МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

О. А. Мураховська

УПРАВЛІННЯ СКЛАДНИМИ СИСТЕМАМИ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2010

УДК 519.816
ББК 88

Мураховська О. А. Управління складними системами в умовах невизначеності : навч. посіб. / О. А. Мураховська. – Х. : Нац. аерокосм. ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2010. – 88 с.

Розглянуто поняття нечітких множин, нечітких відношень, лінгвістичних змінних і нечітких відображень, а також їхні характеристики й операції над ними. На спрощених прикладах проілюстровано застосування методичних підходів, що базуються на теорії нечітких множин, для розв'язання задач прийняття рішень. Проаналізовано природу нечіткості й невизначеності в задачах прийняття рішень. Показано основні прийоми ефективного розв'язання задач, що містять якісну та ймовірнісну невизначеності при нечітких початкових умовах. Крім того, наведено теоретичні основи прийняття рішень при нечіткому відношенні переваги на множині альтернатив.

Для студентів, що навчаються за фахом «Системний аналіз і управління» і виконують випускні роботи бакалаврів і спеціалістів, пов'язані із застосуванням теорії нечітких множин в управлінні.

Іл. 31. Табл. 11. Бібліогр.: 23 назви

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. Б. В. Лупкін,
канд. техн. наук В. Ф. Шмирьов

ВСТУП

Мова – це інструмент для опису деякої сукупності об'єктів, а також операцій, які над цими об'єктами виконуються або плануються до виконання. Українська, російська, англійська мови – дивні інструменти для опису навколишнього світу й усієї гами почуттів і взаємин між окремими людьми та їх групами. З ускладненням практичної діяльності людини виявилась потреба в створенні спеціальних мов, пристосованих для опису таких об'єктів та операцій над ними, для яких звичайна мова малоефективна. Так, креслення – це мова для опису геометричної форми об'єктів. Класична математика, численні мови програмування – абстрактні, але вражають своєю чіткістю й логічністю при описі методів та алгоритмів розрахунків, а також при виконанні розрахунків, складність яких постійно зростає. Вони дуже добре описують, приміром, рух небесних тіл і космічних кораблів, але спроби описати взаємини між людьми за допомогою формальної математичної логіки або мови С++ заздалегідь приречені на невдачу, оскільки вони не призначені для цього, не мають відповідного апарату.

У середині XX століття математика досягла такого рівня розвитку, що змогла приступитися до опису, аналізу, прогнозування все більш *складних і реальних* ситуацій, у тому числі в соціальній та економічній сферах, у системах штучного інтелекту й робототехніки, при створенні систем підвищення якості нечітких зображень та ідентифікації відображених на них об'єктів, розуміння текстів природною мовою тощо. При цьому математики мимоволі були змушені «спуститися» з крижаних вершин класичної, строгої постановки завдань і з подивом виявили, що *більшість реальних завдань і ситуацій за самою суттю постановки є нечіткими*. Їм не вистачає початкових даних, розглядувані множини об'єктів мають розпливчасті межі, реакції на збурні й керівні впливи неоднозначні й не завжди адекватні й т.д. Класична наука ігнорувала цю широку область людської діяльності, але загальні тенденції до першочергового розвитку *практичних, прикладних* напрямів математики (які, природно, базуються на фундаментальних дослідженнях) потребували розв'язання задач саме цього класу (насамперед у військовій діяльності, а також економіці, фінансах, соціології – тих галузях, які й досі є головними джерелами фінансування науково-технічного прогресу). Відповіддю на цю *об'єктивно існуючу потребу* став розвиток нечіткої логіки, теорій нечітких множин, нечітких відношень, лінгвістичних змінних і нечітких відображень, мета яких – сприяти, допомагати людському інтелекту й інтуїції приймати раціональні рішення в умовах неповної та нечіткої інформації. Удосконалюючи цей напрямок, учені з подивом виявляли все нові й нові сфери застосування її інструментарію, зрештою переконавшись, що більшість прикладних проблем характеризуються нечіткою постановкою. Тому розробка моделей напівінтуїтивних міркувань людини й використання їх у складних технічних системах майбутніх поколінь являє собою сьогодні одну з найважливіших проблем науки.

Дослідження цієї галузі науки було розпочато близько 50 років тому Лотфі А. Заде [3], професором Каліфорнійського університету ім. Берклі. Головна ідея його оригінальних досліджень полягала в тому, що людський спосіб міркування, що базується на природній мові та, що найголовніше, максимально відповідає об'єктивній реальності, не може бути описаний у межах традиційного математичного апарату. Цьому апарату властива строга однозначність інтерпретації, а все, що пов'язане з використанням природної мови й реальних умов діяльності людини, має багатозначну інтерпретацію. Ці фундаментальні ідеї стали благодатним ґрунтом для розвитку дивовижного букету новітніх наук і розрахункових методів.

Можна виділити три періоди становлення й розвитку теорії нечітких множин, або Fuzzy Sets (англійською мовою «fuzzy» означає «нечіткий, розмитий, пухнастий»). Перший період датується кінцем 60-х – початком 70-х років XX століття й характеризується становленням основ теорії нечітких множин. Другий припадає на 70–80-ті роки, коли з'явилися перші практичні результати застосування створеної теорії. Третій період, що триває з кінця 80-х років до цього часу, характеризується буквально бумом практичного застосування цієї теорії в різних сферах науки й техніки. Новітні підходи цієї науки дали можливість розширити сферу використання систем автоматизації далеко за межі області застосовності класичної теорії і створити принципово нові, більш досконалі системи різноманітних призначень, які до цього здавалися зовсім нездійсненними.

Цей навчальний посібник ставить за мету викладення основ теорії нечітких множин і набуття студентами навичок практичного вирішення розглядуваних проблем. Посібник складається з двох частин. У першій частині стисло і, наскільки було можливо, *чітко* викладено основи теорії нечітких множин. Теоретичний матеріал супроводжується великою кількістю прикладів, що пояснюють суть викладених відомостей. У другій частині посібника описано головні підходи до розв’язання найхарактерніших задач нечіткого моделювання в умовах невизначеності, які базуються на теорії нечітких множин.

1. ОСНОВИ ТЕОРІЇ НЕЧІТКИХ МНОЖИН

1.1. Нечіткі множини

Поняття множини було введено до наукового обігу ще 1872 р. відомим німецьким математиком Георгом Кантором. Він визначив множину як «об'єднання в одне ціле об'єктів, добре помітних нашою інтуїцією або нашою думкою».

У традиційній прикладній математиці множина розуміється як сукупність елементів (об'єктів), що мають деякі загальні властивості, наприклад: множина чисел, не менших за задане число; множина векторів, сума компонентів кожного з яких не перевищує одиниці, та ін. Для будь-якого елемента при цьому розглядаються лише дві можливості: або цей елемент належить даній множині (тобто має задану властивість), або не належить їй (тобто не має заданої властивості). Таким чином, в описі множин у звичайному розумінні повинен утримуватися чіткий критерій, що дозволяє висновувати про належність або неналежність будь-якого елемента даній множині.

Однак досить часто при спробах математичного опису, наприклад, складних систем соціально-економічного, політичного, техніко-економічного і навіть суто технічного характеру мова теорії звичайних множин може виявитися недостатньо гнучкою. Наявна інформація про систему може бути сформульована з використанням нечітких з точки зору математики понять природної мови, які неможливо або дуже складно математично формалізувати за допомогою апарату звичайних множин.

Як приклад можна навести класичний поділ людей на водіїв і пішоходів. Формальною ознакою при цьому є наявність прав на водіння автомобіля того або іншого класу. Але куди в цьому випадку віднести, на жаль, невигубний прошарок людей, що купили собі права й не мають ні достатніх навичок водіння, ні необхідного мінімуму знань правил дорожнього руху? А як бути з їхніми антиподами – ватагою закоханих в автосправу хлопчаків з відмінним знанням цих правил і досвідом водіння автомобіля в різних умовах, але які не мають формальних документів, що підтверджують наявність цих навичок? З погляду формальної математичної логіки обидва ці питання вирішуються однозначно, однак здоровий глузд підказує, що під час розв’язування різноманітних задач теорії масового обслуговування, переміщення людських потоків, поводження в екстремальних ситуаціях і т. ін. рішення, пропоноване формальною теорією, неправильне і має бути замінене на протилежне.

Поняття нечіткої множини – спроба математичної формалізації нечіткої інформації з метою її використання під час побудови математичних моделей складних систем. В основі цього поняття лежить уявлення про те, що складові елементи даної множини можуть мати загальну властивість у різному ступені й, отже, належати даній множині з різним ступенем. При такому підході висловлення типу «елемент x належить даній множині» втрачають сенс, оскільки необхідно вказати, «наскільки сильно» якийсь елемент належить даній множині, іншими словами, який ступінь належності має елемент.

1.2. Основні означення

Теорія нечітких множин являє собою узагальнення й відомою мірою переосмислення головних понять і формалізмів звичайної теорії множин. У її джерел лежать ідеї ряду фундаментальних наук, таких, як багатозначна логіка, що визначила можливість переходу від двох до довільної кількості значень істинності; теорія ймовірностей, що, породивши можливість коректного опису невизначеності експериментальних даних, відкрила шляхи до визначення й інтерпретації не обов'язково булевої функції належності; дискретна математика, що надала інструмент побудови моделей багаторівневих систем; власне теорія множин, формальний апарат якої став підґрунтям для появи й розвитку теорії нечітких множин.

Нечітка множина являє собою сукупність елементів довільної природи, стосовно кожного з яких не можна з повною визначеністю стверджувати, належить цей елемент розглядуваної сукупності даній множині чи ні. Підхід до формалізації поняття нечіткої множини полягає в узагальненні поняття характеристичної функції. У теорії нечітких множин характеристична функція має назву функції належності.

Означення 1.1. *Нечіткою множиною* A на універсальній множині X називають сукупність пар вигляду $(x,\ \mu_A(x))$, де $x \in X$, а $\mu_A(x)$ – функція належності елемента x нечіткій множині, причому $\mu_A(x) \in [0,\ 1]$.

Числове значення функції $\mu_A(x)$ для кожного конкретного елемента x визначає ступінь його належності нечіткій множині A. *Ступінь належності* – це число з діапазону $[0,\ 1]$, причому чим вищий ступінь належності, тим більшою мірою елемент універсальної множини відповідає властивостям нечіткої множини. Якщо $\mu_A(x) = 1$ для якогось $x \in X$, то елемент x безперечно належить нечіткій множині

A, якщо $\mu_A(x) = 0$, то елемент x безперечно не належить нечіткій множині A.

Означення 1.2. *Функцією належності* $\mu_A(x)$ називають функцію, що для довільного елемента універсальної множини дозволяє обчислити ступінь його належності нечіткій множині.

Приклад 1.1. Розглянемо множину студентів деякої групи третього курсу, серед яких є й такі, хто мають академічну заборгованість за другий курс. Саме через цю обставину їхній фактичний ступінь належності множині студентів третього курсу є меншим за одиницю, причому чим більше заборгованостей має студент, тим меншим є значення функції його належності цій множині. Функція $\mu_A(x)$ дорівнює відношенню кількості складених екзаменів і заліків до їхньої загальної кількості. Безсумнівно, цих студентів з деяким значенням функції належності $0 < \mu_A(x) < 1$ можна вважати також і студентами другого курсу, принаймні доти, доки наявну академічну заборгованість не буде ліквідовано. Функція $\mu_A(x)$ у цьому випадку дорівнює відношенню кількості академічних заборгованостей до загальної кількості екзаменів і заліків.

Якщо універсальна множина $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ є скінченною, то нечітку множину A можна записати так:

$$A = \{\mu_A(x_1)/x_1,\ \mu_A(x_2)/x_2, \ldots, \mu_A(x_k)/x_k\ \}.$$

У літературі, яка стосується нечітких множин, іноді використовуються інші позначення для їх опису:

$$A = \{\langle x_1, \mu_A(x_1)\rangle, \langle x_2, \mu_A(x_2)\rangle, \ldots, \langle x_k, \mu_A(x_k)\rangle\};$$

$$A = \left\{\frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \ldots + \frac{\mu_A(x_k)}{x_k}\right\},$$

де горизонтальна риска – просто розділовий знак, а знаком «+» позначено не арифметичну операцію додавання, а теоретико-множинне об'єднання окремих елементів.

Означення 1.3. Нечітку множину $\varnothing$ називають *порожньою*, якщо її функція належності дорівнює нулю на всій універсальній множині X. Іншими словами, нечітка множина буде порожньою, якщо жодний з елементів множини X не належить розглядуваній нечіткій множині з додатним значенням $\mu_\varnothing(x)$, тобто

$$\mu_\varnothing(x) = 0\ \forall\ x \in X.$$

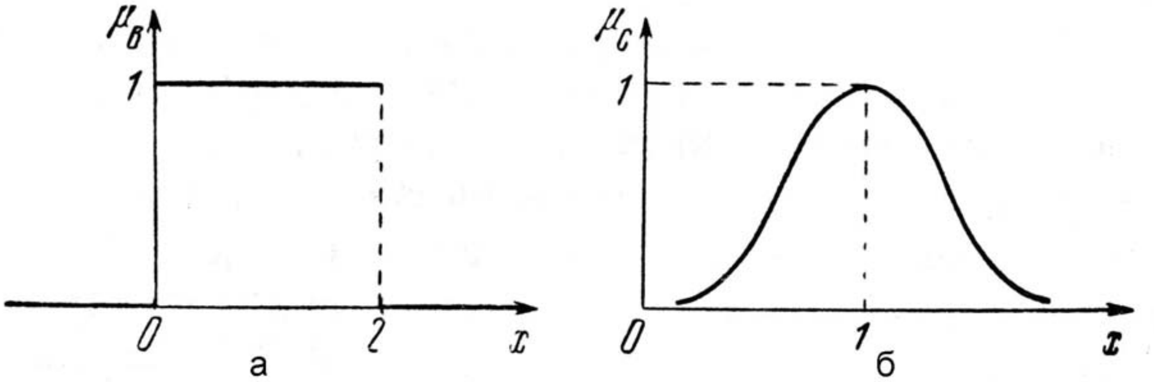
Скориставшись змістовним аспектом прикладу 1.1, зазначимо, що нечітка множина студентів третього курсу, які одночасно належать і до студентів другого курсу, перетворюється на порожню множину, коли всі ці студенти ліквідують усі свої академічні заборгованості за другий курс.

Звичайну (чітку) множину $\boldsymbol{B}$ можна визначити за допомогою характеристичної функції

$$\mu_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathbf{1}, \textbf{\textit{якщо }} \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}, \\ \mathbf{0}, \textbf{\textit{якщо }} \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{B}. \end{cases}$$

Отже, чітку множину можна розглядати як граничний випадок нечіткої множини, функція належності якої набирає лише бінарних значень.

Приклад 1.2. Для порівняння розглянемо звичайну множину чисел $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x} | \mathbf{0} \le \boldsymbol{x} \le \mathbf{2}\}$ і нечітку множину чисел $\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{x} |\ \textbf{"\textit{значення x близьке до} 1"}\}$. Графіки функцій належності цих множин зображено на рис. 1.1. Вигляд функції належності $\mu_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{x})$ нечіткої множини $\boldsymbol{C}$ залежить від змісту, вкладеного в поняття «близьке» у контексті аналізованої ситуації.



а б

Рис. 1.1. Функції належності звичайної (а) і нечіткої (б) множин

1.3. Характеристики нечітких множин

Означення 1.4. *Висотою нечіткої множини* називають верхню межу її функції належності: $\textbf{\textit{height}}(\boldsymbol{A}) = \sup\limits_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}} \mu_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x})$. Для дискретної універсальної множини супренум стає максимумом, тобто висотою нечіткої множини буде максимум ступенів належності її елементів.

Означення 1.5. Нечітку множину $\boldsymbol{A}$ називають *нормальною*, якщо її висота дорівнює одиниці: $\sup\limits_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}} \mu_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1}$.

Нечітку множину, що не є нормальною, називають *субнормальною*. Нормалізація, тобто перетворення субнормальної нечіткої множини A' на нормальну A, визначається так:

$$A = norm(A') \Leftrightarrow \mu_A(x) = \frac{\mu_{A'}(x)}{height(A')} \quad \forall\ x \in X.$$

На рис. 1.2 максимальне значення функції належності $\mu_A(x)$ нечіткої множини A дорівнює одиниці, таким чином, вона є нормальною нечіткою множиною A. Значення ж функції належності $\mu_B(x)$ не досягає одиниці ні для якого елемента x, отже, вона є субнормальною множиною B.

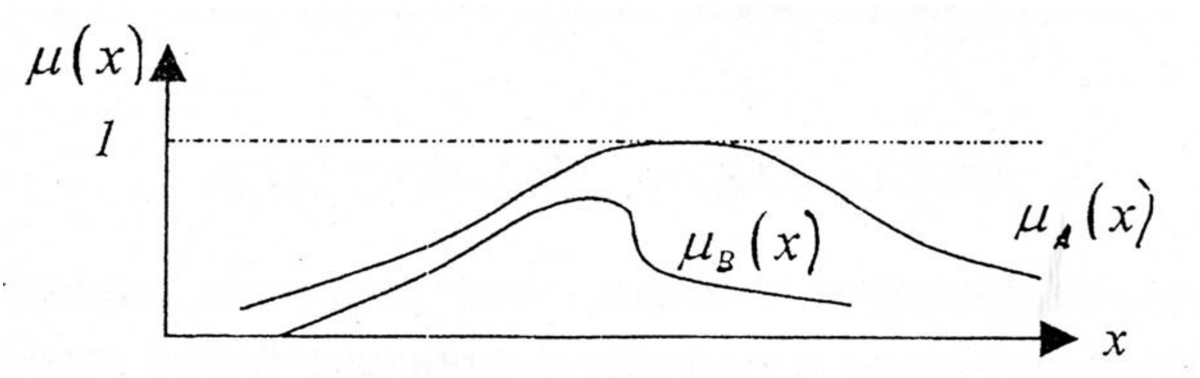


Рис. 1.2. Функції належності нормальної A та субнормальної B нечітких множин

Означення 1.6. *Носієм нечіткої множини* A називають чітку підмножину універсальної множини X, елементи якої мають ненульові ступені належності: $supp(A) = \{x:\ \mu_A(x) > 0\}$.

Означення 1.7. Нечітку множину називають *порожньою*, якщо її носій є порожньою множиною (див. означення 1.3).

Означення 1.8. *Ядром нечіткої множини* A називають чітку підмножину універсальної множини X, елементи якої мають ступені належності, що дорівнюють одиниці: $core(A) = \{x : \mu_A(x) = 1\}$.

Означення 1.9. α*-перерізом* (α*-зрізом, або множиною* α*-рівня)* нечіткої множини A називають чітку підмножину універсальної множини X, елементи якої мають ступені належності, більші за α або такі, що дорівнюють α: $A_\alpha = \{x:\ \mu_A(x) \geq \alpha\},\ \alpha \in [0;\ 1]$.

Носій та ядро можна розглядати як перетини нечіткої множини на нульовому й одиничному α-рівнях. Ядро субнормальної нечіткої множини порожнє. На рис. 1.3 зображено носій, ядро, α-переріз і α-рівень нечіткої множини.

У випадку нескінченних нечітких множин для побудови множин α-рівня на графіку відповідної функції належності необхідно провести пряму лінію $y = \alpha$, а після цього на осі абсцис виділити ті точки або інтервали, для яких відповідні частини графіка розташовані не нижче цієї лінії.

Приклад 1.3. Опишемо у вигляді нечіткої множини поняття «чоловік середнього зросту» на універсальній множині $\{155,160,165,170,175,180,185,190\}$. Знайдемо носій, ядро та α-переріз (при $\alpha = 0,25$) отриманої нечіткої множини.

Один із можливих розв‘язків має такий вигляд:

$$A = \{0/155; 0,1/160; 0,3/165; 0,8/170; 1/175; 1/180; 0,5/185; 0/190\}.$$

Згідно з означеннями 1.6, 1.8 і 1.9 одержуємо:

- носій нечіткої множини $supp(A) = \{160,165,170,175,180,185\}$;
- ядро нечіткої множини $core(A) = \{175,180\}$;
- α-переріз нечіткої множини $A_{0,25} = \{165,170,175,180,185\}$.

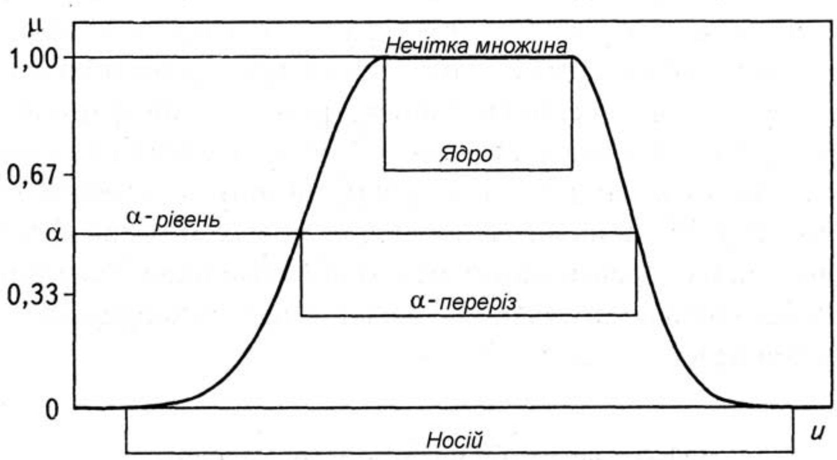


Рис. 1.3. Ядро, носій, α-рівень та α-переріз нечіткої множини

Означення 1.10. Нечітку множину A називають опуклою, якщо

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)),$$
$$x_1, x_2 \in X, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Іншими словами, нечітка множина буде опуклою, якщо всі його α-перерізи – опуклі множини.

Приклади опуклої й неопуклої нечітких множин наведено на рис. 1.4.

Означення 1.11. Нечіткі множини A і B дорівнюють одна одній $(A = B)$, якщо $\mu_A(x) = \mu_B(x) \ \forall x \in X$.

Означення 1.12. *Дефазифікацією* називають перетворення нечіткої множини на чітке число.

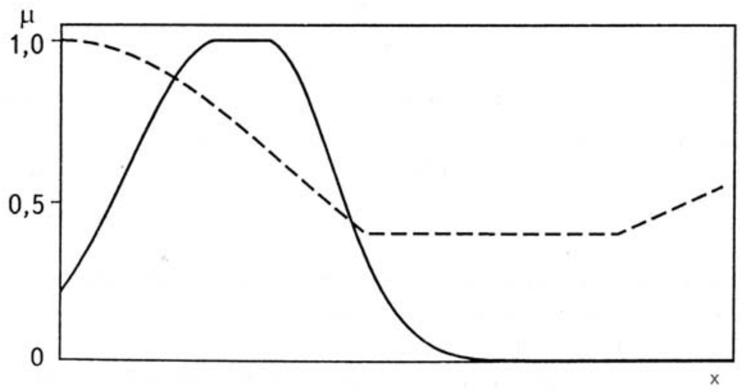


Рис. 1.4. Нечіткі множини: —– опукла; – – – – – неопукла

Найпростішим прикладом дефазифікації є вибір чіткого числа з максимальним ступенем належності. Однак цей спосіб придатний лише для одноекстремальних функцій належності. Розрахункові формули основних методів дефазифікації багатоекстремальних функцій належності для нечітких множин на неперервних і дискретних носіях наведено в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Дефазифікація різними методами

Метод дефазифікації	Нечітка множина	
	$\tilde{A} = \int\limits_{x \in [\underline{x}, \overline{x}]} \mu_A(x) / x$	$\tilde{A} = (\mu_A(x_1) / x_1, \ldots$ $\ldots, \mu_A(x_k) / x_k)$
Центра ваги	$\dfrac{\int_{\underline{x}}^{\overline{x}} x \, \mu_A(x) dx}{\int_{\underline{x}}^{\overline{x}} \mu_A(x) dx}$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i \, \mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^{k} \mu_A(x_i)}$
Медіани	Знайти таке число a, щоб $\int_{\underline{x}}^{a} \mu_A(x) dx = \int_{a}^{\overline{x}} \mu_A(x) dx$	$\min(x_j) \; \forall j:$ $\sum_{i=1}^{j} \mu_A(x_i) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \mu_A(x_i)$
Центра максимумів	$\int_G x dx \Big/ \int_G dx$, де $G = \arg\limits_{x} \sup\limits_{x \in \mathrm{supp} \tilde{A}} (\mu_A(x))$	$\dfrac{\sum_{x_j \in G} x_j}{\lvert G \rvert}$
Найменшого з максимумів	$\min(G)$	$\min(G)$
Найбільшого з максимумів	$\max(G)$	$\max(G)$

Приклад 1.4. Проведемо дефазифікацію нечіткої множини «чоловік середнього зросту» із прикладу 1.1 за методом центра ваги.

