqrt{C_n^k x^k (1-x)^{n-k}}\,.$$

Використовуючи нерівність

$$\sum_{k=0}^{n}\sqrt{c_k}\sqrt{d_k} \le \sqrt{\sum_{k=0}^{n} c_k}\sqrt{\sum_{k=0}^{n} d_k} \quad (c_k \ge 0,\ d_k \ge 0),$$

яка є окремим випадком нерівності Гьольдера

$$\sum_{k=0}^{n}\left| a_k b_k\right| \le \left(\sum_{k=0}^{n}\left| a_k\right|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=0}^{n}\left| b_k\right|^q\right)^{1/q}$$

при $p = q = 2$ і $a_k = \sqrt{c_k}$, $b_k = \sqrt{b_k}$, отримуємо

$$\left| B_n(f;x) - f(x)\right| \le \frac{L}{n}\sqrt{\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}}\sqrt{\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}} \le$$

$$\le \frac{L}{n}\sqrt{\frac{n}{4}} = \frac{L}{2\sqrt{n}}\,,$$

що й треба було довести.

Із теореми випливає, що швидкість збіжності многочленів Бернштейна є повільною. Саме це і є недоліком многочленів Бернштейна як апарату наближення. Можна показати, що швидкість збіжності многочленів Бернштейна не більша за $\frac{1}{n}$.

1.2. Рівномірне наближення неперервних періодичних функцій

Розглянемо тепер питання про рівномірне наближення функцій $f(x)$, які є неперервними й періодичними з періодом 2π $\left(f(x)\in C_{2\pi}\right)$ тригонометричними многочленами вигляду

$$T(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Теорема 1 (друга теорема Вейєрштрасса). Якщо $f(x)$ – неперервна періодична функція з періодом 2π, то для будь-якого $\varepsilon>0$ існує такий тригонометричний многочлен T(x), що для всіх $x\in(-\infty,\infty)$ виконується нерівність $|f(x)-T(x)|<\varepsilon$.

Доведення. Спочатку доведемо три леми та теорему Валле Пуссена.

Лема 1. Якщо $\varphi(x)\in C_{2\pi}$, то

$$\int_a^{a+2\pi}\varphi(x)dx=\int_0^{2\pi}\varphi(x)dx.$$

Доведення. Подамо $\int_a^{a+2\pi}\varphi(x)dx$ у вигляді

$$\int_a^{a+2\pi}\varphi(x)dx=\int_a^{0}\varphi(x)dx+\int_0^{2\pi}\varphi(x)dx+\int_a^{a+2\pi}\varphi(x)dx.$$

В інтегралі $\int_a^{a+2\pi}\varphi(x)dx$ виконаємо заміну $x=t+2\pi$:

$$\int_a^{a+2\pi}\varphi(x)dx=-\int_0^{a}\varphi(t+2\pi)dt=\int_0^{a}\varphi(t)dt,$$

тоді $\int_a^{a+2\pi}\varphi(x)dx=-\int_0^{a}\varphi(x)dx+\int_0^{2\pi}\varphi(x)dx+\int_0^{a}\varphi(t)dt=\int_0^{2\pi}\varphi(x)dx.$

Лему доведено.

Лема 2. Правильною є тотожність $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}tdt=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$.

Доведення. Позначимо $u_{2n} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} t d(\sin t)$.

Тоді, інтегруючи частинами, отримуємо

$$u_{2n} = \sin t \cos^{2n-1} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} t \sin^2 t\, dt =$$

$$= ... = (2n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} t dt - (2n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t dt\,,$$

тобто $u_{2n} = (2n-1)u_{2n-2} - (2n-1)u_{2n}$. Звідси $u_{2n} = \dfrac{2n-1}{2n} u_{2n-2}$, тому

$$u_{2n} = \frac{2n-1}{2n} u_{2n-2} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)} u_{2n-4} = ... =$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-3)...3 \cdot 1}{2n(2n-2)...4 \cdot 2} u_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} u_0\,.$$

Оскільки $u_0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \dfrac{\pi}{2}$, то $u_{2n} = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}$. Лему доведено.

Лема 3. Добутком двох тригонометричних многочленів $T_n(x)$ і $Q_m(x)$ відповідно порядку n і m з дійсними коефіцієнтами є тригонометричний многочлен порядку $n+m$.

Доведення. Нехай

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,,$$

$$Q_m(x) = c_0 + \sum_{s=1}^{m} (c_s \cos sx + d_s \sin sx)\,.$$

Оскільки це многочлени відповідно порядку n і m, то

$$a_n^2 + b_n^2 \neq 0, c_m^2 + d_m^2 \neq 0\,.$$

Розглянемо добуток $T_n(x) Q_m(x)$:

$$T_n(x)Q_m(x)=a_0c_0+a_0\sum_{s=1}^{m}(c_s\cos sx+d_s\sin sx)+c_0\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}a_kc_s\cos kx\cos sx+\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}a_kd_s\cos kx\sin sx+\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}b_kc_s\sin kx\cos sx+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}b_kd_s\sin kx\sin sx.$$

Застосовуючи формули тригонометричних функцій, можна показати, що добуток $T_n(x)Q_m(x)$ є тригонометричним многочленом і його порядок визначається множником

$$R(x)=(a_n\cos nx+b_n\sin nx)(c_m\cos mx+d_m\sin mx)=$$
$$=\frac{1}{2}a_nc_m\cos(n+m)x-\frac{1}{2}a_nd_m\sin(n+m)x+$$
$$+\frac{1}{2}b_nc_m\sin(n+m)x-\frac{1}{2}b_nd_m\cos(n+m)x+r(x),$$

де *r(x)* містить члени нижчого, ніж *n+m* порядку. Звідси

$$R(x)=\frac{1}{2}(a_nc_m-b_nd_m)\cos(n+m)x+\frac{1}{2}(a_nd_m+b_nc_m)\sin(n+m)x+r(x).$$

Оскільки $(a_nc_m-b_nd_m)^2+(a_nd_m+b_nc_m)^2=(a_n^2+b_n^2)(c_m^2+d_m^2)\neq 0$, то *R(x)*, а отже, і добуток $T_n(x)Q_m(x)$ є тригонометричним многочленом порядку *n* + *m*. Лему доведено.

Зауваження 1. Якщо коефіцієнтами тригонометричних многочленів є комплексні числа, то лема не є правильною. Справді, наприклад,

$$(\cos x+i\sin x)(\cos x-i\sin x)=\cos^2 x+\sin^2 x=1.$$

Розглянемо сингулярний інтеграл Валле Пуссена

$$V_n(f;x)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos^{2n}\frac{t-x}{2}dt.$$

Теорема 2 (теорема Валле Пуссена). Якщо $f(x)\in C_{2\pi}$, то $\lim_{n\to\infty}V_n(f;x)=f(x)$ рівномірно для всіх $x\in(-\infty,+\infty)$.

Доведення. В інтегралі $V_n(f;x)$ виконаємо заміну $t=x+u$:

$$V_n(f;x)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+u)\cos^{2n}\frac{u}{2}du.$$

Використовуючи лему 1, можна записати

$$V_n(f;x)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+u)\cos^{2n}\frac{u}{2}du.$$

Якщо тепер зробити заміну $u=2t$, то

$$V_n(f;x)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2t)\cos^{2n} t dt.$$

Зобразимо $V_n(f;x)$ у вигляді суми двох інтегралів

$$V_n(f;x)=V_n^{(1)}(f;x)+V_n^{(2)}(f;x),$$

де

$$V_n^{(1)}(f;x)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x+2t)\cos^{2n} t dt;$$

$$V_n^{(2)}(f;x)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x+2t)\cos^{2n} t dt .$$

В інтегралі $V_n^{(1)}(f;x)$ зробимо заміну t на $-t$:

$$V_n^{(1)}(f;x)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x-2t)\cos^{2n} t dt .$$

Тепер $V_n(f;x)$ запишемо у такому вигляді:

$$V_n(f;x)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (f(x-2t)+f\left(x+2t\right))\cos^{2n} t dt .$$

Із леми 2 випливає, що $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n} t dt=1$, тому $f(x)$ можна подати так:

$$f(x)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2f(x)\cos^{2n} t dt.$$

Далі одержуємо

$$V_n(f;x)\text{-}f(x)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (f(x-2t)+f\left(x+2t\right)-2f(x))\cos^{2n} t dt,$$

або

$$|V_n(f;x)-f(x)|\le\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} |(f(x-2t)+f\left(x+2t\right)-2f(x))|\cos^{2n} t dt .$$

Оскільки $f(x)$ є неперервною й періодичною з періодом 2π функцією, то $f(x)$ є рівномірно-неперервною функцією для всіх $x \in (-\infty;\infty)$. Тому для будь-якого $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ існує таке $\delta > 0$, що

$$|f(x-2t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}, |f(x+2t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

як тільки $|x-2t-x|=|2t|<2\delta, |x+2t-x|=|2t|<2\delta$.

Оскільки

$$|f(x-2t)+f(x+2t)-2f(x)|=|(f(x-2t)-f(x))+(f(x+2t)-f(x))|\leq$$
$$\leq|f(x-2t)-f(x)|+|f(x+2t)-f(x)|,$$

то для будь-якого $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ існує таке $\delta > 0$, що $|f(x-2t)+f(x+2t)-2f(x)|<\varepsilon$, як тільки $|t|<\delta$. Припустимо, що для заданого $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ знайдено таке $\delta > 0$, що $|f(x-2t)+f(x+2t)-2f(x)|<\varepsilon$, як тільки $|t|<\delta$. Розіб'ємо проміжок інтегрування $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ на два проміжки $[0,\delta]$ і $\left[\delta,\frac{\pi}{2}\right]$ і позначимо $M=\max|f(x)|$.

Тоді

$$|V_n(f;x)-f(x)|\leq\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}|f(x-2t)+f(x+2t)-2f(x)|\cos^{2n}tdt+\right.$$
$$\left.+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|f(x-2t)+f(x+2t)-2f(x)|\cos^{2n}tdt\right)\leq$$
$$\leq\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\pi}\left(\varepsilon\int_0^b\cos^{2n}tdt+4M\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}tdt\right).$$

Оскільки

$$\int_0^b\cos^{2n}tdt<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}tdt=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2},\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}tdt<\frac{\pi}{2}\cos^{2n}\varepsilon,\quad \varepsilon\in\left(\delta,\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = 2n\frac{(2n-2)(2n-4)\ldots 2}{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1} < 2n,$$

то, позначивши $\cos^2\varepsilon = q$, одержуємо $|V_n(f;x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + 4Mnq^n$.

Оскільки $\varepsilon \in \left(\delta, \frac{\pi}{2}\right)$, то 0 < q < 1, тому $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$.

Звідси випливає, що для заданого $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ існує такий номер N, що при $n > N$ виконуються нерівності

$$4Mnq^n < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |V_n(f;x) - f(x)| < \varepsilon,$$

що й треба було довести, оскільки N не залежить від значення x. Теорему доведено.

Покажемо тепер, що інтеграл Валле Пуссена є тригонометричним многочленом n-го порядку. Подамо $V_n(f;x)$ у вигляді

$$V_n(f;x) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1+\cos(t-x)}{2}\right)^n dt,$$

тоді

$$V_n(f;x) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(1+\cos t\cos x + \sin t\sin x)^n dt.$$

Оскільки $(2n)!! = 2^n\cdot n!$, то, використовуючи лему 3, одержуємо

$$V_n(f;x) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(1 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k(t)\cos kx + \beta_k(t)\sin kx)\right)dt,$$

або

$$V_n(f;x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx),$$

де $\quad a_0 = \frac{n!}{(2n-1)!}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt; \quad a_k = \frac{n!}{(2n-1)!}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\alpha_k(t)dt;$

$$b_k = \frac{n!}{(2n-1)!}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\beta_k(t)dt.$$

Оскільки інтеграл Валле Пуссена є тригонометричним многочленом n-го порядку, то теорему Валле Пуссена можна вважати доведенням другої теореми Вейєрштрасса.

Зауваження 2. У літературі наводяться й інші підходи до доведення другої теореми Вейєрштрасса.

Розглянемо тепер інший підхід до питання наближення. Функції $f(x) \in C_{2\pi}$ можемо поставити у відповідність ряд Фур'є

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

де

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx.$$

Якщо ряд рівномірно збігається, то для наближення функції $f(x)$ можна використати часткові суми цього ряду

$$S_m(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Таким чином, якщо $f(x) \in C_{2\pi}$ розвивається в рівномірно збіжний ряд, то часткові суми цього ряду є наближеннями функції $f(x)$. Оскільки ці часткові суми є тригонометричними многочленами, то маємо всі підстави стверджувати, що рівномірно збіжний ряд Фур'є є джерелом одержання тригонометричних многочленів, які зображують функцію з будь-якою як завгодно високою точністю.

Водночас не кожна функція $f(x) \in C_{2\pi}$ розвивається в рівномірно збіжний ряд Фур'є. Для цього мають бути виконані певні умови. Існує низка ознак розвинення функції $f(x) \in C_{2\pi}$ у рівномірно збіжний ряд Фур'є. Однак усі вони не мають практичного застосування.

Отже, часткові суми $S_n(f;x)$ ряду Фур'є функції $f(x) \in C_{2\pi}$ можуть і не збігатися до цієї функції. Проте для будь-якої функції $f(x) \in C_{2\pi}$, використовуючи часткові суми $S_n(f;x)$ її ряду Фур'є, можна побудувати тригонометричні многочлени, які рівномірно збігаються до $f(x)$. Такими многочленами є так звані суми Фейєра.

Нехай $S_k(f;x)$ $(k = 0,1,\ldots,n-1)$ – часткові суми ряду Фур'є функції $f(x)$. Візьмемо

$$\sigma_n(f;x) = \frac{1}{n}\left(S_0(f;x) + S_1(f;x) + \ldots + S_{n-1}(f;x)\right).$$

Суми $\sigma_n(f;x)$ називають сумами Фейєра. Стосовно цих сум правдивою є така теорема.

Теорема 3 (теорема Фейєра). Якщо $f(x) \in C_{2\pi}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(f;x) = f(x)$ рівномірно збігається для всіх $x \in (-\infty;\infty)$.

Доведення. Для доведення теореми доведемо спочатку дві леми.

Лема 4. Має місце тотожність

$$\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\,.$$

Доведення. Із границі

$$\lim_{x\to 2\pi m}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}=2n+1\quad (m\in Z)$$

випливає, що тотожність є правдивою для $x=2\pi m$. Покажемо, що вона є правдивою й при будь-якому $x\neq 2\pi m$. Оскільки

$$\sin\frac{2n+1}{2}x=\sin\frac{1}{2}x+\left(\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{1}{2}x\right)+\left(\sin\frac{5}{2}x-\sin\frac{3}{2}x\right)+$$
$$+\ldots+\left(\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin\frac{2n-1}{2}x\right),$$

то

$$\sin\frac{2n+1}{2}x=\sin\frac{1}{2}x+2\cos x\sin\frac{1}{2}x+2\cos 2x\sin\frac{1}{2}x+\ldots+$$
$$+2\cos nx\sin\frac{1}{2}x=(1+2\cos x+2\cos 2x+\ldots+2\cos nx)\sin\frac{1}{2}x.$$

Звідси одержуємо потрібну тотожність. Лему доведено.

Лема 5. Правдивою є тотожність

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)x=\frac{\sin^2 nx}{\sin x}\cdot$$

Доведення. Із границі $\lim\limits_{x\to\pi m}\frac{\sin^2 nx}{\sin x}=0\quad (m\in Z)$ випливає, що тотожність є правдивою для $x=\pi m$. Покажемо, що тотожність є правдивою й при будь-якому $x\neq\pi m$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)x=\frac{1}{2\sin x}\sum_{k=0}^{n-1}(\cos 2kx-\cos(2k+2)x)=$$
$$=\frac{1}{2\sin x}(1-\cos 2x+\cos 2x-\cos 4x+\ldots+\cos 2(n-1)x-\cos 2nx)=$$
$$=\frac{1-\cos 2nx}{2\sin x}=\frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

Лему доведено.

Перейдемо до доведення теореми. Оскільки

$$S_n(f;x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos k\tau\cos kx+\sin k\tau\sin kx)\right)d\tau,$$

то

$$S_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos k(\tau-x))\right)d\tau.$$

Використовуючи лему 1, отримуємо

$$S_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\tau-x)}{2\sin\frac{\tau-x}{2}}d\tau=\left|\tau-x=2t\right|=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+2t)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt\,.$$

Ураховуючи знайдений вираз для $S_n(f;x)$, суми Фейєра запишемо у такому вигляді:

$$\sigma_n(f;x)=\frac{1}{\pi n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x+2t)\frac{1}{\sin t}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)tdt.$$

Ураховуючи лему 2, одержуємо

$$\sigma_n(f;x)=\frac{1}{\pi n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x+2t)\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x+2t)\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x+2t)\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}dt\right).$$

Замінивши в першому інтегралі t на $-\mathrm{t}$, маємо

$$\sigma_n(f;x)=\frac{1}{\pi n}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(f(x-2t)+f(x+2t))\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}dt.$$

Очевидно, якщо $f(x)\equiv 1$, то $S_0(f;x)\equiv S_1(f;x)\equiv\ldots\equiv S_n(f;x)$ і $\sigma_n(x)\equiv 1$, тому при $f(x)\equiv 1$ із останнього виразу для $\sigma_n(f;x)$ маємо

$$1=\frac{1}{\pi n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin^2 nt}{\sin^2 t}dt.$$

Звідси $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}dt=\frac{\pi n}{2}$ і $\displaystyle f(x)=\frac{1}{\pi n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2f(x)\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}dt.$

Тепер $\displaystyle\left|\sigma(f;x)-f(x)\right|\le\frac{1}{\pi n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|f(x-2t)+f(x+2t)-2f(x)\right|\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}dt$.

Із неперервності функції $f(x)\in C_{2\pi}$ випливає її рівномірна неперервність. Тому аналогічно, як при доведенні теореми Валле Пуссена, для будь-якого $\frac{\varepsilon}{2}>0$ існує таке $\delta>0$, що

$$|f(x-2t)+f(x+2t)-2f(x)|<\varepsilon,$$

як тільки $|t|<\delta$. Припустимо, що для заданого $\frac{\varepsilon}{2}>0$ знайдено таке $\delta>0$, що $|f(x-2t)+f(x+2t)-2f(x)|<\varepsilon$, як тільки $|t|<\delta$. Розіб'ємо проміжок інтегрування $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ на два проміжки $[0,\delta]$ і $\left[\delta,\frac{\pi}{2}\right]$ і позначимо $M=\max|f(x)|$.

Маємо $|\sigma_n(f;x)-f(x)|\le$

$$\le\frac{1}{\pi n}\left(\int_0^{\delta}|f(x-2t)+f(x+2t)-2f(x)|\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}dt+\right.$$

$$\left.+\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}}|f(x-2t)+f(x+2t)-2f(x)|\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}dt\right)<$$

$$<\frac{\varepsilon}{\pi n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}dt+\frac{4M}{n\pi\sin^2\delta}\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}}dt,$$

звідки

$$|\sigma_n(f;x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{n\sin^2\delta}.$$

Тоді для заданого $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ існує такий номер N, що при $n>N$ виконується нерівність $\frac{2M}{n \sin^2 \delta} < \frac{\varepsilon}{2}$ і $|\sigma_n(f;x) - f(x)| < \varepsilon$, що й треба було довести.

Суми Фур'є $S_n(f;x)$ функції $f(x)$ мають таку важливу властивість: при $n \geq m$ вони збігаються з функцією $f(x)$, якщо сама ця функція є тригонометричним многочленом m-го порядку. Суми Фейєра $\sigma_n(f;x)$ цієї властивості не мають, проте вони задовольняють нерівності

$$|\sigma_n(f;x)| \leq \max|f(x)|.$$

Для сум Фур'є аналогічна нерівність не виконується. Валле Пуссен побудував такі суми $\tau_n(f;x)$, для яких характерними є обидві властивості. Ці суми визначаються як

$$\tau_n(f;x) = \frac{1}{n}\left(S_n(f;x) + S_{n+1}(f;x) + \ldots + S_{2n-1}(f;x)\right)$$

і мають назву *„суми Валле Пуссена"*. Можна показати, що якщо $f(x) \in C_{2\pi}$, то суми Валле Пуссена для всіх $x \in (-\infty;\infty)$ рівномірно збігаються до функції $f(x)$.

1.3. Елемент найкращого наближення в лінійних нормованих просторах

Доведемо теорему про існування елемента найкращого наближення в лінійних нормованих просторах, на основі якої розглянемо питання про існування многочленів найкращого рівномірного наближення для функцій класу $C_{[a,b]}$.

Нехай R – деякий лінійний нормований простір, і елемент $f \in R$. Візьмемо в цьому просторі $n+1$ лінійно незалежних елементів $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ і утворимо $(n+1)$-вимірний лінійний підпростір $\bar{R}$ усіх можливих лінійних комбінацій

$$\Phi = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_n$$

з дійсними коефіцієнтами $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Позначимо

$$\Delta(f;\Phi) = \|f - \Phi\|.$$

Оскільки норма обмежена знизу нулем, то існує точна нижня межа значень $\Delta(f;\Phi)$. Нехай $\Delta(f) = \inf\limits_{\Phi \in \bar{R}} \Delta(f;\Phi)$. Виникає запитання, чи існує елемент $\Phi_0 \in \bar{R}$, для якого ця точна нижня межа досягається, тобто чи існує такий елемент $\Phi_0 \in \bar{R}$, для якого виконується рівність $\Delta(f) = \|f - \Phi_0\|$.