За формулою з табл. 1.1 одержуємо

$$A = \frac{0 \cdot 155 + 0{,}1 \cdot 160 + 0{,}3 \cdot 165 + 0{,}8 \cdot 170 + 1 \cdot 175 + 1 \cdot 180 + 0{,}5 \cdot 185 + 0 \cdot 190}{0 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}8 + 1 + 1 + 0{,}5 + 0} =$$

$$= 175{,}4.$$

1.3.1. Операції над нечіткими множинами

Оскільки нечіткі множини за означенням являють собою певне узагальнення поняття звичайних (чітких) множин, операції над ними також можуть розглядатися як відповідне узагальнення понять операцій над звичайними множинами. При цьому, природно, найхарактерніша різниця полягає в необхідності визначення правил обчислення функції належності для результату кожної конкретної операції над нечіткими множинами за заданими функціями належності початкових множин. Нижче наведено означення операцій над нечіткими множинами, які запропонував Заде. Слід зазначити, що операції над нечіткими множинами можна визначити різними способами. Вибір конкретного з них залежить від змісту, вкладеного у відповідні операції в межах певної задачі. Докладніше із цим питанням можна ознайомитися в роботах [7, 15].

Розглянемо дві нечіткі множини A і B на універсальній множині X із заданими функціями належності $\mu_A(x)$ і $\mu_B(x)$.

Означення 1.13. *Об'єднанням* нечітких множин A і B на універсальній множині X називають таку нечітку множину $C = A \bigcup B$, функція належності якої має вигляд

$$\mu_C(x) = \mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}.$$

На рис. 1.5 подано геометричну інтерпретацію функції належності об'єднання нечітких множин, графік якої (жирна лінія на рис. 1.5) можна одержати як верхню обвідну графіків функцій належності початкових множин.

Приклад 1.5. Розглянемо нечітку множину A, що являє собою «невелике натуральне число» і має вигляд

$$A = \{1{,}0/1;\ 1{,}0/2;\ 0{,}9/3;\ 0{,}8/4;\ 0{,}5/5;\ 0{,}2/6;\ 0{,}1/7\},$$

і нечітку множину B, що являє собою «натуральне число, яке приблизно дорівнює трьом» і має вигляд

$$B = \{0{,}5/1;\ 0{,}8/2;\ 1{,}0/3;\ 0{,}6/4;\ 0{,}4/5;\ 0{,}1/6;\ 0/7\}.$$

Тоді як результат операції об'єднання нечітка множина $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} \bigcup \boldsymbol{B}$ являє собою «невелике натуральне число або натуральне число, яке приблизно дорівнює трьом» і має вигляд

$$\boldsymbol{D} = \{1{,}0/1;\ 1{,}0/2;\ 1{,}0/3;\ 0{,}8/4;\ 0{,}5/5;\ 0{,}2/6;\ 0{,}1/7\}.$$

Рис. 1.5. Функція належності об'єднання нечітких множин

Означення 1.14. *Перетинанням нечітких множин* $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ на універсальній множині $\boldsymbol{X}$ називають нечітку множину $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \bigcap \boldsymbol{B}$ з функцією належності, яку можна обчислити за таким правилом:

$$\mu_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{x}) = \mu_{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x}) = \min\{\mu_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}),\ \mu_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x})\}.$$

Наочне уявлення про операцію перетинання нечітких множин $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$, а також про спосіб обчислення функції належності її результату $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \bigcap \boldsymbol{B}$ можна одержати за допомогою геометричної інтерпретації, показаної на рис. 1.6. У цьому випадку графік функції належності (жирна лінія на рис. 1.6) може бути отриманий як нижня обвідна графіків функцій належності початкових множин.

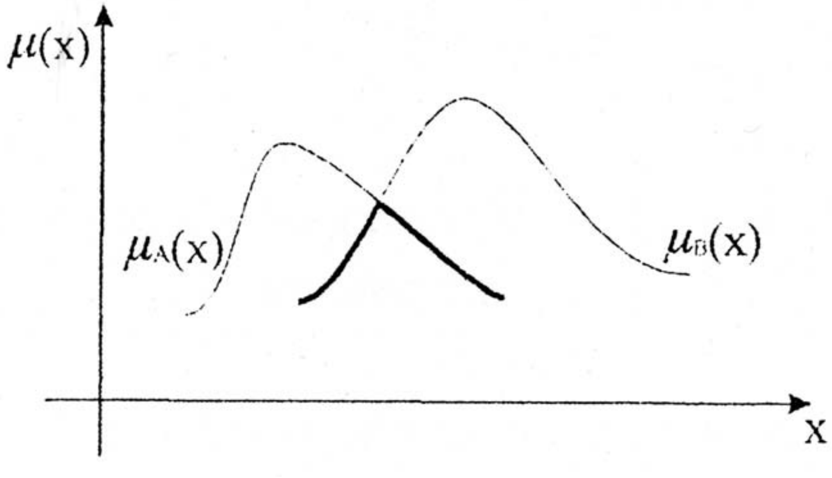


Рис. 1.6. Функція належності перетинання нечітких множин

Приклад 1.6. Розглянемо нечітку множину $\boldsymbol{A}$, яка є «невеликим натуральним числом» і має вигляд

$$A = \{1{,}0/1;\ 1{,}0/2;\ 0{,}9/3;\ 0{,}8/4;\ 0{,}5/5;\ 0{,}2/6;\ 0{,}1/7\},$$

і нечітку множину B, що являє собою «натуральне число, яке приблизно дорівнює двом» і має вигляд

$$B = \{0{,}5/1;\ 1{,}0/2;\ 0{,}6/3;\ 0{,}3/4;\ 0{,}1/5;\ 0/6;\ 0/7\}.$$

Тоді результат операції перетинання – нечітка множина $C = A \bigcap B$ – являє собою «невелике натуральне число, що приблизно дорівнює двом» і має вигляд

$$C = \{0{,}5/1;\ 1{,}0/2;\ 0{,}6/3;\ 0{,}3/4;\ 0{,}1/5;\ 0/6;\ 0/7\}.$$

Означення 1.15. *Доповненням нечіткої множини* A на універсальній множині X називають нечітку множину $\overline{A}$ з функцією належності $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x),\ \forall\, x \in X$. На рис. 1.7 показано приклад виконання операції нечіткого доповнення.

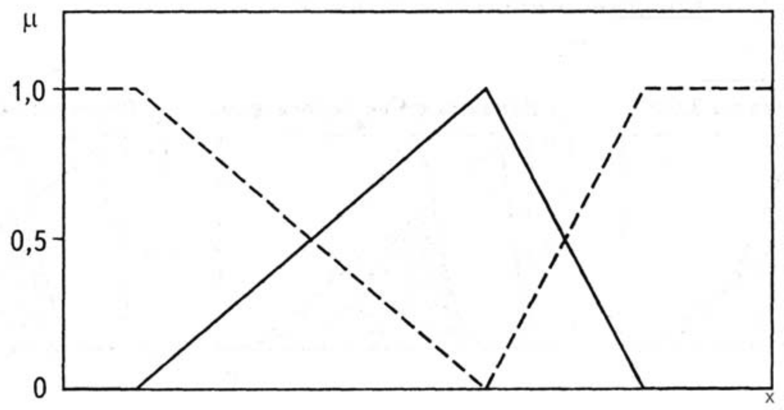


Рис. 1.7. Функція належності доповнення нечітких множин:
—— – нечітка множина A; – – – – – нечітка множина $\overline{A}$, що являє собою доповнення нечіткої множини A

Геометрична інтерпретація операції доповнення дає можливість зробити такі висновки:

1. Графік функції $\mu_{\overline{A}}(x)$ симетричний графіку функції $\mu_A(x)$ відносно горизонтальної прямої з ординатою $y = 0{,}5$.

2. В універсальній множині X існують елементи, які одночасно належать і множині A, і її доповненню $\overline{A}$ до X, при цьому функції приналежності для деяких з них можуть бути однаковими.

Приклад 1.7. Знайдемо доповнення для нечітких множин A і B з прикладу 1.5:

$$\overline{A} = \{0/1;\ 0/2;\ 0{,}1/3;\ 0{,}2/4;\ 0{,}5/5;\ 0{,}8/6;\ 0{,}9/7\},$$

$$\overline{B} = \{0{,}5/1;\ 0{,}2/2;\ 0/3;\ 0{,}4/4;\ 0{,}6/5;\ 0{,}9/6;\ 1{,}0/7\}.$$

Нечітка множина $\overline{A}$ являє собою «натуральне число, що не є невеликим» або «велике натуральне число», а $\overline{B}$ – «натуральне число, яке не дорівнює близько 3».

Розглянуті операції над нечіткими множинами мають фундаментальні властивості, аналогічні властивостям звичайних теоретико-множинних операцій.

Якщо A, B і C – довільні (скінченні або нескінченні) нечіткі множини, задані на універсальній множині X, то правильними є такі твердження:

1. *Комутативність* операцій об'єднання й перетинання нечітких множин:

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A.$$

2. *Асоціативність операцій об'єднання й перетинання нечітких множин:*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

3. *Дистрибутивність операцій об'єднання й перетинання нечітких множин:*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

4. *Ідемпотентність операцій об'єднання й перетинання нечітких множин:*

$$A \cup A = A; \quad A \cap A = A.$$

5. *Поглинання однієї з нечітких множин під час операцій об'єднання й перетинання:*

$$A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A.$$

6. *Універсальні верхня й нижня межі (одиничні елементи) операцій перетинання й об'єднання нечітких множин:*

$$A \cup \varnothing = A; \quad A \cup X = X; \quad A \cap X = A; \quad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

7. *Інволюція (подвійне доповнення) нечіткої множини:*

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

8. *Закони де Моргана:*

$$\left(\overline{A \cup B}\right) = \overline{A} \cap \overline{B}; \quad \left(\overline{A \cap B}\right) = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Для розглянутих операцій над нечіткими множинами не виконуються закон виключення третього й закон тотожності, тобто в загальному випадку будуть правильними нерівності

$$A \cap \overline{A} \neq \varnothing;$$

$$A \cup \overline{A} \neq X.$$

Означення 1.16. *Різницею нечітких множин* $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ на деякій універсальній множині $\boldsymbol{X}$ називають таку нечітку множину $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}$, функція належності якої визначається формулою

$$\mu_C(x) = \mu_{A \setminus B}(x) = \begin{Bmatrix} \mu_A(x) - \mu_B(x), \textit{ якщо } \mu_A(x) > \mu_B(x) \\ 0, \textit{ якщо } \mu_A(x) \le \mu_B(x) \end{Bmatrix}.$$

На рис. 1.8 показано результат виконання операції віднімання двох нечітких множин $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$, заданих на одній універсальній множині $\boldsymbol{X}$ різними функціями належності.

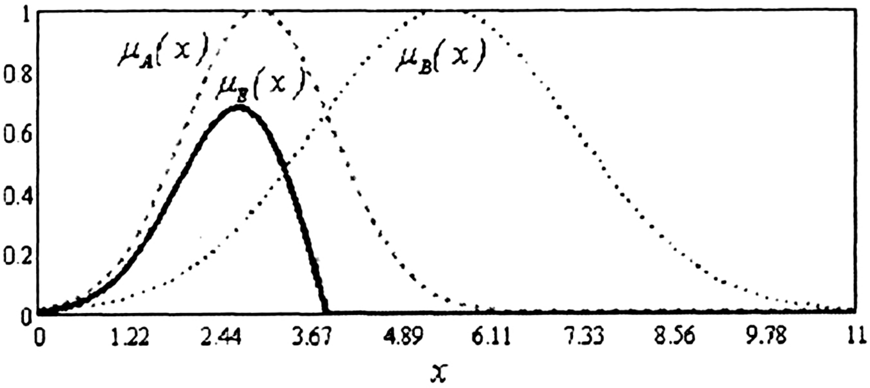


Рис. 1.8. Функція належності різниці нечітких множин

Приклад 1.8. Знайдемо нечітку множину $\boldsymbol{E}$ як результат віднімання нечітких множин $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ із прикладу 1.5:

$$E = \{0{,}5/1;\ 0{,}2/2;\ 0/3;\ 0{,}2/4;\ 0{,}1/5;\ 0{,}1/6;\ 0{,}1/7\}.$$

У цьому випадку нечітка множина $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}$ являє собою «невелике натуральне число, що не дорівнює близько 3».

Означення 1.17. *Трикутною нормою* (*t-нормою*) називають бінарну операцію $\wedge$ на одиничному інтервалі $[0,\ 1] \times [0,\ 1] \to [0,\ 1]$, що задовольняє таким аксіомам для будь-яких $a,\ b,\ c \in [0,\ 1]$:

- $a \wedge 1 = a$ (гранична умова);
- $a \wedge b \le a \wedge c$, якщо $b \le c$ (монотонність);
- $a \wedge b = b \wedge a$ (комутативність);
- $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ (асоціативність).

Часто використовують такі t-норми: $\min(a,\ b)$ – перетинання за Заде; $a - b$ – імовірнісне перетинання (множення); $\max(a + b - 1,\ 0)$ – перетинання за Лукасевичем.

Означення 1.18. *Трикутною конормою* (*s-нормою*) називають бінарну операцію $\vee$ на одиничному інтервалі $[0, 1]\times[0, 1]\to[0, 1]$, що задовольняє таким аксіомам для будь-яких $a, b, c\in[0, 1]$:

- $a\vee 0 = a$ (гранична умова);
- $a\vee b\le a\vee c$, якщо $b\le c$ (монотонність);
- $a\vee b = b\vee a$ (комутативність);
- $a\vee(b\vee c) = (a\vee b)\vee c$ (асоціативність).

Часто використовують такі s-норми: $\max(a, b)$ – об'єднання за Заде; $a + b - ab$ – імовірнісне об'єднання; $\min(a + b, 1)$ – об'єднання за Лукасевичем.

Приклади перетинання й об'єднання нечітких множин за зазначеними трикутними нормами показано на рис. 1.9, 1.10.

Рис. 1.9. Перетинання нечітких множин з використанням різних t-норм

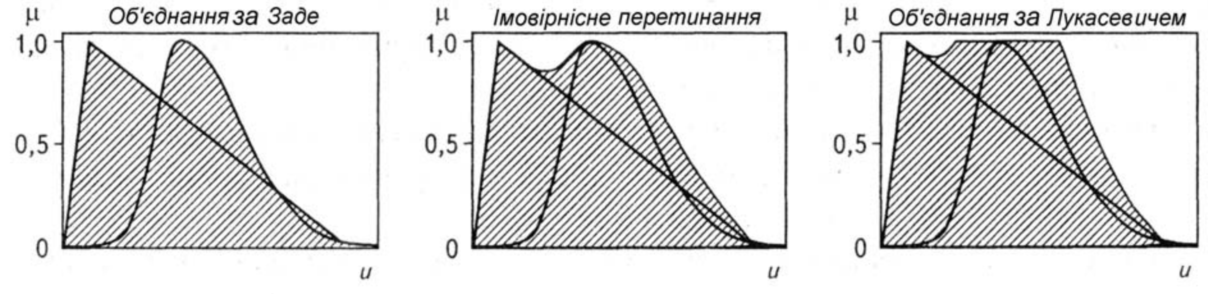


Рис. 1.10. Об'єднання нечітких множин з використанням різних s-норм

Означення 1.19. *Декартовим добутком* $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ нечітких множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на множинах $X_1, X_2, \ldots, X_n$ називають нечітку множину A на декартовому добутку $X = X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$, елементами якої є набори $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а функція її належності має вигляд

$$\mu_A(x) = \min_{x\in X}\{\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \ldots, \mu_{A_n}(x)\}.$$

Для двовимірного випадку графічну інтерпретацію декартова добутку нечітких множин A_1 і A_2 на відповідних множинах X_1 і X_2 показано на рис. 1.11.

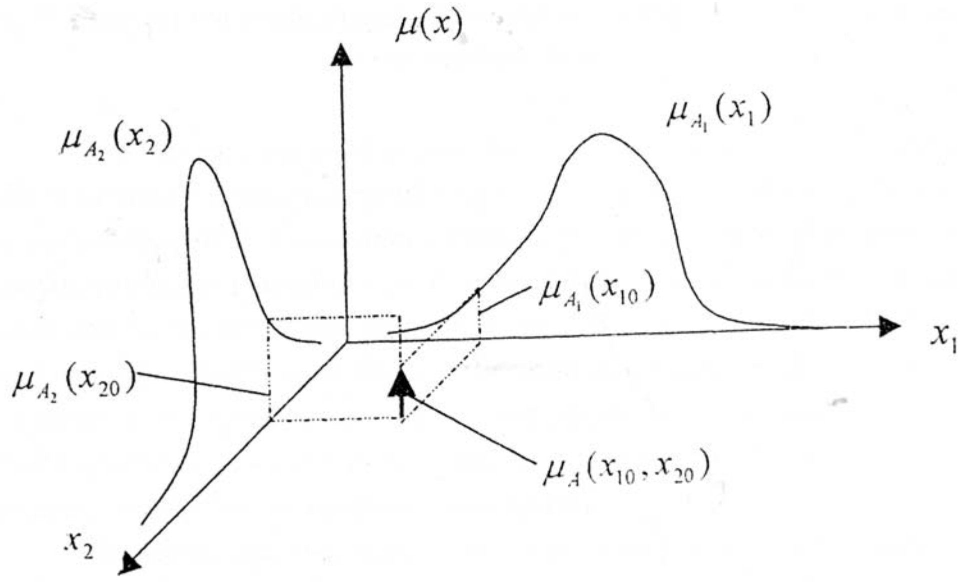


Рис. 1.11. Визначення функції належності декартова добутку нечітких множин

Зміст такого означення функції належності декартова добутку нечітких множин полягає в тому, що фактична можливість прийняття рішення визначається найменшою з можливостей елементів даного набору. Як приклад можна уявити ситуацію вибору раціонального варіанта придбання людиною потрібного товару, коли вона діє в просторі «ціна – якість» і зазвичай виходить з наявних фінансових ресурсів.

Означення 1.20. *Опуклою комбінацією* нечітких множин A_1, A_2, ..., A_n на множині X називають нечітку множину A, функція належності якої має вигляд

$$\mu_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \mu_{A_i}(x),$$

причому $\lambda_i > 0$, а $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Поняття опуклої комбінації нечітких множин використовується в задачах прийняття рішень в умовах декількох нечітких обмежень. Слід зазначити, що для звичайних множин поняття опуклої комбінації не має сенсу.

Означення 1.21. Операції *концентрування* CON і *розтягання* DIL нечіткої множини A визначаються таким чином:

$$CON\,A = A^{\alpha};\ DIL\,A = A^{1/\alpha},$$

де $\alpha > 1$ – коефіцієнт концентрації (або розтягання), а функції належності відповідних нечітких множин мають вигляд

$$\mu_{A^{\alpha}}(x) = \mu_A^{\alpha}(x) = \left(\mu_{A^{\alpha}}(x)\right)^{\alpha};\ \mu_{A^{1/\alpha}}(x) = \mu_A^{1/\alpha}(x) = \left(\mu_{A^{\alpha}}(x)\right)^{1/\alpha}.$$

Суть цих операцій можна продемонструвати графічно (рис. 1.12).

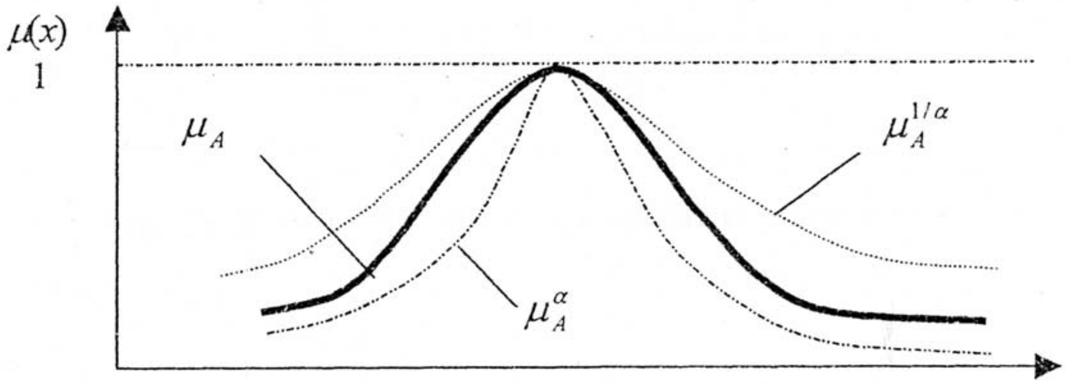


Рис. 1.12. Геометричний зміст операцій концентрування й розтягання нечітких множин

Операція концентрування знижує ступінь нечіткості опису множини A, а операція розтягання підвищує його. У реальних задачах прийняття рішень застосування операції концентрування може означати, що в розпорядження експерта або людини, що приймає рішення, надійшла додаткова інформація про ситуацію, і ця інформація дає можливість частково зняти наявну невизначеність і більш чітко описати нечітку множину можливих альтернатив.

Операцію розтягання, навпаки, використовують для моделювання ситуацій, пов'язаних із втратою інформації або відсутністю своєчасного її відновлення, що збільшує ступінь нечіткості ситуації і, як наслідок, невизначеності прийняття рішення.

Приклад 1.9. Для скінченної нечіткої множини

$$A = \{1{,}0/1;\ 1{,}0/2;\ 0{,}9/3;\ 0{,}8/4;\ 0{,}5/5;\ 0{,}2/6;\ 0{,}1/7\}$$

концентрування при $p = 2$

$$CON(A) = A^2 =$$

$$= \{1{,}0/1;\ 1{,}0/2;\ 0{,}81/3;\ 0{,}64/4;\ 0{,}25/5;\ 0{,}04/6;\ 0{,}01/7\},$$

а розтягання при $q = 0{,}5$

$$DIL(A) = A^{0,5} =$$
$$= \{1{,}0/1;\ 1{,}0/2;\ 0{,}949/3;\ 0{,}894/4;\ 0{,}707/5;\ 0{,}447/6;\ 0{,}316/7\}.$$

1.3.2. Методи побудови функцій належності нечітких множин

Практичне використання теорії нечітких множин передбачає наявність функцій належності, за допомогою яких описуються лінгвістичні терми «низький», «середній», «високий» та ін.

Постановка задачі побудови функцій належності: задано дві множини – множина термів $L = \{l_1, l_2, ..., l_m\}$ та універсальна множина $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$; нечітка множина $\tilde{l}$ для задання лінгвістичного терму l_j на універсальній множині X має вигляд

$$\tilde{l}_j = \left(\frac{\mu_{l_j}(x_1)}{x_1}, \frac{\mu_{l_j}(x_2)}{x_2}, ..., \frac{\mu_{l_j}(x_n)}{x_n} \right),\ j = \overline{1, m}.$$

Визначити ступінь належності елементів множини X до елементів множини L, тобто знайти $\mu_{l_j}(x_i)$ для всіх $j = \overline{1, m}$ і $i = \overline{1, n}$.

Л. Заде запропонував оцінювати ступінь належності нечіткій множині числами з відрізка $[0, 1]$. Фіксування конкретних значень при цьому носить суб'єктивний характер. З одного боку, для експертних методів важливими є характер вимірювань (первинні або похідні) і тип шкали, за якою отримують інформацію від експерта і яка визначає допустимий вигляд операцій, що застосовуються під час експертного оцінювання. З іншого боку, кожний об'єкт має два типи властивостей: ті, які можна безпосередньо виміряти, і ті, які є якісними й потребують порівняння парами об'єктів з такою властивістю, щоб визначити їхнє місце щодо поняття, що розглядається.

Існує ряд методів побудови функції належності нечіткої множини за експертними оцінками. Їх можна поділити на дві групи: прямі й непрямі.

Прямі методи полягають у тому, що експерт або група експертів безпосередньо задають правила визначення функції належності, що характеризує певне поняття. При цьому чим з більшим ступенем елемент $x \in X$ має певну властивість, тим більш близьким до одиниці має бути значення функції належності. І, навпаки, чим з меншим ступенем елемент $x \in X$ має певну властивість, тим більш близьким до нуля має бути значення функції належності. Якщо елемент $x \in X$

безперечно має певну властивість, то його значення дорівнює одиниці. Крім того, значення функції належності узгоджуються з експертними перевагами на множині X таким чином:

– для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ $\mu_A(x_1) < \mu_A(x_2)$ тоді й тільки тоді, коли x_2 переважає x_1;

– для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ $\mu_A(x_1) = \mu_A(x_2)$ тоді й тільки тоді, коли x_1 і x_2 з однаковим ступенем мають властивість L.

Процес побудови або задання нечіткої множини на основі кількісних значень вимірюваної ознаки називають *фазифікацією,* або зведенням до нечіткості.

У *непрямих методах* значення функції належності вибирають таким чином, щоб задовольнялися заздалегідь сформульовані умови. Експертна інформація формує тільки початкові дані для подальшого оброблення. Додаткові умови можуть бути накладені як на вид одержуваної інформації, так і на процедуру оброблення.

Як правило, прямі методи використовуються для опису понять, які характеризуються вимірними властивостями, такими, як висота, маса, об'єм тощо. Непрямі методи більш трудомісткі, ніж прямі, але мають перевагу – стійкість до спотворення вимірів.

Розглянемо два методи побудови функцій належності. Перший метод полягає в статистичному обробленні оцінок групи експертів, другий – у порівнянні парами, яке виконує один експерт. Цей метод використовується для скінченних нечітких множин і ґрунтується на природному припущенні, що безпосередньо оцінити значення функції належності $\mu_I(x_i)$ у точках $x_i \in X$, $i = \overline{1, n}$ важко, а порівняти їх парами в різних точках носія досить легко.

Будуючи функцію належності за першим методом, кожний експерт заповнює анкету, в якій наводить свою думку про наявність у елементів x_i $(i = \overline{1, n})$ властивостей нечіткої множини $\tilde{I}_j$ $(j = \overline{1, m})$. Анкета має такий вигляд:

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$\tilde{I}_1$				
$\tilde{I}_2$				
$\cdots$				
$\tilde{I}_m$				

За результатами анкетування ступінь належності елемента x_i $(i=\overline{1,n})$ нечіткій множині $\tilde{I}_j$ розраховують так:

$$\mu_{I_j}(x_i)=\frac{1}{K}\sum_{k=\overline{1,K}} b_{j,i}^{k},\quad i=\overline{1,n}, \tag{1.1}$$

де K – кількість експертів; $b_{j,i}^{k}$ – оцінка k-го експерта про наявність у елемента x_i властивостей нечіткої множини $\tilde{I}_j$, $k=\overline{1,K}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$. Будемо вважати, що експертні оцінки бінарні, тобто $b_{j,i}^{k}\in\{0;1\}$, де **1** вказує на наявність у елемента x_i властивостей нечіткої множини $\tilde{I}_j$, а **0** – на їх відсутність.

Приклад 1.10. Побудувати функції належності термів «низький», «середній», «високий», що використовуються для лінгвістичної оцінки змінної «зріст чоловіка». Результати опитування п'яти експертів зведено в табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Результати опитування експертів

Експерт	Терм	[160, 165)	[165, 170)	[170, 175)	[175, 180)	[180, 185)	[185, 190)	[190, 195)	[195, 200)
1-й	Низький	1	1	1	0	0	0	0	0
	Середній	0	0	1	1	1	0	0	0
	Високий	0	0	0	0	0	1	1	1
2-й	Низький	1	1	1	0	0	0	0	0
	Середній	0	0	1	1	0	0	0	0
	Високий	0	0	0	0	1	1	1	1
3-й	Низький	1	0	0	0	0	0	0	0
	Середній	0	1	1	1	1	1	0	0
	Високий	0	0	0	0	0	1	1	1
4-й	Низький	1	1	1	0	0	0	0	0
	Середній	0	0	0	1	1	1	0	0
	Високий	0	0	0	0	0	0	1	1
5-й	Низький	1	1	0	0	0	0	0	0
	Середній	0	1	1	1	0	0	0	0
	Високий	0	0	0	1	1	1	1	1

Результати обробки експертних думок зведено в табл. 1.3, де числа над пунктирною лінією відповідають кількості голосів, відданих експертами за належність нечіткій множині відповідного елемента універсальної множини, а під пунктирною лінією наведено ступінь належності, розрахований за формулою (1.1). Графіки функцій належності показано на рис. 1.13.

Таблиця 1.3

Результати обробки думок експертів

Терм	[160, 165)	[165, 170)	[170, 175)	[175, 180)	[180, 185)	[185, 190)	[190, 195)	[195, 200)
Низький	5	4	3	0	0	0	0	0
	1	0,8	0,6	0	0	0	0	0
Середній	0	2	4	5	3	2	0	0
	0	0,4	0,8	1	0,6	0,4	0	0
Високий	0	0	0	1	2	4	5	5
	0	0	0	0,2	0,4	0,8	1	1

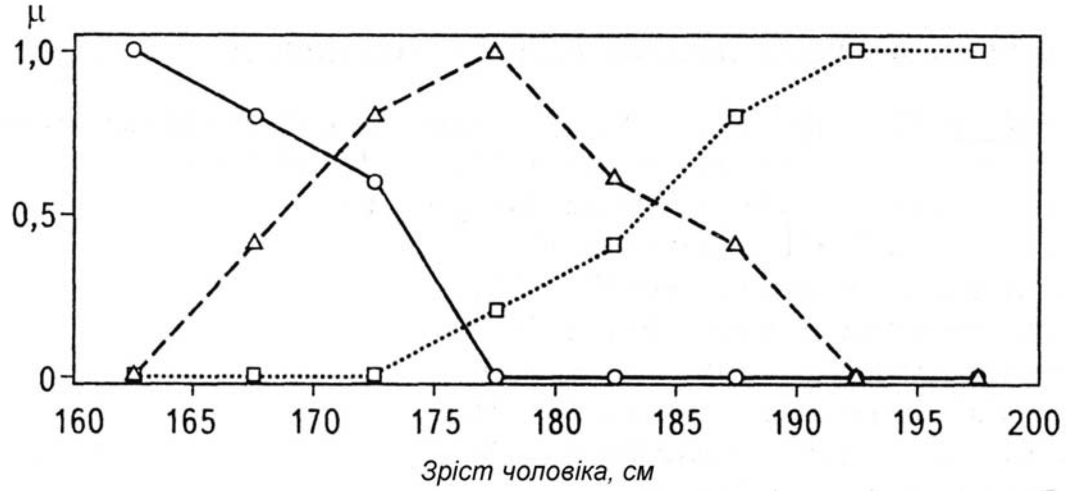


Рис. 1.13. Функції належності нечітких множин (із прикладу 1.10):
–o–o– – низький; - -Δ- -Δ- - – середній; ····□····□···· – високий

Будуючи функцію належності за другим методом, для кожної пари елементів універсальної множини експерт оцінює переважання одного елемента над іншим стосовно властивості нечіткої множини. Такі порівняння парами зручно подавати у вигляді матриці

$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array},$$

де a_{ij} – рівень переважання елемента x_i над x_j $(i,\ j=\overline{1,n})$, який визначається за дев'ятибальною шкалою Сааті [1]:

– 1, якщо перевага елемента x_i над елементом x_j відсутня;

– 2, якщо перевага елемента x_i над елементом x_j майже слабка;

– 3, якщо перевага x_i над x_j слабка;

– 4, якщо перевага x_i над x_j майже суттєва;

– 5, якщо перевага x_i над x_j суттєва;

– 6, якщо перевага x_i над x_j майже явна;

– 7, якщо перевага x_i над x_j явна;

– 8, якщо перевага x_i над x_j майже абсолютна;

– 9, якщо перевага x_i над x_j абсолютна.

Матриця порівнянь парами є діагональною й обернено симетричною $(a_{ji}=1/a_{ij},\ i,j=\overline{1,n})$.

Ступені належності беруть такими, що дорівнюють відповідним координатам власного вектора $W=(w_1,w_2,...,w_n)^T$ матриці порівнянь парами A:

$$\mu(x_1)=w_i,\ i=\overline{1,n}. \tag{1.2}$$

Власний вектор знаходять із такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} AW=\lambda_{\max}W, \\ w_1+w_2+...+w_n=1, \end{cases} \tag{1.3}$$

де $\lambda_{\max}$ – максимальне власне значення матриці A.

Зауваження. Матриця порівнянь парами повинна мати властивість транзитивності, тобто $a_{ij}a_{jk}=a_{ik}$, однак на практиці це відбувається далеко не завжди. Щоб уникнути одержання оцінки компонентів функції належності з похибкою, застосовують процедуру корекції [19].

Приклад 1.11. Побудувати функцію належності нечіткої множини «високий чоловік» на універсальній множині $\{170,175,180,185,190,195\}$.

Припустимо, що відомо такі порівняння парами:

- відсутність переваги 195 над 190;
- суттєва перевага 195 над 180;
- абсолютна перевага 195 над 170;
- майже суттєва перевага 190 над 180;
- майже абсолютна перевага 190 над 170;
- суттєва перевага 185 над 175;
- слабка перевага 195 над 185;
- майже абсолютна перевага 195 над 175;
- слабка перевага 190 над 185;
- явна перевага 190 над 175;
- майже суттєва перевага 185 над 180;
- майже явна перевага 185 над 170;
- слабка перевага 180 над 175;
- майже суттєва перевага 180 над 170;
- майже слабка перевага 175 над 170.

Запишемо ці порівняння у вигляді матриці

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \mathbf{170} & \mathbf{175} & \mathbf{180} & \mathbf{185} & \mathbf{190} & \mathbf{195} \end{array} \\ A = \begin{array}{c} \mathbf{170} \\ \mathbf{175} \\ \mathbf{180} \\ \mathbf{185} \\ \mathbf{190} \\ \mathbf{195} \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1/2 & 1/4 & 1/6 & 1/8 & 1/9 \\ 2 & 1 & 1/3 & 1/5 & 1/7 & 1/8 \\ 4 & 3 & 1 & 1/4 & 1/4 & 1/5 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 8 & 7 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 9 & 8 & 5 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right]. \end{array}$$

Власні значення матриці порівнянь парами A:

$$\lambda_1 = \mathbf{6{,}2494}; \quad \lambda_2 = \mathbf{0{,}0318 + 1{,}2230}i; \quad \lambda_3 = \mathbf{0{,}0318 - 1{,}2230}i;$$

$$\lambda_4 = \mathbf{-0{,}1567 + 0{,}2392}i; \quad \lambda_5 = \mathbf{-0{,}1567 - 0{,}2392}i; \quad \lambda_6 = \mathbf{0{,}0004}.$$

Отже, $\lambda_{\max} = \mathbf{6{,}2494}$. Ступені належності, знайдені за формулами (1.2) і (1.3), наведено в табл. 1.4.

Виявилося, що нечітка множина є субнормальною. Для її нормалізації поділимо всі ступені належності на максимальне значення, тобто на $\mathbf{0{,}3494}$. Графіки функцій належності субнормальної й нормалізованої нечітких множин «високий чоловік» зображено на рис. 1.14. Різниця між $\lambda_{\max}$ і n є ступенем неузгодженості порівнянь парами експерта. У прикладі 1.11 $\lambda_{\max} = \mathbf{6{,}2494}$, а $n = \mathbf{6}$. Отже, ступінь неузгодженості дорівнює $\mathbf{0{,}2494}$.

Таблиця 1.4

Функції належності нечіткої множини «високий чоловік»

x_i	170	175	180	185	190	195
$\mu_{\text{"високий чоловік"}}(x_i)$ для субнормальної нечіткої множини	0,0248	0,0399	0,0816	0,1754	0,3254	0,3494
$\mu_{\text{"високий чоловік"}}(x_i)$ для нормальної нечіткої множини	0,0813	0,1141	0,2335	0,5021	0,9314	1,0000

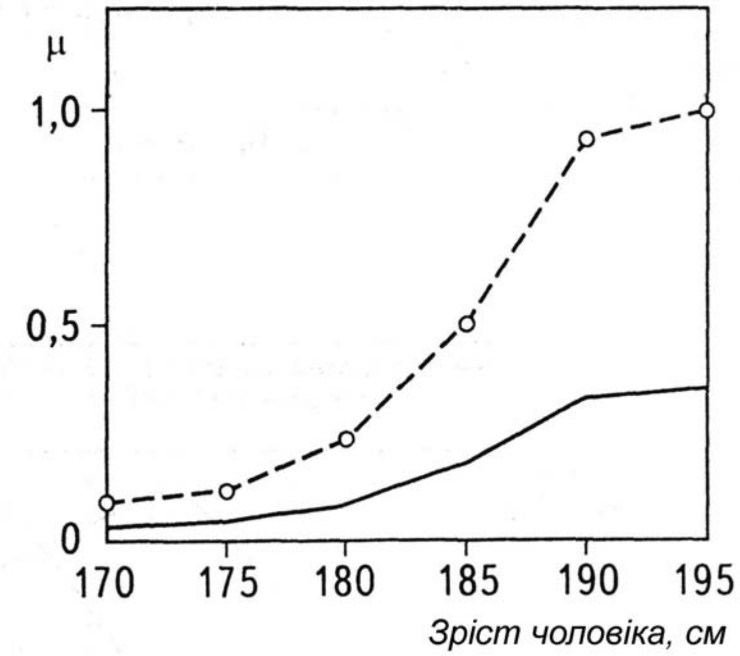


Рис. 1.14. Функції приналежності нечіткої множини «високий чоловік»:
—— – субнормальна нечітка множина; – – – – – нормалізована нечітка множина

Функції належності зручно задавати в параметричній формі. У цьому випадку задача побудови функції належності зводиться до визначення її параметрів. Зазвичай функції належності мають два, три або чотири параметри. Найбільш поширеними є *трикутна, трапецієподібна, гаусова та сигмоїдна функції належності*. Для зображення чітких чисел у вигляді нечітких множин застосовується *синглтонна функція належності*. Аналітичні вирази цих функцій наведено в табл. 1.5, а графіки зображено на рис. 1.15.

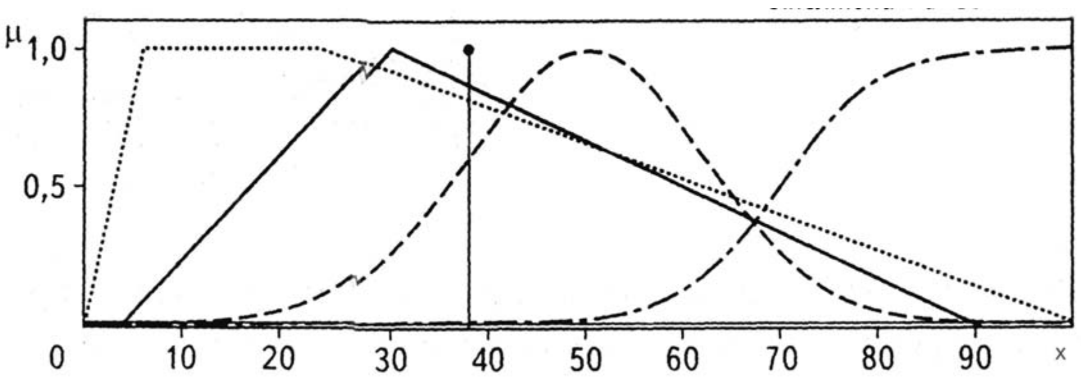


Рис. 1.15. Популярні функції належності:
—— – трикутна ($a = 5$; $b = 30$; $c = 90$); ············ – трапецієподібна ($a = 0$; $b = 6$; $c = 24$; $d = 100$); – – – – – гаусова ($b = 50$; $c = 12$); – · – · – – сигмоїдна ($a = 0{,}2$; $c = 70$); —— – синглтонна ($a = 38$)

Таблиця 1.5

Популярні параметричні функції належності

Найменування функції	Аналітичний вираз	Інтерпретація параметрів
Трикутна	$\mu(x) = \begin{cases} 0, \; x \le a \text{ або } x \ge c \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \quad a < x \le b \\ \dfrac{c-x}{c-b}, \quad b < x < c \end{cases}$	(a, c) – носій нечіткої множини – песимістична оцінка нечіткого числа; b – координата максимуму – оптимістична оцінка нечіткого числа
Трапецієподібна	$\mu(x) = \begin{cases} 0, \; x \le a \text{ або } x \ge d \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \quad a \le x \le b \\ 1, \quad b \le x \le c \\ \dfrac{d-x}{d-c}, \quad c \le x \le d \end{cases}$	(a, d) – носій нечіткої множини – песимістична оцінка нечіткого числа; $[b, c]$ – ядро нечіткої множини – оптимістична оцінка нечіткого числа

Закінчення табл. 1.5

Найменування функції	Аналітичний вираз	Інтерпретація параметрів
Гаусова	$\mu(x) = \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2c^2}\right)$	***b*** – координата максимуму; ***c*** – коефіцієнт концентрації
Сигмоїдна	$\mu(x) = \frac{1}{1+\exp(-a(x-c))}$	***a*** – коефіцієнт крутості; ***c*** – координата переходу через **0,5**
Синглтонна	$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}$	***a*** – чітке число у вигляді нечіткої множини

1.4. Нечітка арифметика. Принципи узагальнення

Принциповою перевагою теорії нечітких множин є можливість адекватного подання змінних, які характеризують складні системи, що функціонують в умовах невизначеності. При цьому для опису змінних системи можуть використовуватися різні спеціальні нечіткі множини. Розглянемо їх.

Означення 1.22. *Нечіткою величиною* називають довільну нечітку множину $B = \{x, \mu_B(x)\}$, задану на множині дійсних чисел R. Функцією належності нечіткої величини є відображення $\mu_B(x):\ R \to [0,\,1]$.

Означення 1.23. *Нечітким числом* називають опуклу нормальну нечітку множину з кусково-неперервною функцією належності, задану на множині дійсних чисел.

Означення 1.24. *Нечітким інтервалом* називають нечітку величину з опуклою функцією належності.

Означення 1.25. *Нечітке число* A називають *додатним*, якщо $\mu_A(x) = 0\ \forall\, x < 0$. Аналогічно *нечітке число* A називають *від'ємним*, якщо $\mu_A(x) = 0\ \forall\, x > 0$.

Означення 1.26. *Принцип нечіткого узагальнення Заде*. Якщо $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – функція від n незалежних аргументів $x_1, x_2, \ldots, x_n$, заданих нечіткими числами $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$ відповідно, то значенням функції $\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)$ називають нечітке число $\tilde{y}$ з функцією належності

$$\mu_{\tilde{y}}(y^*) = \underset{\substack{y^* = f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \\ x_i^* \in \operatorname{supp}(\tilde{x}_i), i = \overline{1,n}}}{\operatorname{supp}} \; \underset{i=\overline{1,n}}{\min}(\mu_{\tilde{x}_i}(x_i^*)).$$

Під час застосування принципу узагальнення Заде виникають такі труднощі:

– великий обсяг обчислень – кількість елементів результуючої нечіткої множини, які необхідно обробити, дорівнює $k_1 \times k_2 \times ... \times k_n$, де k_i – потужність (кількість елементів) носія i-го нечіткого аргумента $(i = \overline{1,n})$;

– необхідність побудови верхньої обвідної елементів результуючої нечіткої множини.

Більш практичним є рівневий принцип узагальнення. У цьому випадку нечіткі числа задають множинами α-перерізів:

$$\tilde{x} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{x}_\alpha, \overline{x}_\alpha),$$

де $\underline{x}_\alpha, \overline{x}_\alpha$ – відповідно мінімальне й максимальне значення на α-рівні.

Означення 1.27. α-*рівневий принцип узагальнення.* Якщо $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – функція від n незалежних аргументів x_i, $i = \overline{1, n}$, заданих нечіткими числами $\tilde{x}_i = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{x}_{i,\alpha}, \overline{x}_{i,\alpha})$, то значенням функції $\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)$ називають нечітке число $\tilde{y} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{y}_\alpha, \overline{y}_\alpha)$, де

$$\underline{y}_\alpha = \underset{x_{i,\alpha} \in [\underline{x}_{i,\alpha}, \overline{x}_{i,\alpha}],\, i = \overline{1,n}}{\inf} (f(x_{1,\alpha}, x_{2,\alpha}, ..., x_{n,\alpha})), \qquad (1.4)$$

$$\overline{y}_\alpha = \underset{x_{i,\alpha} \in [\underline{x}_{i,\alpha}, \overline{x}_{i,\alpha}],\, i = \overline{1,n}}{\sup} (f(x_{1,\alpha}, x_{2,\alpha}, ..., x_{n,\alpha})). \qquad (1.5)$$

Застосування α-рівневого принципу узагальнення зводиться до розв'язання для кожного α-рівня такої задачі оптимізації: знайти максимальне й мінімальне значення функції $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за умови, що аргументи можуть набувати значень з відповідних α-перерізів.

Кількість α-рівнів вибирають так, щоб забезпечити необхідну точність обчислень.

За допомогою α-рівневого принципу узагальнення можна легко одержати *правила виконання арифметичних операцій над нечіткими числами* (табл. 1.6). У загальному вигляді правила виконання арифметичних операцій можна записати таким чином. Позначимо арифметичну операцію символом «*». Тоді для кожного α-рівня результат операції $\tilde{y} = \tilde{x}_1 * \tilde{x}_2$ можна розрахувати за формулами

$$\underline{y} = \min\left(\underline{x}_1 * \underline{x}_2,\ \overline{x}_1 * \overline{x}_2,\ \underline{x}_1 * \overline{x}_2,\ \overline{x}_1 * \underline{x}_2\right),$$

$$\overline{y} = \max\left(\underline{x}_1 * \underline{x}_2,\ \overline{x}_1 * \overline{x}_2,\ \underline{x}_1 * \overline{x}_2,\ \overline{x}_1 * \underline{x}_2\right).$$

Таблиця 1.6

Правила виконання арифметичних операцій
над додатними нечіткими числами (для кожного α-рівня)

Арифметична операція	$\underline{y}$	$\overline{y}$
$\tilde{y} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$	$\underline{x}_1 + \underline{x}_2$	$\overline{x}_1 + \overline{x}_2$
$\tilde{y} = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2$	$\underline{x}_1 - \underline{x}_2$	$\overline{x}_1 - \underline{x}_2$
$\tilde{y} = \tilde{x}_1 \tilde{x}_2$	$\underline{x}_1 \underline{x}_2$	$\overline{x}_1 \overline{x}_2$
$\tilde{y} = \tilde{x}_1 / \tilde{x}_2$	$\underline{x}_1 / \underline{x}_2$	$\overline{x}_1 / \underline{x}_2$

Зазначимо, що операцію ділення можна виконати тільки у випадку, коли дільник є або додатним, або від‘ємним нечітким числом. У противному випадку треба було б здійснити ділення на нуль.

Приклад 1.12. Нечіткі числа $\tilde{x}_1$ і $\tilde{x}_2$ задано такими трапецієподібними функціями належності:

$$\mu_{\tilde{x}_1}(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x < 1 \text{ або } x > 4, \\ x - 1, \quad \text{якщо } x \in [1, 2], \\ 1, \quad \text{якщо } x \in [2, 3], \\ 4 - x, \quad \text{якщо } x \in [3, 4]; \end{cases} \quad \mu_{\tilde{x}_2}(x) = \begin{cases} 0, \text{якщо } x < 2 \text{ або } x > 8, \\ x - 2, \quad \text{якщо } x \in [2, 3], \\ 1, \quad \text{якщо } x \in [3, 4], \\ 2 - 0{,}25x, \text{якщо } x \in [4, 8]. \end{cases}$$

Необхідно знайти нечітке число $\tilde{y} = \tilde{x}_1 \tilde{x}_2$, застосовуючи α-рівневий принцип узагальнення.