Кожний елемент $\Phi_0 \in \bar{R}$, для якого виконується ця рівність, називатимемо *елементом найкращого наближення* для f у $\bar{R}$.

Відповідь на запитання про існування елемента найкращого наближення дає така теорема.

Теорема 1. Для будь-якого елемента $f \in R$ у $\bar{R}$ існує елемент найкращого наближення.

Доведення. Уведемо позначення

$$q(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \|\Phi\| = \left\|\sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i\right\|;$$

$$h(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \|f - \Phi\| = \left\|f - \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i\right\|,$$

де f і Φ – будь-які елементи відповідно простору R і підпростору $\bar{R}$. Покажемо, що функції q і h є неперервними функціями в просторі змінних $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Розглянемо, наприклад, функцію $q(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. У просторі змінних $a_0, a_1, \ldots, a_n$ візьмемо точку $(a_0{*}, a_1{*}, \ldots, a_n{*})$ й оцінимо різницю

$$| q(a_0, a_1, \ldots, a_n) - q(a_0^*, a_1^*, \ldots, a_n^*) | = \left| \left\|\sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i\right\| - \left\|\sum_{i=0}^{m} a_i{*}\varphi_i\right\| \right|.$$

Зауважимо, що якщо f_1 і $f_2 \in R$, то правдивою є нерівність

$$\big| \|f_1\| - \|f_2\| \big| \le \|f_1 - f_2\|. \qquad (1.7)$$

Справді, згідно з властивістю норми

$\|f_1\| = \|f_2 + (f_1 - f_2)\| \le \|f_2\| + \|f_1 - f_2\|$, $\|f_2\| = \|f_1 + (f_2 - f_1)\| \le \|f_1\| + \|f_2 - f_1\|$.

Звідси $\|f_1\| - \|f_2\| \le \|f_1 - f_2\|$, $\|f_2\| - \|f_1\| \le \|f_1 - f_2\|$, або $\big| \|f_1\| - \|f_2\| \big| \le \|f_1 - f_2\|$.

Використовуючи нерівність (1.7), одержуємо

$$\left| q(a_0, a_1, \ldots, a_n) - q(a_0^*, a_1^*, \ldots, a_n^*) \right| \le$$

$$\le \left\| \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i - \sum_{i=0}^{n} a_i^* \varphi_i \right\| = \left\| \sum_{i=0}^{n} (a_i - a_i^*) \varphi_i \right\| \le \sum_{i=0}^{n} \left\| (a_i - a_i^*) \right\| = \sum_{i=0}^{n} \left| a_i - a_i^* \right| \|\varphi_i\|.$$

Якщо $\max \|\varphi_i\| = N > 0$, то

$$\left| q\left(a_0, a_1, ..., a_n\right) - q\left(a_0^*, a_1^*, ..., a_m^*\right)\right| \le N \sum_{i=0}^{n} \left|a_i - a_i^*\right|,$$

тому для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \dfrac{\varepsilon}{(n+1)N}$, що при $\left|a_i - a_i^*\right| < \delta$ для всіх $i = 0, 1, ..., n$ виконуватиметься нерівність

$$\left| q\left(a_0, a_1, ..., a_n\right) - q\left(a_0^*, a_1^*, ..., a_n^*\right)\right| < \varepsilon.$$

Звідси випливає неперервність функції $q(a_0, a_1, ..., a_n)$. Аналогічно можна довести неперервність функції $h(a_0, a_1, ..., a_n)$.

Розглянемо функцію $h(a_0, a_1, ..., a_n)$. Ця функція є неперервною й невід'ємною. Тому існує точна нижня межа її значень. Нехай

$$\inf h\left(a_0, a_1, ..., a_n\right) = m.$$

Покажемо, що існує точка $\left(a_0^*, a_1^*, ..., a_n^*\right)$, для якої

$$\inf h\left(a_0, a_1, ..., a_n\right) = h\left(a_0^*, a_1^*, ..., a_n^*\right).$$

Розглянемо в $(n+1)$-вимірному евклідовому просторі змінних $a_0, a_1, ..., a_n$ множину точок $(a_0, a_1, ..., a_n)$, для яких $\sum_{i=0}^{n} a_i^2 = 1$, тобто множину точок одиничної сфери цього простору. Це обмежена замкнена множина. Тому існує така точка цієї множини, у якій неперервна невід'ємна функція $q(a_0, a_1, ..., a_n)$ досягає точної нижньої межі (на основі теореми Вейєрштрасса про властивість неперервної функції на замкненій множині). Позначимо цю точну нижню межу через μ. Отже, на цій множині $q\left(a_0, a_1, ..., a_n\right) \ge \mu$. Покажемо, що $\mu > 0$. Справді, якби $\mu = 0$, то це означало б, що існує така точка $(\bar{a}_0, \bar{a}_1, ..., \bar{a}_n)$, де $\sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i^2 = 1$, для якої виконується рівність $q\left(a_0, \bar{a}_1, ..., \bar{a}_n\right) = \left\| \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i \varphi_i \right\| = 0$, або $\sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i \varphi_i$, що неможливо, бо система елементів $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n$ – лінійно незалежна.

Уведемо величину $r = \dfrac{m + 1 + \|f\|}{\mu}$ і розіб'ємо весь простір точок $\left(a_0, a_1, ..., a_n\right)$ на дві частини R_1 і R_2, де R_1 – множина точок, для яких $\sum_{i=0}^{n} a_i^2 \le r^2$, R_2 – множина точок, для яких $\sum_{i=0}^{n} a_i^2 > r^2$.

Розглянемо значення функції $h(a_0,a_1,...,a_n)$ на множині R_2. Нехай точка $(\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n)\in R_2$. Тоді $\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i{}^2=\lambda^2>r^2$ і

$$h(a_0,a_1,...,a_n)=\left\|f-\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\,\varphi_i\right\|\geq$$

$$\geq\left|\left\|\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\cdot\varphi_i\right\|-\|f\|\right|=\left|\,|\lambda|\left\|\sum_{i=0}^{n}\frac{\alpha_i}{|\lambda|}\varphi_i\right\|-\|f\|\right|\geq|\lambda|\left\|\sum_{i=0}^{n}\frac{\alpha_i}{|\lambda|}\varphi_i\right\|-\|f\|.$$

Оскільки $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i}{|\lambda|}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^2=1$, то $\left\|\sum\limits_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{n}}\frac{\alpha_i}{|\lambda|}\quad{}_i\right\|\geq\mu$.

Тому $h(\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n)\geq|\lambda|\,\mu-\|f\|>r\,\mu-\|f\|=m+1$.

Звідси випливає, що точна нижня межа m функції $h(a_0,a_1,...,a_n)$ у R_2 не досягається. Тому вона може досягатися в R_1. Оскільки R_1 є замкненою множиною, а функція $h(a_0,a_1,...,a_n)$ неперервна на цій множині, то, згідно з теоремою Веєрштрасса про властивість неперервної функції на замкненій множині, у R_1 існує така точка $(a_0^*,a_1^*,...,a_n^*)$, для якої досягається точна нижня межа функції $h(a_0,a_1,...,a_n)$. При цьому $h(a_0^*,a_1^*,...,a_n^*)=m$. Отже, у $\overline{R}$ завжди існує елемент найкращого наближення. Теорему доведено.

Розглянемо питання єдиності елемента найкращого наближення. Виявляється, що гарантувати єдиність елемента найкращого наближення можна тільки за певної умови, що накладається на простір.

Лінійний нормований простір прийнято називати *строго нормованим***,** якщо в нерівності $\|f_1+f_2\|\leq\|f_1\|+\|f_2\|$ знак рівності досягається тільки тоді, коли $f_2=\alpha f_1$, де $\alpha>0$.

Теорема 2. *Я*кщо лінійний нормований простір R є строго нормованим, то в $\overline{R}$ існує елемент найкращого наближення для $f\in R$.

Доведення. Припустимо, що існує два різні елементи найкращого наближення для $f\in R$:

$$\Phi_1=a_0\varphi_0+a_1\varphi_1+...+a_n\varphi_n \text{ і } \Phi_2=b_0\varphi_0+b_1\varphi_1+...+b_n\varphi_n,$$

тобто $\|f-\Phi_1\|=\|f-\Phi_2\|=m$, де $m=\inf\limits_{\Phi\in\overline{R}}\|f-\Phi\|$.

Очевидно, $m>0$, оскільки якби $m=0$, то $\Phi_1=\Phi_2=f$. Нехай

$$\overline{\Phi} = \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2}(a_i + b_i),$$

тоді

$$m \le \|f - \overline{\Phi}\| = \left\|f - \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2)\right\| \supset \left\|\frac{1}{2}(f - \Phi_1) + \frac{1}{2}(f - \Phi)\right\| \le$$

$$\le \frac{1}{2}(\|f - \Phi_1\| + \|f - \Phi_2\|) = \frac{1}{2}(m + m) = m.$$

Звідси $\quad \|(f - \Phi_1) + (f - \Phi_2)\| = \|f - \Phi_1\| + \|f - \Phi_2\|.$

Оскільки простір R строго нормований, то $f - \Phi_1 = \alpha(f - \Phi_2)$, де $\alpha > 0$. Очевидно, що $\alpha = 1$. Справді, якби $\alpha \ne 1$, то

$$f = \frac{1}{1-\alpha}(\Phi_1 - \alpha\Phi_2) = \sum_{i=0}^{n} d_1\varphi_1,$$

тобто $f \in \overline{R}$, і тоді б m=0. Якщо $\alpha = 1$, то $\Phi_1 = \Phi_2$. Теорему доведено.

1.4. Многочлени найкращого рівномірного наближення для функцій класу $C[a,b]$

Розглянемо простір функцій $C[a,b]$**.** Якщо $f(x) \in C[a,b]$**,** то**,** як ми бачили в підрозд. 1.1, $f(x)$ можна рівномірно наблизити на $[a,b]$ алгебраїчним многочленом. Тому виникає питання існування й єдиності многочлена найкращого рівномірного наближення до функції $f(x) \in C[a,b]$**.** Позначимо через H_n множину всіх алгебраїчних многочленів степеня не вище n**.**

Величину $\quad \Delta(f;P) = \max\limits_{x\in[a,b]}|f(x) - P(x)|$**,** $\quad$ де $\quad P(x) \in H_n$**,** $\quad$ назвемо *відхиленням* $P(x)$ від $f(x)$ на $[a,b]$**.**

Величину $E_n(f) = \Delta(f) = \inf\limits_{P(x)\in H_n} \max\limits_{x\in[a,b]}|f(x) - P(x)|$ назвемо *найменшим відхиленням* на множині H_n від $f(x)$.

Многочлен $P(x)$, для якого досягається точна нижня межа $E_n(f)$, називають *многочленом найкращого рівномірного наближення* (або просто многочленом найкращого наближення) для функції $f(x)$ на множині H_n.

Уведемо в просторі $C[a,b]$ норму. Якщо $f(x) \in C[a,b]$**,** то за норму функції $f(x)$ можемо взяти $\|f(x)\| = \|f\| = \max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

Легко перевірити, що всі вимоги, які ставляться до норми, при цьому виконуються. Уведена норма означає метрику простору $C[a,b]$:

$$\rho(f,q)=\|f-q\|=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-q(x)|,$$

де $f(x), q(x)\in C[a,b]$.

Одержуємо лінійний нормований простір $C[a,b]$. Якщо в цьому просторі вибрати систему лінійно незалежних функцій $\varphi_i(x)=x^i$ $(i=0,1,...,n)$, то всі можливі лінійні комбінації $\Phi=\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\varphi_i$ з дійсними коефіцієнтами $a_0,a_1,...,a_n$ утворюють множину H_n усіх алгебраїчних многочленів степеня не вище n. Тому, згідно з теоремою існування найкращого наближення, якщо $\varphi_i(x)=x^i$ $(i=0,1,...,n)$, то серед множини H_n усіх алгебраїчних многочленів степеня не вище n існує многочлен найкращого рівномірного наближення. Питання єдиності поки що залишимо відкритим, оскільки простір $C[a,b]$ не є строго нормованим. Справді, візьмемо за $[a,b]$ проміжок $[0,1]$ і на цьому проміжку розглянемо $f_1(x)=1$ і $f_2(x)=x$.

Тоді $\|f_1\|=1$, $\|f_2\|=1$, $\|f_1+f_2\|=2$, тобто $\|f_1+f_2\|=\|f_1\|+\|f_2\|$, хоча функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ незалежні на $[0,1]$. Тому використати теорему єдиності елемента найкращого наближення у випадку простору $C[a,b]$ ми не можемо. Єдиність многочлена найкращого рівномірного наближення доведемо пізніше.

Отже, якщо $P(x)\in H_n$ є многочленом найкращого наближення для функції $f(x)\in C[a,b]$, то для всіх $x\in[a,b]$

$$|f(x)-P(x)|\le E_n(f),$$

або

$$-E_n(f)\le f(x)-P(x)\le E_n(f).$$

Якщо в якійсь точці $x_0\in[a,b]$ виконується рівність $|f(x_0)-P(x_0)|=E_n(f)$, то точку x_0 називають (e)-*точкою* многочлена $P(x)$. Зокрема, x_0 будемо називати $(+e)$-*точкою* многочлена $P(x)$, якщо $f(x_0)-P(x_0)=E_n(f)$, та $(-e)$-*точкою*, якщо $f(x_0)-P(x_0)=-E_n(f)$.

Розглянемо властивості многочленів найкращого наближення.

Теорема 1. Якщо $P(x)$ – многочлен найкращого наближення для функції $f(x)\in C[a,b]$, то існують як $(-e)$-точки, так і $(+e)$-точки для $P(x)$.

Доведення. Зауважимо спочатку, що згідно з означенням для $P(x)$ існує принаймні одна (e)-точка. Доведемо існування для $P(x)$, наприклад, $(+e)$-точки.

Припустимо від супротивного, що для $P(x)$ не існує $(+e)$-точки. Тоді, оскільки $P(x)$ – многочлен найкращого наближення для функції $f(x)$,

$$-E_n(f) \le f(x) - P(x) < E_n(f).$$

У силу неперервності $f(x)$ і $P(x)$ існує таке число $h > 0$, що

$$-E_n(f) \le f(x) - P(x) \ge E_n(f) - h.$$

Додамо до всіх частин нерівності $\frac{h}{2}$. Одержимо

$$-E_n(f) + \frac{h}{2} \le f(x) - P(x) + \frac{h}{2} < E_n(f) - \frac{h}{2},$$

або

$$-\left(E_n(f) - \frac{h}{2}\right) \le f(x) - \left(P(x) - \frac{h}{2}\right) < E_n(f) - \frac{h}{2},$$

тобто

$$\left|f(x) - \left(P(x) - \frac{h}{2}\right)\right| < E_n(f) - \frac{h}{2},$$

що неможливо, оскільки $\left(P(x) - \frac{h}{2}\right) \in H_n$, а в H_n найменше відхилення $E_n(f)$.

Аналогічно доводиться існування $(-e)$-точки многочлена $P(x)$. Теорему доведено.

Із теореми випливає, що якщо $P(x) \in H_n$ є многочленом найкращого наближення для функції $f(x) \in C[a,b]$, то його графік буде дотичним до графіка функції $y = f(x) \pm E_n(f)$ хоча б один раз.

Теорема 2. Якщо $P(x)$ – многочлен найкращого наближення для $f(x) \in C[a,b]$, то на проміжку $[a,b]$ існує не менше, ніж $n+2$ (е)-точки многочлена $P(x)$.

Доведення. Нехай $f(x) \in C[a,b]$ і $P(x)$ – многочлен найкращого наближення для $f(x)$. Зазначимо, що теорема 1 гарантує існування принаймні двох (e)-точок. Розіб'ємо проміжок $[a,b]$ точками $u_0, u_1, ..., u_n$, де $a = u_0 < u_1 < ... < u_n = b$, на настільки малі проміжки $[u_0, u_{i+1}]$, щоб на кожному з цих проміжків коливання функції $f(x) - P(x)$ було не більшим за $\frac{1}{2}E_n(f)$, тобто щоб для будь-яких двох точок $x_1, x_2 \in [u_i, u_{i+1}]$ виконувалась нерівність

$$|(f(x_1) - P(x_2)) - (f(x_2) - P(x_2))| \le \frac{1}{2}E_n(f).$$

Якщо проміжок $[u_0, u_{i+1}]$ містить хоча б одну (e)-точку, то такий проміжок має назву *(е)-проміжку*. Очевидно, що на проміжках $[u_0, u_{i+1}]$, які не є (e)-проміжками,

$$|(f(x_1) - P(x_2))| \le E_n^*(f) < E_n(f),$$

де

$$E_n^*(f) \ge \frac{1}{2} E_n(f),$$

а на проміжках $[u_0, u_{i+1}]$, які є (e)-проміжками,

$$\frac{1}{2} E_n(f) \le f(x) - P(x) \le E_n(f).$$

Крім цього, різниця $f(x) - P(x)$ на кожному (e)-проміжку зберігає знак. Пронумеруємо всі (e)-проміжки в порядку їхнього розташування зліва направо й позначимо їх через $d_1, d_2, ..., d_N$. Теорему доведено.

Теорема 3. Якщо $f(x) \in C[a,b]$, то на множині H_n існує єдиний многочлен найкращого наближення до функції $f(x)$.

Доведення. Припустимо від супротивного, що на множині H_n існує два многочлени найкращого наближення $P(x)$ і $Q(x)$ для функції $f(x) \in C[a,b]$. Тоді

$$-E_n(x) \le f(x) - P(x) \le E_n(f), \quad -E_n(x) \le f(x) - Q(x) \le E_n(f)$$

для всіх $x \in [a,b]$. Додавши ці нерівності й поділивши на 2, одержимо

$$-E_n(x) \le f(x) - \frac{P(x) + Q(x)}{2} \le E_n(f).$$

Звідси випливає, що многочлен $R(x) = \dfrac{P(x) + Q(x)}{2} \in H_n$ також є многочленом найкращого наближення для $f(x)$**.**

Нехай x_k – будь-яка з ($+e$)-точок многочлена $R(x)$. Тоді

$$f(x_k) - \frac{P(x_k) + Q(x_k)}{2} = E_n(f),$$

або

$$\frac{f(x_k) - P(x_k)}{2} + \frac{f(x_k) - Q(x_k)}{2} = E_n(f).$$

Оскільки $Q(x)$ – многочлен найкращого наближення, то

$$f(x_k) - Q(x_k) \le E_n(f),$$

тому

$$\frac{f(x_k) - P(x_k)}{2} + \frac{E_n(f)}{2} \ge E_n(f),$$

або

$$f(x_k) - P(x_k) \ge E_n(f).$$

Звідси випливає, що $f(x_k) - P(x_k) = E_n(f)$, тобто $(+e)$-точкою многочлена $P(x)$ є точка x_k.

Аналогічно x_k є $(+e)$-точкою многочлена $Q(x)$. Таким чином,

$$f(x_k) - P(x_k) = f(x_k) - Q(x_k) = E_n(f),$$

тобто $P(x_k) = Q(x_k)$ для будь-якої $(+e)$-точки $R(x)$.

Аналогічно можна довести, що будь-яка $(-e)$-точка $R(x)$ водночас є $(-e)$-точкою $P(x)$ і $Q(x)$.

Оскільки (e)-точок многочлена $R(x)$ не менше, ніж $n+2$, то многочлени $P(x)$ і $Q(x)$ степеня не вище n повинні збігатися принаймні в $n+2$ точках проміжку $[a,b]$, що можливо лише за умови $P(x) \equiv Q(x)$. Теорему доведено.

Теорема 4. Нехай $f(x) \in C[a,b]$, многочлен $Q(x) \in H_n$ і $\Delta(f,Q) = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - Q(x)| = A$. Тоді, якщо функція $f(x) - Q(x)$ у n+2 точках $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ проміжку $[a,b]$ поперемінно набуває значення A або -A, то $A = E_n(f)$, тобто $Q(x)$ є многочленом найкращого наближення для функції $f(x)$.

Доведення. Нехай $P(x) \in H_n$ є многочленом найкращого наближення для функції $f(x) \in C[a,b]$. Тоді $|f(x) - P(x)| \le E_n(f)$.

Розглянемо $R(x) = P(x) - Q(x)$.

Припустимо, що $A > E_n(f)$ й обчислимо значення многочлена $R(x)$ у точках $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$. Отримаємо

$$R(x_k) = P(x_k) - Q(x_k) = f(x_k) - Q(x_k) - (f(x_k) - P(x_k)).$$

Оскільки за припущенням $A > E_n(f)$, то знак $R(x_k)$ визначається знаком різниці $f(x_k) - Q(x_k)$, яка поперемінно в точках $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ набуває значень A і $-A$. Звідси випливає, що многочлен $R(x)$ змінює знак у $(n+1)$-й точці проміжку $[a,b]$. Тобто многочлен $R(x)$ степеня не вище n має $n+1$ коренів на $[a,b]$ і $P(x) \equiv Q(x)$.

Аналогічний результат дістанемо при припущенні, що $A < E_n(f)$. Теорему доведено.