Будемо використовувати два α-рівні: 0 і 1. Тоді нечіткі аргументи можна задати так:

$$\tilde{x}_1 = (1;\ 4)_0 \bigcup (2;\ 3)_1;\ \tilde{x}_2 = (2;\ 8)_0 \bigcup (3;\ 4)_1.$$

За α-рівневим принципом одержуємо узагальнення

$$\tilde{y} = (2;\ 32)_0 \bigcup (6;\ 12)_1 .$$

На рис. 1.16, а зображено результат множення $\tilde{y} = \tilde{x}_1 \tilde{x}_2$: α-перерізи показано тонкими горизонтальними лініями, кусково-лінійну апроксимацію функції належності нечіткого числа $\tilde{y}$ – жирною суцільною лінією. Нечіткі числа $\tilde{y}$ при заданні аргументів $\tilde{x}_1$ і $\tilde{x}_2$ на трьох, п'яти й восьми α-рівнях зображено на рис. 1.16, б – г.

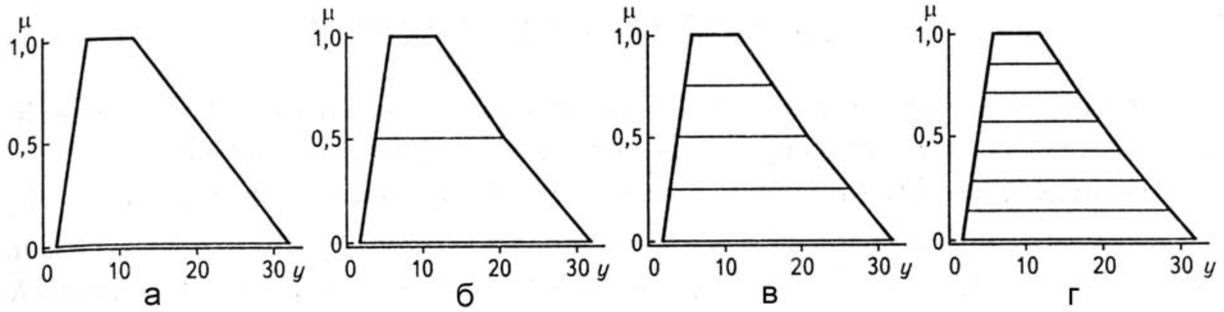


Рис. 1.16. Функція належності результату

1.5. Нечіткі відношення

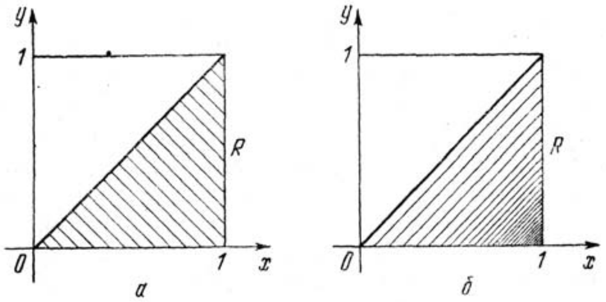
Нечіткі відношення відіграють фундаментальну роль у теорії нечітких множин. Апарат теорії нечітких відношень використовують під час розв'язування численних задач моделювання структури й поведінки складних систем, при аналізі процесів прийняття рішень і взагалі в задачах, для розв’язання яких традиційно застосовується теорія звичайних (чітких) відношень.

Означення 1.28. Нечітким відношенням R на множині елементів (об’єктів, альтернатив та ін.) X називають нечітку підмножину декартова добутку $X \times X$, яка має функцію належності $\mu_R : X \times X \to [0;\ 1]$.

Іншими словами, нечіткість тут визначає характер відношення R між будь-якими об'єктами або альтернативами $x,\ y \in X$ у тих випадках, коли не існує чіткого судження про це відношення або міру правильності його виконання. Наприклад, для різних людей, у тому числі й для експертів, визначення переваги одного із двох або більшої кількості близьких за якостями альтернативних варіантів розв'язку являє собою досить непросту проблему раціонального вибору. Тому конкретне значення функції належності $\mu_R(x,\ y)$ відношення R за своєю суттю є певним показником суб'єктивної оцінки правильності відношення xRy для заданої пари $(x,\ y)$ або оцінки міри його виконання з особистої точки зору кожного окремого експерта з урахуванням його загальної культури, ерудиції, рівня професійної компетентності, досвіду і навіть смаку.

Приклад 1.13. Розглянемо два «схожі» відношення на тому самому інтервалі $\left[0;\,1\right]$, причому одне з них звичайне (чітке), а інше – нечітке. Нехай звичайне відношення $R_1 = (\geq)$, яке відображає той факт, що одні елементи якої-небудь множини є не меншими, ніж деякі інші його елементи. Нечітке відношення $R_2 = (>>)$ свідчить про те, що деякі елементи цієї множини є набагато більшими від інших його елементів.

На рис. 1.17, а пари $(x,\ y)$ з інтервалу $\left[0;\,1\right]$ зв'язані чітким відношенням і утворюють множину, яку показано штриховкою (включаючи саму діагональ).



а

б

Рис. 1.17. Геометрична інтерпретація чіткого й нечіткого відношень

У випадку нечіткого відношення ситуація є складнішою через те, що поняття «набагато більше» є нечітким. Відповідна область площини xOy також розташована праворуч від діагоналі одиничного квадрата, однак її характер є набагато складнішим. Дійсно, по-перше, точки на самій діагоналі квадрата вже ніяк не можуть входити до складу цієї області, оскільки вони відповідають відношенню рівності $x = y$, що суперечить відношенню «x набагато більше y». По-друге, чим ближче до діагоналі розташована точка $(x,\ y)$, тим слабкішою має бути міра виконання відношення R_2, а чим далі від діагоналі розташована ця точка, тим з більшим ступенем воно виконується. Тому рідка штриховка поблизу діагоналі квадрата відповідає тим парам $(x,\ y)$, для яких це відношення виконується з малим значенням функції належності $\mu_{R_2}(x,\ y)$, а поступове збільшення густості штриховки в міру віддалення від діагоналі ілюструє збільшення числового значення функції належності $\mu_{R_2}(x,\ y) \to 1$, яке набуває максимуму в правому нижньому куті квадрата.

На практиці використовують різні способи, якими можна формально задати нечіткі відношення, наприклад: у формі списку, аналітично, графічно, у формі орієнтованого нечіткого графа. У тих випадках, коли множина X, на якій задано нечітке відношення R, є скінченною, функція належності μ_R цього відношення являє собою квадратну матрицю, елементами якої є числа з інтервалу $[0;\ 1]$. Так, якщо якийсь із елементів матриці $r_{ij} = \alpha$, то це означає, що відношення $x_i R y_j$ виконується зі ступенем α.

Означення 1.29. *Носієм* $supp R$ нечіткого відношення R на множині X називають підмножину декартова добутку $X \times X$, що має такий вигляд:

$$supp R = \{(x,\ y) : (x,\ y) \in X \times X;\ \mu_R(x,\ y) > 0\}.$$

Слід зазначити, що $\mathrm{supp} R$ являє собою звичайне, тобто чітке, відношення. Фактично носій нечіткого відношення можна розглядати як звичайне відношення на множині X, що зв'язує ті пари $(x,\ y)$, для яких значення функції належності відношення R більші від нуля, тобто $\mu_K(x,\ y) > 0$.

Означення 1.30. *Множиною рівня* α нечіткого відношення R на множині X називають підмножину декартова добутку $X \times X$, що має такий вигляд:

$$R_\alpha = \{(x,\ y) : (x,\ y) \in X \times X,\ \mu_R \geq \alpha\}.$$

Іншими словами, множина рівня α нечіткого відношення R на множині X являє собою звичайне відношення на X, що зв'язує всі пари $(x,\ y)$, для яких відношення R виконується зі ступенем, не меншим, ніж величина α.

Якщо множина X є скінченною, то легко можна одержати матрицю носія нечіткого відношення R і матрицю його множини рівня α, замінивши в матриці функції належності μ_R нечіткого відношення R одиницею всі елементи, які більші від нуля (при визначенні носія цього відношення), або всі елементи, які не менші від α (при визначенні його множини рівня α).

Приклад 1.14. Припустимо, що на скінченній множині $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ задано нечітке відношення R з функцією належності

$$\mu_R(x,y)=\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тоді відповідно до наведених означень його носієм і множиною рівня $\alpha = \mathbf{0{,}5}$ будуть чіткі відношення, матриці функцій належності яких мають такий вигляд:

$$\operatorname{supp} R=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_{0,5}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.15. Задати нечітке відношення $x \ll y$ («x набагато менше y»).

Нехай $x, y \in \{0, 1, 2, 3\}$. Тоді нечітке відношення можна задати матрицею

$$\tilde{R}=\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3\leftarrow y & x\downarrow \\ \hline 0 & 0{,}2 & 0{,}6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}.$$

Для неперервних множин $X = [0, 3]$ і $Y = [0, 3]$ це нечітке відношення можна визначити такою функцією належності:

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x \geq y, \\ \dfrac{1}{1+5/(x-y)^4}, & \text{якщо } x < y. \end{cases}$$

Нечіткі відношення $x \ll y$ на дискретних і неперервних множинах зображено на рис. 1.18.

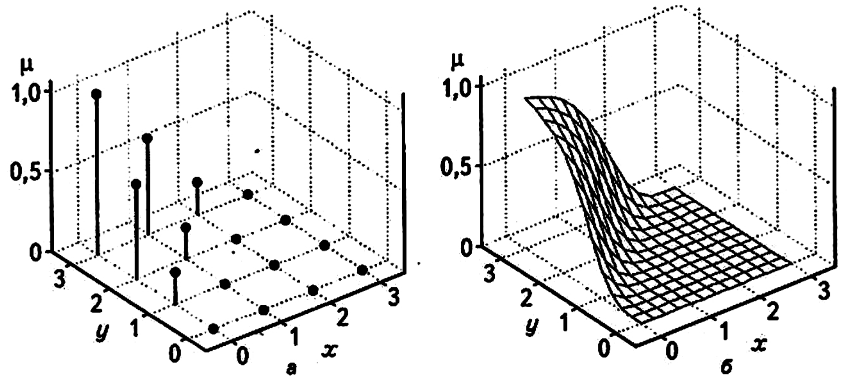


Рис. 1.18. Нечітке відношення «x набагато менше y»:
а – на дискретних множинах; б – на неперервних множинах

Нечіткі відношення дають можливість не тільки зафіксувати сам факт відношення, але й продемонструвати ступінь його виконання, що важливо для багатьох практичних задач.

1.5.1. Операції над нечіткими відношеннями

Нехай на деякій універсальній множині $\boldsymbol{X}$ задано два нечітких відношення $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$, кожне з яких являє собою нечітку множину на декартовому добутку $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X}$, і нехай їхніми елементами є пари $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, а функціями належності – $\mu_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ і $\mu_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Означення 1.31. *Об'єднанням* нечітких відношень $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ на множині $\boldsymbol{X}$ називають нечітке відношення $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \bigcup \boldsymbol{B}$, функція належності якого має вигляд

$$\mu_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{\mu_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \mu_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\}$$

для будь-якої пари $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{X}$.

Означення 1.32. *Перетинанням* нечітких відношень $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ на множині $\boldsymbol{X}$ називають нечітке відношення $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} \bigcap \boldsymbol{B}$, функція належності якого має вигляд

$$\mu_{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \min\{\mu_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \mu_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\}$$

для будь-якої пари $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{X}$.

Приклад 1.16. Розглянемо два бінарні нечіткі відношення $\boldsymbol{Q}_1$ і $\boldsymbol{Q}_2$, які задано на універсумі $\boldsymbol{X} = \{11, 12, 13, 14, 15\}$. Нечітке відношення $\boldsymbol{Q}_1$ відображає властивість «натуральне число $\boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{X}$ приблизно дорівнює натуральному числу $\boldsymbol{x}_j \in \boldsymbol{X}$». Нечітке відношення $\boldsymbol{Q}_2$ відображає властивість «натуральне число $\boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{X}$ трохи більше, ніж натуральне число $\boldsymbol{x}_j \in \boldsymbol{X}$». Нехай ці нечіткі відношення задано матрицями

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Q}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}8 & 1 & 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}8 & 1 & 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}8 & 1 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}8 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Q}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}8 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}8 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тоді результати перетинання й об'єднання цих двох відношень можна подати у вигляді матриць

$$M_{Q_1 \cap Q_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,6 & 0,8 & 0 \end{bmatrix}, \; M_{Q_1 \cup Q_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 & 0,6 & 0,3 & 0 \\ 1 & 1 & 0,8 & 0,6 & 0,3 \\ 0,8 & 1 & 1 & 0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 & 1 & 1 & 0,8 \\ 0,2 & 0,6 & 0,8 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матриця $M_{Q_1 \cap Q_2}$ описує нечітке відношення, що відповідає такій складній властивості: «натуральне число $x_i \in X$ приблизно дорівнює, але при цьому трохи більше натурального числа $x_j \in X$». Матриця $M_{Q_1 \cup Q_2}$ описує нечітке відношення, що відповідає властивості «натуральне число $x_i \in X$ приблизно дорівнює або трохи більше натурального числа $x_j \in X$».

Означення 1.33. Кажуть, що нечітке відношення B *містить нечітке відношення* A (або нечітке відношення A міститься в нечіткому відношенні B), якщо для відповідних нечітких множин A і B виконується умова $A \subseteq B$ і при цьому для функції належності цих множин є правильною нерівність $\mu_A(x,y) \le \mu_B(x,y)$ для будь-яких $x, y \in X$.

На рис. 1.19 подано геометричну ілюстрацію операції включення нечіткого відношення A в нечітке відношення B. За графіками функцій нечітких відношень дійсно можна зробити висновок, що $\mu_A(x,y) \le \mu_B(x,y)$ для всієї множини пар (x,y).

Рис. 1.19. Геометрична ілюстрація операції включення нечіткого відношення A в нечітке відношення B

Однак на відміну від звичайних відношень навіть при умові $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$ нечітке відношення $\boldsymbol{B}$ може не включати нечіткого відношення $\boldsymbol{A}$, якщо порушується умова $\mu_A(x,y) \le \mu_B(x,y)$, як це показано на рис. 1.20. У цьому полягає одна із принципових відмінностей між звичайними й нечіткими відношеннями.

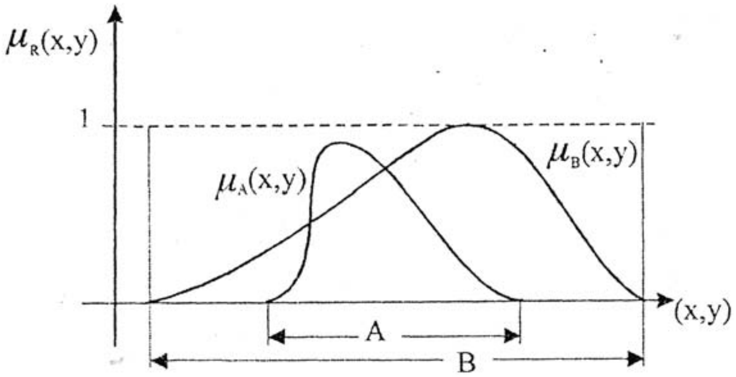


Рис. 1.20. Невиконання операції включення нечіткого відношення $\boldsymbol{A}$ в нечітке відношення $\boldsymbol{B}$

Означення 1.34. *Доповненням* нечіткого відношення $\boldsymbol{R}$ на множині $\boldsymbol{X}$ називають нечітке відношення $\boldsymbol{R}'$, функція належності якого визначається як

$$\mu_{R'}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y)$$

для будь-яких пар $(x,y) \in X$.

Приклад 1.17. Розглянемо бінарне нечітке відношення Q_3, задане матрицею M_{Q_3} на універсальній множині $X = \{11,12,13,14,15\}$, яке відображає той факт, що «натуральне число $x_i \in X$ помітно менше, ніж натуральне число $x_j \in X$».

Запишемо результат виконання операції доповнення:

$$M_{Q_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,4 & 0,7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{Q_3}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0,6 & 0,3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0,6 & 0,3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0,6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отримана матриця описує нечітке відношення, що відповідає властивості «натуральне число $x_i \in X$ трохи менше або дорівнює, або навіть більше, ніж натуральне число $x_j \in X$».

Означення 1.35. *Оберненим* відносно нечіткого відношення R називають нечітке відношення R^{-1} на множині X, що визначається таким чином:

$$xR^{-1}y \Leftrightarrow yRx : (x,y) \in X;$$

$$\mu_{R^{-1}}(x,y) = \mu_R(y,x) : (x,y) \in X.$$

Прикладом обернених нечітких відношень може бути пара «набагато більше» – «набагато менше».

Означення 1.36. *Максимінним добутком* (максимінною композицією) нечітких відношень A і B на множині X є нечітке відношення $A \circ B$ з функцією належності

$$\mu_{A \circ B}(x,y) = \sup_{z \in X} \min \{\mu_A(x,z), \mu_B(z,y)\}.$$

Означення 1.37. *Мінімаксним добутком* (мінімаксною композицією) нечітких відношень A і B на множині X є нечітке відношення $A \bullet B$ з функцією належності

$$\mu_{A \bullet B}(x,y) = \inf_{z \in X} \max \{\mu_A(x,z), \mu_B(z,y)\}.$$

Означення 1.38. *Максмультиплікативним добутком* (максмультиплікативною композицією) нечітких відношень A і B на множині X є нечітке відношення $A * B$ з функцією належності

$$\mu_{A * B}(x,y) = \sup_{z \in X} \{\mu_A(x,z) \cdot \mu_B(z,y)\}.$$

Розглянемо нечіткі відношення A і B на скінченній множині X з функціями належності, заданими у вигляді квадратних матриць, що відображають ступінь виконання відповідних нечітких відношень $x_{ij} A y_{ij}$ і $x_{ij} B y_{ij}$ між елементами x_{ij} й y_{ij}. У такому випадку функції належності наведених вище композицій обчислюють за такими формулами:

– для максимінної композиції

$$\mu_{A \circ B}(x,y) = \max_{k \in N} \min \{\mu_A(a_{ik}, k), \mu_B(k, b_{kj})\}, \ i, j, k \in N; \quad (1.6)$$

– для мінімаксної композиції

$$\mu_{A \bullet B}(x,y) = \min_{k \in N} \max \{\mu_A(a_{ik}, k), \mu_B(k, b_{kj})\}, \ i, j, k \in N; \quad (1.7)$$

– для максмультиплікативної композиції

$$\mu_{A*B}(x,y)=\max_{k\in N}\{a_{ik}\times b_{kj}\},\ i,j,k\in N. \qquad (1.8)$$

Приклад 1.18. Задано функції належності нечітких відношень A і B на множині X:

$$\mu_A(x,y)=\begin{bmatrix}0{,}2 & 0{,}6\\ 0{,}5 & 0{,}8\end{bmatrix};\ \mu_B(x,y)=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}7\\ 0{,}3 & 1\end{bmatrix}.$$

Розглянемо алгоритми обчислення матриць функцій належності заданих відношень для всіх трьох наведених вище композицій.

Для *максимінної композиції* функцію належності обчислюють таким чином. Спочатку відповідно до формального правила перемноження матриць кожний елемент композиції відшукують шляхом порівняння елементів відповідного рядка матриці функції належності $\mu_A(x,y)$ нечіткого відношення A і B та елементів відповідного стовпця матриці функції належності $\mu_B(x,y)$ нечіткого відношення B. Потім із отриманої сукупності мінімальних значень вибирають найбільше.

Наприклад, для елемента a_{11} ця процедура має такий вигляд. Порівнявши числові значення першого елемента першого рядка матриці $\mu_A(x,y)$, що дорівнює 0,2, і першого елемента першого стовпця матриці $\mu_B(x,y)$, що дорівнює 0,5, вибирають найменше з них, тобто 0,2. Порівнявши значення другого елемента першого рядка матриці $\mu_A(x,y)$, що дорівнює 0,6, і значення другого елемента першого стовпця матриці $\mu_B(x,y)$, що дорівнює 0,3, вибирають найменше з них, тобто 0,3. Далі з отриманої сукупності мінімальних значень вибирають найбільше. Таким чином, $a_{11}=0{,}3$. Аналогічно знаходять інші елементи матриці функції належності максимінної композиції:

$$\mu_{A\circ B}(x,y)=\begin{bmatrix}0{,}3 & 0{,}6\\ 0{,}5 & 0{,}8\end{bmatrix}.$$

Для *мінімаксної композиції* нечітких відношень A і B на множині X процедура знаходження елементів матриці функції належності подібна, однак за результатами перших порівнянь вибирають найбільші із чисел, а з отриманої сукупності – найменше число. Таким чином, шукана функція належності мінімаксної композиції нечітких відношень A і B на множині X має вигляд

$$\mu_{A \bullet B}(x,y) = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}7 \end{bmatrix}.$$

Для *максмультиплікативної композиції* нечітких відношень A і B на множині X процедура знаходження елементів матриці функції належності полягає в такому. Формуючи значення елемента a_{11}, спочатку обчислюють добутки відповідних елементів першого рядка матриці $\mu_A(x,y)$ і першого стовпця матриці $\mu_B(x,y)$, а потім вибирають найбільше з отриманих добутків. У цьому випадку $0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}1$ і $0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18$, тоді $a_{11} = \max\{0{,}1;\ 0{,}18\} = 0{,}18$.

Таким чином, остаточно матриця функції належності максмультиплікативної композиції заданих нечітких відношень A і B на множині X має такий вигляд:

$$\mu_{A * B}(x,y) = \begin{bmatrix} 0{,}18 & 0{,}6 \\ 0{,}25 & 0{,}8 \end{bmatrix}.$$

Поняття композиції нечітких відношень є корисним для розв'язування деяких класів важливих прикладних задач прийняття рішень, особливо в умовах інформаційної невизначеності.

1.5.2. Властивості нечітких відношень

Розглянемо основні властивості бінарних нечітких відношень, які узагальнюють відомі властивості звичайних відношень.

1. **Рефлексивність.** Нечітке відношення R на множині X називають рефлексивним, якщо для $\forall x \in X$ виконується рівність $\mu_R(x,x) = 1$.

У випадку скінченної множини X головна діагональ матриці рефлексивного нечіткого відношення R складається цілком з одиниць. Прикладом рефлексивного нечіткого відношення може бути відношення «приблизно дорівнюють один одному» на множині чисел.

2. **Антирефлексивність**. Функція належності антирефлексивного нечіткого відношення має властивість $\mu_R(x,x) = 0 \ \forall x \in X$.

При цьому всі елементи головної діагоналі матриці антирефлексивного бінарного нечіткого відношення на скінченній множині дорівнюють нулю.

Антирефлексивним є, наприклад, відношення «багато більше» на множині чисел. Напевне, що доповнення рефлексивного нечіткого відношення антирефлексивне. Це безпосередньо випливає з означення доповнення нечіткого відношення R. У прикладах 1.16, 1.17 нечітке відношення Q_1 рефлексивне, а нечіткі відношення Q_2, Q_3 антирефлексивні.

3. Симетричність. Нечітке відношення R на множині X називають симетричним, якщо для будь-яких $x, y \in X$ виконується рівність $\mu_R(x,y) = \mu_R(y,x)$.

Матриця симетричного нечіткого відношення, заданого на скінченній множині, симетрична відносно головної діагоналі. Зокрема, нечітке відношення Q_1 із прикладу 1.16 є симетричним.

Приклад 1.19. Розглянемо відношення R, що відображає властивість «істотно різняться за величиною». Дійсно, як би ми не пробували розмістити числові значення двох елементів x і y, для яких виконується таке відношення R, різниця за величиною між ними буде зберігатися. На рис. 1.21 показано варіанти розташування елементів x і y відношення R. В обох випадках x і y дійсно сильно різняться за величиною, а відношення R є симетричним.

4. Антисиметричність. Нечітке відношення R на множині X називають антисиметричним, якщо для будь-яких $x, y \in X$ його функція належності має властивість

$$\mu_R(x,y) > 0 \Rightarrow \mu_R(y,x) = 0.$$

Цю властивість можна описати двома еквівалентними способами:

$$\mu_R(x,y) \times \mu_R(y,x) = 0 \quad \forall\, x, y \in X,$$
$$\min\{\mu_R(x,y),\, \mu_R(y,x)\} = 0 \quad \forall\, x, y \in X.$$

Антисиметричним, наприклад, є нечітке відношення «набагато більше».

Зазначимо, що не всяке неферлексивне (несиметричне) відношення є антирефлексивним (антисиметричним).

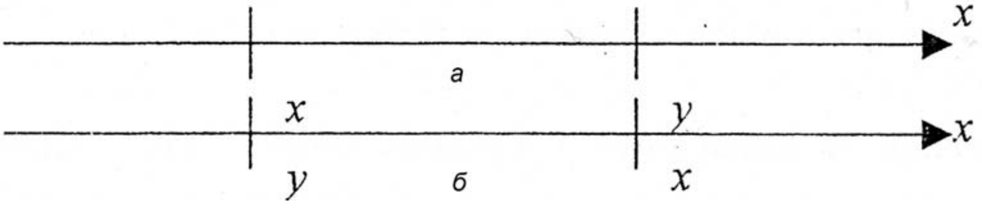


Рис. 1.21. Варіанти розташування елементів x і y,
для яких є правильним відношення $R =$ «істотно різняться за величиною»

5. Транзитивність. Нечітке відношення R на множині X називають транзитивним, якщо для будь-якої пари $x, y \in X$ композиція відношень $R \circ R$ являє собою підмножину цього нечіткого відношення, тобто $R \circ R \subseteq R$.

З цього означення бачимо, що властивість транзитивності нечіткого відношення залежить від способу визначення добутку нечітких відношень. Якщо позначити через R_1^2, R_2^2 і R_3^2 максимінний, мінімаксний й максмультиплікативний добутки відношення R саме на себе, то неважко переконатися в тому, що $R_3^2 \subseteq R_1^2 \subseteq R_2^2$. Дійсно, при будь-яких $x, y, z \in X$ виконуються нерівності

$$\max\{\mu_R(x,z), \mu_R(z,y)\} \geq \min\{\mu_R(x,z), \mu_R(z,y)\} \geq \mu_R(x,z) \times \mu_R(z,y),$$

з яких і випливають відповідні включення.

Якщо до слова «транзитивність» приписувати назву відповідної операції добутку нечітких відношень, то одержуємо: (мінімаксна транзитивність R) $\Rightarrow$ (максимінна транзитивність R) $\Rightarrow$ (максмультиплікативна транзитивність R). Іншими словами, нечітке відношення, що має властивість мінімаксної транзитивності, має транзитивність і двох інших типів, а відношення, що має максмультиплікативну транзитивність, може, загалом кажучи, і не бути транзитивним у двох інших змістах.

Для звичайного відношення, тобто у випадку, коли функція μ_R набуває лише значень 0 і 1, максимінна й максмультиплікативна транзитивності еквівалентні звичайній транзитивності відношення.

Властивість транзитивності має, наприклад, нечітке відношення «набагато більше».

6. Транзитивне замикання. Транзитивним замиканням степеня n нечіткого відношення R називають нечітке відношення, яке визначається як об'єднання $\hat{R} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$.

Уводячи транзитивне замикання, необхідно вказати спосіб визначення операції добутку нечітких відношень.

1.5.3. Відображення нечітких множин

Поняття нечіткого відображення являє собою узагальнення поняття звичайного відображення, що поширюється на різні досить складні випадки, коли виникає необхідність ураховувати деяку інформаційну невизначеність або суб'єктивну нечіткість оцінки.

Характерним прикладом появи нечіткості внаслідок наявності об'єктивних умов у процесі керування технічними системами може бути ситуація, коли відображенням є реакція коліс автомобіля на поворот кермового колеса за умови наявності значних люфтів в елементах вузлів рульового механізму.

Ще більш складними є численні ситуації з реальної життєвої практики, у тому числі й управлінської діяльності, де нечіткість виникає внаслідок певних суб'єктивних факторів. Наприклад, керівникові досить часто доводиться приймати відповідальне рішення і в умовах неповної інформації, і за наявності певного ризику, і при ресурсних обмеженнях, і за наявності суб'єктивних моментів, і коли необхідно врахувати кілька, часто суперечних, критеріїв оптимальності рішення, що приймається.

Сама постановка задачі прийняття рішень у подібних умовах, не кажучи вже про можливість успішного її розв‘язання, є проблематичною без використання апарату нечітких відображень.

Нехай A – деяка нечітка підмножина множини X з функцією належності $\mu_A(x)$.

Означення 1.39. Бінарне нечітке відношення $F = \{(x_i, x_j); \mu_F(x_i, x_j)\}$, задане на декартовому добутку $X_1 \times X_2$, називають *чітким відображенням нечіткої множини* A, якщо для будь-якого $x_i \in A$, $A \subset X_1$ існує рівно один елемент $x_j \in X_2$ з відмінним від нуля значенням функції належності $\mu_F(x_i, x_j)$.

Якщо як універсальні множини X_1 і X_2 розглядати числові множини, то відповідне відображення природним буде називати *чіткою функцією нечіткої множини* або *чіткою функцією нечіткого аргумента*.

Нехай $\varphi : X \to Y$ – задане відображення, тобто $y = \varphi(x)$. Нечітким образом нечіткої множини A при відображенні φ є нечітка підмножина B множини Y, яку можна описати співвідношенням

$$B = \{(y, \mu_B(y))\} = \{(\varphi(x), \mu_A(x)\}.$$

При цьому функція належності $\mu_B(y)$ визначається таким чином:

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu_A(x), \ \varphi^{-1}(y) = \{x : x \in X, \varphi(x) = y\}. \quad (1.9)$$

Приклад 1.20. Нехай задано нечітку множину $A = \{0{,}1/1;\ 0{,}5/2;\ 1{,}0/3;\ 0{,}6/4;\ 0{,}2/5\}$. Визначимо нечітку підмножину $\boldsymbol{B}$, яка є результатом відображення $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2$ нечіткої множини $\boldsymbol{A}$. Згідно з (1.9) маємо

$$\boldsymbol{B} = \{0{,}1/1;\ 0{,}5/4;\ 1{,}0/9;\ 0{,}6/16;\ 0{,}2/25\}.$$

На практиці досить часто доводиться розв‘язувати задачі, у яких крім нечіткої множини $\boldsymbol{A}$ існує нечіткість самого відображення $\varphi(\boldsymbol{x})$. Необхідність розглядати ситуації з нечітким відображенням може виникати в процесі аналізу задач прийняття управлінських рішень, коли результат вибору конкретного елемента $\boldsymbol{x}$ із множини $\boldsymbol{X}$ можливих альтернатив відомий нечітко. У задачах управління подібному випадку відповідає ситуація, коли поведінка керованої системи описана нечітко.

Нехай кожному елементу $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ початкової нечіткої множини при відображенні ставиться у відповідність не один конкретний елемент множини $\boldsymbol{Y}$, а нечітка підмножина елементів множини $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{Y}$. Нечітке відображення φ описується функцією належності вигляду $\mu_\varphi : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \to [0,\ 1]$ так, що функція $\mu_\varphi(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y})$, де $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0}$ – деяке фіксоване значення, є функцією належності нечіткої підмножини $\boldsymbol{B}$ у множині $\boldsymbol{Y}$, що являє собою нечіткий (або розмитий) образ елемента $\boldsymbol{x_0}$ множини $\boldsymbol{X}$ при заданому відображенні $\varphi(\boldsymbol{x})$.

Нехай на множині $\boldsymbol{X}$ існує нечітка підмножина $\boldsymbol{A}$ з функцією належності $\mu_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x})$ і деяке нечітке її відображення φ на множину $\boldsymbol{Y}$, задане функцією належності μ_φ. Тоді образ нечіткої множини $\boldsymbol{A}$ можна записати у вигляді сукупності пар:

$$\{\mu_\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y});\ \mu_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x})\},\quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X},$$

причому для кожного фіксованого $(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0}) \in \boldsymbol{X}$ функція $\mu_\varphi(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y})$ являє собою нечітку підмножину множини $\boldsymbol{Y}$.

Означення 1.40. *Образом* $\boldsymbol{B}$ *нечіткої підмножини* $\boldsymbol{A}$ множини $\boldsymbol{X}$ при нечіткому відображенні $\mu_\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \to [0,\ 1]$ називають нечітку множину $\boldsymbol{B}$ з функцією належності

$$\mu_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{y}) = \sup_{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}} \min\{\mu_\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y});\ \mu_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x})\}. \qquad (1.10)$$

У багатьох важливих прикладних задачах прийняття рішень часто мають місце випадки, коли задане нечітке відображення φ з функцією належності μ_φ залежить від n змінних. Інакше кажучи, це відображення будується на декартовому добутку $X \times Y$, однак тут $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Якщо враховувати, що за означенням функція належності декартова добутку нечітких множин

$$\mu_A(x) = \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \ldots, \mu_{A_n}(x_n)\},$$

то шукана функція належності нечіткого образу нечіткої множини A матиме такий вигляд:

$$\mu_B(y) = \sup_{y \in X} \min\{\mu_{A_1}(x_1),\ \mu_{A_2}(x_2), \ldots, \mu_{A_n}(x_n),\ \mu_\varphi(x, y)\}.$$

Приклад 1.21. Нехай задано нечітку множину $A = \{0{,}7/1;\ 1{,}0/2\}$. Нечітке відображення $\Phi(x)$ визначає нечіткі підмножини, які є результатом цього відображення (табл. 1.7).

Таблиця 1.7

Опис нечіткого відображення $\Phi(x)$

$x_i \in A$	Нечіткі підмножини – результат відображення
1	$0{,}5/1;\ 1{,}0/2;\ 0{,}6/3;\ 0{,}2/4$
2	$0{,}6/2;\ 0{,}8/3;\ 1{,}0/4;\ 0{,}8/5$

Знайдемо нечітку множину B, що є результатом нечіткого відображення нечіткої множини A. Згідно з (1.10) маємо:

$$\mu_B(1) = \min\{0{,}7;\ 0{,}5\} = 0{,}5;$$

$$\mu_B(2) = \sup(\min\{0{,}7;\ 1\}, \min\{1{,}0;\ 0{,}6\}) = 0{,}7;$$

$$\mu_B(3) = \sup(\min\{0{,}7;\ 0{,}6\}, \min\{1{,}0;\ 0{,}8\}) = 0{,}8;$$

$$\mu_B(4) = \sup(\min\{0{,}7;\ 0{,}2\}, \min\{1{,}0;\ 1{,}0\}) = 1{,}0;$$

$$\mu_B(5) = \min\{1{,}0;\ 0{,}8\} = 0{,}8.$$

Приклад 1.22. Нехай $A = \{0{,}1/1;\ 0{,}5/2;\ 1{,}0/3\}$. Задамо нечітку функцію співвідношенням $y = \Phi(x) = Cx$, де C – натуральне число, «що приблизно дорівнює двом» і визначається нечіткою множиною $C = \{0{,}5/1;\ 1{,}0/2;\ 0{,}6/3\}$. Знайдемо нечітке відображення нечіткої множини A. Для спрощення розуміння техніки розрахунків побудуємо табл. 1.8.

Таблиця 1.8

Початкові дані й результати відображення

		1	2	3	C_k
		0,5	1,0	0,6	$\mu(C_k)$
1	0,1	1	2	3	
2	0,5	2	4	6	
3	1,0	3	6	9	
x_i	$\mu(x_i)$				

Число, що знаходиться в i-му рядку і k-му стовпці таблиці, являє собою значення $y_{ik} = C_k\, x_i$, яке відповідає k-му варіанту відображення елемента x_i.

Тепер відповідно до (1.10) визначимо нечітку множину B, що є результатом нечіткого відображення $y = Cx$ нечіткої множини A:

$$\begin{aligned} B = \{&(1,\min\{0{,}1;0{,}5\}),\ (2,\sup\{\min\{0{,}1;1{,}0\},\min\{0{,}5;0{,}5\}\}),\\ &(3,\sup\{\min\{0{,}1;0{,}6\},\ \min\{1{,}0;0{,}5\}\}),\ (4,\min\{0{,}5;\ 1{,}0\}),\\ &(6,\sup\{\min\{0{,}5;0{,}6\},\ \min\{1{,}0;1{,}0\}\}),\ (9,\min\{0{,}1;\ 0{,}6\})\} =\\ &= \{(1;0{,}1),\ (2;0{,}5),\ (3;0{,}5),\ (4;\ 0{,}5),\ (6;1{,}0),\ (9;0{,}6)\}. \end{aligned}$$

1.6. Поняття лінгвістичної змінної

Означення 1.41. *Лінгвістичною змінною* називають змінну, значеннями якої можуть бути слова або словосполучення деякої природної мови.

Людина зазвичай задає значення змінної не числами, а словами. Щодня ми приймаємо рішення на основі лінгвістичної інформації типу «дуже висока температура», «стомлива поїздка», «швидка відповідь», «гарний букет» тощо. Психологи виявили, що в людському мозку майже вся числова інформація вербально перекодується й зберігається у вигляді слів. Поняття лінгвістичної змінної відіграє важливу роль у прийнятті рішень на основі наближених міркувань.

Означення 1.42. *Терм-множиною* називають множину всіх можливих значень лінгвістичної змінної.

Означення 1.43. *Термом* називають будь-який елемент терм-множини. Терм задають нечіткою множиною з допомогою функції належності.

Нехай змінна «швидкість автомобіля» може набувати значень «низька», «середня», «висока» і «дуже висока». У цьому випадку лінгвістичною змінною є «швидкість автомобіля», термами – лінгвістичні оцінки «низька», «середня», «висока» і «дуже висока», які й складають терм-множину.

Формально лінгвістичну змінну можна описати таким набором: $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{M} \rangle$, де $\boldsymbol{x}$ – ім'я змінної; $\boldsymbol{T}$ – терм-множина, кожний елемент якої задається нечіткою множиною на універсальній множині $\boldsymbol{U}$; $\boldsymbol{G}$ – синтаксичні правила (часто у вигляді граматики), що породжують назву термів; $\boldsymbol{M}$ – семантичні правила, що задають функції належності нечітких термів, породжених синтаксичними правилами із множини $\boldsymbol{G}$.

Приклад 1.23. Розглянемо лінгвістичну змінну з ім'ям $\boldsymbol{x}$ =«температура в кімнаті». Тоді четвірку $\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{M} \rangle$ можна визначити так:

– універсальна множина $\boldsymbol{U} = [\mathbf{12,\ 35}]$;

– терм-множина $\boldsymbol{T}$ = {«холодно», «комфортно», «жарко»} з функціями належності:

$$\mu_{\text{"}\textit{холодно}\text{"}}(u) = \frac{1}{1+\left|\frac{u-12}{6}\right|^{12}};\ \mu_{\text{"}\textit{комфортно}\text{"}}(u) = \frac{1}{1+\left|\frac{u-20}{3}\right|^{8}};$$

$$\mu_{\text{"}\textit{жарко}\text{"}}(u) = \frac{1}{1+\left|\frac{u-33}{8}\right|^{12}};\ u \in U;$$

– синтаксичні правила $\boldsymbol{G}$, що породжують нові терми з використанням квантифікаторів «не», «дуже» і «більш-менш»;

– семантичні правила $\boldsymbol{M}$, які задано в табл. 1.9.

Таблиця 1.9

Правила модифікації функцій належності

Квантифікатор	Функція належності
Не t	$1-\mu_t(u)$
Дуже t	$(\mu_t(u))^2$
Більш-менш t	$\sqrt{\mu_t(u)}$

Графіки функцій належності термів «холодно», «не дуже холодно», «комфортно», «більш-менш комфортно», «жарко» і «дуже жарко» лінгвістичної змінної «температура в кімнаті» показано на рис. 1.22.

Особливе місце в нечіткій логіці займає лінгвістична змінна «істинність». У класичній логіці істинність може набувати тільки двох значень: істинно і хибно. У нечіткій логіці істинність «розмита». Нечітка істинність визначається аксіоматично, причому різні автори роблять це по-різному. Інтервал $[0,1]$ використовується як універсальна множина для лінгвістичної змінної «істинність».

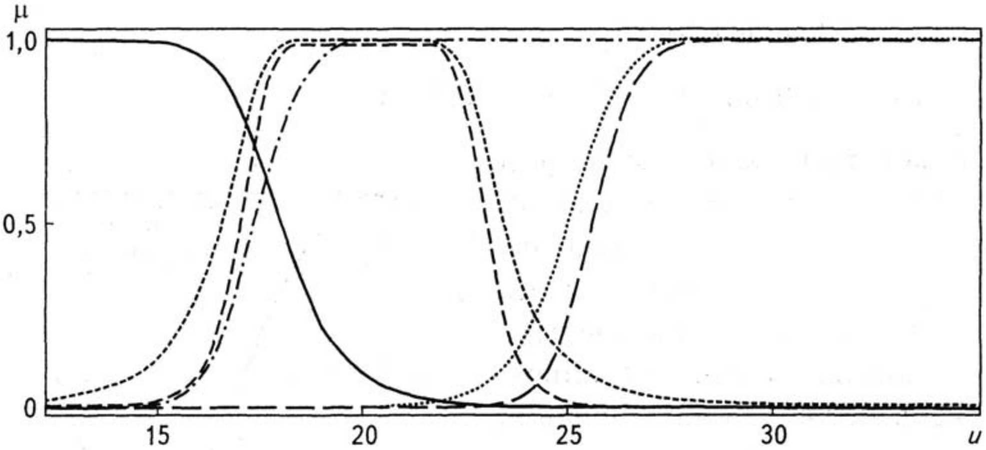


Рис. 1.22. Лінгвістична змінна «температура в кімнаті»:
—— – холодно; – · – · – – не дуже холодно; - - - - – комфортно;
· · · · – більш-менш комфортно; ·········· – жарко; – – – – дуже жарко

Для нечіткої істинності Заде запропонував такі функції належності термів «істинно» і «хибно»:

$$\mu_{"істинно"}(u) = \begin{cases} 0, \ 0 \le u \le a, \\ 2\left(\dfrac{u-a}{1-a}\right)^2, \ a < u \le \dfrac{a+1}{2}, \\ 1-2\left(\dfrac{u-1}{1-a}\right)^2, \ \dfrac{a+1}{2} < u \le 1; \end{cases}$$

$$\mu_{"хибно"}(u) = \mu_{"істинно"}(1-u), \ u \in [0, 1],$$

де $a \in [0,1]$ – параметр, що задає носії нечітких множин «істинно» і «хибно». Для нечіткої множини «істинно» носієм буде інтервал $(a,1]$, а для нечіткої множини «хибно» – $[0,a)$. Графіки функцій належності нечітких термів «істинно» і «хибно» при $a = 0{,}4$ є дзеркальними відображеннями (рис. 1.23).

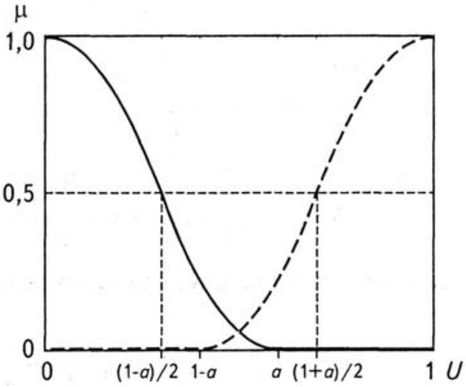


Рис. 1.23. Лінгвістична змінна «істинність» за Заде:
- - - - - – істинно; —— – хибно

Для нечітких значень «істинно» і «хибно» Балдвін запропонував такі функції належності:

$$\mu_{"\textit{істинно}"}(u) = u;\ \mu_{"\textit{хибно}"}(u) = 1 - u;\ u \in [0,1].$$

Квантифікатори «більш-менш» і «дуже» застосовують до нечітких значень «істинно» і «хибно», одержуючи терми «дуже хибно», «більш-менш хибно», «більш-менш істинно», «дуже істинно», «дуже-дуже істинно» тощо. Функції належності нових термів (рис. 1.24) розраховують з використанням операцій концентрації й розтягання нечітких множин, що відповідає піднесенню функції належності до степенів 2 і 1/2 відповідно:

$$\mu_{"\textit{дуже хибно}"}(u) = (\ldots\mu_{"\textit{хибно}"}(u))^{2};$$

$$\mu_{"\textit{більш-менш хибно}"}(u) = (\ldots\mu_{"\textit{хибно}"}(u))^{1/2},\ldots .$$

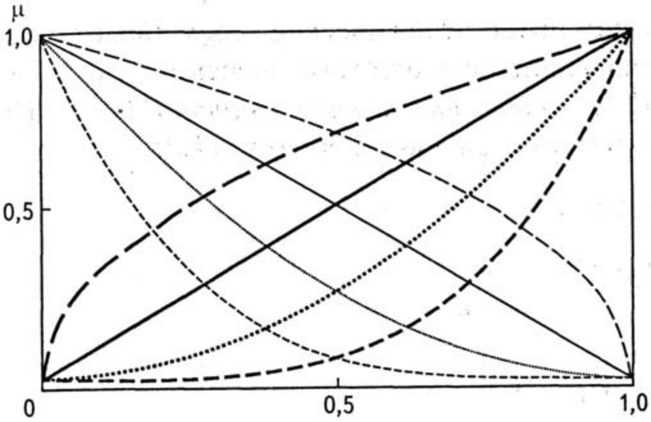


Рис. 1.24. Лінгвістична змінна «істинність» за Балдвіном:
—— – істинно; ·········· – дуже істинно; - - - - – дуже-дуже істинно; – – – – більш-менш істинно; —— – хибно; ·········· – дуже хибно; - - - - – дуже-дуже хибно; – – – – більш-менш хибно

1.7. Завдання для самоконтролю та закріплення знань

1. Побудуйте графік функції належності нечіткої множини чисел, значно більших за нуль.

2. Побудуйте графік функції належності нечіткої множини чисел, значно менших від десяти.

3. Задано нечітку множину

$$A=(0{,}4/a;0{,}3/b;0{,}7/c;0{,}2/d;0{,}5/e;0{,}8/f;1/g).$$

Визначте носій нечіткої множини A, висоту нечіткої множини A, α-рівневу підмножину $A_{0,3}$.

4. На універсальній множині $U=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ задано нечіткі множини

$$A=\left(\frac{0{,}3}{a};\frac{0{,}4}{b};\frac{0{,}55}{c};\frac{0{,}7}{d};\frac{0{,}9}{e};\frac{1}{f};\frac{0{,}5}{g}\right),$$

$$B=\left(\frac{0{,}3}{a};\frac{0{,}4}{b};\frac{0{,}3}{c};\frac{0}{d};\frac{0{,}9}{e};\frac{0{,}8}{f};\frac{0{,}5}{g}\right),$$

$$C=\left(\frac{1}{a};\frac{0{,}5}{b};\frac{0{,}5}{c};\frac{0{,}2}{d};\frac{0}{e};\frac{0{,}2}{f};\frac{0{,}9}{g}\right).$$

Визначте $A\cap B, B\cup C, (A\cap B)\cup C, B\cup\overline{C}, \overline{A-B}\cap C, A-B$, $C\times B, A\times C\times B$.

5. Спростіть вираз $\left(A\cap\left((B\cap C)\cup(\overline{A}\cap\overline{C})\right)\right)\cup\overline{C}$.

6. Поясніть природу принципової відмінності між результатами перетинання $A\bigcap\overline{A}$ для чітких і нечітких множин.

7. Покажіть, у чому полягає принципова відмінність між звичайним відношенням $x\geq y$ і нечітким відношенням $x>>y$. Дайте геометричну інтерпретацію цим відношенням.