Із теореми випливає наслідок.

Наслідок. Якщо $P(x) \in H_n$ є многочленом найкращого наближення для функції $f(x) \in C[a,b]$, то на проміжку $[a,b]$ існує n + 2 точок $x_0, x_1, ..., x_{n+1}$, у яких різниця $f(x)$ - $P(x)$ поперемінно набуває значень $E_n(x)$ і $-E_n(x)$.

Множину точок $x_0, x_1, ..., x_{n+1}$, у яких різниця $f(x)$-$P(x)$ поперемінно набуває значень $E_n(x)$ і $-E_n(x)$, називають *чебишевським альтернансом*. Цю множину позначимо через X.

Якщо чебишевський альтернанс X для функції $f(x) \in C[a,b]$ відомо, то для точок $x_i \in X$

$$f(x_i) - P(x_i) = \alpha(-1)^i E_n(f) \ \ (i = 0,1,...,n+1),$$

де $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ – многочлен найкращого наближення для $f(x)$, $\alpha = \{-1;1\}$ залежно від знака першої (e)-точки.

Таким чином, якщо для функції $f(x) \in C[a,b]$ відомо чебишевський альтернанс $X = \{x_0, x_1, ..., x_{n+1}\}$, то для визначення коефіцієнтів многочлена найкращого наближення $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ для функції f(x) отримаємо систему лінійних рівнянь

$$a_0 + a_1x_i + a_2x_i^{\ 2} + ... + a_nx_i^{\ n} = f(x_i) - \alpha(-1)^i E_n(f) \ \ (i = 0,1,...,n).$$

Ця система має єдиний розв'язок, бо її визначник є визначником Вандермонда, відмінним від нуля. Однак у цій системі невідомо α і $E_n(f)$.

Покажемо, що α і $E_n(f)$ можна знайти, якщо відомо множину X.

Розглянемо визначник

$$D(X,f) = \begin{vmatrix} f(x_0) & 1 & x_o & x_0^2 & ... & x_0^n \\ f(x_1) & 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ f(x_{n+1}) & 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & ... & x_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

Оскільки $f(x_i) - P(x_i) = \alpha(-1)^i E_n(f) \ \ (i = 0,1,...,n+1)$, то

$$D(X,f) = \begin{vmatrix} P(x_0) & 1 & x_o & x_0^2 & ... & x_0^n \\ P(x_1) & 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ P(x_{n+1}) & 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & ... & x_{n+1}^n \end{vmatrix} +$$

$$+\alpha \mathrm{E_n}(f) \begin{vmatrix} (-1)^0 & 1 & x_0 & x_0^2 & ... & x_0^n \\ (-1)^1 & 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ (-1)^{n+1} & 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & ... & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = D_1(P) + \alpha E_n(f) D_2(X).$$

Перший стовпець визначника $D_1(P)$ є лінійною комбінацією решти стовпців з коефіцієнтами $a_0, a_1, ..., a_n$. Тому $D_1(P)$=0. Розкладемо визначник $D_2(X)$ за елементами першого стовпця. Одержимо

$$D_2(X)=\sum_{i=0}^{n+1} D^{(i)}(X), \qquad D^{(i)}(X)=\begin{vmatrix} 1 & x_o & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{l-1} & x_{l-1}^2 & \dots & x_{l-1}^n \\ 1 & x_{l+1} & x_{l+1}^2 & \dots & x_{l+1}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix},$$

причому

$$D^{(i)}(X)>0 \ (i=0,1,\dots,n+1).$$

Отже,

$$D(X,f)=\alpha E_n(f)\sum_{i=0}^{n+1} D^{(i)}(X).$$

Оскільки

$$D^{(i)}(X)>0 \ (i=0,1,\dots,n+1),$$

то

$$\alpha=\operatorname{sign} D(X,f), \ \ E_n(f)=\frac{|D(X,f)|}{\sum_{i=0}^{n+1} D^{(i)}(X)}.$$

Отже, якщо множину X відомо, то побудувати многочлен найкращого наближення не становить труднощів. Насправді множина X нам невідома. Тому виникає запитання, як же все-таки побудувати многочлен найкращого наближення.

Існує декілька алгоритмів побудови многочленів найкращого наближення. Однак, не існує остаточного алгоритму побудови многочленів найкращого наближення для будь-якої функції $f(x)\in C[a,b]$. Тому важливого значення набувають способи наближеної побудови таких многочленів. Одним із таких способів є алгоритм Ремези.

Зауваження. Ми розглянули рівномірне наближення функцій класу $C[a,b]$ алгебраїчними многочленами й класу $C_{2\pi}$ тригонометричними многочленами. Водночас для рівномірного наближення функцій цих класів можна використати й інший апарат.

Розділ 2. ТЕОРІЯ ІНТЕРПОЛЮВАННЯ

В обчислювальній практиці доводиться мати справу з функціями, заданими не аналітично, а таблично. Якщо функцію *f(x)* задано значеннями в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ на проміжку [*a,b*], що належить області визначення функції, то під час розв'язування деяких задач може виникнути проблема відшукання значень функції *f(x)* у інших точках проміжку [*a,b*]. У цьому випадку будують функцію $F(x)$, досить просту для обчислення, яка в заданих точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ набуває тих самих значень, що й функція *f(x),* а в інших точках проміжку [*a,b*] наближає функцію *f(x)* з певною мірою точності. Задача побудови такої функції $F(x)$ називається задачею інтерполювання, а функція $F(x)$ – інтерполяційною функцією. Її найчастіше відшукують у вигляді алгебраїчного або тригонометричного многочлена.

2.1. Постановка задачі інтерполювання

Найпростіша задача інтерполювання має такий вигляд. На відрізку [*a,b*] у точках $x_0, x_1, ..., x_n$, де $a \le x_0 < x_1 < ... < x_n \le b$, задано значення деякої функції f(x):

$$f(x_0) = y_0,\ f(x_1) = y_1,\ \ldots\ f(x_n) = y_n.$$

Треба побудувати функцію, яка належить до певного класу і в точках $x_0, x_1, ..., x_n$ набуває таких самих значень, що й функція *f(x)*, тобто

$$F(x_0) = y_0,\ F(x_1) = y_1,\ \ldots\ F(x_n) = y_n.$$

Точки $x_0, x_1, ..., x_n$ прийнято називати *вузлами інтерполювання*, а функцію *F(x) – інтерполяційною функцією*.

Геометрично задача полягає у відшукуванні кривої *y=F(x)* певного типу, яка проходить через задану систему точок $M_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, ..., n$.

Розглянемо постановку задачі в більш конкретному випадку й з'ясуємо умови, при яких задача має єдиний розв'язок.

2.2. Узагальнений інтерполяційний многочлен. Система функцій Чебишева

Нехай *R* – простір дійсних функцій, визначених на проміжку [*a,b*], і $f(x) \in R$. Припустимо, що точки $x_0, x_1, ..., x_n$, де $a \le x_0 < x_1 < ... < x_n \le b$, є вузлами інтерполювання. Інтерполяційну функцію, яка у вузлах інтерполювання набуває тих самих значень, що й функція *f(x),* шукатимемо у вигляді

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi_k(x), \tag{2.1}$$

де a_k $(k=0,1,...,n)$ – деякі коефіцієнти; $\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$ – система досить простих дійсно незалежних на $[a,b]$ функцій із R.

Оскільки значення функцій *f(x)* і $\varphi(x)$ у вузлах інтерполювання повинні збігатися, то $\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\varphi_k(x_i)=f(x_i)$ $(i=0,1,...,n)$.

Ми отримали систему простих лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів a_k $(k=0,1,...,n)$. Визначник цієї системи

$$\Delta=\begin{vmatrix}\varphi(x_0) & \varphi_1(x_o) & ... & \varphi_n(x_0)\\ \varphi(x_1) & \varphi_1(x_1) & ... & \varphi_n(x_1)\\ ... & ... & ... & ...\\ \varphi(x_n) & \varphi_1(x_n) & ... & \varphi_n(x_n)\end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta\neq0$, то система має єдиний розв’язок, який можна знайти за правилом Крамера:

$$a_k=\frac{\Delta_k}{\Delta}\quad(k=0,1,...,n),$$

де

$$\Delta_\mathrm{k}=\begin{vmatrix}\varphi(x_0) & ... & \varphi_{k-1}(x_o) & f(x_0) & \varphi_{k+1}(x_o) & ... & \varphi_n(x_0)\\ \varphi(x_1) & ... & \varphi_{k-1}(x_1) & f(x_1) & \varphi_{k+1}(x_o) & ... & \varphi_n(x_1)\\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ \varphi(x_n) & ... & \varphi_{k-1}(x_n) & f(x_n) & \varphi_{k+1}(x_o) & ... & \varphi_n(x_n)\end{vmatrix}.$$

Розклавши Δ_k за елементами *k*-го стовпця, одержимо

$$a_k=c_{k0}f(x_0)+c_{k1}f(x_1)+...+c_{kn}f(x_n)\quad(k=0,1,...,n);$$

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)(c_{00}f(x_0)+c_{01}f(x_1)+\ldots+c_{0n}f(x_n))+$$
$$+\varphi_1(x)(c_{10}f(x_0)+c_{11}f(x_1)+\ldots+c_{1n}f(x_n))+\ldots+$$
$$+\varphi_n(x)(c_{n0}f(x_0)+c_{n1}f(x_1)+\ldots+c_{nn}f(x_n))=$$
$$=f(x_0)\sum_{k=0}^{n}c_{k0}\varphi_k(x)+f(x_1)\sum_{k=0}^{n}c_{k1}\varphi_k(x)+\ldots+f(x_n)\sum_{k=0}^{n}c_{kn}\varphi_k(x),$$

або

$$\varphi(x)=f(x_0)\Phi_{\mathrm{n}0}(x)+f(x_1)\Phi_{\mathrm{n}1}(x)+\ldots+f(x_n)\Phi_{\mathrm{nn}}(x),$$

де $\quad \Phi_{ni}(x)=\sum_{k=0}^{n}c_{ki}\varphi_k(x) \quad (i=0,1,\ldots,n).$

Оскільки $\varphi(x_i)=f(x_i)\ \ (i=0,1,\ldots,n)$, то

$$\Phi_{ni}(x_j)=\begin{cases}1, \text{ якщо } \mathrm{i}=\mathrm{j},\\ 0, \text{ якщо } \mathrm{i}\neq\mathrm{j}.\end{cases}$$

Лінійну комбінацію (2.1) називають *узагальненим інтерполяційним многочленом*.

З'ясуємо, при яких умовах, накладених на систему лінійно незалежних функцій $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$, задача інтерполювання має єдиний розв'язок для будь-якого набору вузлів інтерполювання.

Систему лінійно незалежних на [*a,b*] функцій $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ називають *системою Чебишева* на цьому проміжку, якщо кожний узагальнений многочлен $\varphi(x)$, який побудовано на основі цієї системи і хоча б один коефіцієнт якого відмінний від нуля, має на [*a,b*] не більше *n* нулів.

Теорема 1 (критерій єдиності розв'язку задачі інтерполювання). Для того, щоб для будь-якої функції $f(x)$, визначеної на проміжку [*a,b*], і для будь-якого набору $x_0,x_1,\ldots,x_n$, де $x_i\in[a,b]$, $x_i\neq x_j$ при $i\neq j$, задача інтерполювання мала єдиний розв'язок, необхідно й достатньо, щоб система функцій $\{\varphi_i(x)\}$ $(i=0,1,\ldots,n)$ була системою Чебишева на [*a,b*].

Доведення. Необхідність. Нехай для будь-якої функції $f(x)$, визначеної на проміжку [*a,b*], і для будь-якого набору вузлів $x_0,x_1,\ldots,x_n$, де $x_i\in[a,b]$, $x_i\neq x_j$ при $i\neq j$, задача інтерполювання має єдиний розв'язок, тобто існує в кожному випадку єдиний узагальнений многочлен $\varphi(x)$, для якого $\varphi(x_i)=f(x_i)$ $(i=0,1,\ldots,n)$. Покажемо, що функції $\{\varphi_i(x)\}$ $(i=0,1,\ldots,n)$ є системою Чебишева на [*a,b*].

Оскільки задача інтерполювання має єдиний розв'язок, то це означає, що для будь-якого набору вузлів $x_0, x_1, ..., x_n$ система рівнянь

$$a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + ... + a_n\varphi_n(x_i) = f(x) \ (i = 0,1,...,n)$$

має єдиний розв'язок. Звідси випливає, що для будь-якого набору вузлів $x_0, x_1, ..., x_n$ визначник цієї системи $\Delta \neq 0$.

Припустимо від супротивного, що система функцій $\{\varphi_i(x)\}$ не є системою Чебишева на [*a,b*]. Тоді знайдеться такий узагальнений многочлен

$$\overline{\varphi}(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x) \left(\sum_{k=0} c_k^2 \neq 0 \right), \qquad (2.2)$$

який має на [*a,b*] не менше *n*+1 різних нулів. На проміжку [*a,b*] виберемо *n*+1 різних нулів цього многочлена й позначимо їх через $\overline{x}_0, \overline{x}_1, ..., \overline{x}_n$, тоді

$$c_0\varphi_0(\overline{x}_i) + c_1\varphi_1(\overline{x}_i) + ... + c_n\varphi_n(\overline{x}_i) = 0 \qquad (i = 0,1,...,n).$$

Оскільки виконується умова (2.2), то це означає, що однорідна система рівнянь має нульовий розв'язок, тобто визначник цієї системи дорівнює 0, але за умовою теореми $\Delta \neq 0$ для будь-якого набору вузлів $x_0, x_1, ..., x_n$. Отже, зроблене припущення неправильне.

Достатність. Нехай система функцій $\{\varphi_i(x)\}$ $(i = 0,1,...,n)$ є системою Чебишева на [a,b]. Достатньо показати, що $\Delta \neq 0$ для будь-якої системи вузлів $x_0, x_1, ..., x_n$.

Припустимо від супротивного, що існує така система попарно відмінних вузлів $\overline{x}_0, \overline{x}_1, ..., \overline{x}_n$ на проміжку [*a,b*], що $\Delta = 0$. Це означає, що між стовпцями визначника існує лінійна залежність, тобто існують такі коефіцієнти $b_0, b_1, ..., b_n$, де $\sum_{i=0}^{n} b_i^2 \neq 0$, що виконується векторна рівність

$$b_0 \begin{bmatrix} \varphi_0(\overline{x}_0) \\ \varphi_0(\overline{x}_1) \\ .... \\ \varphi_0(\overline{x}_n) \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} \varphi_1(\overline{x}_0) \\ \varphi_1(\overline{x}_1) \\ .... \\ \varphi_1(\overline{x}_n) \end{bmatrix} + ... + b_n \begin{bmatrix} \varphi_n(\overline{x}_0) \\ \varphi_n(\overline{x}_1) \\ .... \\ \varphi_n(\overline{x}_n) \end{bmatrix} = 0.$$

Ця векторна рівність еквівалентна системі лінійних рівнянь

$$b_0\varphi_0(\overline{x}_i) + b_1\varphi_1(\overline{x}_i) + ... + b_n\varphi_n(\overline{x}_i) = 0 \quad (i = 0,1,...,n).$$

Звідси випливає, що узагальнений многочлен $\varphi(x) = \sum_{k-0}^{n} b_k\varphi_k(x_k)$

має на [a,b] більше ніж n нулів, тобто система функцій не є системою Чебишева на [a,b], отже, задача інтерполювання має єдиний розв'язок. Теорему доведено.

Теорема 2. Якщо для системи функцій $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ виконуються такі умови:

1) $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ є лінійно незалежною системою функцій на [a,b];

2) $\varphi_i(x) \in C^{n+1}[a,b]$, $i = 0,1,\ldots,n$;

3) $W[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k] \neq 0$ на [a,b] для всіх k (k=0,1,…,n), де

$$W_k[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k] = \begin{vmatrix} \varphi(x) & \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_k(x) \\ \varphi'(x) & \varphi'_1(x) & \ldots & \varphi'_k(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi^{(k)}(x) & \varphi_1^{(k)}(x) & \ldots & \varphi_k^{(k)}(x) \end{vmatrix},$$

то система функцій $\{\varphi_i(x)\}$ $(i = 0,1,\ldots,n)$ є системою Чебишева на [a,b].

Доведення цієї теореми наведено в роботі [4]. Визначники $W[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k]$ називають визначниками Вронського.

Прикладом системи Чебишева є система функцій

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2, \ldots, \varphi_0(x) = x^n,$$

яка є системою Чебишева на будь-якому відрізку числової осі, оскільки будь-який алгебраїчний многочлен

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^{(n)}$$

степеня n (не дорівнює тотожно нулеві) має на будь-якому відрізку [a,b] не більше n нулів.

2.3. Інтерполяційний многочлен Лагранжа та його залишковий член

Нехай $f(x) \in R$ і $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(x_i \in [a,b], x_i \neq x_j$ при i$\neq$ j) – вузли інтерполювання. Побудуємо інтерполяційний многочлен $\varphi(x)$, де за систему лінійно незалежних функцій {φ_i(x)} виберемо таку систему:

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2, \ldots, \varphi_0(x) = x^n.$$

Запишемо функцію $\varphi(x)$ у вигляді

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Phi_m(x),$$

де $\Phi_{ni}(x)$ – у цьому випадку многочлени степеня n, які задовольняють умову

$$\Phi_{ni}(x_j) = \delta_{ij}.$$

Ці многочлени можна відшукати, розв'язавши систему рівнянь

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x_j) = f(x_j) \quad (j = 0,1,...,n).$$

Однак їх можна знайти, не розв'язуючи систему рівнянь. $\Phi_m(x)$ є многочленом степеня n, який набуває нульового значення в точках $x_0, x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ і дорівнює одиниці в точці x_j, тоді

$$\Phi_{ni}(x) = A_i(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n).$$

З умови $\Phi_{ni}(x)$=1 одержуємо, що

$$A_i = \frac{1}{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)},$$

тому

$$\Phi_{ni}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}.$$

Отже, шуканий інтерполяційний многочлен, який має вигляд

$$\mathrm{L_n}(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)},$$

називають *інтерполяційним многочленом Лагранжа*, а многочлени $\Phi_{ni}(x)$ – *фундаментальними многочленами*.

Оскільки многочлен $\Phi_{ni}(x)$ можна записати у вигляді

$$\Phi_{ni}(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)},$$

де

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)...\,(x - x_n),$$
$$\omega'_{n+1}(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1)...\,(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n),$$

то

$$\mathrm{L}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}.$$

Многочлен Лагранжа збігається з функцією $f(x)$ у вузлах інтерполювання. В інших точках $[a,b]$ маємо наближену рівність $\mathrm{f(x)} \approx \mathrm{L_n(x)}$. Різниця $\mathrm{R_{n+1}(x) = f(x) - L_n(x)}$ має назву *залишкового члена* інтерполяційного многочлена Лагранжа.

2.4. Інтерполяційна схема Ейткена

Якщо вузли інтерполювання не є рівновіддаленими і треба відшукати не загальний вираз для многочлена $L_n(x)$, а лише значення для певних *x,* то зручно користуватися *інтерполяційною схемою Ейткена*. На основі цієї схеми значення інтерполяційного многочлена для заданого обчислюють шляхом послідовного використання одноманітного процесу. Позначимо $f(x_i) = y_i$.

Розглянемо вираз

$$L_{01}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0}.$$

Очевидно, що $L_{01}(x)$ є многочленом першого степеня відносно *x*. При $x = x_0$

$$L_{01}(x_0) = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & 0 \\ y_1 & x_1 - x_0 \end{vmatrix}}{x_1 - x_0} = y_0,$$

при $x = x_1$

$$L_{01}(x_1) = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x_1 \\ y_1 & 0 \end{vmatrix}}{x_1 - x_0} = y_1.$$

Це означає, що $L_{01}(x)$ збігається з інтерполяційним многочленом Лангранжа, який у точках x_0, x_1 набуває відповідно значень y_0, y_1 і є розв‘язком задачі інтерполювання за двома вузлами. Так само можемо утворити $L_{12}(x), L_{23}(x)$ і т.д.

Розглянемо тепер $L_{012}(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} L_{01}(x) & x_0 - x \\ L_{12}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0}.$

Функція $L_{012}(x)$ є многочленом другого степеня відносно x.

При $x = x_0$

$$L_{012}(x_0) = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & 0 \\ L_{12}(x_0) & x_2 - x_0 \end{vmatrix}}{x_2 - x_0} = y_0.$$

При $x = x_1$ і $x = x_2$ відповідно маємо

$$L_{012}(x_1)=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_0-x_1 \\ y_1 & x_2-x_1 \end{vmatrix}}{x_2-x_0}=y_1, \qquad L_{012}(x_2)=\frac{\begin{vmatrix} L_{01}(x_2) & x_0-x_2 \\ y_2 & 0 \end{vmatrix}}{x_2-x_0}=y_2.$$

Отже, $L_{012}(x)$ збігається з інтерполяційним многочленом Лагранжа, який у точках x_0, x_1, x_2 набуває відповідно значень y_0, y_1, y_2 і дає можливість розв'язати задачу інтерполювання за трьома точками.

Узагалі

$$L_{012...n}(x)=\frac{\begin{vmatrix} L_{012...(n-1)}(x) & x_0-x \\ L_{123...n}(x) & x_n-x \end{vmatrix}}{x_n-x_0}$$

буде інтерполяційним многочленом Лагранжа, який у точках $x_0, x_1, ..., x_n$ набуває відповідно значень $y_0, y_1, ..., y_n$. Очевидно, що порядок і нумерація точок при цьому не мають значення.

Обчислювальна схема для знаходження значення інтерполяційного многочлена в точці *x* має такий вигляд:

x_i	y_i	$x_i - x$	$L_{i-1,f}(x)$	$L_{i-2,i-1,}(x)$	$L_{i-3,i-2,i-1,f}(x)$
x_0	y_0	x_0 - x			
x_1	y_1	x_1 - x	$L_{01}(x)$		
x_2	y_2	x_2 - x	$L_{12}(x)$	$L_{012}(x)$	
x_3	y_3	x_3 - x	$L_{23}(x)$	$L_{123}(x)$	$L_{0123}(x)$
x_4	y_4	x_4 - x	$L_{34}(x)$	$L_{234}(x)$	$L_{1234}(x)$

Користуючись цією схемою, можемо поступово додавати щоразу нові й нові вузлики x_i доти, доки точність уже не зростатиме. При цьому за x_0 і x_1 потрібно брати найближчі до x вузли, між якими розташований x, і на кожному кроці додавати найближчий до *x* вузол.

2.5. Розділені різниці та їхні властивості

Нехай $f(x) \in R$ і $x_0, x_1, ..., x_n$ – система вузлів інтерполювання, де $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, $x_i \in [a,b]$ $(i = 0, 1, ..., n)$.

Відношення

$$\frac{f(x_i)-f(x_0)}{x_1-x_0}=f(x_0;x_1)\ ,\ \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f(x_1;x_2)\ ,$$

$$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

$$\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}=f(x_{n-1};x_n)$$

називають *розділеними різницями першого порядку*.

Відношення

$$\frac{f(x_1;x_2)-f(x_0;x_1)}{x_2-x_0}=f(x_0;x_1;x_2)\ ,$$

$$\frac{f(x_2;x_3)-f(x_0;x_1)}{x_3-x_1}=f(x_1;x_2;x_3)\ ,$$

$$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

$$\frac{f(x_{n-1};x_n)-f(x_{n-2};x_{n-1})}{x_n-x_{n-2}}=f(x_{n-2};x_{n-1};x_n)$$

називають *розділеними різницями другого порядку*.

Аналогічно визначають розділені різниці 3, 4,..., *k*-го порядку. Якщо вже визначено розділені різниці *k*-го порядку $f(x_i;x_{i+1};...,x_{i+k})$ $(i=0,1,...,n-k)$, то розділені різниці $(k+1)$-го порядку обчислюють за допомогою формули

$$\frac{f(x_i;x_{i+1};....;x_{i+k})-f(x_{i-1};x_1;...;x_{i+k-1})}{x_{i+k}-x_{i-1}}=f(x_{i-1};x_i;...;x_{i+k})\ \ (i=1,2,...,n-k).$$

Розділені різниці зручно записати у вигляді таблиці $(n=4)$:

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i;x_{i+1})$	$f(x_i;x_{i+1};x_{i+2})$	$f(x_i;x_{i+1};x_{i+2};x_{i+3})$
x_0	$f(x_0)$			
		$f(x_0;x_1)$		
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0;x_1;x_2)$	
		$f(x_1;x_2)$		$f(x_0;x_1;x_2;x_3)$
x_2	$f(x_2)$		$f(x_1;x_2;x_3)$	
		$f(x_2;x_3)$		$f(x_1;x_2;x_3;x_4)$
x_3	$f(x_3)$		$f(x_2;x_3;x_4)$	
		$f(x_3;x_4)$		
x_4	$f(x_4)$			

Покажемо, що розділені різниці є симетричними функціями своїх аргументів, тобто що має місце формула

$$f(x_i;x_{i+1};\ldots;x_{i+k})=\frac{f(x_i)}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})\ldots(x_i-x_{i+k})}+$$
$$+\frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})\ldots(x_{i+1}-x_{i+k})}+\ldots+$$
$$+\frac{f(x_{i+k})}{(x_{i+k}-x_i)(x_{i+k}-x_{i+1})\ldots(x_{i+k}-x_{i+k-1})}=\sum_{j=i}^{i+k}\frac{f(x_j)}{\omega(x_j)}\ ,$$

де

$$\omega(x)=(x-x_i)(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{i+k}).$$

Доведення здійснюватимемо методом математичної індукції. При $k=1$ твердження очевидне, оскільки

$$f(x_i;x_{i+1})=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}=\frac{f(x_i)}{x_i-x_{i+1}}+\frac{f(x_{i+1})}{x_{i+1}-x_i}.$$

Припустимо, що твердження правильне при $k\le i-1$. Доведемо, що воно правильне при $k=1$. Справді,

$$f(x_i;x_{i+1};\ldots;x_{i+l})=\frac{f(x_{i+1};x_{i+2};\ldots;x_{i+l})-f(x_i;x_{i+1};\ldots;x_{i+l-1})}{x_{i+l}-x_i}=$$
$$=\frac{1}{x_{i+l}-x_i}\left(f(x_{i+1};x_{i+2};\ldots;x_{i+l})-f(x_i;x_{i+1};\ldots;x_{i+l-1})\right)=$$
$$=\frac{1}{x_{i+l}-x_i}\left(\sum_{j=i+1}^{i+l}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_{i+1})(x_j-x_{i+2})\ldots(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_{i+l})}-\right.$$
$$\left.-\sum_{j=i}^{i+l-1}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_i)(x_j-x_{i+1})\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_{i+l-1})}\right)=$$
$$=\frac{f(x_i)}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})\ldots(x_i-x_{i+l})}+\frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+l}-x_i)(x_{i+l}-x_{i+1})\ldots(x_{i+l}-x_{i+l-1})}+$$
$$+\sum_{j=i+1}^{i+l-1}\frac{f(x_j)}{(x_{i+1}-x_i)}\left(\frac{1}{(x_j-x_{i+1})\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_{i+l})}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(x_j-x_i)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j+x_{j+1})\ldots(x_j-x_{i+l-1})}\right).$$

Оскільки

$$\frac{1}{x_{i+l}-x_i}\left(\frac{1}{(x_j-x_i+1)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_i-x_{j+1})\ldots(x_j-x_{i+l})}-\right.$$

$$-\frac{1}{(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_{i+l-1})}\Bigg)=$$

$$=\frac{1}{(x_j-x_i)(x_j-x_{i+1})\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_{i+1})},$$

то $\quad f(x_i;x_{i+1};\ldots;x_{i+l})=\sum\limits_{j=i}^{i+l}\dfrac{f(x_i)}{(x_j-x_i)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_{i+l})},$

що й треба було довести.

Можна перевірити, що розділені різниці порядку n від многочлена n-го степеня є сталими величинами, а розділені різниці вищого порядку дорівнюють нулеві.

2.6. Інтерполяційні формули Ньютона для нерівновіддалених вузлів інтерполювання

Нехай $f(x)\in R, x_0<x_1<\ldots<x_n$ – вузли інтерполювання, $x_i\in[a,b]$ $(i=0,1,\ldots,n)$ і

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

– інтерполяційний многочлен Лагранжа. Цей інтерполяційний многочлен є незручним через те, що зі збільшенням кількості вузлів змінюються всі доданки у формулі. Зручнішою для практичного використання була б формула такого вигляду:

$$L_n(x)=A_0+(x-x_0)A_1+(x-x_0)(x-x_1)A_2+\ldots+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})A_n,$$

де $A_i (i=0,1,\ldots,n)$ – числові коефіцієнти. Тоді збільшення кількості вузлів приводило б до збільшення кількості доданків, а попередньо обчислені доданки залишилися б незмінними.

Подамо $L_n(x)$ у такому вигляді:

$$L_n(x)=L_0(x)+(L_1(x)-L_0(x))+(L_2(x)-L_1(x))+\ldots+(L_n(x)-L_{n-1}(x)).$$

Розглянемо різницю

$$Q_k(x)=L_k(x)-L_{k-1}(x)\quad(k=1,2,\ldots,n),$$

де $L_0(x)=f(x_0)$. Очевидно, що $Q_k(x)$ є многочленом степеня k і набуває нульового значення у точках $x_0,x_1,\ldots,x_{k-1}$, оскільки

$$L_k(x_i)=f(x_i)\quad(i=0,1,\ldots,k),\ \ L_{k-1}(x_i)=f(x_i)\quad(i=0,1,\ldots,k-1).$$

Тому

$$Q_k(x)=A_k(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1}),$$

де A_k – певна стала. Щоб знайти A_k, покладемо $x=x_k$. Одержимо

$$f(x_k)-L_{k-1}(x_k)=A_k(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1}),$$

або

$$f(x_k)-\sum_{i=0}^{k-1} f(x_i)\frac{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{i-1})(x_k-x_{i+1})\ldots(x_k-x_{k-1})}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}=$$
$$=A_k(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{i-1})(x_k-x_{i+1})\ldots(x_k-x_{k-1}).$$

Звідси

$$A_k=\frac{f(x_k)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{i-1})(x_k-x_{i+1})\ldots(x_k-x_{k-1})}+$$
$$+\sum_{i=0}^{k-1}\frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_k)}=f(x_0;x_1;\ldots;x_k)$$

– розділена різниця k-го порядку.

Отже,

$$L_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0;x_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0;x_1;x_2)+$$
$$+\ldots+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f(x_0;x_1;\ldots;x_n). \qquad (2.3)$$

Отриманий многочлен $L_n(x)$ називають *інтерполяційним многочленом Ньютона для нерівновіддалених вузлів інтерполювання*. Він зручніший для обчислень, ніж формула Лагранжа – зі збільшенням кількості вузлів не потрібно повторювати всю роботу знову, як під час обчислень за формулою Лагранжа.

Використовуючи (2.3), одержуємо

$$f(x)=L_n(x)+R_{n+1}(x),$$

де $R_{n+1}(x)$ – залишковий член, як і в формулі Лагранжа:

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x).$$

Однак його можна записати і в іншій формі. Для цього розглянемо розділену різницю $(n+1)$-го порядку

$$f(x;x_0;\ldots;x_n)=\frac{f(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}+$$
$$+\frac{f(x_0)}{(x_0-x)(x_0-x_1)\ldots(x_0-x_n)}+\ldots+\frac{f(x_n)}{(x_n-x)(x_n-x_0)\ldots(x_n-x_{n-1})}.$$

З цього співвідношення дістанемо

$$f(x)=f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}+\ldots+$$
$$+f(x_n)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)f(x;x_0;\ldots;x_n),$$

тому

$$f(x)=L_n(x)+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)f(x;x_0;\ldots;x_n),$$

Отже,

$$R_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)f(x; x_0; \ldots; x_n),$$

або

$$R_{n+1}(x) = \omega_{n+1}(x)f(x; x_0; \ldots; x_n).$$

Зокрема, якщо $f(x)$ має похідну порядку $n+1$, то

$$f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!},$$

де ξ – точка, яка належить найменшому проміжкові, що містить усі точки $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$.

Формулу (2.3) також називають *інтерполяційним многочленом Ньютона для інтерполювання вперед у випадку нерівновіддалених вузлів інтерполювання*. Її зазвичай застосовують для наближення функції поблизу початкового вузла x_0.

Якщо вузли інтерполювання вибрати в порядку $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0$, то аналогічно можна отримати формулу

$$L_n(x) = f(x_n) + (x - x_n)f(x_{n-1}; x_n) +$$
$$+ (x - x_n)(x - x_{n-1})f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n) + \ldots +$$
$$+ (x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1)f(x_0; x_1; \ldots; x_n),$$

яка має назву *інтерполяційного многочлена Ньютона для інтерполювання назад у випадку нерівновіддалених вузлів інтерполювання*. Вона зазвичай використовується для наближення функції поблизу кінцевого вузла x_n.

Зауваження. Одержані формули мають місце для будь-якої системи вузлів $x_0, x_1, \ldots, x_n$, такої, що $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$ і $x_i \in [a,b]$ для $i = 0, 1, \ldots, n$. Вузли інтерполювання, найближчі до точки x, більше впливають на значення інтерполяційного многочлена, ніж віддалені вузли. Тому доцільно за x_0 і x_1 брати найближчі до x вузли інтерполювання і здійснювати спочатку лінійну інтерполяцію за цими вузлами, а потім поступово використовувати інші вузли так, щоб вони, якщо це можливо, розміщувалися відносно x симетрично. Отримані при цьому поправки здебільшого є незначними.

2.7. Скінченні різниці та їхні властивості

Виберемо на $[a, b]$ систему рівновіддалених вузлів інтерполювання $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Різниці $f(x_{i+1}) - f(x_i) = \Delta f(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ називаються скінченними різницями першого порядку.

Скінченні різниці другого порядку мають вигляд

$$\Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i) = \Delta^2 f(x_i) \quad (i = 0, 1, \ldots, n-2).$$

Скінченні різниці k-го порядку визначаються як

$$\Delta^{k-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{k-1} f(x_i) = \Delta^k f(x_i) \quad (i = 0, 1, \ldots, n-k).$$

Покажемо, що скінченну різницю будь-якого порядку можна безпосередньо виразити через значення функції у вузлах інтерполювання, тобто що правдивою є формула

$$\Delta^k f(x_i) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_n^j f(x_{i+j}) \quad (k \le n-i).$$

Доведення проводитимемо методом математичної індукції. Для скінченних різниць першого й другого порядку маємо

$$\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i),$$

$$\Delta^2 f(x_i) = \Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i) = f(x_{i+2}) - f(x_{i+1}) - (f(x_{i+1}) - f(x_i)) =$$
$$= f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i),$$

тобто при $k = 1, 2$ формула є правильною. Припустимо, що формула є правильною при $k = l$. Доведемо, що вона є правильною при $k = l+1$.

Дійсно,

$$\Delta^{l+1} f(x_i) = \Delta^l f(x_{i+1}) - \Delta^l f(x_i) =$$
$$= \sum_{j=0}^{l} (-1)^{l-j} C_l^j f(x_{i+j+1}) - \sum_{j=o}^{l} (-1)^{l-j} C_l^j f(x_{i+j}) = f(x_{i+j+1}) + (-1)^{l+1} f(x_i) +$$
$$+ \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^{l-j} C_l^j f(x_{i+j+1}) + \sum_{j=1}^{l} (-1)^{i+1+j} C_l^j f(x_{i+j}) =$$
$$= f(x_{i+l+1}) + (-1)^{l+1} f(x_i) + \sum_{j=1}^{l} (-1)^{l+1-j} (C_l^j + C_l^{j-1}) f(x_{i+j}).$$

Оскільки

$$C_l^j + C_l^{j-1} = \frac{l!}{j!(l-j)!} + \frac{l!}{(j-1)!(l-j+1)!} =$$
$$= \frac{l!}{(j-1)!(l-j)!}\left(\frac{1}{j} + \frac{1}{l-j+1}\right) = \frac{(l+1)!}{j!(l-j+1)!} = C_{l+1}^j,$$

то

$$\Delta^{l+1} f(x_i) = f(x_{i+l+1}) + (-1)^{l+1} f(x_i) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{l} (-1)^{l+1-j} C_{l+1}^j f(x_{i+j}) = \sum_{j=0}^{l+1} (-1)^{l+1-j} C_{l+1}^j f(x_{i+j}),$$

що й треба було довести.

При $k = n$, $i = 0$ маємо

$$\Delta^n f(x_0) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} C_n^j f(x_j).$$

З'ясуємо зв'язок між скінченними й розділеними різницями у випадку, якщо $x_i - x_{i-1} = h \quad (i = 1, 2, \dots, n)$. Доведемо формулу

$$f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k}) = \frac{\Delta^k f(x_i)}{k!\, h^k} \quad (k \le n - i).$$

Доведення здійснимо методом математичної індукції. Для розділених різниць першого порядку

$$f(x_i; x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta f(x_i)}{1!\, h},$$

для розділених різниць другого порядку

$$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}) - f(x_i; x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i} =$$

$$= \frac{\Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i)}{2!\, h^2} = \frac{\Delta^2 f(x_i)}{2!\, h^2},$$

тобто при $k = 1, 2$ формула є правильною. Припустимо, що формула є правильною при $k = l$. Доведемо, що вона є правильною й при $k = l + 1$.

Справді,

$$f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+l+1}) = \frac{f(x_{i+1}; \dots; x_{i+l+1}) - f(x_i; \dots; x_{i+l})}{x_{i+l+1} - x_i} =$$

$$= \frac{\Delta^l f(x_{i+l}) - \Delta^l f(x_i)}{(l+1)!\, h h^l} = \frac{\Delta^{l+1} f(x_i)}{(l+1)!\, h^{l+1}},$$

що й треба було довести.

При $i = 0$ маємо

$$f(x_0, x_1, \dots, x_k) = \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!\, h^k} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

На основі зв'язку скінченних різниць із розділеними отримуємо, що скінченні різниці n-го порядку від многочлена степеня n є сталими, а скінченні різниці вищого порядку дорівнюють нулеві.

2.8. Інтерполяційні формули Ньютона для рівновіддалених вузлів інтерполювання

Розглянемо інтерполяційну формулу Ньютона для інтерполювання вперед у випадку нерівновіддалених вузлів інтерполювання, узявши в ній за вузли інтерполювання точки $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0,1,\ldots,n)$. При цьому розділені різниці замінимо скінченними:

$$L_k(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!h}\Delta f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!h^2}\Delta^2 f(x_0) + \ldots +$$
$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{n!h^n}\Delta^n f(x_0).$$

Якщо зробити заміну $\dfrac{x - x_0}{h} = t$, урахувавши, що

$$x - x_i = (x - x_0) - (x_i - x_0) = th - ih = h(t - i),$$

то

$$L_k(x_0 + ht) = f(x_0) + \frac{t}{1!}\Delta f(x_0) + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-(n-1))}{n!}\Delta^n f(x_0).$$

Цю формулу називають *інтерполяційною формулою Ньютона для інтерполювання вперед з рівновіддаленими вузлами інтерполювання*.

Якщо в інтерполяційній формулі Ньютона для інтерполювання назад у випадку нерівновіддалених вузлів інтерполювання за вузли інтерполювання взяти точки $x_i = x_0 + ih$ і розділені різниці замінити скінченними, то отримаємо

$$L_k(x) = f(x_n) + \frac{x - x_n}{1!h}\Delta f(x_{n-1}) + \frac{(x - x_n)(x - x_{n-1})}{2!h^2}\Delta^2 f(x_{n-2}) +$$
$$+ \ldots + \frac{(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1)}{n!h^n}\Delta^n f(x_0).$$

Якщо зробити заміну $\dfrac{x - x_n}{h} = t$, урахувавши, що

$$x - x_{n-i} = (x - x_n) - (x_n - x_{n-i}) = th + ih = h(t + i),$$

то

$$L_n(x_n + ht) = f(x_n) + \frac{t}{1!}\Delta f(x_{n-1}) + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 f(x_{n-2}) + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+(n-1))}{n!}\Delta^n f(x_0).$$

Цю формулу називають *інтерполяційною формулою Ньютона для інтерполювання назад з рівновіддаленими вузлами інтерполювання.*

Залишкові члени інтерполяційної формули Ньютона для інтерполювання вперед та інтерполяційної формули Ньютона для інтерполювання назад матимуть відповідно такий вигляд:

$$R_{n+1}(x_0+ht)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}t(t-1)\ldots(t-n)h^{n+1},$$

$$R_{n+1}(x_n+ht)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}t(t+1)\ldots(t+n)h^{n+1}.$$

Зауваження. Інтерполяційні формули Ньютона для нерівновіддалених і рівновіддалених вузлів інтерполювання є лише іншою формою запису інтерполяційного многочлена Лагранжа.

Неважко переконатись у тому, що точність інтерполювання на різних ділянках зміни x різна. Інтерполяційну формулу Ньютона для інтерполювання вперед доцільно використовувати у випадку інтерполювання функції поблизу початкової точки x_0, а інтерполяційну формулу Ньютона для інтерполювання назад – у випадку інтерполювання функції поблизу кінцевої точки x_n, де вони дають найбільшу точність.

Якщо в інтерполяційній формулі Ньютона для інтерполювання назад у випадку нерівновіддалених вузлів інтерполювання за вузли інтерполювання взяти точки $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$, де $x_{i+1}-x_i=h\ \ (i=1,2,\ldots,k)$, і розділені різниці замінити на скінченні, то одержимо

$$L_k(x)=f(x_{k+1})+\frac{x-x_{k+1}}{1!h}\Delta f(x_k)+\frac{(x-x_{k+1})(x-x_k)}{2!h^2}\Delta^2 f(x_{k-1})+$$

$$+\ldots+\frac{(x-x_{k+1})(x-x_k)\ldots(x-x_2)}{n!h^n}\Delta^n f(x_1).$$

Зробивши заміну $\frac{x-x_k}{h}=t$, отримаємо

$$L_k(x_k+ht)=f(x_{k+1})+\frac{t-1}{1!}\Delta f(x_k)+\frac{(t-1)t}{2!}\Delta^2 f(x_{k-1})+\ldots+$$

$$+\frac{(t-1)t\,(t+1)\ldots(t+(k-2))}{k!}\Delta^k f(x_1).$$

Інтерполяційний многочлен, що має такий вигляд, використовують для побудови інтерполяційного методу Адамса розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь.