8. Нехай задано такі нечіткі відношення:

R	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0,5	0	0,5
x_2	1	0	0,5	0,5
x_3	1	0	0	1
x_4	0	0	0	0

R	a	b	c	d
a	0,3	1	0,2	0,1
b	0,9	0,2	0	0,5
c	0,8	0,1	0,8	0,9
d	0,9	0,5	1	0,9
e	0,5	0	0,7	0,7

Для кожного із цих відношень знайдіть:

- носій нечіткого відношення;
- звичайне відношення, найближче до нечіткого;
- обернене відношення;
- звичайну підмножину α-рівня нечіткого відношення при $\alpha = \mathbf{0{,}5}$.

9. Нехай задано такі нечіткі відношення:

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0,1	0	0,4
x_2	0,5	1	0	0,7
x_3	0,8	0,9	0,9	1

R_2	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,1	0	0,2	0,5
x_2	0	1	0,1	1
x_3	0,9	0,4	0,7	0

R_3	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,5	0	0,2	0
x_2	0	1	0,1	0,2
x_3	0,9	0,4	0	1

Знайдіть $R_1 \cap R_2$; $R_1 \cup R_3$; $R_1 \cap R_2 \cap R_3$; $\overline{R_1} \cap (R_2 \cap R_3)$.

10. Визначте максимінну, мінімаксну й максмультиплікативну композиції для таких нечітких відношень:

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0	0,2	0	0,2	1
x_2	1	0,5	0,4	1	0,4
x_3	0,7	0	0,5	0	0,9

R_2	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,5	0,8	0	0,7
y_2	0,7	0	0,5	0,8
y_3	1	1	1	0
y_4	0,5	0,2	0	0,4
y_5	0,9	0,7	0,8	0,7

11. У якому випадку нечітке відношення є рефлексивним (антирефлексивним)? Наведіть приклад.

12. Чи має значення порядок розташування компонент $\boldsymbol{g}$ і $\boldsymbol{f}$ складного відображення $\boldsymbol{h}$ при записі їхньої композиції $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$?

13. Які види нечіткості можливі при аналізі задач із нечіткими відображеннями?

14. Нехай на базовій множині $X=\{x_1,x_2,...,x_7\}$ відомо нечітку множину $A=\left\{\frac{0{,}3}{x_1};\frac{0{,}7}{x_2};\frac{1}{x_3};\frac{0}{x_4};\frac{0{,}2}{x_5};\frac{0{,}6}{x_6};\frac{0{,}8}{x_7}\right\}$ і визначено відображення $f(x)$ цієї множини в множину $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$, що зведено в табл. 1.10.

Таблиця 1.10

Відображення f підмножини A множини X в множину Y

$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$	$f(x_6)$	$f(x_7)$
$\{y_2\}$	$\{y_2,y_4\}$	$\{y_1\}$	$\{y_3\}$	$\{y_1\}$	$\{y_2\}$	$\{y_4\}$

Знайдіть образ B множини A при цьому відображенні.

15. Уведіть правила означення понять «надмірно», «достатньо».

16. Задано нечітку множину

$$\text{«невеликий»}=\left\{\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{0{,}8}{3};\frac{0{,}5}{4};\frac{0{,}1}{5}\right\}.$$

Знайдіть нечіткі множини «дуже невеликий», «не дуже великий», «досить невеликий».

17. Визначіть лінгвістичну змінну U=«не дуже солодкий і досить кислий», якщо відомо, що

$$\text{"солодкий"}=\left\{\frac{0{,}8}{\text{яблуко}};\frac{0{,}6}{\text{ананас}};\frac{0{,}1}{\text{лимон}};\frac{0{,}4}{\text{манго}}\right\},$$

$$\text{"кислий"}=\left\{\frac{0{,}2}{\text{яблуко}};\frac{0{,}5}{\text{ананас}};\frac{0{,}9}{\text{лимон}};\frac{0{,}4}{\text{манго}}\right\}.$$

18. Використовуючи принцип узагальнення Заде для нечітких множин

$$A=\left\{\frac{0{,}2}{3};\frac{0{,}8}{4};\frac{0{,}4}{5};\frac{0{,}2}{6}\right\} \text{ і } B=\left\{\frac{0{,}1}{3};\frac{0{,}95}{4};\frac{0{,}3}{5}\right\}$$

обчисліть значення $D=A^*3+A/3$ і $C=B/(A+B)^*A-B$.

19. Порівняйте нечіткі числа

$$A=\left\{\frac{0{,}3}{2};\frac{0{,}6}{5};\frac{0{,}4}{8}\right\} \text{ і } B=\left\{\frac{0{,}1}{2};\frac{0{,}7}{5};\frac{0{,}5}{8}\right\}.$$

2. ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ НЕЧІТКОГО МОДЕЛЮВАННЯ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

2.1. Нечіткість і невизначеності, що виникають під час описування задач прийняття рішень

Проблема прийняття рішень, або проблема вибору альтернатив, – це один з найпоширеніших класів задач, які доводиться розв'язувати не тільки досліднику, але й інженеру-конструктору, господарському керівнику і т.д. Будь-які ситуації, що потребують прийняття рішень, містять, як правило, велику кількість невизначеностей. Можна сказати, що задачі, які не містять невизначеностей, є скоріше виключенням, ніж правилом, оскільки опис проблеми, адекватний реальності, практично завжди містить різного типу невизначеності.

Необхідно зазначити, що звести подібні задачі з невизначеностями до строго поставлених математичних задач надзвичайно складно.

Апарат теорії нечітких множин дає можливість широко використовувати надійні та перевірені математичні підходи до розв'язання задач, які раніше важко піддавалися математичному опису або взагалі на піддавалися формалізації. Тим самим стало можливим по'єднання строгості й точності класичної математики з істотною невизначеністю й неоднозначністю багатьох практичних ситуацій, у тому числі різних явищ реального світу, суб'єктивно сприйманих та емоційно забарвлених у свідомості людини.

Методи теорії нечітких множин знайшли відповідне відображення в програмі математичної підготовки майбутніх системних аналітиків. Однак їх засвоєння й успішне застосування для розв'язування важливих для практики задач потребує від студентів певного рівня глибини розуміння, своєрідного «відчуття» природи невизначеностей, їхніх джерел і проявів. Адже навіть від правильного розуміння суті конкретної невизначеності й визначення характеру її природи значною мірою залежить можливість вдалого вибору найбільш адекватних математичних моделей і методів для розв'язання задачі, яка містить цю невизначеність. З іншого боку, фахівець-аналітик може при цьому забезпечити кваліфіковану інтелектуальну підтримку процесів підготовки й прийняття відповідальних управлінських рішень.

2.1.1. Класифікація невизначеностей

Нехай існує деяка множина $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ можливих рішень, які мають назву «альтернативи». Реалізація кожної з альтернатив приводить до наступу певних наслідків, сукупність яких являє собою множину $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$.

Аналіз цих наслідків за деяким заздалегідь вибраним набором показників може однозначно характеризувати міру прийнятності кожної з можливих альтернатив. Особа, що приймає рішення (ОПР), виходячи з цієї оцінки та деяких інших її міркувань щодо переваг, вибирає як остаточне рішення одну з альтернатив.

Таким чином, необхідно вивчити систему переваг ОПР S і побудувати таку модель вибору альтернативи, яка б забезпечувала кращий у деякому розумінні результат цього вибору. Цей результат має відповідати як меті рішення, що приймається, так і системі переваг ОПР. Отже, для характеристики задачі прийняття рішення може бути використаний такий кортеж:

$$\langle A, Q, S, T \rangle,$$

де A – множина альтернатив, що розглядаються; Q – середовище, у якому розглядається задача прийняття рішень; S – система переваг ОПР; T – деяка сукупність дій над множиною альтернатив A.

Розглянемо докладніше кожний з компонентів кортежу.

Множина альтернатив A являє собою певну сукупність однорідних об'єктів, з яких необхідно вибрати один (або у певних випадках деяку підмножину) відповідно до заздалегідь визначених цільових критеріїв і системи переваг ОПР S на основі процедур, об'єднаних сукупністю дій T над цією множиною.

Під *середовищем* Q *задачі прийняття рішень* розуміють ті умови, у яких здійснюється процес підготовки й прийняття рішень і які необхідно обов'язково враховувати при формалізації задачі. Наприклад, у випадку управлінської діяльності в процесі прийняття рішень необхідно враховувати ресурсні можливості, правові й морально-етичні обмеження, психологічні характеристики й особливості особистісних якостей виконавців та інші фактори.

При цьому задачі прийняття рішень можуть здійснюватися:

– в умовах інформаційної визначеності, коли вибору кожної конкретної альтернативи відповідає один цілком певний результат;

– в умовах ризику, коли можливий результат вибору альтернативи не може бути однозначно визначений і являє собою дискретну або неперервну випадкову величину з відомим законом розподілу;

– в умовах невизначеності, коли можливий результат вибору тієї або іншої альтернативи не тільки заздалегідь невідомий, але і являє собою випадкову величину з невідомим законом розподілу.

Система переваг $\boldsymbol{S}$ особи, що приймає рішення, зазвичай являє собою деяку сукупність її міркувань стосовно шляхів і критеріїв раціонального досягнення поставленої мети, переваг і недоліків тієї або іншої альтернативи та їх співвідношення.

Сукупність дій $\boldsymbol{T}$ над множиною альтернатив – це деякий набір узагальнених операцій, що застосовуються не до окремих елементів множини $\boldsymbol{A}$, а до всієї множини в цілому або до деяких її підмножин.

Об'єктивна наявність невизначеності, що приводить до необхідності подібного підходу до розв'язання задач прийняття рішень, може бути обумовлена різними джерелами її походження й мати різні зовнішні прояви. Тому вважається цілком природним припущення про те, що залежно від вигляду й характеру невизначеності істотно може змінюватися вибір методів для розв'язання відповідних задач.

У досить загальному випадку класифікацію основних видів невизначеності, що мають місце під час розв'язання задач прийняття рішень, наочно можна зобразити у вигляді схеми, показаної на рис. 2.1.

Перший рівень дерева невизначеності характеризує кількісну сторону інформації, якої бракує для розв'язання задачі прийняття рішенль на етапі постановки задачі й вибору підходів до її розв'язання. Цілком природно, що в процесі самого її розв'язання розміщена інформація може змінюватися як кількісно, так і якісно. Розглянемо докладніше змістовну сторону основних видів невизначеності.

1. *Невідомість* являє собою початкову стадію вивчення задачі, коли необхідна інформація про досліджувану систему відсутня, і прийняти яке-небудь раціональне рішення практично неможливо. Для розв'язання задачі треба одержати необхідну інформацію.

2. *Невірогідність*. У міру накопичення інформації настає стадія, коли про невідомість уже говорити не можна, однак наявна інформація ще не забезпечує бажаної вірогідності й повноти характеристики ситуації.

При цьому можливі три випадки. Перший випадок відповідає ситуації, коли зібрано не всю необхідну інформацію (неповнота). Другий випадок характерний для ситуації, коли зібрано не всю достатню для розв'язання даної задачі інформацію (недостатність або недовизначеність). Нарешті, третій випадок відповідає ситуації, коли всю можливу інформацію зібрано, однак вона не забезпечує адекватного уявлення про досліджувану систему. Наявність невизначеності такого роду може бути пов'язана, наприклад, з тим, що процес збору інформації припинено через недостачу ресурсів, а це приводить до невірогідності.

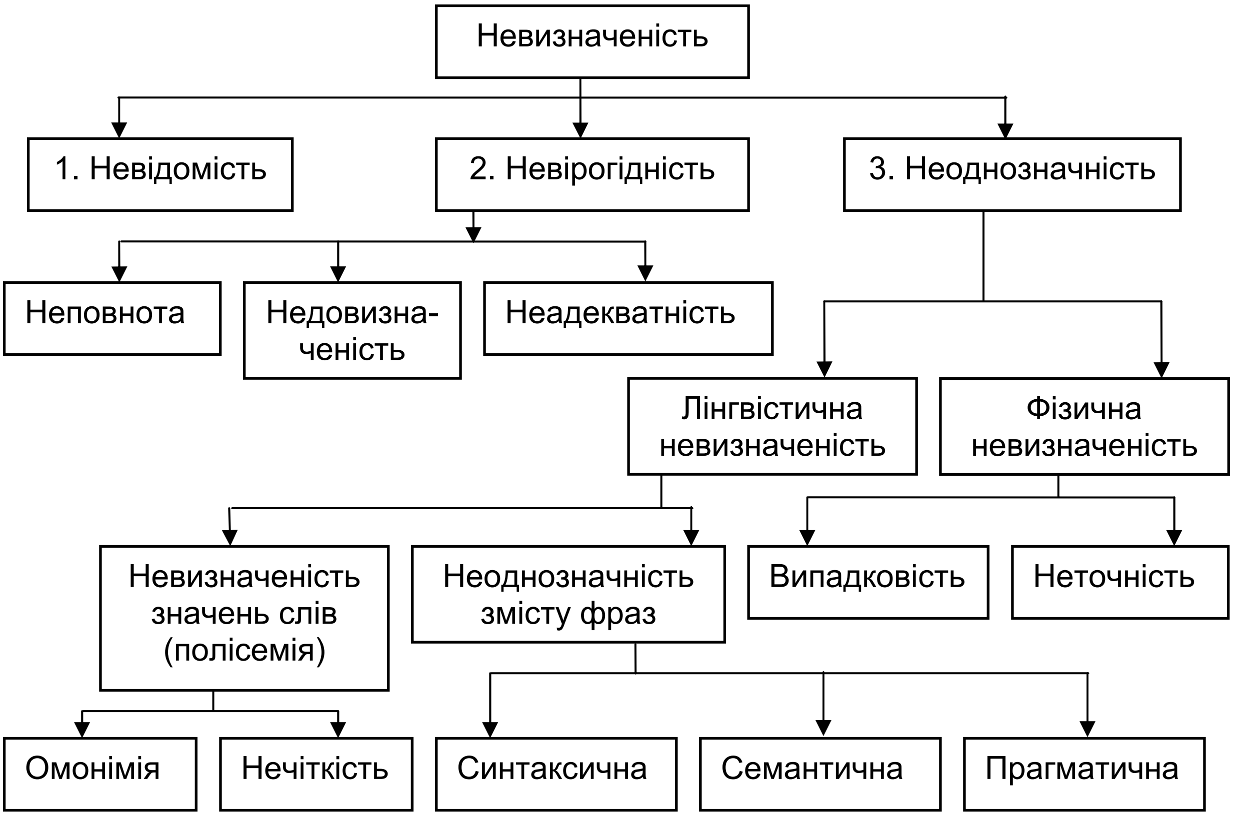


Рис. 2.1. Дерево класифікації невизначеностей

Подальше вивчення проблеми може привести або до ситуації визначеності, коли всі елементи в задачі описані однозначно, або до ситуації неоднозначності.

3. *Неоднозначність* задачі являє собою ситуацію, коли всю можливу інформацію зібрано, однак повністю визначеного опису проблеми не отримано й не може бути отримано в принципі. Причинами подібної ситуації можуть бути як об'єктивні фактори (наприклад, неможливість точного вимірювання розмірів атомного ядра), так і фактори суб'єктивної природи, у тому числі пов'язані з нечіткістю опису речей і явищ зовнішнього світу засобами звичайної мови.

Другий рівень дерева описує джерела або причини виникнення неоднозначності, якими можуть бути як зовнішнє середовище (*фізична невизначеність*), так і професійна мова, яка використовується ОПР або експертами (*лінгвістична невизначеність).*

Фізична невизначеність може бути пов'язана як з наявністю в зовнішньому середовищі декількох можливостей, кожна з яких деяким випадковим чином стає дійсністю (випадковість), так і з недостатньою точністю вимірів (неточність). При цьому в обох випадках передбачається, що відповідні закони розподілу щільності ймовірностей відомі.

Лінгвістична невизначеність зазвичай обумовлена цілим рядом особливостей професійної мови ОПР або особливостей його використання для опису задачі прийняття рішення. Невизначеність такого роду може породжуватися, з одного боку, наявністю деякої множинності значень слів мови *(полісемія),* з іншого боку – можливою неоднозначністю змісту фраз.

Можна виділити два види полісемії. Першим її видом є *омонімія* – ситуація, коли елементи задачі прийняття рішення, що відображаються тим самим словом, істотно різні. З повсякденного життя добре відомий приклад множинності значень слова "ключ".

Другим видом полісемії, характерним для таких ситуацій, коли різні об'єкти, що описуються в задачі, подібні один до одного, є *нечіткість.* Як приклад нечіткості можна навести фразу "На складі заготовлено невеликий запас палива". Тут саме слово "невеликий" надає всій фразі нечіткості, оскільки воно недостатньо повно характеризує наявний запас як з кількісної, так і з цільової точок зору. Дійсно, по-перше, невідомо, "невеликий" з розрахунку на весь опалювальний сезон чи всього лише на кілька днів. По-друге, не зазначено, чи передбачається можливість поповнення цього запасу в міру його витрати.

Розглядаючи різні джерела появи неоднозначності, можна виділити три її види.

1. *Синтаксична неоднозначність* обумовлена нечіткістю або помилковістю використання розділових знаків. Прикладом може бути широко відома фраза "стратити не можна помилувати", зміст якої може змінюватися на прямо протилежний залежно від того, у якому місці буде поставлено пропущену кому.

2. *Семантична невизначеність* обумовлена трудністю розуміння змісту фрази. Зазвичай виділяють два її види:

– поверхнева невизначеність, яка полягає в тому, що окремі слова у фразі зрозумілі, а зміст фрази в цілому не сприймається (така ситуація виникає при перекладі деякого тексту з іноземної мови з використанням словника при недостатньому знанні цієї мови, специфічних особливостей і смислового різноманіття слів, що зустрічаються);

– глибинна невизначеність, яка полягає в тому, що в аналізованій фразі немає жодного відомого слова (подібна ситуація нерідко виникає, наприклад, при спробі зрозуміти текст, написаний фахівцем з області, досить далекої від сфери професійних інтересів людини, що читає цей текст).

3. *Прагматична невизначеність* обумовлена неоднозначністю використання синтаксично та семантично зрозумілої інформації для досягнення певної мети в задачі прийняття рішення. Характерним прикладом може бути ситуація, коли йдеться про вартість і стверджується, що одна річ має перегу над іншою, тільки тому, що вона дешевша. Суть невизначеності тут полягає в повному ігноруванні якісних характеристик цієї речі. Таким чином, для прийняття рішення інформації про співвідношення вартісних показників зовсім недостатньо, оскільки невідомі якісні характеристики розглянутих альтернативних варіантів потенційної покупки.

2.1.1. Імовірнісний і нечіткий підходи до формалізації невизначеностей

На практиці досить часто виникає деяка помилкова аналогія між імовірністю й нечіткістю. Між цими поняттями та областями застосування відповідних методів існує принципова відмінність.

Проведемо порівняльний аналіз основних характерних рис методів теорії нечітких множин і методів теорії ймовірностей та їхніх можливостей у різних прикладних задачах.

У теорії ймовірностей зазвичай розглядаються події, невизначеність характеристик яких пов'язана з їх випадковим зміненням, тимчасом як у теорії нечітких множин розглядаються цілком детерміновані об'єкти або події, окремі істотні характеристики яких, разом з тим, мають деяку невизначену частину.

Дійсно, імовірність деякої події може дорівнювати одиниці, тимчасом як ступінь її належності до певного класу більш загальних подій може бути меншим від одиниці. Наприклад, імовірність настання дня після ночі дорівнює одиниці, а ступінь належності конкретного моменту часу (наприклад, шостої ранку) до поняття «день» може бути різним залежно від пори року або погоди (сонячно або похмуро). Природно, при цьому слід враховувати й індивідуальні особливості конкретної людини.

Для ймовірнісного підходу характерним є подання невизначеності в описі параметрів об'єктів або процесів у вигляді деякого закону розподілу випадкової величини. При цьому кожному значенню змінної x відповідає певне значення ймовірності $P(x)$.

Для нечіткомножинного підходу характерні невизначеності в описі об'єкта словами природної мови або невизначеності, обумовлені властивою людині суб'єктивністю суджень у процедурах оцінки. Вони можуть бути подані у вигляді значень функцій належності $\mu_A(x)$ або у вигляді якогось елемента кількісної шкали з нечіткими (розмитими) межами.

Для ймовірнісного підходу характерним є оперування великою кількістю однорідних об'єктів, за випадковими відхиленнями значень одного або декількох параметрів яких і визначаються ймовірнісні характеристики розподілу для цих параметрів. При ймовірнісному підході досить поширеним є також випадок оперування великою кількістю даних, одержаних за результатами численних спостережень за одним конкретним об'єктом. При цьому кількість отриманих даних (результатів спостережень або вимірів) для строгого дослідження й визначення ймовірнісних характеристик досліджуваного процесу має бути досить великою.

Нечіткомножинний же підхід зазвичай пов'язаний з дослідженням невеликої кількості об'єктів або навіть одного об'єкта. Дослідника цих об'єктів цікавлять їхні характеристики, які не цілком чітко визначені, і його завдання полягає у визначенні міри цієї нечіткості.

При розв'язанні задач прийняття рішень сама нечіткість може стосуватися як ступеня належності до тієї або іншої альтернативи, так і можливого результату вибору цієї альтернативи. Добре відомо, що в житті людини нерідко виникає необхідність зробити рішучий вибір усього лише із двох можливих альтернатив, однак зменшення їх кількості істотно не полегшує задачу вибору. Успішно розв'язати задачу можна, лише знаючи характеристики нечіткості.

При виборі підходу, який би найбільшою мірою відповідав характеру задачі та цілям її розв'язання, можлива перевага визначається характерними рисами як можливих методів, так і самих цих задач. Природно, що всі задачі, так або інакше пов'язані з випадковим характером змінення параметрів та з існуванням відповідного розподілу ймовірності, повинні розв'язуватися із застосуванням адекватних імовірнісних методів.

До категорії ж нечітких задач належать такі, що пов'язані з визначенням ступеня наявності конкретної якості об'єкта. Прикладом може бути задача визначення, наскільки даного студента можна вважати високим, гарним, розумним тощо. Крім того, до класу нечітких задач належать і такі, у яких необхідними є оцінка деяких якісних категорій і вибір на цій основі однією ОПР певних варіантів з урахуванням сформульованих природною мовою деяких критеріїв раціонального вибору. Прикладом такої задачі може бути необхідність вибору варіанта нової технології виробництва продукції, де критерієм є можливість зниження собівартості продукції або ціни її продажу.

Таким чином, у процесі розв'язання реальних задач управління й прийняття рішень наявну невизначеність не можна ігнорувати, і навіть спрощувати. Необхідно ефективно використовувати існуючі методи й активно розробляти нові, які б дали можливість формалізувати невизначеність різного роду. Для цього необхідно не тільки знати природу невизначеності, розуміти принципи її класифікації, але й уміти в кожному конкретному випадку вибирати найбільш прийнятні методи для адекватного опису складних задач, що розв'язуються в умовах цієї невизначеності. Останніми роками все більш широкого застосування набувають методи розв'язання задач прийняття рішень, що базуються на теорії нечітких множин.

2.2. Прийняття рішень у нечітких умовах за схемою Беллмана – Заде

1970 р. Р. Беллман і Л. Заде опублікували статтю «Decision – Making in Fuzzy Environment» [21], що стала відправною точкою в нечіткій теорії прийняття рішень. У цій статті розглядається процес прийняття рішень в умовах невизначеності, коли цілі й обмеження задано нечіткими множинами. Прийняття рішення – це вибір альтернативи, яка одночасно задовольняє й нечітким цілям, і нечітким обмеженням. У такому розумінні цілі й обмеження є симетричними відносно рішення. Такий підхід стирає відмінності між ними і дозволяє подати рішення як злиття нечітких цілей та обмежень.