2.9. Інтерполяційні формули Гаусса, Стірлінга, Бесселя

Відомо багато інших форм запису інтерполяційного многочлена: формули Гаусса, Стірлінга, Бесселя, Лапласа – Еверетта та ін. Ці форми запису розраховані на певні розміщення вузлів.

Розглянемо побудову інтерполяційних многочленів, у яких початковим вузлом є центральний вузол.

Якщо в інтерполяційній формулі Ньютона для нерівновіддалених вузлів інтерполювання за вузли взяти точки

$$x_0, x_0+h, x_0-h, \ldots, x_0+nh, x_0-nh,$$

то

$$L(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0;x_0+h)+(x-x_0)(x-x_0-h)f(x_0;x_0+h;x_0-h)+$$
$$+(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0+h)f(x_0;x_0+h;x_0-h;x_0+2h)+\ldots+$$
$$+(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0+h)\ldots(x-x_0-nh)f(x_0;x_0+h;x_0-h;\ldots;x_0-nh)+$$
$$+(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0+h)\ldots(x-x_0-nh)(x-x_0-nh)\times$$
$$\times f(x_0;x_0+h;x_0-h;\ldots;x_0-nh;x_0+(n+1)h)+\ldots.$$

Ураховуючи симетричність розділених різниць відносно аргументів та їхній зв'язок зі скінченними різницями, одержуємо:

$$f(x_0;x_0+h)=\frac{\Delta f(x_0)}{1!h},$$

$$f(x_0;x_0+h;x_0-h)=f(x_0-h;x_0;x_0+h)=\frac{\Delta^2 f(x_0-h)}{2!h^2},$$

$$f(x_0;x_0+h;x_0-h;x_0+2h)=f(x_0-h;x_0;x_0+h;x_0+2h)=\frac{\Delta^3 f(x_0-h)}{3!h^3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(x_0;x_0+h;x_0-h;\ldots;x_0+nh;x_0-nh)=$$
$$=f(x_0-nh;x_0-(n-1)h;\ldots;x_0;x_0+h;\ldots;x_0+nh)=\frac{\Delta^{2n} f(x_0-nh)}{(2n)!h^{2n}},$$

$$f(x_0;x_0+h;x_0-h;\ldots;x_0+nh;x_0-nh;x_0+(n+1)h)=$$
$$=f(x_0-nh;x_0-(n-1)h;\ldots;x_0;x_0+h;\ldots;x_0+(n+1)h)=\frac{\Delta^{2n+1} f(x_0-nh)}{(2n+1)!h^{2n+1}},$$

тому

$$L(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!h}\Delta f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2!h^2}\Delta^2 f(x_0-h)+$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0+h)}{3!h^3}\Delta^3 f(x_0-h)+\ldots$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0+h)\ldots(x-x_0-nh)}{2n!h^{2n}}\Delta^{2n} f(x_0-nh)+$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0+h)\ldots(x-x_0-nh)(x-x_0+nh)}{(2n+1)!\,h^{2n+1}}\Delta^{2n+1}f(x_0-nh)+\ldots.$$

Після заміни $x = x_0 + th$ маємо

$$L(x)=f(x_0)+\frac{t}{1!}\Delta f(x_0)+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0-h)+\frac{t(t^2-1)}{3!}\Delta^3 f(x_0-h)+\ldots+$$

$$+\frac{t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots(t^2-(n-1)^2)(t-n)}{2n!}\Delta^{2n}f(x_0-nh)+$$

$$+\frac{t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots(t^2-(n-1)^2)(t^2-n^2)}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1}f(x_0-nh)+\ldots\ .$$

Ця формула називається *першою інтерполяційною формулою Гаусса.*

Візьмемо вузли інтерполювання в такому порядку: $x_0; x_0-h; x_0+h;\ldots; x_0-nh; x_0+nh$, … . Аналогічно одержимо

$$L(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!\,h}\Delta f(x_0-h)+\frac{(x-x_0)(x-x_0+h)}{2!\,h^2}\Delta^2 f(x_0-h)+$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0+h)}{3!\,h^3}\Delta^3 f(x_0-2h)+\ldots+$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0+h)\ldots(x-x_0-(n-1)h)(x-x_0+nh)}{2n!\,h^{2n}}\Delta^{2n}f(x_0-nh)+$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0+h)\ldots(x-x_0-nh)(x-x_0+nh)}{(2n+1)!\,h^{2n+1}}\times$$

$$\times\Delta^{2n+1}f(x_0-(n+1)h)+\ldots.$$

Зробивши заміну $x = x_0 + th$, матимемо *другу інтерполяційну формулу Гаусса*

$$L(x_0+th)=f(x_0)+\frac{t}{1!}\Delta f(x_0-h)+\frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 f(x_0-h)+$$

$$+\frac{t(t^2-1)}{3!}\Delta^3 f(x_0-2h)+\ldots+\frac{t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots(t^2-(n-1)^2)(t+n)}{2n!}\Delta^{2n}f(x_0-nh)+$$

$$+\frac{t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\ldots(t^2-(n-1)^2)(t^2-n^2)}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1}f(x_0-(n+1)h)+\ldots.$$

Якщо ми візьмемо півсуму двох інтерполяційних формул Гаусса, то отримаємо *інтерполяційну формулу Стірлінга* у вигляді

$$L(x) = f(x_0) + \frac{t}{1!}\frac{1}{2}\left(\Delta f(x_0) + \Delta f(x_0 - h)\right) + \frac{t^2}{2!}\Delta^2 f(x_0 - h) +$$

$$+ \frac{t\left(t^2 - 1\right)}{3!}\frac{1}{2}\left(\Delta^3 f(x_0 - h) + \Delta^3 f(x_0 - 2h)\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{t\left(t^2 - 1\right)}{3!}\frac{1}{2}\left(\Delta^3 f(x_0 - h) + \Delta^3 f(x_0 - 2h)\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{t^2\left(t^2 - 1^2\right)\left(t^2 - 2^2\right)\ldots\left(t^2 - (n-1)^2\right)}{2n!}\Delta^{2n} f(x_0 - nh) +$$

$$+ \frac{t\left(t^2 - 1^2\right)\left(t^2 - 2^2\right)\ldots\left(t^2 - (n-1)^2\right)\left(t^2 - n^2\right)}{(2n+1)!}\frac{1}{2}\left(\Delta^{2n+1} f(x_0 - nh) + \Delta^{2n+1} f(x_0 - (n+1)h)\right).$$

Інтерполяційні формули Гаусса і Стірлінга застосовуються для наближення функції поблизу центрального вузла x_0.

Середнє арифметичне першої інтерполяційної формули Гаусса з початковим вузлом x_0 і першої інтерполяційної формули Гаусса з початковим вузлом x_1 дає *першу інтерполяційну формулу Бесселя*. *Другу інтерполяційну формулу Бесселя* можна отримати як середнє арифметичне двох перших формул Гаусса – із початковим вузлом x_0 та із початковим вузлом x_{-1}.

2.10. Задача найкращого вибору вузлів інтерполювання

Відхилення $f(x)$ від $L_n(x)$ залежить від величин $f^{(n+1)}(\xi)$ і $\omega_{n+1}(x)$. Якщо перша величина визначається функцією $f(x)$, то на другу можна вплинути вибором вузлів x_i.

Як вибрати x_i, щоб величина $\sup\limits_{x\in[a,b]} \left|\omega_{n+1}(x)\right|$ була найменшою? Для відповіді на це запитання потрібно використати многочлени Чебишева.

Многочлени Чебишева визначаються так:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),\ |x| \le 1.$$

При n=1

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x.$$

При n=2

$$T_2(x) = \cos(2\arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1.$$

Далі із тотожності

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta \cos\theta,$$

або

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos n\Theta \cos\theta - \cos(n-1)\theta,$$

при $\theta = \arccos x$ одержимо

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Отже, $T_n(x)$ справді є многочленами степеня n, причому коефіцієнт при x^n дорівнює 2^{n-1}. Із рекурентної формули послідовно виводимо

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x,$$

$$\ldots\ldots\ldots .$$

Покажемо, що многочлен $T_n(x)$ має n дійсних різних коренів на проміжку [-1,1]. Справді, з рівняння

$$\cos(n \arccos x) = 0$$

дістаємо

$$\arccos x = \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right), \quad k \in \mathrm{Z}.$$

Це рівняння має розв'язок за умови, що

$$0 \le \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) \le \pi, \quad k \in \mathrm{Z},$$

тому $k = 0,1,\ldots,n-1$, і $T_n(x)$ має n різних дійсних коренів, що лежать у проміжку [-1,1]:

$$x_k = \cos\left(\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Зазначимо також, що максимум

$$\max_{x\in[-1;1]} |T_n(x)| = 1$$

досягається в $n+1$ точках проміжку [-1,1]. Розв'язуючи рівняння

$$\cos(n \arccos x) = \pm 1,$$

отримаємо

$$n \arccos = \pi m, \quad m \in \mathrm{Z}.$$

Це рівняння має розв'язок при m, що задовольняє умову

$$0 \le \frac{\pi\, m}{n} \le \pi,$$

тобто при $m = 0,1,\ldots,n$. Тому розв'язуючи це рівняння, одержимо

$$x_m = \cos\frac{\pi m}{n}, \quad m = 0,1,\ldots,n,$$

тобто $|\mathrm{T_n(x)}|$ набуває значення 1 в $n+1$ точках проміжку [-1,1], а сам многочлен $\mathrm{T_n(x)}$ у цих точках поперемінно набуває значень -1 і 1.

Розглянемо тепер $\mathrm{T_{n+1}(x)}$. Цей многочлен на проміжку [-1;1] має *n*+1 дійсних коренів

$$x_k = \cos\left(\frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\right),\ k = 0,1,\ldots,n$$

і в (n+2)-х точках $x_m = \cos\dfrac{\pi m}{n+1}$ $(m = 0,1,\ldots,n+1)$ проміжку [-1,1] має максимум $\max\limits_{x\in[-1;1]}|\mathrm{T_{n+1}(x)}| = 1$.

Тому якщо за відрізок інтерполювання взяти [-1,1] і за вузли інтерполювання – корені x_k многочлена Чебишева $\mathrm{T_{n+1}(x)}$, то

$$\omega_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n}T_{n+1}(x), \qquad \sup_{x\in[-1,1]}|\,\omega_{n+1}(x)\,| = \frac{1}{2^n}.$$

Покажемо, що для будь-якого многочлена P(x) степеня *n*+1 зі старшим коефіцієнтом 1

$$\sup_{x\in[-1,1]}|\,\mathrm{P}(x)\,| \ge \frac{1}{2^n}.$$

Дійсно, якщо припустити, що існує такий многочлен P(x) степеня *n*+1 зі старшим коефіцієнтом 1, для якого $\sup\limits_{x\in[-1,1]}|\,\mathrm{P}(x)\,| < \dfrac{1}{2^N}$, то різниця $\mathrm{Q(x)} = \dfrac{1}{2^n}\mathrm{T}_{n+1}(x) - \mathrm{P}(x)$ буде многочленом степеня не вище *n*, який у (*n*+2)-х точках $x_m = \cos\dfrac{\pi m}{n+1}$ $\left(m = 0,1,\ldots,n+1\right)$ поперемінно набуває додатних і від'ємних значень, тобто має принаймні *n*+1 коренів, що неможливо, оскільки Q(x) – многочлен степеня не вище *n.*

Отже, якщо обмежитися проміжком [-1,1], то найменше значення величини $\sup\limits_{x\in[-1,1]}|\,\omega_{n+1}(x)\,|$ буде у випадку, якщо за вузли інтерполювання взяти корені многочлена $\mathrm{T_{n+1}(x)}$, тоді

$$|\,f(x) - L_n(x)\,| \le \frac{M_{n+1}}{2^n(n+1)!}, \qquad M_{n+1} = \sup_{x\in[-1,1]}|\,f^{(n+1)}(x)\,|.$$

Якщо інтерполювання проводиться на довільному відрізку [*a*,*b*], то лінійною заміною $x = ((b-a)z + (b+a))/2$ його можна перевести у проміжок [-1,1]. Тоді за вузли інтерполювання можна взяти корені многочлена Чебишева $\mathrm{T_{n+1}(z)}$

$$z_k = \cos\frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Якщо зробити обернену заміну

$$z = \frac{1}{b-a}(2x-b-a),$$

яка переводить проміжок [-1,1] у проміжок [a, b], то корені многочлена $T_{n+1}(z)$ перейдуть у

$$x_k = \frac{1}{2}\left((b-a)\cos\frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)+(b+a)\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

а старший коефіцієнт многочлена, коренями якого є x_k, дорівнюватиме $2^n \dfrac{2^{n+1}}{(b-a)^{n+1}}$. Оцінка для цього випадку

$$\left|f(x)-L_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}},$$

де

$$M_{n+1} = \sup_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|.$$

Зауваження. Ми скористалися тією властивістю многочленів $\overline{T}_n(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$, що для них $\sup\limits_{x\in[-1,1]}\left|\overline{T}_n(x)\right|$ має найменше значення серед усіх многочленів степеня n зі старшим коефіцієнтом 1. Завдяки цій властивості многочлени $\overline{T}_n(x)$ одержали назву *многочленів, що найменше відхиляються від нуля*.

2.11. Збіжність інтерполяційного процесу

Нехай $f(x) \in R$. Розглянемо на проміжку [a,b] систему вузлів

$$x^{(0)} = \{x_n^{(0)}\},\ x^{(1)} = \{x_0^{(1)}, x_1^{(1)}\},\ x^{(2)} = \{x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\}, \ldots,$$
$$x^{(n)} = \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}\}, \ldots .$$

Кожній послідовності вузлів $x^{(n)}$ відповідає інтерполяційний многочлен Лагранжа $L_n(x)$ (n=0,1,…), побудований для функції $f(x)$ за вузлами інтерполювання $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$. Побудовану таким чином послідовність інтерполяційних многочленів $\{L_n(x)\}$ називають *інтерполяційним процесом*.

Інтерполяційний процес є збіжним, якщо

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x) = f(x), \quad x \in [a,b].$$

Цей процес рівномірно збігається на [*a,b*], якщо послідовність $\{L_n(x)\}$ рівномірно збігається до $f(x)$ на [*a,b*].

Теорема. Якщо функція f(x) нескінченно диференційовна і всі її похідні обмежені в сукупності на проміжку [*a,b*], тобто існує така стала *M*>0, що для всіх $x\in[a,b]$ і всіх $n=0,1,2,...$ виконується нерівність $|f_n(x)|\le M$, то інтерполяційний процес для функції *f(x)* збігається рівномірно до $f(x)$ на [*a,b*].

Доведення. Розглянемо оцінку залишкового члена для $L_n(x)$:

$$|f(x)-L_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|,$$

де

$$M_{n+1}=\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|,$$

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0^{(n)})(x-x_1^{(n)})...(x-x_n^{(n)}).$$

Множина точок $x^{(n)}$ належить проміжкові $[a,b]$, тому

$$|\,\omega_{n+1}(x)|<(b-a)^{n+1} \quad \text{і} \quad |\,f(x)-L_n(x)|<M_{n+1}\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

За умовою теореми $M_{n+1}\le M$ для всіх $n=0,1,2,...$, тому

$$|\,f(x)-L_n(x)|<M\frac{(b-a\ )^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Із того, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}=0,$$

випливає рівномірна збіжність послідовності $\{L_n(x)\}$ до $f(x)$ на проміжку $[a,b]$.

Якщо $f(x)$ – ціла функція, то її похідні обмежені в сукупності на будь-якому проміжку числової осі. Тому з теореми випливає такий наслідок.

Наслідок. Якщо $f(x)$ – ціла функція, то інтерполяційний процес для функції $f(x)$ збігається рівномірно до $f(x)$ на $[a,b]$.

2.12. Інтерполяційний многочлен Ерміта та його залишковий член

Досі ми розглядали задачу побудови для функції $f(x)\in R$ інтерполяційного многочлена у вигляді

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi_k(x),$$

який у вузлах інтерполювання $x_0,x_1,\ldots,x_n$ набуває тих самих значень, що й $f(x)$. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi_i(x)$ $(i=0,1,\ldots,n)$ – диференційовні, то можна ставити задачу про відшукання інтерполяційного многочлена $\varphi(x)$, такого, щоб у вузлах інтерполювання збігалися не тільки значення $f(x)$ і $\varphi(x)$, а й значення похідних від $f(x)$ і $\varphi(x)$ до деякого порядку. Розглянемо задачу такого типу.

Нехай $f(x)\in R$ і точки $x_0,x_1,\ldots,x_n$, де $a\le x_0<x_1<\ldots<x_n\le b$, є вузлами інтерполювання. Уведемо позначення:

$$f(x_i)=y_i,\ \ f'(x_i)=y_i',\ \ f''(x_i)=y_i'',\ \ f^{(l)}(x_i)=y_i^{(l)}.$$

Виберемо в R систему лінійно незалежних на $[a,b]$ функцій $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x),\ldots$, $\varphi_m(x)$ і знайдемо таку їх лінійну комбінацію

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{m}a_k\varphi_k(x),$$

щоб

$$\begin{gathered}
\varphi(x_0)=y_0,\ \varphi'(x_0)=y_0',\ \ldots,\varphi^{(k_0-1)}(x_0)=y_0^{(k_0-1)},\\
\varphi(x_1)=y_1,\ \varphi'(x_1)=y_1',\ \ldots,\varphi^{(k_1-1)}(x_1)=y_1^{(k_1-1)},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi(x_n)=y_n,\ \varphi(x_n)=y_n',\ \ldots,\ \varphi^{(k_n-1)}(x_n)=y_n^{(k_n-1)}.
\end{gathered}$$

Підставивши $\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi_k(x)$, одержимо систему $r=k_0+k_1+\ldots+k_n$ лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження коефіцієнтів $a_0,a_1,\ \ldots,a_m$. Ця система матиме єдиний розв'язок, якщо $m=r-1$ і визначник цієї системи

$$\begin{vmatrix}
\varphi(x_0) & \varphi_1(x_0) & \ldots & \varphi_m(x_0)\\
\varphi'_0(x_0) & \varphi'_1(x_0) & \ldots & \varphi'_m(x_0)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\varphi_0^{(k_0-1)}(x_0) & \varphi_1^{(k_0-1)}(x_0) & \ldots & \varphi_m^{(k_0-1)}(x_0)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \ldots & \varphi_m(x_n)\\
\varphi'_0(x_n) & \varphi'_1(x_n) & \ldots & \varphi'_m(x_n)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\varphi_0^{(k_0-1)}(x_n) & \varphi_1^{(k_0-1)}(x_n) & \ldots & \varphi_m^{(k_0-1)}(x_n)
\end{vmatrix}\ne 0.$$

Візьмемо $\varphi_i(x) = x^i \quad (i = 0, 1, \ldots, m)$, тобто шукатимемо $\varphi(x)$ у вигляді многочлена степеня не вище m. Такий многочлен прийнято називати *інтерполяційним многочленом Ерміта*.

Таким чином, потрібно побудувати алгебраїчний многочлен степеня не вище m, який задовольняє поставлені умови:

$$
\begin{aligned}
&H_m(x_0) = y_0 \,,\ H'_m(x_0) = y'_0 \,,\ \ldots \,,\ H_m^{(k_0-1)}(x_0) = y_0^{(k_0-1)},\\
&H_m(x_1) = y_1 \,,\ H'_m(x_1) = y'_1 \,,\ \ldots \,,\ H_m^{(k_1-1)}(x_1) = y_1'^{(k_1-1)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&H_m(x_n) = y_n \,,\ H'_m(x_n) = y'_n \,,\ \ldots \,,\ H_m^{(k_n-1)}(x_n) = y_n^{(k_n-1)}.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Запишемо $H_m(x)$ у вигляді

$$H_m(x) = L_n(x) + \omega_{n+1}(x) H_{m-n-1}(x), \tag{2.5}$$

де $L_n(x)$ – інтерполяційний многочлен Лагранжа, побудований за вузлами $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $L_n(x_i) = y_i$,

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n);$$

$H_{m-n-1}(x)$ – многочлен степеня не вище $m - n - 1$.

Очевидно, що многочлен $H_m(x)$ має степінь не вище m і $H_m(x_i) = L_n(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$ для будь-якого многочлена $H_{m-n-1}(x)$. Доберемо тепер $H_{m-n-1}(x)$ так, щоб була виконана решта умов (2.4).