Нехай $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x}\}$ – універсальна множина альтернатив, тобто універсальна сукупність усіляких виборів ОПР. Нечіткою ціллю в $\boldsymbol{X}$ є нечітка підмножина $\boldsymbol{X}$, яку позначимо через $\tilde{\boldsymbol{G}}$. Описується нечітка ціль функцією належності $\mu_{\boldsymbol{G}} : \boldsymbol{X} \to [0,1]$. Наприклад, якщо альтернативами є дійсні числа, тобто $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{R}$, і нечітку ціль сформульовано як «$\boldsymbol{x}$ має дорівнювати близько 10», то її можна подати у вигляді нечіткої множини з функцією належності

$$\mu_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{1 + (\boldsymbol{x} - 10)^2}, \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}. \tag{2.1}$$

Нечіткі обмеження $\tilde{C}$ також описуються нечіткими підмножинами множини X. Наприклад, нечітке обмеження «x має дорівнювати значно більше 8» при $X = R$ можна подати у вигляді нечіткої множини з функцією належності

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 5, \\ \dfrac{1}{1 + \exp(-0{,}8(x - 8))}, & \text{якщо } x \geq 5. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Нечіткий розв'язок $\tilde{D}$ також можна визначити як нечітку множину на універсальній множині альтернатив X. Функція належності цієї нечіткої множини показує, наскільки добре розв'язок відповідає нечітким цілям і нечітким обмеженням. Логічній операції **І,** яка зв'язує цілі й обмеження, відповідає перетинання нечітких множин. Отже, розв'язок – це перетин нечіткої мети з нечітким обмеженням:

$$\tilde{D} = \tilde{G} \cap \tilde{C}. \qquad (2.3)$$

Приклад 2.1. Нечітка ціль $\tilde{G}$ і нечітке обмеження $\tilde{C}$ сформульовані таким чином: $\tilde{G}$: «x має дорівнювати близько 10»; $\tilde{C}$: «x має дорівнювати значно більше 8». Функції належності нечітких множин $\tilde{G}$ і $\tilde{C}$ задано виразами (2.1) і (2.2). Нечіткий розв'язок $\tilde{D}$ знайдемо за формулою (2.3). Ураховуючи те, що перетинанню нечітких множин відповідає операція мінімуму над функцією належності, одержуємо

$$\mu_D(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 5, \\ \min\left(\dfrac{1}{1 + \exp(-0{,}8(x - 8))}; \dfrac{1}{1 + (x - 10)^2} \right), & \text{якщо } x \geq 5. \end{cases}$$

Приклад 2.2. Нехай $X = \{1, 2, ..., 10\}$, а нечітку ціль $\tilde{G}$ і два обмеження $\tilde{C}_1$ і $\tilde{C}_2$ задано у вигляді таблиці

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_{\tilde{G}}(x)$	0	0,1	0,4	0,8	1,0	0,7	0,4	0,2	0	0
$\mu_{\tilde{C}_1}(x)$	0,3	0,6	0,9	1,0	0,8	0,7	0,5	0,3	0,2	0
$\mu_{\tilde{C}_2}(x)$	0,2	0,4	0,6	0,7	0,9	1,0	0,8	0,6	0,4	0,2

Тоді для $\tilde{D}$ одержуємо

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_{\tilde{D}}(x)$	0	0,1	0,4	0,7	0,8	0,7	0,4	0,2	0	0

Поставлену мету, обмеження й розв'язок можна сформулювати так:

- $\tilde{G}$: « x має дорівнювати близько 5»;
- $\tilde{C}_1$: « x має дорівнювати близько 4»;
- $\tilde{C}_2$: « x має дорівнювати близько 6»;
- $\tilde{D}$: « x має дорівнювати близько 5».

Визначений таким чином розв'язок можна розглядати як нечітко сформульовану інструкцію, виконання якої забезпечує досягнення нечітко поставленої мети. Нечіткість отриманого розв'язку є наслідком нечіткості самої початкової задачі. При такому поданні розв'язку залишається невизначеність, пов'язана зі способом виконання подібної нечіткої інструкції, тобто з тим, яку альтернативу вибрати. Різні способи розв'язання цієї невизначеності пропонуються, наприклад, у роботі Л. Заде.

Один з найпоширеніших у літературі способів полягає у виборі альтернативи, що має максимальний ступінь належності до нечіткого розв'язку, тобто

$$\max_{x \in X} \mu_{\tilde{D}}(x) = \max_{x \in X} \min\{\mu_{\tilde{G}}(x), \mu_{\tilde{C}}(x)\}.$$

Такі альтернативи називають *максимізуючими* розв'язками.

Взаємозв'язок між нечіткими метою, обмеженням і розв'язком показано на рис. 2.2. Мета й обмеження конфліктують між собою, тому в нечіткій множині $\tilde{D}$ немає жодного елемента зі ступенем належності, що дорівнює одиниці. Отже, не існує альтернативи, яка повністю відповідає і меті, і обмеженню.

У загальному випадку, коли існує n цілей і m обмежень, розв'язок за схемою Беллмана – Заде визначається перетинанням усіх цілей та обмежень:

$$\tilde{D} = \tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2 \cap \ldots \cap \tilde{G}_n \cap \tilde{C}_1 \cap \ldots \cap \tilde{C}_m,$$

тоді відповідно

$$\mu_D = \mu_{G_1} \wedge \mu_{G_2} \wedge \ldots \wedge \mu_{G_n} \wedge \mu_{C_1} \wedge \mu_{C_2} \wedge \ldots \wedge \mu_{C_m}.$$

Дотепер передбачалося, що всі цілі й обмеження, що входять в $\tilde{D}$, однаково важливі. Більш звичною є ситуація, коли задоволення одним цілям і (або) обмеженням важливіше, ніж іншим. Позначимо через $\alpha_i \in (0,1)$ коефіцієнт відносної важливості i-ї мети, а через $\beta_j \in (0,1)$ – коефіцієнт відносної важливості j-го обмеження:

$$\sum_{i=\overline{1,n}} \alpha_i + \sum_{j=\overline{1,m}} \beta_j = 1.$$

Тоді функція належності рішення матиме вигляд

$$\mu_D = (\mu_{G_1})^{\alpha_1} \wedge (\mu_{G_2})^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge (\mu_{G_n})^{\alpha_n} \wedge (\mu_{C_1})^{\beta_1} \wedge$$
$$\wedge (\mu_{C_2})^{\beta_2} \wedge \ldots \wedge (\mu_{C_m})^{\beta_m}. \qquad (2.4)$$

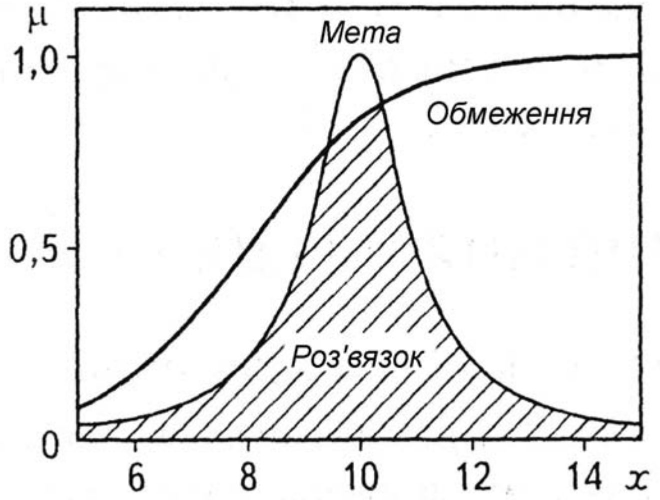


Рис. 2.2. Прийняття рішення за принципом Беллмана – Заде

На рис. 2.3 зображено нечіткі розв'язки при різних коефіцієнтах важливості мети й обмеження із прикладу 2.1.

Чим менший коефіцієнт відносної важливості, тим більш розмазаною стає відповідна нечітка множина мети й обмеження і, отже, його роль в прийнятті рішення зменшується.

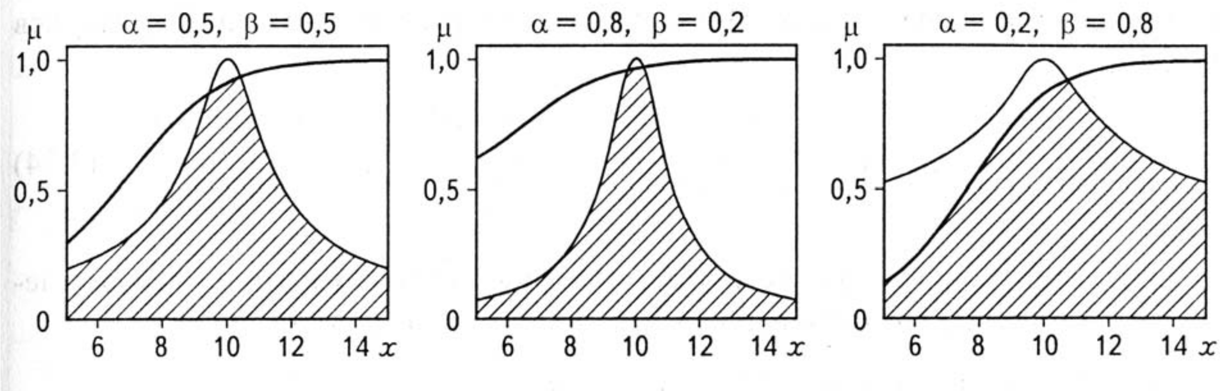


Рис. 2.3. Прийняття рішень при різній важливості мети й обмеження

2.3. Прийняття рішень при якісній невизначеності на основі нечіткого опису стану системи та наслідків

Нехай є множина альтернатив $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$, вибір однієї з них залежить від станів середовища $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Відомо, якщо система перебувала в стані x_j і вибрано альтернативу a_i, то її корисністю буде u_{ij}. Для різних альтернатив і можливих станів маємо матрицю $m \times n$:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & ... & u_{1n} \\ & ... & \\ u_{m1} & ... & u_{mn} \end{bmatrix}.$$

При відомому стані системи $x_j \in X$ кращою є альтернатива, що має найбільшу корисність: $u_0 = \max\limits_{\underline{i=1,m}} u_{ij}$. Однак, якщо стан системи або корисність альтернатив відомі нечітко, то оптимальну альтернативу можна подати тільки у вигляді нечіткої множини $\tilde{A}_0$ з функцією належності $\mu_{\tilde{A}_0}(a_i)$. Тут можливі три випадки.

1. *Нечіткий стан системи*. Нехай стан системи описується нечіткою множиною

$$\tilde{X} = \bigcup_k \mu_{\tilde{X}}(x_k) / x_k, \; x_k \in X.$$

У цьому випадку корисність альтернативи не може бути визначена точно. Однак, скориставшись інформацією про стан системи, її можна подати у вигляді

$$\tilde{U}_i = \bigcup_k \mu_{\tilde{U}_i}(u_k) / u_k, \tag{2.5}$$

де $u_k = u_{ik}$; $\mu_{\tilde{U}_i}(u_k) = \mu_{\tilde{X}}(x_k)$.

Тут і далі передбачається, якщо деякий елемент області визначення під час обчислень з'являється k разів з різними значеннями функції належності $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$, то ступінь його належності $\mu = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_k$, де $\mu_1 + \mu_2 = \mu_1 + \mu_2 - \mu_1 \mu_2$.

Вибір оптимальної альтернативи грунтується на розгляді максимальної корисності альтернативи і ступеня належності їй різних значень корисності.

Максимізуючою множиною функції $\boldsymbol{f}$ *на множині* $\boldsymbol{Y}$ називають нечітку множину $\boldsymbol{M(f)}$, таку, що ступінь належності до якої деякого $\boldsymbol{y}$ характеризує близькість $\boldsymbol{f(y)}$ до $\mathbf{sup}\,\boldsymbol{f}$. Аналогічно *максимізуючою множиною* $\boldsymbol{M(Y)}$ *множини* $\boldsymbol{Y}$ називають нечітку підмножину, ступінь належності до якої для $\boldsymbol{y \in Y}$ відображає в деякому розумінні близькість $\boldsymbol{y}$ до $\mathbf{sup}\,\boldsymbol{Y}$.

Розглянемо множину $\boldsymbol{Y}$, що містить усі можливі значення корисності для заданого нечіткого стану: $\boldsymbol{Y = \bigcup_{i=1}^{m} S(U_i)}$. Визначимо максимізуючу множину для альтернативи $\boldsymbol{a_i \in A}$:

$$\boldsymbol{\tilde{U}_{im} = \bigcup_k \mu_{\tilde{U}_{im}}(u_k)/u_k},$$

де $\boldsymbol{\mu_{\tilde{U}_{im}}(u_k) = (u_k : u_{\max})^n;\ u_{\max} = \sup Y}$; $\boldsymbol{n}$ – ціле число, вибране залежно від задачі.

Далі визначимо множину $\boldsymbol{\tilde{U}_{i0}}$ як перетин нечітких множин $\boldsymbol{\tilde{U}_{im}}$ і $\boldsymbol{\tilde{U}_i}$:

$$\boldsymbol{\mu_{\tilde{U}_{i0}}(u_k) = \min\left(\mu_{\tilde{U}_{im}}(u_k),\ \mu_{\tilde{U}_i}(u_k)\right)}.$$

Множину, що являє собою оптимальну альтернативу, знаходимо таким чином: $\boldsymbol{\mu_{\tilde{A}_0}(a_i) = \max_k \mu_{\tilde{U}_{i0}}(u_k)}$. Очевидно, що кращою буде альтернатива $\boldsymbol{a_0}$, яка має найбільше значення функції належності множині $\boldsymbol{\tilde{A}_0}$: $\boldsymbol{\mu_{\tilde{A}_0}(a_0) = \max_i \mu_{\tilde{A}_0}(a_i)}$.

2. *Нечіткі корисності*. Нехай тепер корисність $\boldsymbol{U_{ij}}$, що пов'язана з альтернативою $\boldsymbol{a_i}$ при стані $\boldsymbol{x_j}$, є нечіткою:

$$\boldsymbol{\tilde{U}_{ij} = \bigcup_k \mu_{U_{ij}}(u_k)/u_k}. \qquad (2.6)$$

Тоді матриця корисностей матиме вигляд

$$\boldsymbol{U = \begin{bmatrix} \tilde{U}_{11} & \ldots & \tilde{U}_{1n} \\ & \ldots & \\ \tilde{U}_{m1} & \ldots & \tilde{U}_{mn} \end{bmatrix}}.$$

Якщо відомо стан системи $x_j \in X$, то визначення оптимальної альтернативи аналогічне попередньому випадку: якщо x_j чітке, то множина $\tilde{U}_i$ визначається рівністю $\tilde{U}_i = \tilde{U}_{ij}$.

3. *Нечіткі корисності та стан системи.* Нечітка корисність альтернативи a_i при деякому нечіткому стані системи, яку позначено через $\tilde{U}^*{}_i$, має вигляд

$$\tilde{U}^*{}_i = \bigcup_k \mu_{\tilde{U}_i^*}(\tilde{U}_k) / \tilde{U}_k, \qquad (2.7)$$

де $\tilde{U}_k = \tilde{U}_{ik}$; $\mu_{\tilde{U}_i{}^*}(\tilde{U}_k) = \mu_{\tilde{X}}(x_k)$.

Нечітка множина $\tilde{U}^*{}_i$ складається, у свою чергу, з нечітких множин. Вона може бути зведена до нечіткої множини на чітких значеннях корисностей. Якщо елемент множини $\tilde{U}^*{}_i$ є

$$\mu_{\tilde{U}_i^*}(\tilde{U}_k) / \tilde{U}_k = \mu_{\tilde{U}_i^*}\left(\mu_{\tilde{U}_{ik}}(u_1) / u_1\right) \Big/ \left(\mu_{U_k}(u_1) / u_1\right),$$

то значення ступеня належності чіткого значення u_1 множині $\tilde{U}^*{}_i$ визначається формулою

$$\mu_{\tilde{U}_i^*}(u_1) = \min\left(\mu_{\tilde{X}}(x_k), \mu_{\tilde{U}_{ik}}(u_1)\right). \qquad (2.8)$$

Ця процедура повторюється для всіх k, після чого множина $\tilde{U}^*{}_i$ буде містити корисності u_1 і їхні ступені належності, тобто буде зведена до множини $\tilde{U}^*{}_{ir}$:

$$\tilde{U}^*{}_{ir} = \mu_{\tilde{U}_{ir}^*}(u_1) / u_1. \qquad (2.9)$$

Потім для $\tilde{U}_i = \tilde{U}^*{}_{ir}$ повторюється вже описана процедура знаходження нечіткої множини $\tilde{A}_0$ кращої альтернативи.

Приклад 2.3. Нехай є множина альтернатив $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, а система може перебувати в одному зі станів $X = \{x_1, x_2, ..., x_{10}\}$. Стан системи задано так:

$$\tilde{X} = \{0{,}4/x_3;\ 1{,}0/x_5;\ 0{,}7/x_6;\ 0{,}3/x_7\}.$$

Матриця корисностей має вигляд

$$U = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 9 & 7 & 2 & 2 & 3 & 1 & 7 & 8 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 8 & 1 & 7 & 6 & 4 & 3 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array}.$$

За формулою (2.5) визначимо нечіткі корисності альтернатив при заданому стані системи:

$$\tilde{U}_1 = \{0,4/2;\ 0,8/2;\ 1,0/3;\ 0,7/1;\ 0,3/7\} =$$

$$= \{(0,4 + 0,8 - 0,4 \cdot 0,8)/2;\ 1,0/3;\ 0,7/1;\ 0,3/7\} =$$

$$= \{0,88/2;\ 1,0/3;\ 0,7/1;\ 0,3/7\};$$

$$\tilde{U}_2 = \{0,4/7;\ 0,8/8;\ 1,0/1;\ 0,7/7;\ 0,3/6\} =$$

$$= \{0,82/7;\ 0,8/8;\ 1,0/1;\ 0,3/6\};$$

$$\tilde{U}_3 = \{0,4/3;\ 0,8/4;\ 1,0/5;\ 0,7/6;\ 0,3/8\}.$$

Знайдемо множину Y:

$$Y = S(U_1) \cup S(U_2) \cup S(U_3) =$$

$$= \{2, 3, 1, 7\} \cup \{7, 8, 1, 6\} \cup \{3, 4, 5, 6, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Визначимо максимізуючі множини. Нехай $n = 1$, $u_{\max} = 8$, тоді

$$\tilde{U}_{1m} = \left\{ \frac{2/8}{2};\ \frac{3/8}{3};\ \frac{1/8}{1};\ \frac{7/8}{7} \right\} = \{0,25/2;\ 0,375/3;\ 0,125/1;\ 0,875/7\};$$

$$\tilde{U}_{2m} = \{0,875/7;\ 1/8;\ 0,125/1;\ 0,75/6\};$$

$$\tilde{U}_{3m} = \{0,375/3;\ 0,5/4;\ 0,625/5;\ 0,75/6;\ 1,8/8\}.$$

Знайдемо оптимізуючі множини $\tilde{U}_{i0}$:

$$\tilde{U}_{10} = \{\min(0,25; 0,88)/2;\ \min(0,375; 1,0)/3;$$

$$\min(0,125; 0,7)/1;\ \min(0,875; 0,3)/7\} =$$

$$= \{0,25/2;\ 0,375/3;\ 0,125/1;\ 0,3/7\};$$

$$\tilde{U}_{20} = \{0,82/7;\ 0,8/8;\ 0,125/1;\ 0,3/6\};$$

$$\tilde{U}_{30} = \{0,375/3;\ 0,5/4;\ 0,625/5;\ 0,7/6;\ 0,3/8\}.$$

Визначимо нечітку множину, що характеризує оптимальну альтернативу $\tilde{A}_0$:

$$\mu_{\tilde{A}_0}(a_1) = \max(0,25;\ 0,375;\ 0,125;\ 0,3) = 0,375;$$

$$\mu_{\tilde{A}_0}(a_2) = 0{,}82;\ \mu_{\tilde{A}_0}(a_3) = 0{,}7,$$

$$\tilde{A}_0 = \{0{,}375/a_1;\ 0{,}82/a_2;\ 0{,}7/a_3\}.$$

Таким чином, кращою є альтернатива a_2.

Приклад 2.4. Нехай множина альтернатив A і множина станів X – такі самі, що й у прикладі 2.3, а матриця корисностей має вигляд

$$U = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \text{ОВ} & \text{В} & \text{Н} & \text{Н} & \text{С} & \text{ОН} & \text{В} & \text{ОВ} & \text{ОВ} & \text{С} \\ \text{Н} & \text{ОН} & \text{В} & \text{ОВ} & \text{ОН} & \text{В} & \text{В} & \text{С} & \text{С} & \text{ОВ} \\ \text{В} & \text{С} & \text{Н} & \text{С} & \text{С} & \text{В} & \text{ОВ} & \text{С} & \text{Н} & \text{Н} \end{bmatrix} \end{array},$$

де корисності задано лінгвістичними нечіткими множинами:

- НИЗЬКИЙ: $\text{Н} = \{0{,}4/1;\ 1{,}0/2;\ 0{,}5/3\}$;
- ДУЖЕ НИЗЬКИЙ: $\text{ДН} = \{1{,}0/1;\ 0{,}4/2\}$;
- СЕРЕДНІЙ: $\text{С} = \{0{,}4/3;\ 0{,}7/4;\ 1{,}0/5;\ 0{,}7/6;\ 0{,}4/7\}$;
- ВИСОКИЙ: $\text{В} = \{0{,}5/7;\ 1{,}0/8;\ 0{,}5/9\}$;
- ДУЖЕ ВИСОКИЙ: $\text{ДВ} = \{0{,}5/9;\ 1{,}0/10\}$.

Відомо стан системи x_9. Знайдемо нечіткі корисності для різних альтернатив при цьому стані системи:

$$\tilde{U}_1 = \text{ОВ} = \{0{,}5/9;\ 1{,}0/10\};$$

$$\tilde{U}_2 = \text{С} = \{0{,}4/3;\ 0{,}7/4;\ 1{,}0/5;\ 0{,}7/6;\ 0{,}4/7\};$$

$$\tilde{U}_3 = \text{Н} = \{0{,}4/1;\ 1{,}0/2;\ 0{,}5/3\}.$$

Визначимо множину Y:

$$Y = \{9;\ 10\} \cup \{3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\} \cup \{1;\ 2;\ 3\} = \{1;2;3;4;5;6;7;9;10\}.$$

Отже, $u_{\max} = 10$. Поклавши $n = 1$, знайдемо максимізуючі множини:

$$\tilde{U}_{1m} = \left\{\frac{9/10}{9};\ \frac{10/10}{10}\right\} = \{0{,}9/9;\ 1/10\};$$

$$\tilde{U}_{2m} = \{0{,}3/3;\ 0{,}4/4;\ 0{,}5/5;\ 0{,}6/6;\ 0{,}7/7\};$$

$$\tilde{U}_{3m} = \{0{,}1/1;\ 0{,}2/2;\ 0{,}3/3\},$$

а також відповідні оптимізуючі множини:

$$\tilde{U}_{10} = \{\min(0{,}5;0{,}9)/9;\ \min(1{,}0;1{,}0)/10\} = \{0{,}5/9;\ 1{,}0/1{,}0\};$$

$$\tilde{U}_{20} = \{0{,}3/3;\ 0{,}4/4;\ 0{,}5/5;\ 0{,}6/6;\ 0{,}4/7\};$$

$$\tilde{U}_{30} = \{0{,}1/1;\ 0{,}2/2;\ 0{,}3/3\}.$$

У цьому випадку нечітка множина, що характеризує кращу альтернативу, визначається таким чином:

$$\mu_{\tilde{A}_0}(a_1) = \max(0{,}5;\ 1{,}0) = 1{,}0;$$

$$\mu_{\tilde{A}_0}(a_2) = 0{,}6;\ \mu_{\tilde{A}_0}(a_3) = 0{,}3,\ \tilde{A}_0 = \{1{,}0/a_1;\ 0{,}6/a_2;\ 0{,}3/a_3\}.$$

Звідси випливає, що кращою є альтернатива a_1, яка має найбільше значення функції належності.

2.4. Вибір рішень при ймовірнісній невизначеності в умовах неточності й невизначеності опису наслідків

Розглянемо метод аналізу рішень у випадку, коли наслідки альтернатив відомі неточно та ймовірності їх настання оцінюються за допомогою функції належності. На рис. 2.1 зображено просте дерево рішень. Необхідно вибрати одне із двох рішень, які описуються стратегіями A і B і залежать від різних випадкових подій. При виборі стратегії A рішення, що має корисність u_1, досягається з імовірністю p, а рішення з корисністю u_2 – з імовірністю $1-p$. Використовуючи правила теорії очікуваної корисності, цю стратегію вибирають тоді і тільки тоді, коли $pu_1 + (1-p)u_2 > qv_1 + (1-q)v_2$. Тут величина й ступінь переваги однієї альтернативи над іншою точно невідомі.