Здиференціювавши обидві частини рівності (2.5), одержимо

$$H'_m(x) = L'_n(x) + \omega'_{n+1}(x) H_{m-n-1}(x) + \omega_{n+1}(x) H'_{m-n-1}(x).$$

При $x = x_i$ маємо

$$y'_i = L'_n(x_i) + \omega'_{n+1}(x_i) H_{m-n-1}(x_i).$$

Оскільки $\omega'_{n+1}(x_i) \neq 0$, то в тих точках x_i, у яких задано значення многочлена $H'_m(x)$, матимемо $H_{m-n-1}(x_i) = z_i$, де

$$z_i = \frac{y'_i - L'_n(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)}.$$

Диференціюючи ще раз, одержимо

$$H''_m(x) = L''_n(x) + \omega''_{n+1}(x) H_{m-n-1}(x) + 2\omega'_{n+1}(x) H'_{m-n-1}(x) + \omega_{n+1}(x) H''_{m-n-1}(x).$$

При $x = x_i$ маємо

$$y''_i = L''_n(x_i) + \omega''_{n+1}(x_i) H_{m-n-1}(x_i) + 2\omega'_{n+1}(x_i) H'_{m-n-1}(x_i).$$

Звідси для тих точок x_i, у яких задано значення многочлена $H''_m(x)$, матимемо $H'_{m-n-1}(x_i) = z'_i$, де

$$z'_i = \frac{y'_i - L''_n(x_i) - z_i \omega''_{n+1}(x_i)}{2\omega'_{n+1}(x_i)}.$$

Аналогічно в точках x_i, у яких задано значення многочлена $H''_m(x)$, знайдемо $H''_{m-n-1}(x_i) = z''_i$ і т.д. Продовжуючи цей процес потрібну кількість разів, зведемо відшукання $H_m(x)$ до відшукання многочлена $H_{m-n-1}(x)$, який задовольняє умови:

$$H_{m-n-1}(x_0) = z_0\,,\ H'_{m-n-1}(x_0) = z'_0\,,\ \ldots, H_{m-n-1}^{(k_0-2)}(x_0) = z_0^{(k_0-2)}\,,$$

$$H_{m-n-1}(x_1) = z_1\,,\ H'_{m-n-1}(x_1) = z'_1\,,\ \ldots, H_{m-n-1}^{(k_1-2)}(x_1) = z_1^{(k_1-2)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$H_{m-n-1}(x_n) = z_n\,,\ H'_{m-n-1}(x_n) = z'_n\,,\ \ldots, H_{m-n-1}^{(k_n-2)}(x_n) = z_n^{(k_n-2)},$$

де $z_0,\ z'_0,\ \ldots,\ z_0^{(k_0-2)},\ \ldots, z_n, z'_n,\ \ldots,\ z_n^{(k_n-2)}$ – відомі числа.

Щоб знайти $H_{m-n-1}(x)$, використаємо такий самий підхід. Тоді задача відшукання $H_{m-n-1}(x)$ зведеться до задачі відшукання многочлена Ерміта більш низького степеня і т.д. Врешті-решт, треба побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа за вузлами, у яких задано значення найстаршої похідної від $f(x)$. Очевидно, що степінь побудованого таким чином многочлена $H_m(x)$ дорівнюватиме кількості вузлів, у яких задано y_i, плюс кількість вузлів, у яких задано y'_i і т.д., плюс кількість вузлів, у яких задано значення найстаршої похідної від $f(x)$, що є в умовах (2.4), мінус одиниця. Тобто цей степінь дорівнює $k_0 + k_1 + \ldots + k_n - 1 = m$. Побудований таким чином многочлен $H_m(x)$ єдиний. Дійсно, якби існували два такі многочлени $H_m^{(1)}(x)$ і $H_m^{(2)}(x)$, то їх різниця $H_m^{(1)}(x) - H_m^{(2)}(x)$ була б многочленом степеня не вище *m*, який на проміжку [*a,b*] має *m*+1 коренів (з урахуванням їхньої кратності), що неможливо.

Многочлен Ерміта можна побудувати й безпосередньо. Запишемо $H_m(x)$ у вигляді

$$H_m(x) = P_0(x) + (x - x_0)^{k_0} P_1(x) + (x - x_0)^{k_0} (x - x_1)^{k_1} P_2(x) +$$
$$+ \ldots + (x - x_0)^{k_0} (x - x_1)^{k_1} \ldots (x - x_{n-1})^{k_{n-1}} P_n(x),$$

де $P_i(x) = A_0^i + (x - x_i)A_1^i + \ldots + (x - x_i)^{k_i - 1} A_{k_i - 1}^i$ (i =0,1,…,n).

Многочлени $P_i(x)$ шукатимемо так. Позначивши $H_m(x) - P_0(x) \equiv Q_0(x)$, одержимо

$$Q_0(x_0)=0,\ Q_0'(x_0)=0,\ \ldots,\ Q_0^{k_0-1}(x_0)=0,$$

або

$$y_0 - P_0(x_0) = 0\,,\ y'_0 - P_0'(x_0) = 0\,, \ldots, y_0^{(k_0-1)} - P_0^{(k_0-1)}(x_0) = 0\,.$$

Із цих умов можна визначити коефіцієнти многочлена $P_0(x)$. Позначивши

$$Q_1(x) \equiv \frac{H_m(x) - P_0(x)}{(x - x_0)^{k_0}} - P_1(x),$$

отримаємо умови

$$Q_1(x_1) \equiv 0, Q_1'(x_1) = 0, \ldots, Q_1^{(k_1-1)}(x_1) = 0,$$

із яких визначимо коефіцієнти многочлена $P_1(x)$. Аналогічно позначивши

$$Q_2(x) \equiv \frac{H_m(x) - P_0(x) - (x - x_0)^{k_0} P_1(x)}{(x - x_0)^{k_0}(x - x_1)^{k_1}} - P_2(x),$$

одержимо умови

$$Q_2(x) = 0, Q_2'(x_2) = 0, \ldots, Q_2^{(k_2-1)}(x_2) = 0$$

для визначення коефіцієнтів многочлена $P_2(x)$ і т.д.

Коефіцієнти многочлена $P_n(x)$ можна визначити з умов

$$H_m(x_n) = y_n, H_m'(x_n) = y_n', \ldots, H_m^{(k_n-1)}(x_n) = y_n^{(k_n-1)}.$$

Знайдемо залишковий член інтерполяційного многочлена Ерміта. Якшо $H_m(x)$ – інтерполяційний многочлен Ерміта, побудований для функції $f(x)$, то

$$f(x) = H_m(x) + R_{m+1}(x),$$

де $R_{m+1}(x)$ – залишковий член.

Шукатимемо $R_{m+1}(x)$ у вигляді

$$R_{m+1}(x) = K(x - x_0)^{k_0}(x - x_1)^{k_1} \ldots (x - x_n)^{k_n},$$

де K – деяка стала.

Нехай $f(x) \in C^{m+1}[a;b]$. Розглянемо допоміжну функцію

$$\varphi(z) = f(z) - H_m(z) - K(z - x_0)^{k_0}(z - x_1)^{k_1} \ldots (z - x_n)^{k_n}.$$

Ця функція на проміжку $[a,b]$ має $m+1$ нулів, ураховуючи їхню кратність (нуль кратності k_0 у точці x_0, нуль кратності k_1 у точці x_1 і т.д., нуль кратності k_n у точці x_n). Доберемо сталу K так, щоб при $z = x$, де x – та точка, для якої ми здійснюємо оцінку, $\varphi(x) = 0$. Тоді

$$K = \frac{f(x) H_m(x)}{(x - x_0)^{k_0}(x - x_1)^{k_1} \ldots (x - x_n)^{k_n}}.$$

При такому значенні K функція $\varphi(z)$ на проміжку $[a,b]$ матиме $m+2$ нулів. Тоді за теоремою Ролля функція $\varphi^{(m+1)}(z)$ на проміжку $[a,b]$

матиме хоча б один нуль. Нехай при $z = \xi$ виконується умова $\varphi^{(m+1)}(\xi) = 0$. Оскільки

$$\varphi^{(m+1)}(z) = f^{(m+1)}(z) - K(m+1)!,$$

то

$$\varphi^{(m+1)}(\xi) = f^{(m+1)}(\xi) - K(m+1)!.$$

Звідси

$$K = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}.$$

Отже,

$$R_{m+1} = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x - x_0)^{k_0}(x - x_1)^{k_1}...(x - x_n)^{k_n}.$$

Приклад. Побудувати інтерполяційний многочлен Ерміта $H_m(x)$, для якого виконуються умови

$$H_m(x_i) = y_i,\ H'_m(x_i) = y'_i \quad (i = 0,1,....n).$$

Запишемо $H_m(x)$ у такому вигляді:

$$H_m(x) = L_n(x) + \omega_{n+1}(x) H_{m-n-1}(x).$$

Диференціюючи обидві частини рівності, отримуємо

$$H'_m(x) = L'_n(x) + \omega'_{n+1}(x) H_{m-n-1}(x) + \omega_{n+1}(x) H'_{m-n-1}(x).$$

При $x = x_i$ маємо $y'_i = L'_n(x_i) + \omega'_{n+1}(x_i) H_{m-n-1}(x_i)$.

Звідси $H_{m-n-1}(x_i) = z_i$, де $z_i = \dfrac{y'_i - L'_n(x_i)}{\omega'_{n+i}(x_i)}$.

Тоді $H_{m-n-1}(x)$ можна записати у вигляді інтерполяційного многочлена Лагранжа, побудованого за значеннями z_i:

$$H_{m-n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n} z_i \Phi_{ni}(x),$$

де

$$\Phi_{ni} = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}.$$

Тому

$$H_m(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \Phi_{ni}(x) + \omega_{n+1}(x) \sum_{i=0}^{n} z_i \Phi_{ni}(x).$$

Розіб’ємо другий доданок на дві частини:

$$\omega_{n+1}(x)\sum_{i=0}^{n} z_i \Phi_{ni}(x) = \sum_{i=0}^{n}\omega_{n+1}(x)\frac{y_i' - L_n'(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)}\Phi_{ni}(x) =$$

$$= \sum_{i=-}^{n} y_i' \frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_i)}\Phi_{ni}(x) - \omega_{n+1}(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{L_n'(x_i)}{\omega_{n+1}(x)}\Phi_{ni}(x),$$

тоді

$$\sum_{i=-}^{n} y_i' \frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_i)}\Phi_{ni}(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i'(x - x_i)\Phi^2{}_{ni}(x),$$

а

$$\omega_{n+1}(x)\sum_{i=0}^{n} y_i' \frac{L_n'(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)}\Phi_{ni}(x) = \omega_{n+1}(x)\sum_{i=o}^{n}\sum_{j=0}^{n}\omega_{n+1}(x)\frac{y_j \Phi'_{nj}(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)}\Phi_{ni}(x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} y_j \sum_{i=0}^{n}\omega_{n+i}(x)\frac{\Phi'_{nj}(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)}\Phi_{ni}(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \sum_{j=0}^{n}\omega_{n+1}(x)\frac{\Phi'_{ni}(x_j)}{\omega'_{n+1}(x_j)}\Phi_{nj}(x).$$

Таким чином, шуканий многочлен можна записати так:

$$H_m(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i\left(\Phi_{ni}(x) - \sum_{j=0}^{n}\omega_{n+1}(x)\frac{\Phi'_{ni}(x_j)}{\omega'_{n+1}(x_j)}\Phi_{nj}(x)\right) + \sum_{i=0}^{n} y'(x - x_i)\Phi^2_{ni}(x).$$

Позначимо

$$P_i(x) = \Phi_{ni}(x) - \sum_{j=0}^{n}\omega_{n+1}(x)\frac{\Phi'_{ni}(x_j)}{\omega'_{n+1}(x_j)}\Phi_{nj}(x).$$

Очевидно, що $P_i(x)$ – це многочлен степеня $2n$+1.

При $x = x_k$ одержимо

$$P_i(x_k) = \Phi_{ni}(x_k) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } i = k, \\ 0, \text{якщо } i \neq k, \end{cases}$$

тобто $P_i(x)$ набуває нульового значення у всіх точках $x_k\ (k \neq i)$. Розглянемо похідну від цього многочлена:

$$P_i'(x) = \Phi'_{ni}(x) - \omega'_{n+1}(x)\sum_{j=0}^{n}\frac{\Phi'_{ni}(x_j)}{\omega'_{n+1}(x_j)}\Phi_{nj}(x_k) - \omega_{n+1}(x)\sum_{j=0}^{n}\frac{\Phi'_{ni}(x_j)}{\omega'_{n+1}(x_j)}\Phi'_{nj}(x_k).$$

При $x = x_k\ (k = 0, 1, ... n)$ маємо

$$P_i'(x_k) = \Phi'_{ni}(x_k) - \omega'_{n+1}(x_k)\sum_{j=0}^{n}\frac{\Phi'_{ni}(x_j)}{\omega'_{n+1}(x_j)}\Phi_{nj}(x_k) = \Phi'_{ni}(x_k) - \Phi'_{ni}(x_k) = 0.$$

Отже, $P_i'(x)$ набуває нульового значення у всіх точках $x_k\ (k = 0, 1, ..., n)$. Нулі $x_0, x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$ многочлена $P_i(x)$ мають кратність 2. Тому цей многочлен повинен мати множником добуток

$$(x - x_0)^2 (x - x_1)^2 ... (x - x_{i-1})^2 (x - x_{i+1})^2 ... (x - x_n)^2.$$

Позначимо

$$\omega_{ni}(x_i) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n).$$

Очевидно, що

$$\omega_{ni}(x_i) = \omega'_{n+1}(x_i),\ 2\,\omega'_{ni}(x_i) = \omega'_{n+1}(x_i).$$

Оскільки $P_i(x)$ є многочленом степеня $2n$+1, то запишемо його у вигляді

$$P_i(x) = \omega_{ni}^2(x)(A_i + B_i(x - x_n)). \tag{2.6}$$

Визначимо коефіцієнти A_i і B_i. При $x = x_i$

$$P_i(x_i) = l = A_i\ \omega_{ni}^2(x_i) = A_i\ \omega'^2_{n+1}(x_i),$$

звідки $A_i = \dfrac{l}{\omega'^2_{n+1}(x_i)}$.

Для того щоб знайти B_i, здиференціюємо рівність (2.6):

$$P_i'(x) = 2\,\omega_{ni}(x)\omega'_{ni}(x)(A_i + B_i(x - x_i)) + B_i\ \omega_{ni}^2(x).$$

При $x = x_i$ маємо

$$P_i'(x) = 0 = 2A_i\omega_{ni}(x_i)\omega'_{ni}(x_i) + B_i\omega_{ni}^2(x_i),$$

або

$$0 = \frac{\omega''_{n+1}(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)} + B'_i\ \omega_{n+1}^2(x_i),$$

звідки

$$B'_i = \frac{\omega''_{n+1}(x_i)}{\omega'^3_{n+1}(x_i)},$$

тому

$$P_i(x) = \frac{\omega_{n+1}^2(x)}{(x - x_1)^2\,\omega'^2_{n+1}(x_i)}\left(l - \frac{\omega''_{n+1}(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)}(x - x_i)\right),$$

або

$$P_i(x) = \Phi_{ni}^2(x)\left(l - \frac{\omega''_{n+1}(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)}(x - x_i)\right).$$

Отже,

$$H_m(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i\Phi_{ni}(x) + \omega_{n+1}(x)\sum_{i=0}^{n} z_i\Phi_{ni}(x) + \sum_{i=0}^{n} y'_i(x - x_i)\Phi_{ni}^2(x),$$

або

$$H_m(x) = \sum_{i=0}^{n}\left(y_i\left(l - \frac{\omega''_{n+1}(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)}(x - x_i)\right) + y'_i(x - x_i)\right)\Phi_{ni}^2(x).$$

Зауваження. Аналогічно, як і для многочлена Лагранжа, доводиться рівномірна збіжність $H_m(x)$ до $f(x)$ на $[a, b]$, якщо функція $f(x)$ нескінченно диференційовна і всі її похідні обмежені в сукупності на проміжку $[a, b]$. Многочлен Ерміта також називають *інтерполяційним многочленом із кратними вузлами*, а числа $k_0, k_1, ... k_n$ – *кратностями* вузлів $x_0, x_1, ..., x_n$ відповідно. Виведено формулу для інтерполяційного многочлена Ерміта в загальному випадку, але вона незручна для практичного використання. Увівши поняття розділених різниць із кратними аргументами, інтерполяційний многочлен Ерміта можна записати через розділені різниці. Отримана при цьому формула називається узагальненою інтерполяційною формулою Ньютона з розділеними різницями.

2.13. Інтерполювання періодичних функцій

Нехай функція $f(x)$, визначена на проміжку $[0, 2\pi]$, є періодичною з періодом 2π. Побудуємо для функції $f(x)$ інтерполяційний многочлен, який би у вузлах інтерполювання, що належать проміжкові $[0, 2\pi)$, набував тих самих значень, що й $f(x)$.

Оскільки $f(x)$ – періодична функція, то шукатимемо інтерполяційний многочлен у вигляді тригонометричного многочлена. Тому за систему лінійно незалежних функцій $\{\varphi_k(x)\}$ візьмемо таку систему періодичних на проміжку $[0, 2\pi)$ функцій:

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, ...$$

Можна показати, що на проміжку $[0, 2\pi)$ система $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, ..., \sin nx, \cos nx$ при будь-якому n є системою Чебишева, тобто будь-який тригонометричний многочлен

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

на проміжку $[0, 2\pi)$ має не більше $2n$ дійсних коренів. Тому із критерію єдиності розв'язку задачі інтерполювання випливає, що для кожної визначеної на $[0, 2\pi)$ періодичної функції $f(x)$ з періодом 2π при будь-якому наборі із $2n+1$ попарно різних вузлів $x_0, x_1, ..., x_{2n}$ із проміжку $[0,2\pi)$ існує єдиний тригонометричний многочлен $T_n(x)$, який є інтерполяційним многочленом для $f(x)$ за заданою системою вузлів інтерполювання, тобто який задовольняє умову

$$T_n(x_j) = f(x_j) \quad (j = 0, 1, ..., 2n).$$

Покажемо, що шуканим тригонометричним многочленом є многочлен

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) t_k(x),$$

де $$t_k(x) = \frac{\sin\frac{x - x_0}{2} \ldots \sin\frac{x - x_{k-1}}{2} \sin\frac{x - x_{k+1}}{2} \ldots \sin\frac{x - x_{2n}}{2}}{\sin\frac{x_k - x_0}{2} \ldots \sin\frac{x_k - x_{k-1}}{2} \sin\frac{x_k - x_{k+1}}{2} \ldots \sin\frac{x_k - x_{2n}}{2}}.$$

Дійсно, легко побачити, що

$$t_k(x_i) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } i = k, \\ 0, \text{ якщо } i \neq k. \end{cases}$$

Тому $T_n(x_j) = f(x_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, 2n)$. Оскільки

$$\sin\frac{x-a}{2} \sin\frac{x-b}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{b-a}{2} - \cos\left(x - \frac{b+a}{2}\right)\right)$$

є тригонометричним многочленом першого порядку, а добуток двох тригонометричних многочленів $T_p(x)$ і $T_q(x)$ відповідно порядків p і q є тригонометричним многочленом порядку $p+q$, то $t_k(x)$ є тригонометричним многочленом порядку n. Тому $T_n(x)$ є тригонометричним многочленом порядку не вище n.

Особливий інтерес становить випадок рівновіддалених вузлів

$$x_k = \frac{2\pi k}{2n+1} \quad (k = 0, 1, \ldots, 2n).$$

Покажемо, що

$$t_k(x) = \frac{1}{2n+1} \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x - x_k)}{\sin\frac{x - x_k}{2}}.$$

Легко перевірити, що

$$t_k(x_i) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } i = k, \\ 0, \text{ якщо } i \neq k. \end{cases}$$

Якщо $i \neq k$, то $t_k(x_i) = 0$, бо

$$\sin\frac{2n+1}{2}(x_i - x_k) = \sin\pi(i-k) = 0, \quad \sin\frac{x_i - x_k}{2} = \sin\frac{\pi(i-k)}{2n+1} \neq 0.$$

Якщо $i = k$, то $x_i - x_k = 0$ і рівність $t_k(x_i) = 1$ випливає з відомої тотожності

$$\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha$$

при $\alpha = 0$. Із цієї тотожності також випливає, що $t_k(x)$ є тригонометричним многочленом порядку n.

Отже,

$$T_n(x) = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(x_k)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-x_k)}{\sin\frac{x-x_k}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(x_k)\left(1 + 2\sum_{m=1}^{n}\cos m(x-x_k)\right) =$$

$$= \frac{1}{2n+1}2n\sum_{k=0} f(x_k) + \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}\sum_{m=1}^{n} f(x_k)(\cos mx\cos mx_k + \sin mx\sin mx_k) =$$

$$= \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(x_k) + \sum_{m=1}^{n}\left(\left(\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(x_k)\cos mx_k\right)\cos mx + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(x_k)\sin mx_k\right)\sin mx\right),$$

або

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx + b_n\sin mx),$$

де

$$a_0 = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(x_k); \qquad a_m = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(x_k)\cos mx_k;$$

$$b_m = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(x_k)\sin mx_k.$$

Якщо функцію $f(x)$ розглядають на $[a,b]$, то проміжок $[0,2\pi]$ можна перевести в проміжок $[a,b]$ лінійною заміною $x = a + \frac{b-a}{2\pi}t$.

2.14. Інтерполювання функцій однієї змінної за допомогою сплайнів

Опишемо ще один підхід до наближення функцій – це наближення функцій за допомогою сплайнів. Зазначимо, що сплайном називається функція, для якої існує розбиття її області визначення D на підобласті, таке, що всередині кожної підобласті функція є многочленом певного степеня m**.** Крім того, ця функція є неперервною в D разом із похідними (m-1)-го порядку. Найпоширенішими в інженерних розрахунках є сплайни, складені із многочленів третього степеня (кубічні сплайни). Ці сплайни ми й розглянемо.

Нехай функцію $f(x)$, що є визначеною на проміжку $[a,b]$, задано значеннями в точках $x_0, x_1, \ldots x_n$, де $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, тобто $f(x_k) = f_k \quad (k = 0,1,\ldots,n)$.

Задача кусково-кубічної інтерполяції ставиться таким чином: знайти функцію $g(x)$ (яку називатимемо кубічним сплайном), визначену на $[a, b]$ і таку, що задовольняє умову

$$g(x) \in C^2[a,b], \tag{2.7}$$

на кожному з відрізків $[x_{k-1}, x_k]$ є кубічним многочленом вигляду

$$g(x) = g_k(x)\sum_{i=0}^{3} a_i^{(k)}(x_k - x)^i,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

та у вузлах x_i виконуються рівності

$$g(x_i) = f_i,\ i = 0, 1, \ldots, n,$$
$$g''(a) = g''(b) = 0.$$

Покажемо, що задача має єдиний розв'язок, і подамо алгоритм його відшукання.

Оскільки при $x \in [x_{i-1}, x_i]\,(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$g(x) = a_o^{(i)} + a_1^{(i)}(x_i - x) + a_2^{(i)}(x_i - x)^2 + a_3^{(i)}(x_i - x)^3,$$

то $\quad g'(x) = a_1^{(i)} - 2a_{21}^{(i)}(x_i - x) - 3a_{32}^{(i)}(x_i - x)^2,\ g''(x) = 2a_2^{(i)} + 6a_3^i(x_i - x).$

Позначимо $g''(x_i) = m_i, g''(x_{i-1}) = m_{i-1}$, тоді

$$\begin{cases} 2a_2^{(i)} = m_i, \\ 2a_2^{(i)} + 6a_3^{(i)}(x_i - x_{i-1}) = m_{i-1}. \end{cases}$$

Звідси

$$2a_2^{(i)} = m_i,\ \ 6a_3^{(i)} = \frac{m_{i-1} - m_i}{x_i - x_{i-1}},\ g''(x) = m_i + \frac{m_{i-1} - m_i}{x_i - x_{i-1}}(x_i - x).$$

Увівши позначення $h_i = x_i - x_{i-1}$, одержимо

$$g'(x) = m_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + m_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i}. \tag{2.8}$$

Інтегруючи двічі обидві частини рівності (2.8), отримуємо

$$g(x)=m_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}+m_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}+A_i\frac{x_i-x}{6h_i}+B_i\frac{x-x_{i-1}}{6h_i},$$

де A_i, B_i – деякі сталі інтегрування. Для A_i, B_i маємо умови

$$\begin{cases} m_i\dfrac{h_i^2}{6}+B_i=f_i, \\ m_{i-1}\dfrac{h_i^2}{6}+A_i=f_{i-1}. \end{cases}$$

Звідси $\qquad B_i=f_i-\dfrac{m_ih_i^2}{6},\;\; A_i=f_i-\dfrac{m_{i-1}h_i^2}{6}.$

Тому при $x\in[x_{i-1},x_i]$

$$g(x)=m_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}+m_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}+$$

$$+\left(f_{i-1}-\frac{m_{i-1}h_i^2}{6}\right)\frac{x_i-x}{6h_i}+\left(f_i-\frac{m_1h_i^2}{6}\right)\frac{x-x_{i-1}}{h_i}. \qquad (2.9)$$

Здиференціюємо (2.9):

$$g'(x)=m_{i-1}\frac{(x_i-x)^2}{2h_i}+m_i\frac{(x-x_{i-1})^2}{2h_i}+\frac{f_i-f_{i-1}}{h_i}-\frac{m_i-m_{i-1}}{6}h_i. \quad (2.10)$$

Далі маємо

$$g'(x_i-0)=m_i\frac{h_i}{2}+\frac{f_i-f_{i-1}}{h_i}-\frac{m_i-m_{i-1}}{6}h_i,$$

або

$$g'(x_i-0)=\frac{h_i}{6}m_{i-1}+\frac{h_i}{3}m_i+\frac{f_i-f_{i-1}}{h_i}. \qquad (2.11)$$

Запишемо (2.10) для відрізка $[x_i,x_{i+1}]$:

$$g'(x)=-m_i\frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_{i+1}}+m_{i+1}\frac{(x-x_i)^2}{2h_{i+1}}+\frac{f_{i+1}-f}{h_{i+1}}-\frac{m_{i-1}-m_i}{6}h_{i+1},$$

тоді

$$g'(x_i+0)=-m_i\frac{h_{i+1}}{3}+m_{i+1}\frac{h_{i+1}}{6}+\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}}. \qquad (2.12)$$

За умовою (2.7) функції $g(x)$ і $g'(x)$ можуть бути неперервними на $[a,b]$. З (2.11), (2.12) та умови неперервності $g'(x)$ у точках x_i $(i=1,2\ldots,n,)$ одержимо n-1 рівнянь

$$\frac{h_i}{6}m_{i-1}+\frac{h_i}{3}m_i+\frac{f_i-f_{i-1}}{h_i}=\frac{h_{i+1}}{3}m_i-\frac{h_{i+1}}{6}m_{i+1}+\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}},$$

або

$$\frac{h_i}{6}m_{i-1}+\frac{h_i+h_{i+1}}{3}m_i+\frac{h_{i+1}}{6}m_{i+1}.=\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}}+\frac{f_i-f_{i-1}}{h_i}$$

для $i=1,2,\ldots,n-1$.

Доповнивши ці рівняння рівностями $m_0=m_n=0$, одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для відшукання невідомих $m_1,m_2,\ldots,m_{n-1}$:

$$Am=Hf\,, \tag{2.13}$$

де A – квадратна матриця, що має такий вигляд:

$$A=\begin{pmatrix} \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2+h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{h_3}{6} & \frac{h_3+h_4}{3} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2}+h_{n-1}}{3} & \frac{h_{n-1}}{6}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1}+h_n}{3} \end{pmatrix},$$

а вектори m,f і прямокутна матриця H, яка має n+1 стовпців і n-1 рядків, такі:

$$m=\begin{pmatrix} m_1\\ m_2\\ \ldots\\ m_{n-1}\end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix} f_1\\ f_2\\ \ldots\\ f_n\end{pmatrix},$$

$$H=\begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} & -\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{h_2} & -\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3} & \frac{1}{h_3} & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{h_{n-2}} & -\frac{1}{h_{n-2}}-\frac{1}{h_{n-1}} & \frac{1}{h_{n-1}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{h_{n-1}} & -\frac{1}{h_{n-1}}-\frac{1}{h_n} & \frac{1}{h_n} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо властивості матриці A. Матриця A є симетричною, і для її елементів a_{ij} $(i,j=1,2,\ldots,n-1)$ виконуються співвідношення

$$\min_i\left(|a_{ij}|-\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\right)=q>0,$$

$$q=\min\left(\frac{h_1}{3}+\frac{h_2}{6},\min_{2\le i\le n-2}\frac{h_i+h_{i+1}}{6},\frac{h_n}{3}+\frac{h_{n-1}}{6}\right),$$

які означають, що матриця А є матрицею зі строго діагональною перевагою.

Квадратна матриця A називається *матрицею зі строго діагональною перевагою*, якщо для неї виконується умова

$$\min_i\left(|a_{ij}|-\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\right)>0\,.$$

Покажемо, що така матриця є невиродженою. Припустимо від супротивного, що матриця A є виродженою. Це означає, що однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь $Ax=B$ має ненульовий розв'язок. Запишемо цю систему в розгорнутій формі:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_{j=0}\quad(i=1,2,\ldots,n).$$

Нехай $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – ненульовий розв'язок цієї системи. Тоді з k-го рівняння системи одержуємо $-a_{kk}x_k=\sum_{j\neq k}a_{kj}x_j$, або

$$|a_{kk}|\cdot|x_k|=\sum_{j\neq k}|a_{kj}|\cdot[x_j],$$

звідки

$$|a_{kk}|\cdot\|x\|\le\sum_{j\neq k}|a_{kj}|\cdot[x_j]\le\|x\|\cdot\sum_{j\neq k}|a_{kj}|.$$

Оскільки x – ненульовий розв'язок, то $\|x\|>0$, і з останньої нерівності отримуємо $|a_{kk}|\le\sum_{j\neq k}|c_{kj}|$, що суперечить тому, що матриця А має строгу діагональну перевагу.

Отже, матриця A є невиродженою, і система (2.13) має єдиний розв'язок $m_1,m_2,\ldots,m_{n-1}$. Сплайн-функція також однозначно відтворюється за формулами (2.9) і розв'язує задачу кусково-кубічної інтерполяції.

Для розв'язання системи (2.13) можна використати ефективний метод прогонки (який є модифікацією методу Гаусса).

Очевидно, що $g(x)\in\widetilde{W}_2^2([a,b])$, де $\widetilde{W}_p^m([a,b])$, $p>1$, $m\ge0$ – простір неперервних функцій, заданих на $[a,b]$, які мають неперервні похідні до m-го порядку включно, інтегровані разом з їхніми p-ми степенями.

Поповнення просторів $\widetilde{W}_p^m([a,b])$ називають просторами Соболєва й позначають через $W_p^m([a,b])$.

Важливу властивість кубічних сплайн-функцій дає така теорема.

Теорема 1. Мінімум функціонала $\Phi(u)=\int\limits_a^b (u''(x))^2 dx$ на класі функцій $u \in W_2^2(a,b)$ і $u(x_k)=f_k$ $(k=0,1,\dots,n)$, де f_k – задані, досягається лише на кусково-кубічній сплайн-функції $g(x)$.

Доведення. Розглянемо функціонал $\Phi(u-g)=\int\limits_a^b (u''-g'')^2 dx \ge 0$.

Інтегруючи частинами, отримуємо

$$\Phi(u-g)=\int\limits_a^b (u'')^2 dx-2\int\limits_a^b u''g''dx+\int\limits_a^b (g'')^2 dx=\int\limits_a^b (u'')^2 dx-\int\limits_a^b (g'')^2 dx-2\int\limits_a^b (u''-g'')g''dx=$$

$$=\Phi(u)-\Phi(g)+2\int\limits_a^b (u'-g')g'''dx=$$

$$=\Phi(u)-\Phi(g)+2\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}(u'-g')g'''dx.$$

Але на відрізку $\lfloor x_{k-1,},x_k\rfloor$ маємо $g'''=c_k=const$. Тому

$$\Phi(u-g)=\Phi(u)-\Phi(g)+2\sum_{k=1}^{n}c_k\Big|_{x_{k-1}}^{x_k}(u-g)=\Phi(u)-\Phi(g).$$

Отже,

$$\Phi(u-g)=\Phi(u)-\Phi(g) \tag{2.14}$$

і

$$\Phi(g)=\Phi(u)-\Phi(u-g)\le\Phi(u)$$

для кожної $u\in W_2^2(a,b)$, для якої $u(x_k)=f_k$ $(k=0,1,\dots,n)$. Тобто на сплайн-функції $g(x)$ досягається мінімум функціонала $\Phi(u)$. Покажемо, що інших точок мінімуму функціонал не має.

Припустимо від супротивного, що існує функція $\tilde{g}(x)\in W_2^2(a,b)$, де $\tilde{g}(x)\ne g(x)$, на якій досягається мінімум функціонала, тобто $\Phi(\tilde{g})=\Phi(g)$, $\tilde{g}(x_k)=f_k$. Тоді з (2.14) одержуємо

$$\Phi(\tilde{g}-g)=\Phi(\tilde{g})-\Phi(g)=0,$$

тобто $\tilde{g}'' - g'' = 0$. Остання рівність означає, що $\tilde{g}(x) = g(x) + p(x)$, де $p(x) = ax + b$ – довільний многочлен першого степеня. Але оскільки $\tilde{g}(x_k) = g(x_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, маємо $p(x_k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Звідси $p(x) \equiv 0$, тобто $\tilde{g}(x) \equiv g(x)$, що суперечить припущенню. Теорему доведено.

Зауваження. На основі доведеної теореми можна дати інше еквівалентне означення кусково-кубічної сплайн-функції: це функція класу $W_2^2(a,b)$, яка набуває у вузлах x_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ заданих значень і мінімізує функціонал $\Phi(u)$.

Якщо в точках x_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ задано не точні значення функції $f(x)$, а наближені, то немає сенсу наближати функцію $f(x)$ інтерполяційним сплайном. У цьому випадку природно будувати апроксимуючу функцію, що належить класові $W_2^2(a,b)$, за умови, що вона мінімізує функціонал

$$\Phi_1(u) = \int_a^b (u''(x))^2 dx + \sum_{k=0}^{n} p_k \left(u(x_k) - \tilde{f}_k\right)^2,$$

де p_k – додатні числа, а $\tilde{f}_k$ – наближені значення функції. Функцію $\tilde{g}(x) \in W_2^2(a,b)$, яка мінімізує функціонал $\Phi_1(u)$, називають *згладжувальною сплайн-функцією*. Можна показати, що згладжувальною сплайн-функцією є кубічний сплайн.

Теорема 2. Нехай $\tilde{g}(x)$ – згладжувальний кубічний сплайн, а $g(x)$ – інтерполяційний сплайн, побудований за значеннями

$$f(x_k) = f_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Тоді рівномірно по x $\lim \tilde{g}(x) = g(x)$ за умови $\min\limits_k p_k \to \infty$.

Можна розглядати сплайни, які на окремих інтервалах є многочленами не третього степеня, а степеня $2q - 1$.

Виберемо на $[a,b]$ систему точок $x_1, x_2, \ldots, x_n$, де

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b.$$

Означення. Простір дійсних функцій $s(x)$, визначених на відрізку $[a,b]$, що задовольняють умови:

1) $s(x)$ – многочлен степеня $2q-1$ на кожному з проміжків (x_i, x_{i+1}), $i = 1, 2, \ldots, n-1$;
2) $s(x)$ – многочлен степеня $q-1$ на проміжках $[a, x_1)$ і $(x_n, b]$;
3) $s(x) \in C^{2q-2}[a,b]$, де $n \geq q$,

називають *простором сплайн-функцій порядку* q відносно точок x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ і позначають через S.

Означення. Нехай у точках x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ відомо значення деякої функції $f(x)$. Сплайн-функція $s(x) \in S$ порядку q називається *інтерполяційною*, якщо $s(x_i) = f(x_i)$.

Теорема 3. Для довільних чисел f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ існує єдина функція $s(x)$, така, що $s(x_i) = f_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, тобто $s(x)$ – інтерполяційна сплайн-функція.

Між сплайн-функціями другого порядку і кубічними сплайнами існує простий зв'язок. Розглянемо сплайн-функцію $s(x)$ порядку 2 на відрізку $[x_1, x_n]$. Тоді з означення сплайн-функції порядку 2 випливає, що на цьому відрізку маємо кубічний сплайн, причому $s''(x_1) = s''(x_n) = 0$.

Розділ 3. ЧИСЛОВІ МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Розглянемо методи, для яких

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k) + R_n(f), \tag{3.1}$$

де $a \le x_0 \le x_1 < ... < x_n \le b$, $A_k^{(n)}$ $(k = 0,1,2,...,n)$ – сталі.

Наведена формула називається *квадратурною формулою*, точки x_k $(k = 0,1,2,...,n)$ – *вузлами* або *абсцисами квадратурної формули*, числа $A_k^{(n)}$ $(k = 0,1,2,...,n)$ – *коефіцієнтами квадратурної формули*, а величина $R_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k)$ – її *залишковим членом*.

3.1. Загальна квадратурна формула інтерполяційного типу

Побудуємо квадратурну формулу, використовуючи інтерполяційний многочлен Лагранжа.

Запишемо функцію $f(x)$ у вигляді

$$f(x) = L_n(x) + R_{n+1}(x), \tag{3.2}$$

де $L_n(x)$ – інтерполяційний многочлен Лангранжа, побудований для функції $f(x)$ за вузлами інтерполювання $x_0, x_1, \dots, x_n$:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{\varpi_{n+1}(x)}{(x - x_k)\varpi'_{n+1}(x_k)},$$

а $R_{n+1}(x)$ – його залишковий член.

При цьому, якщо $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$, то

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\varpi_{n+1}(x), \quad \xi \in (a,b).$$

Інтегруючи рівність (3.2) у межах від a до b, одержуємо

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \int_a^b \frac{\varpi_{n+1}(x)}{(x - x_k)\varpi'_{n+1}(x_k)} dx + R_n(f),$$

де у випадку $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$

$$R_n(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \varpi_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi) dx.$$

Позначивши

$$A_k^{(n)} = \frac{1}{\varpi'_{n+1}(x_k)} \int_a^b \frac{\varpi_{n+1}(x)}{x - x_k} dx, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{3.3}$$

отримаємо формулу (3.1).

Отже, ми одержали квадратурну формулу, коефіцієнти якої $A_k^{(n)}$ визначають за формулою (3.3). Таку квадратурну формулу називають *квадратурною формулою інтерполяційного типу*. Якщо a і b є вузлами інтерполювання, то квадратурна формула має *закритий тип*, в іншому випадку – *відкритий*.

Слід зазначити, що коефіцієнти $A_k^{(n)}$ при заданому розподілі вузлів інтерполювання не залежать від вибору функції $f(x)$. Крім того, якщо $f(x)$ є алгебраїчним многочленом степеня не вище n, то залишковий член квадратурної формули $R_n(f) = 0$. Дійсно, у цьому випадку отримуємо, що многочлен $L_n(x) - f(x)$ степеня не вище n набуває в $(n+1)$-й точці $x_0, x_1, \ldots, x_n$ проміжку $[a, b]$ нульового значення. А це можливо тільки тоді, коли $L_n(x) - f(x) \equiv 0$, тобто $L_n(x) \equiv f(x)$.

Із того, що $R_n(f) = 0$ при $f(x) = x^m \quad (m = 0, 1, \ldots, n)$, для обчислення коефіцієнтів $A_k^{(n)}$ одержуємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} x_k^m = I_m = \int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} \quad (m = 0, 1, \ldots, n). \tag{3.4}$$

Визначником системи (3.4) є визначник Вандермонда:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0^n & x_1^n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i > j} (x_i - x_j) \neq 0.$$

Оскільки $D \neq 0$, то система (3.4) має єдиний розв’язок.

Зазначимо, що при використанні цього підходу фактично немає потреби будувати інтерполяційний многочлен $L_n(x)$, проте треба розв’язувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

3.2. Квадратурні формули Ньютона – Котеса

Розглянемо квадратурні формули інтерполяційного типу у випадку, якщо підінтегральна функція замінюється інтерполяційним многочленом Лагранжа, побудованим за рівновіддаленими вузлами інтерполювання. Такі формули називаються формулами Ньютона – Котеса.

3.2.1. Загальна квадратурна формула Ньютона – Котеса

Нехай вузлами інтерполювання (абсцисами квадратурної формули) є точки

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

де $x_0 = a$, $h = \dfrac{b-a}{n}$. Тоді для обчислення коефіцієнтів $A_k^{(n)}$ квадратурної формули можна застосувати формулу

$$A_k^{(n)} = \int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}\,dx.$$

Зробимо в інтегралі $\int_a^b f(x)dx$ заміну $x = a + (b-a)t$:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)t\ )dt = (b-a)\int_0^1 \varphi(t)dt,$$

де $\varphi(t) = f(a+(b-a)t\ )$. Якщо кожній точці x_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ відповідатиме точка t_k за формулою $x_k = a + (b-a)t_k$, то послідовності точок $x_0, x_1, \ldots, x_n$ відповідатиме послідовність точок $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1$. При цьому $\varphi(t_k) = f(x_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Для обчислення $\int_0^1 \varphi(t)dt$ побудуємо квадратурну формулу

$$\int_0^1 \varphi(t)dt \approx \sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} \varphi(t_k), \tag{3.5}$$

де $t_k = \dfrac{k}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Тоді коефіцієнти цієї квадратурної формули можна обчислити за формулою

$$C_k^{(n)} = \int_0^1 \frac{t\left(t-\frac{1}{n}\right)\left(t-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(t-\frac{k-1}{n}\right)\ldots(t-1)}{\frac{k}{n}\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{k}{n}-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}\right)\left(\frac{k}{n}-\frac{k+1}{n}\right)\ldots\left(\frac{k}{n}-1\right)}\,dt. \tag{3.6}$$

Отже,

$$\int_0^1 f(x)dx \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f(x_k).$$

Квадратурна формула (3.5), коефіцієнти якої визначені за формулою (3.6), називається квадратурною *формулою Ньютона – Котеса*. Оскільки коефіцієнти цієї квадратурної формули не залежать від функції $f(x)$ і проміжку інтегрування, то їх можна обчислити заздалегідь для фіксованих n. Для коефіцієнтів $C_k^{(n)}$ існують таблиці для різних n.

Можна показати, що $\sum_{k=0}^{n} \left|C_k^{(n)}\right| \to \infty$ при $n \to \infty$.

Це означає, що якщо при обчисленні значень функції $f(x)$ у вузлах інтерполювання існує абсолютна похибка ε, то неусувна похибка обчислення квадратурної суми $\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f(x_k)$ може досягти значення $\varepsilon \sum_{k=0}^{n} \left|C_k^{(n)}\right|$ і при $n \to \infty$ прямує до нескінченності.