Нехай $\mu_A(a)$, $\mu_B(b)$ – ступені належності a і b множинам очікуваних корисностей стратегій A і B, тоді відповідно до принципу узагальнення

$$\mu_A(a) = \max_{pu_1+(1-p)u_2} (\min(\mu_P(p), \mu_{A_1}(u_1), \mu_{A_2}(u_2))); \qquad (2.10)$$

$$\mu_B(b) = \max_{qv_1+(1-q)v_2} (\min(\mu_Q(q), \mu_{B_1}(V_1),\ \mu_{B_2}(V_2))), \qquad (2.11)$$

де $\mu_P(p)$ – ступінь належності p множині можливих значень для цієї ймовірності. Розподіли очікуваної корисності для кожної стратегії, обчислені за формулами (2.10) і (2.11), зображено на рис. 2.5. Спостерігається значне перекриття між двома розподілами, і хоча максимуму функція $\mu_A(x)$ набуває при більшому значенні x, ніж функція $\mu_B(x)$, цього недостатньо для твердження, що A краще, ніж B.

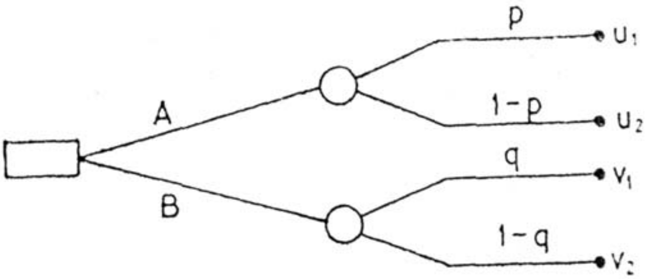


Рис. 2.4. Просте дерево рішень

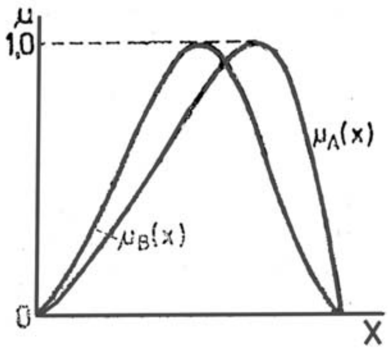


Рис. 2.5. Нечіткий розподіл функції корисності

Щоб оцінити ступінь, з яким A має перевагу над B, скористаємося таким методом:

$$\mu(X \to Y) = \mu(-X \cup Y) = \max(1-\mu(X), \mu(Y)). \tag{2.12}$$

Як бачимо, ступінь, з яким з деякого нечіткого речення X випливає інше нечітке речення Y, є ступенем істинності вислову «або не X, або Y», що у свою чергу, дорівнює більшому зі значень ступеня істинності «не X» і ступеня істинності «Y». У більш загальній постановці X і Y є нечіткими відношеннями між двома змінними a і b, які подано функціями належності $\mu_X(a,b)$ і $\mu_Y(a,b)$,

$$\mu(X \to Y) = \min_{a,b}(\max(1-\mu_X(a,b), \mu_Y(a,b))). \tag{2.13}$$

Це означення змісту нечіткого вислову не є єдино можливим, але достатньо ефективне для розглядуваних цілей.

Приклад 2.5. Нехай мета капітана рибальського сейнера – повернутися на базу з уловом промислової риби. На глибині помічено косяк риби. Необхідно вирішити, скидати трал для лову риби чи ні. Точно невідомо, чи є риба в цьому косяку промисловою. Якщо при підйомі неводу виявиться, що риба не є промисловою, то буде втрачено час для лову, а також заподіяно шкоду підводному світу в цьому районі. Крім цього, існує ймовірність, що рибу взагалі не буде виловлено при скиданні неводу. Імовірність того, що рибу буде виловлено, однакова для кожного її виду.

Задачу, що постає перед капітаном рибальського судна, зображено на рис. 2.6. Корисності в цій задачі відомі й чітко структуровані. Очікувані корисності для двох альтернатив (ловити або не ловити):

$$u_S(p_1,p_2) = p_1(10p_2 - 25(1-p_2)); \tag{2.14}$$

$$u_N(p_1,p_2) = p_1(-30) + 2(1-p_1), \tag{2.15}$$

де p_1 – імовірність того, що косяк – промислова риба; p_2 – імовірність того, що рибу буде виловлено.

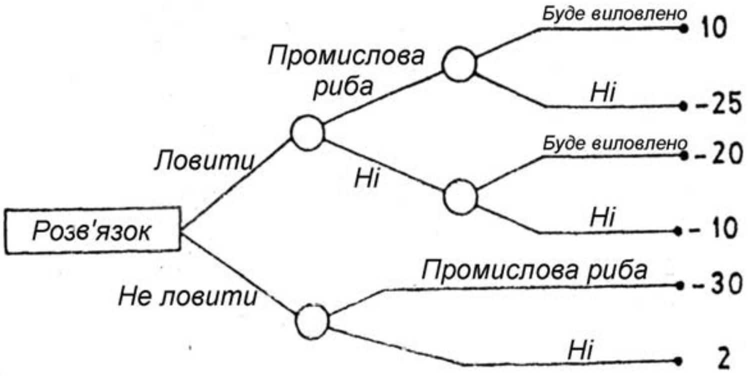


Рис. 2.6. Дерево рішень

Основною є ймовірність p_1, але вона інтуїтивно вважається менш надійною, оскільки ймовірність успішного улову p_2 можна уточнити шляхом конкретних досліджень, а p_1 ґрунтується на невизначеній інформації, яку неможливо уточнити.

Оскільки ймовірність p_1 у цій задачі є наявною у двох різних наслідках дерева рішень, то зручніше розглядати різницю очікуваних корисностей двох альтернатив. Нехай змінна, що визначає вибір,

$$Z(p_1, p_2) = u_S(p_1, p_2) - u_N(p_1, p_2) =$$

$$= 10p_1 p_2 - 25p_1 + 25p_1 p_2 + 30p_1 - 2 + 2p_1 = 35p_1 p_2 + 7p_1 - 2.$$

Тоді її функція належності

$$\mu_Z(z) = \max_z (\min(\mu_1(p_1), \mu_2(p_2))). \tag{2.16}$$

Подамо функції належності $\mu_1(p_1)$ і $\mu_2(p_2)$ у вигляді

$$p_1 = \{0/0{,}5;\ 0{,}4/0{,}6;\ 0{,}8/0{,}7;\ 0{,}9/0{,}8;\ 0{,}95/0{,}9;\ 1{,}0/1{,}0\},$$

$$p_2 = \{0/0{,}6;\ 0{,}1/0{,}7;\ 0{,}6/0{,}75\ ;\ 1{,}0/0{,}8;\ 0{,}7/0{,}85;\ 0/0{,}9\}.$$

Графіки функцій $\mu_1(p_1)$ і $\mu_2(p_2)$ зображено на рис. 2.7. Ступені належності для змінної $Z = 35p_1 p_2 + 7p_1 - 2$ наведено в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Визначення значень змінної Z

p_2	p_1					
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,6	12	14,8	17,6	22,6	23,2	**26**
0,7	13,75	16,9	20,05	23,2	26,35	29,5
0,75	14,625	17,95	21,275	24,6	27,925	31,25
0,8	15,5	19	22,5	**26**	29,5	33
0,85	16,375	10,05	23,725	27,4	31,075	34,75
0,9	17,25	21,1	24,95	28,8	32,65	36,5

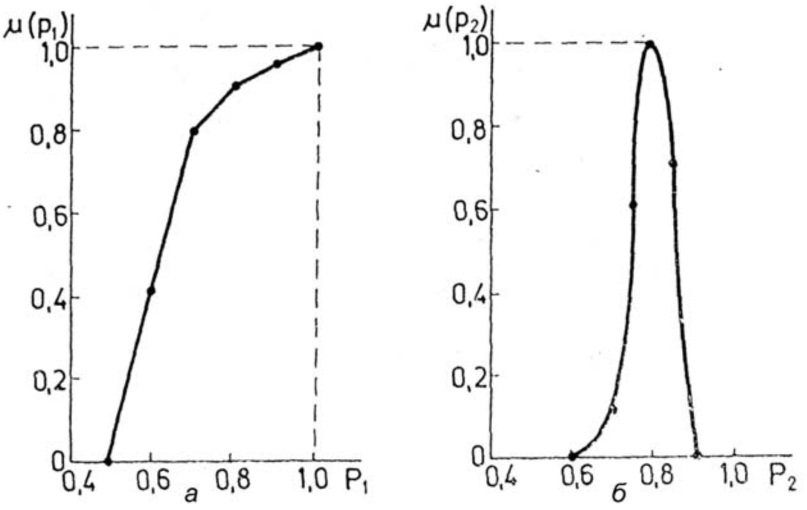


Рис. 2.7. Функції належності для початкових імовірностей: а – p_1; б – p_2

Для визначення μ_2 при $Z = 26$ будемо діяти таким чином:

1. У табл. 2.1 значенню 26 (виділено жирним шрифтом) відповідають імовірності $p_1 = 0{,}8;\ p_2 = 0{,}8$ і $p_1 = 1{,}0;\ p_2 = 0{,}6$.

2. За означенням для ймовірностей p_1 і p_2 знаходимо

$$\mu_1(p_1 = 0{,}8) = 0{,}9;\ \mu_1(p_1 = 1{,}0) = 1{,}0;$$

$$\mu_2(p_2 = 0{,}8) = 1{,}0;\ \mu_2(p_2 = 0{,}6) = 0.$$

3. За формулою (2.16) визначимо

$$\mu_Z(26) = \max_{z=26}(\min(\mu_1(p_1), \mu_2(p_2))) =$$

$$= \max_{z=26}(\min(0{,}9;\ 1{,}0),\ \min(1{,}0,\ 0)) = \max(0{,}9,\ 0) = 0{,}9.$$

Аналогічно знаходимо інші значення функції належності нечіткої множини, що задає змінну:

$$Z = \{0/12; 0/13{,}75; 0/14{,}625; 0/14{,}8; 0/15{,}5; 0/16{,}375; 0{,}1/16{,}9;$$
$$0/17{,}25; 0/17{,}6; 0{,}4/17{,}95; 0{,}4/19; 0{,}4/20{,}05; 0{,}4/21{,}1; 0{,}6/21{,}275;$$
$$0{,}8/22{,}5; 0/22{,}6; 0{,}1/23{,}2; 0{,}7/23{,}725; 0{,}6/24{,}6; 0/24{,}85; 0{,}9/26;$$
$$0{,}1/26{,}35; 0{,}7/27{,}4; 0{,}6/27{,}925; 0/28{,}8; 0{,}95/29{,}5; 0{,}7/31{,}075;$$
$$0{,}6/31{,}25; 0/32{,}65; 1{,}0/33; 0{,}7/34{,}75; 0/36{,}5\}.$$

Значення функції належності можна обчислити шляхом визначення ступеня підтвердження для різних нечітких значень. Розглянемо такі модифікації тверджень:

1. R_1: «Ясно, що ловити рибу краще, ніж не ловити». Цей вислів є чітким, і з урахуванням того, що Z – різниця між рішеннями «ловити» і «не ловити», функція належності має вигляд

$$\mu_{R_1}(z) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } z > 0; \\ 0, \text{ якщо } z < 0. \end{cases}$$

2. R_2: «Ясно, що не ловити рибу краще, ніж ловити»;

$$\mu_{R_2}(z) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } z < 0; \\ 0, \text{ якщо } z > 0. \end{cases}$$

3. R_3: «Ловити, здається, трохи краще, ніж не ловити»;

$$\mu_{R_3}(z) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } z \le -20; \\ 0{,}5 + 0{,}025, \text{ якщо } -20 < z < 20; \\ 1, \text{ якщо } z > 20. \end{cases}$$

Останній вислів є нечітким. Визначимо ступінь істинності висловів R_1, R_2, R_3, використовуючи формулу (2.12). Якщо X – твердження про різницю очікуваних корисностей, то ступінь, із яким X має на увазі кожне з наведених вище тверджень, задамо формулою

$$\mu(X \to R_i) = \min_z(\max(1 - \mu_z(z), \mu_{R_i}(z))), \ i = \overline{1,3}. \qquad (2.17)$$

Значення $1 - \mu_z(z)$, $\mu_{R_1}(z)$, $\mu_{R_2}(z)$, $\mu_{R_3}(z)$, розраховані за формулою (2.17), зведемо в табл. 2.2.

Остаточно маємо

$$\mu(X \to R_1) = 1; \ \mu(X \to R_2) = 0; \ \ \mu(X \to R_3) = 0{,}92.$$

Оскільки максимального значення набуває функція належності для R_1, то остаточним рішенням капітана є «Ловити рибу краще, ніж не ловити».

Таблица 2.2

Результати розрахунків

μ	z							
	12	13,75	14,625	14,8	15,5	16,375	16,9	17,25
$1-\mu_z(z)$	1	1	1	1	1	1	0,9	1
$\mu_{R_1}(z)$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mu_{R_2}(z)$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mu_{R_3}(z)$	0,8	0,84	0,865	0,87	0,89	0,9	0,92	0,93

Закінчення табл. 2.2

μ	z							
	17,6	17,95	19	20,05	21,1	21,275	22,5	22,6
$1-\mu_z(z)$	1	0,6	0,6	0,6	0,6	0,4	0,2	1
$\mu_{R_1}(z)$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mu_{R_2}(z)$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mu_{R_3}(z)$	0,94	0,95	0,98	1	1	1	1	1
μ	z							
	23,2	23,725	24,6	24,95	26	26,35	27,4	27,925
$1-\mu_z(z)$	0,9	0,3	0,4	1	0,1	0,9	0,3	0,4
$\mu_{R_1}(z)$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mu_{R_2}(z)$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mu_{R_3}(z)$	1	1	1	1	1	1	1	1
μ	z							
	28,8	29,5	31,075	31,25	32,65	33	34,75	36,5
$1-\mu_z(z)$	1	0,05	0,3	0,4	1	0	0,3	1
$\mu_{R_1}(z)$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mu_{R_2}(z)$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mu_{R_3}(z)$	1	1	1	1	1	1	1	1

2.5. Нечіткий багатокритеріальний аналіз варіантів

Задача багатокритеріального аналізу полягає в упорядкуванні елементів множини P за критеріями із множини G.

Нехай $P=\{P_1,P_2,\dots,P_k\}$ – множина варіантів, які підлягають багатокритеріальному аналізу; $G=\{G_1,G_2,\dots,G_n\}$ – множина критеріїв, за якими оцінюють варіанти.

Нехай $\mu_{G_i}(P_j)$ – число в інтервалі $[0,\ 1]$, відповідно до якого оцінюється варіант $P_j \in P$ за критерієм $G_i \in G$: чим більше число $\mu_{G_i}(P_j)$, тим кращий варіант P_j за критерієм G_i, $i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,k}$. Тоді критерій G_i можна зобразити у вигляді нечіткої множини $\widetilde{G}_i$ на універсальній множині варіантів P:

$$G_i = \left\{ \frac{\mu_{G_i}(P_1)}{P_1}, \frac{\mu_{G_i}(P_2)}{P_2}, \dots, \frac{\mu_{G_i}(P_k)}{P_k} \right\}, \quad (2.18)$$

де $\mu_{G_i}(P_j)$ – ступінь належності елемента P_j нечіткій множині $\tilde{G}_i$.

Знаходити ступені належності нечіткої множини (2.18) зручно методом побудови функції належності на основі порівнянь парами (див. підрозд. 1.3.2). Згідно з цим методом необхідно сформувати матриці порівнянь парами варіантів за кожним критерієм. Загальна кількість таких матриць дорівнює кількості критеріїв. Найкращим варіантом буде той, який одночасно кращий за всіма критеріями. Нечітке рішення $\tilde{D}$ визначається як перетинання частинних критеріїв:

$$\tilde{D} = \tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2 \cap \dots \cap \tilde{G}_n =$$

$$= \left\{ \frac{\min\limits_{i=\overline{1,n}} \mu_{G_i}(P_1)}{P_1}, \frac{\min\limits_{i=\overline{1,n}} \mu_{G_i}(P_2)}{P_2}, \dots, \frac{\min\limits_{i=\overline{1,n}} \mu_{G_i}(P_k)}{P_k} \right\}. \quad (2.19)$$

Відповідно до отриманої нечіткої множини $\tilde{D}$ найкращим слід уважати той варіант, який має найбільший ступінь належності:

$$D = \arg\max\left(\mu_D(P_1), \mu_D(P_2), \dots, \mu_D(P_k)\right).$$

При нерівноважних критеріях ступені належності нечіткої множини $\tilde{D}$ знаходять так:

$$\mu_D(P_j) = \min\limits_{i=\overline{1,n}} \left(\mu_{G_i}(P_j)\right)^{\alpha_i}, \ j = \overline{1,k}, \quad (2.20)$$

де α_i – коефіцієнт відносної важливості критерію G_i, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$.

Показник степеня α_i у формулі (2.20) концентрує нечітку множину $\tilde{G}_i$ відповідно до ступеня важливості критерію G_i. Коефіцієнти відносної важливості критеріїв можна визначити різними методами, наприклад за допомогою порівнянь парами за шкалою Сааті.

Приклад 2.6. Уважаючи вимоги до кандидатів на деяку вакантну посаду рівноважними критеріями, розглянемо типову для кадрової політики задачу підбору найбільш підхожої кандидатури. Припустимо, що необхідно підібрати керівника для перспективної філії фірми. Із множини претендентів після попереднього знайомства з ними відібрано п'ять кандидатів, які утворюють множину

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\},$$

де x_1 – головний інженер фірми; x_2 – головний менеджер більш дрібної філії фірми; x_3 – керівник дослідницького відділу фірми; x_4 – третій заступник генерального директора фірми; x_5 – молодий, талановитий і перспективний працівник, недавній випускник вузу.

Оцінювати претендентів будемо за такою множиною із шести рівноважних критеріїв:

$$C = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\},$$

де C_1 – професійна компетентність претендента; C_2 – організаторські й комунікативні здібності; C_3 – професійний досвід подібної роботи; C_4 – діловий авторитет серед колег і партнерів; C_5 – уміння працювати з людьми й розуміння їхньої психології; C_6 – вік претендента.

Визначивши ступінь відповідності кожного з відібраних претендентів цим критеріям, сформуємо сукупність нечітких множин, що описують їхню відповідність за кожним критерієм:

$$A_{C_1} = \{(x_1;0{,}9), (x_2;0{,}9), (x_3;0{,}6), (x_4;0{,}8), (x_5;0{,}5)\};$$
$$A_{C_2} = \{(x_1;0{,}8), (x_2;0{,}9), (x_3;0{,}5), (x_4;0{,}7), (x_5;0{,}6)\};$$
$$A_{C_3} = \{(x_1;0{,}7), (x_2;0{,}9), (x_3;0{,}8), (x_4;0{,}5), (x_5;0{,}3)\};$$
$$A_{C_4} = \{(x_1;0{,}9), (x_2;0{,}8), (x_3;0{,}5), (x_4;0{,}6), (x_5;0{,}5)\};$$
$$A_{C_5} = \{(x_1;0{,}9), (x_2;0{,}9), (x_3;0{,}4), (x_4;0{,}7), (x_5;0{,}6)\};$$
$$A_{C_6} = \{(x_1;0{,}9), (x_2;0{,}4), (x_3;0{,}8), (x_4;0{,}7), (x_5;0{,}5)\}.$$

Застосовуючи правило вибору шуканої альтернативи, знайдемо перетин множин

$$\begin{aligned} D = \{&(x_1, \min(0{,}9;\ 0{,}8;\ 0{,}7;\ 0{,}9;\ 0{,}9;\ 0{,}9)),\\ &(x_2, \min(0{,}9;\ 0{,}9;\ 0{,}9;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 0{,}4)),\\ &(x_3, \min(0{,}6;\ 0{,}5;\ 0{,}8;\ 0{,}5;\ 0{,}4;\ 0{,}8)),\\ &(x_4, \min(0{,}8;\ 0{,}7;\ 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}7)),\\ &(x_5, \min(0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}5))\} =\\ = \{&(x_1;0{,}7), (x_2;0{,}4), (x_3;0{,}4), (x_4;0{,}5), (x_5;0{,}3)\}.\end{aligned}$$

Таким чином, найкращою кандидатурою для вакантної посади директора філії є головний інженер фірми (тобто альтернатива x_1, оскільки значення її функції належності найбільше).

Приклад 2.7. Нехай завдання полягає у виборі альтернативного місця для будівництва деякого підприємства. Множину альтернатив утворюють чотири міста: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Оцінка кожної альтернативи здійснюється за такими критеріями:

- C_1 – близькість майбутнього підприємства до споживача його продукції;
- C_2 – близькість майбутнього підприємства до джерел сировини;
- C_3 – наявність і рівень вільної робочої сили в місті.

Визначивши ступінь відповідності кожного з міст-претендентів на будівництво в них підприємства цим критеріям, сформуємо сукупність нечітких множин, що описують їхню відповідність кожному з критеріїв:

$$A_{C_1} = \{(x_1;0,5), (x_2;0,7), (x_3;0,3), (x_4;0,6)\};$$

$$A_{C_2} = \{(x_1;0,5), (x_2;0,4), (x_3;0,8), (x_4;0,4)\};$$

$$A_{C_3} = \{(x_1;0,2), (x_2;0,1), (x_3;0,6), (x_4;0,9)\}.$$

Оскільки вибрані критерії мають різний ступінь важливості, проведемо їх порівняння парами. Результати цього порівняння подамо у вигляді матриці

$$B = \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1/3 \\ 1/5 & 1 & 1/9 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Обчисливши власний вектор матриці B, маємо значення його компонентів: $w_1 = 0{,}06;\ w_2 = 0{,}27;\ w_3 = 0{,}67.$ Помноживши їх на кількість критеріїв, що дорівнює трьом, одержимо величини вагових коефіцієнтів, що характеризують важливість кожного критерію:

$$\lambda_1 = 3 \cdot 0{,}06 = 0{,}18;\ \lambda_2 = 3 \cdot 0{,}27 = 0{,}81;\ \lambda_2 = 3 \cdot 0{,}67 = 2{,}01.$$

З урахуванням цих коефіцієнтів побудуємо множини $A_{C_i}^{\lambda_i}$:

$$A_{C_1}^{0,18} = \{(a_1;0,5^{0,18}), (a_2;0,7^{0,18}), (a_3;0,3^{0,18}), (a_4;0,6^{0,18})\} =$$

$$= \{(a_1;0,88), (a_2;0,94), (a_3;0,81), (a_4;0,91)\};$$

$$A_{C_2}^{0,81} = \{(a_1;0,57), (a_2;0,48), (a_3;0,83), (a_4;0,48)\};$$

$$A_{C_3}^{2,01} = \{(a_1;0,04), (a_2;0,01), (a_3;0,36), (a_4;0,81)\}.$$

Застосовуючи правило вибору шуканої альтернативи, знайдемо перетин цих множин:

$$\tilde{D} = \{(x_1;0,04), (x_2;0,01), (x_3;0,36), (x_4;0,48)\}.$$

Оскільки найбільшим є значення функції належності альтернативи x_4, її і доцільно вибрати як розв'язок задачі. Іншими словами, місто x_4 відповідно до заданих критеріїв і з урахуванням ступеня їхньої важливості є найкращим місцем для будівництва нового підприємства.

2.6. Багатокритеріальний вибір альтернатив при нечіткому відношенні переваги

Нехай на множині альтернатив X задано деяку сукупність із m ознак, що характеризують кожну альтернативу. Нехай інформацію про результати порівняння пар альтернатив за кожною j-ю ознакою подано у вигляді відповідного відношення переваги R_j. Спочатку будемо вважати, що всі ці відношення мають однакову важливість, тобто на множині X є m відношень переваги. На основі цієї інформації необхідно вибрати найкращу альтернативу x із множини $\{X, R_1, R_2, \ldots, R_m\}$.

Нехай