Розглянемо докладніше окремі випадки формули Ньютона – Котеса при $n = 0, 1, 2, 3$. Ці формули відповідно мають назви: *формула прямокутників, формула трапецій, формула Сімпсона (парабол), формула трьох восьмих*. Зважаючи на їхню практичну важливість, одержимо ці формули незалежно від загальних міркувань.

3.2.2. Формула прямокутників

При $n = 0$ використовуємо лише один вузол інтерполювання – $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$. Функцію $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ замінюємо інтерполяційним многочленом нульового степеня $L_0(x) = f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$, тому

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_0(x)dx + R_0(f),$$

або

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R_0(f).$$

Одержана квадратурна формула називається *малою квадратурною формулою прямокутників*.

Якщо $f(x) \in C^2[a,b]$, то для залишкового члена $R_0(f)$ можна отримати простий вираз. З формули Тейлора для $f(x)$ в околі точки $\frac{a+b}{2}$ маємо

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2!}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2,$$

де $\xi = \xi(x) \in (a,b)$.

Інтегруючи, дістанемо

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x - \frac{a+b}{2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_a^b\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi)dx.$$

Оскільки $\int_a^b\left(x - \frac{a+b}{2}\right)dx = 0$, то

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}\int_a^b\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi)dx,$$

тому

$$R_0(f) = \frac{1}{2}\int_a^b\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi)dx.$$

Оскільки $f''(x)$ – неперервна функція на $[a,b]$, а $\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$ не змінює знака на $[a,b]$, то на основі теореми про середнє значення визначеного інтеграла існує таке $\theta \in (a,b)$, що

$$R_0(f) = \frac{1}{2}f''(\theta)\int_a^b\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^3}{24}f''(\theta).$$

Для підвищення точності обчислення визначеного інтеграла відрізок $[a,b]$ розбивають на n рівних частин з довжиною $h = \frac{b-a}{n}$ і застосовують формулу прямокутників до кожної частини. Нехай проміжок $[a,b]$ розбивається на n рівних відрізків точками $x_k = x_0 + k\,h \quad (k = 0, 1, \ldots, n,\ x_0 = a)$, тоді

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)f\left(\frac{x_{k+1} + x_k}{2}\right) + \frac{1}{24}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)^3 f''(\theta_k),$$

де $\theta_k \in (x_k, x_{k+1})$.

Оскільки $f''(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, а середнє арифметичне її значень у будь-яких точках $[a,b]$ задовольняє умову $\min\limits_{x\in[a,b]} f''(x) \le \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k) \le \max\limits_{x\in[a,b]} f''(x)$, то за відомою теоремою про неперервні функції існує така точка $\eta \in [a,b]$, що $f''(\eta) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k)$.

Звідси

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{2k+1}{2}h\right) + \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\eta),\ \eta \in (a,b). \tag{3.7}$$

Формула (3.5) називається *великою квадратурною формулою прямокутників*.

3.2.3. Формула трапецій

При $n = 1$ функцію $f(x)$ замінимо інтерполяційним многочленом першого степеня $L_1(x)$, побудованим за значеннями функції $f(x)$ у точках $x_0 = a,\ x_1 = b,$ тобто криву $y = f(x)$ замінимо відрізком, що з'єднує точки $(a, f(a))$ і $(b, f(b))$, а площу криволінійної трапеції – площею звичайної трапеції, тобто

$$L_1(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b), \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_1(x)dx + R_1(f),$$

звідки одержимо *малу квадратурну формулу трапецій*

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big) + R_1(f). \tag{3.8}$$

Знайдемо залишковий член $R_1(f)$ формули (3.8) для $f(x) \in C^2[a,b]$. З формули

$$R_2(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b),\ \xi \in (a,b)$$

і теореми про середнє значення визначеного інтеграла маємо

$$R_1(f) = \int_a^b R_2(x)dx = \frac{f''(\eta)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = -\frac{f''(\eta)}{12}(b-a)^3,\ \eta \in (a,b).$$

Розіб'ємо проміжок $[a,b]$ на n рівних частин точками $x_i = x_0 + ih,$ де $i = 0,1,\ldots,n$, $x_0 = a$, $h = \frac{b-a}{n}$, і застосуємо формулу трапецій до кожного з отриманих проміжків $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x_{k+1}-x_k)}{2}\left(f(x_k)+f(x_{k+1})\right) - \frac{1}{12}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)^3 f''(\eta_k) =$$

$$= \frac{b-a}{2n}\left(f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right) - \frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{k=1}^{n}f''(\eta_k),$$

де $\eta_k \in (x_k, x_{k+1})$.

З урахуванням

$$\sum_{k=1}^{n} f''(\eta_k) = nf''(\xi) \quad (\xi \in (a,b))$$

остаточно маємо

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)\right) - \frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi).$$

Ця формула називається *великою квадратурною формулою трапецій*.

3.2.4 Формула Сімпсона (парабол)

При $n = 2$ функцію $f(x)$ замінимо інтерполяційним многочленом другого степеня $L_2(x)$, побудованим за значеннями функції $f(x)$ у точках $x_0 = a,\ x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$, тобто криву $y = f(x)$ на проміжку $[a,b]$ замінимо параболою, проведеною через точки $(a,f(a)), \left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right), (b,f(b))$.

Оскільки

$$L_2(x) = \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)}f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right) +$$

$$+ \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-a)}{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)(b-a)}f(b),$$

то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_2(x)dx + R_2(x),$$

або

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{2f(a)}{(b-a)^2}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)dx - \frac{4f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)^2}\int_a^b (x-a)(x-b)dx +$$

$$+\frac{2f(b)}{(b-a)^2}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-a)dx + R_2(f).$$

Обчисливши інтеграли, дістанемо

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) + R_2(f).$$

Ця формула називається *малою квадратурною формулою парабол*.

Для відшукання залишкового члена $R_2(f)$ побудуємо інтерполяційний многочлен Ерміта, який у точках $a, \frac{a+b}{2}, b$ має однакові з $f(x)$ значення, а в точці $\frac{a+b}{2}$ збігаються значення похідних від многочлена й функції $f(x)$. Цей многочлен можна записати у вигляді

$$H_3(x) = L_2 + K(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b),$$

де K – відповідна стала.

Тоді

$$f(x) = H_3(x) + R_3(x),$$

де $R_4(x)$ – залишковий член формули Ерміта.

Якщо $f(x) \in C^4[a,b]$, то

$$f(x) = L_2(x) + K(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b) + R_4(x), \tag{3.9}$$

де $R_4(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b),\ \xi \in (a,b)$.

Зінтегрувавши (3.9), отримаємо

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_2(x)dx + K\int_a^b (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)dx +$$

$$+\frac{1}{4!}\int_a^b (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b) f^{(4)}(\xi)dx,$$

звідки знаходимо

$$R_2(f)=K\int_a^b(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)dx+\frac{1}{4!}\int_a^b(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)f^{(4)}(\xi)dx=$$

$$=\frac{1}{4!}\int_a^b(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)f^{(4)}(\xi)dx.$$

Функція $(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)$ на проміжку $[a,b]$ не змінює знака, а $f^{(4)}(x)$ є неперервною функцією на $[a,b]$. Тому, використовуючи теорему про середнє значення, одержуємо

$$R_2(f)=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_a^b(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)dx,$$

де $\eta\in(a,b)$. Обчисливши інтеграл, остаточно маємо

$$R_2(f)=-\frac{(b-a)^5}{2^5}\cdot\frac{f^{(4)}(\eta)}{90}.$$

Розіб'ємо тепер проміжок $[a,b]$ на $2m$ рівних частин точками $x_i=x_0+ih$, $h=\frac{b-a}{2m}$, $i=0,1,...,2m$, $x_0=a$ і застосуємо формулу парабол до кожного з проміжків $[x_{2i},x_{2i+2}]$:

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^m\int_{x_{2i-1}}^{x_{2i}}f(x)dx=\sum_{i=1}^m\frac{x_{2i}-x_{2i-1}}{6}\left(f(x_{2i-2})+4f(x_{2i-1})+f(x_{2i})\right)-$$

$$-\sum_{i=1}^m\frac{(x_{2i}-x_{2i-2})^5}{2^5}\cdot\frac{f^{(4)}(\eta_i)}{90}=\frac{b-a}{6m}\left(f(x_0)+f(x_{2m})+4\sum_{i=1}^m f(x_{2i-1})+2\sum_{i=1}^{m-1}f(x_{2i})\right)-$$

$$-\frac{1}{90m^5}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5\left(f^{(4)}(\eta_1)+f^{(4)}(\eta_2)+...+f^{(4)}(\eta_m)\right),$$

де $\eta_i\in(x_{2i-2},x_{2i})$.

Оскільки $f^{(4)}(\eta_1)+f^{(4)}(\eta_2)+...+f^{(4)}(\eta_m)=mf^{(4)}(\xi)$, де $\xi\in(a,b)$, то остаточно маємо *велику квадратурну формулу парабол*

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{6m}\left(f(x_0)+f(x_{2m})+4\sum_{i=1}^m f(x_{2i-1})+2\sum_{i=1}^{m-1}f(x_{2i})\right)-\left(\frac{b-a}{2}\right)^5\frac{f^{(4)}(\xi)}{90m^4}.$$

3.2.5. Формула трьох восьмих

Якщо в формулі Ньютона – Котеса взяти $n=3$, тобто функцію $f(x)$ замінити інтерполяційним многочленом третього степеня, побудованим за значенням функції $f(x)$ у точках $x_0=a$, $x_1=a+h$,

$x_2 = a + 2h,\ x_3 = b$, де $h = \dfrac{b-a}{3}$, то одержимо таку квадратурну формулу:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{8}\left(f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(b)\right) + R_3(f),$$

де $R_3(f) = -3\left(\dfrac{b-a}{3}\right)^5 \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{80}, \quad \xi \in (a,b).$

Ця квадратурна формула називається *малою квадратурною формулою трьох восьмих*. Використовуючи цю формулу, легко записати велику квадратурну формулу трьох восьмих.

3.3. Алгебраїчна міра точності квадратурної формули

Кажуть, що квадратурна формула

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k) + R_n(f) \qquad (3.10)$$

має *алгебраїчну міру точності* m, якщо $R_n(f) = 0$ на множині H_m усіх алгебраїчних многочленів степеня не вище m.

Із означення випливає, що якщо квадратурна формула (3.10) має алгебраїчну міру точності m, то при $f(x) = P_m(x)$, де $P_m(x)$ – будь-який алгебраїчний многочлен степеня не вище m,

$$\int_a^b P_m(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} P_m(x_k).$$

У такому разі кажемо, що *квадратурна формула є точною* для всіх многочленів степеня до m включно.

Ми бачили, що у випадку квадратурної формули інтерполяційного типу $R_n(f) = 0$, якщо $f(x) = P_n(x)$, де $P_n(x)$ – алгебраїчний многочлен степеня не вище n. Це означає, що квадратурна формула інтерполяційного типу має алгебраїчну міру точності, не нижчу за n.

Можна показати, що у випадку, коли n – парне число (тобто кількість вузлів є непарним числом), то квадратурна формула (3.10) є точною не лише для многочленів степеня n, а й для многочленів степеня $n+1$. Виявляється, що можна за рахунок спеціального розміщення вузлів ще більше підвищити алгебраїчну міру точності квадратурної формули. Зазначимо, що алгебраїчна міра точності є умовною характеристикою точності, оскільки можна навести приклади підінтегральних функцій, коли формула меншої алгебраїчної міри точності дає більш точне значення інтеграла.

Надалі вважатимемо, що квадратурна формула (3.10) є формулою інтерполяційного типу. Легко переконатися, що найвища алгебраїчна міра точності квадратурної формули (3.10) не перевищує $2n+1$. Дійсно, нехай у (3.10)

$$f(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2 \ ,$$

де $x_i \in \lfloor a, b \rfloor$, тоді

$$R_n(f) = \int_a^b \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2 dx > 0 \, .$$

Оскільки $f(x) \in H_{2n+2}$, то $R_n(f)$ не може дорівнювати нулеві на множині всіх многочленів степеня $2n+2$. Формулу вигляду (3.10), для якої $R_n(f) = 0$ на множині H_{2n-1} алгебраїчних многочленів степеня не вище $2n+1$, називатимемо *квадратурною формулою найвищої алгебраїчної міри точності*.

3.4. Квадратурні формули найвищої алгебраїчної міри точності (формули Гаусса)

Розглянемо задачу обчислення інтеграла

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \, , \qquad (3.11)$$

де $p(x)$ – певна фіксована функція, причому $p(x) > 0$ для $x \in [a, b]$. Функція $p(x)$ називається *ваговою функцією*.

Задачі обчислення такого типу інтеграла виникають при обчисленні інтегралів від негладких функцій, невласних інтегралів тощо. Для обчислення інтеграла (3.11) використовуватимемо квадратурну формулу інтерполяційного типу. Замінимо функцію $f(x)$ інтерполяційним многочленом Лагранжа $L_{n-1}(x)$, побудованим за вузлами інтерполювання $x_1, x_2, ..., x_n$. Одержимо

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^{n} C_k f(x_k) + R(f), \qquad (3.12)$$

де $C_1, C_2, ..., C_n$ – коефіцієнти квадратурної формули.

Якщо залишковий член $R(f)$ квадратурної формули (3.12) дорівнює нулеві на множині H_m усіх алгебраїчних многочленів степеня не вище m, казатимемо, що квадратурна формула (3.12) має *алгебраїчну міру точності* m. Очевидно, що алгебраїчна міра точності квадратурної формули (3.12) є не меншою за $n-1$. Неважко переконатися, що найвища алгебраїчна міра точності цієї квадратурної формули не перевищує $2n-1$. Дійсно, прийнявши в (3.12)

$$f(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)^2,$$

де $x_k\in[a,b]$, маємо

$$R(f)=\int_a^b p(x)\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)^2dx>0.$$

Оскільки $f(x)\in H_{2n}$, то з останньої нерівності випливає, що $R(f)$ не може дорівнювати нулеві на множині всіх многочленів степеня $2n$. Формулу вигляду (3.12), для якої $R(f)=0$ на множині H_{2n-1} усіх алгебраїчних многочленів степеня не вище $2n-1$, називають *квадратурною формулою найвищої алгебраїчної міри точності з ваговою функцією, або формулою Гаусса***.**

Покажемо, що абсциси квадратурної формули можна підібрати так, що вона буде точною для будь-якого многочлена $P_{2n-1}(x)$ степеня $2n-1$, тобто

$$\int_a^b P_{2n-1}(x)p(x)dx=\sum_{k=1}^{n}C_kP_{2n-1}(x_k).$$

Теорема. Для того, щоб алгебраїчна міра точності квадратурної формули (3.12) інтерполяційного типу становила $2n-1$, необхідно й достатньо, щоб її абсциси $x_1,x_2,...,x_n$ були коренями многочлена $\omega_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$, ортогонального на $[a,b]$ з вагою $p(x)$до будь-якого многочлена $q_{n-1}(x)$ степеня не вище $n-1$, тобто

$$\int_a^b \omega_n(x)q_{n-1}(x)p(x)dx=0. \tag{3.13}$$

Доведення. Необхідність. Нехай квадратурна формула (3.12) має алгебраїчну міру точності $2n-1$ і $\omega_n(x)$ – многочлен, коренями якого є абсциси $x_1,...,x_n$ цієї квадратурної формули. Покажемо, що для кожного многочлена $q_{n-1}(x)$ степеня не вище $n-1$ виконується умова (3.13).

Оскільки квадратурна формула (3.12) має алгебраїчну міру точності $2n-1$, то $R(f)=0$ для будь-якого многочлена степеня не вище $2n-1$.

Многочлен $\omega_n(x)q_{n-1}(x)$ є многочленом степеня не вище $2n-1$, тому

$$\int_a^b \omega_n(x)q_{n-1}(x)p(x)dx = \sum_{k=1}^{n} C_k\omega_n(x_k)q_{n-1}(x_k) = 0,$$

тобто виконується умова (3.13).

Достатність. Нехай існує многочлен $\omega_n(x)$ степеня n, який на $[a,b]$ має n різних дійсних коренів і для якого виконується умова (3.13), де $q_{n-1}(x)$ – будь-який многочлен степеня не вище $n-1$. Переконаємося, що квадратурна формула (3.12) інтерполяційного типу, у якій абсцисами є корені многочлена $\omega_n(x)$, має алгебраїчну міру точності $2n-1$.

Дійсно, якщо $f(x)$ – алгебраїчний многочлен степеня не вище $2n-1$, то $f(x)$ можна записати у такому вигляді:

$$f(x) = \omega_n(x)q_{n-1}(x) + r_{n-1}(x),$$

де $q_{n-1}(x)$ і $r_{n-1}(x)$ – многочлени степеня не вище $n-1$. Тоді

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = \int_a^b \omega_n(x)q_{n-1}(x)p(x)dx + \int_a^b r_{n-1}(x)p(x)dx = \int_a^b r_{n-1}(x)p(x)dx.$$

Оскільки $r_{n-1}(x)$ є многочленом степеня не вище $n-1$, то квадратурна формула (3.12) для нього є точною при будь-якому наборі вузлів $x_1, x_2, ..., x_n$.

Якщо вибрати за вузли інтерполювання корені многочлена $\omega_n(x)$, то $f(x_i) = \omega_n(x_i)q_{n-1}(x_i) + r_{n-1}(x_i) = r_{n-1}(x_i)$ і

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = \int_a^b r_{n-1}(x)p(x)dx = \sum_{k=1}^{n} C_k r_{n-1}(x_k) = \sum_{k=1}^{n} C_k f(x_k).$$

Таким чином, квадратурна формула (3.12) має алгебраїчну міру точності $2n-1$. Теорему доведено.

Формулу Гаусса для $p(x) \equiv 1, a = -1, b = 1$ називають формулою Гаусса – Лежандра; для $p(x) = (1-x^2)^{-1/2}, a = -1, b = 1$ – формулою Гаусса – Чебишева; для $p(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ $(\alpha, \beta > -1), a = -1, b = 1$ – формулою Гаусса – Якобі. У випадку інших значень a, b інтеграл $\int_a^b f(x)p(x)dx$ слід звести до $\int_{-1}^{1} \varphi(t)\widetilde{p}(t)dt$ заміною $x = \frac{1}{2}((b-a)t + (b+a))$.

Формулу Гаусса для $p(x) = \dfrac{x^{\alpha}e^{-x}}{\Gamma(\alpha+1)}, \alpha > -1, a = 0, b = \infty$ називають формулою Гаусса – Лаггера. Для цих формул складено таблиці коренів рівняння $\omega_n(x) = 0$ (вузлів) і коефіцієнтів C_k для різних n.

3.5. Квадратурні формули Чебишева

Розглянемо побудову квадратурних формул вигляду

$$\int_{-1}^{1} p(x)f(x)dx = C\sum_{k=1}^{n} f(x_k) + R(f), \qquad (3.14)$$

де C – певна стала, $p(x)$ – вагова функція $(p(x) > 0, x \in [-1,1])$, $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset [-1;1]$. Такі формули найдоцільніше використовувати тоді, коли значення $f(x_k)$ шукають, наприклад, шляхом експерименту з випадковими похибками. У цьому випадку при фіксованій сумі $C_1 + C_2 + ... + C_n$ вираз

$$C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + ... + C_n f(x_n)$$

матиме найменшу випадкову похибку, якщо $C_1 = C_2 = ... = C_n$.

П. Л. Чебишев запропонував вибрати абсциси $x_1, ..., x_n$ квадратурної формули (3.14) так, щоб квадратурна формула була точною для всіх алгебраїчних многочленів степеня до n включно.

Нехай у (3.14) $f(x) \equiv 1$. Тоді $C = \dfrac{\mu_0}{n}$, де $\mu_0 = \int_{-1}^{1} p(x)dx$. Тому квадратурна формула (3.14) набуде такого вигляду:

$$\int_{-1}^{1} f(x)p(x)dx = \frac{\mu_0}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) + R(f). \qquad (3.15)$$

Якщо тепер у (3.15) замість $f(x)$ узяти x^s $(s = 1, 2, \ldots, n)$, то для відшукання абсцис $x_1, x_2, ..., x_n$ одержимо таку систему нелінійних рівнянь:

$$\sum_{j=0}^{n} x_j^i = \frac{\mu_i}{\mu_0} n\,,\ \mu_i = \int_{-1}^{1} x^s\, p(x)dx \ \ (i = 1, \ldots, n).$$

П. Л. Чебишев показав, що розв’язання системи зводиться до відшукання коренів деякого алгебраїчного рівняння степеня n. Однак С. Н. Бернштейн довів, що при $n = 8$ і $n \geq 10$ система рівнянь не має дійсних розв’язків.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Бабенко К.И. Основы численного анализа / К.И. Бабенко. – М. : Наука, 1986.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов. – М. : Наука, 1975.
3. Гаврилюк І.П. Методи обчислень : у 2 ч. / І.П. Гаврилюк, В.Л. Макаров. – К. : Вища шк., 1996.
4. Никольский С.М. Квадратурные формулы / С.М. Никольский. – М. : Наука, 1974.

Навчальне видання

Вознюк Сергій Миколайович
Щербакова Юнна Анатоліївна

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

Редактор Т. О. Іващенко

Зв. план, 2010
Підписано до друку 30.11.2010
Формат 60х84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк
Ум. друк. арк. 4,9. Обл.-вид. арк. 5,5. Наклад 100 пр. Замовлення 410.
Ціна вільна

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu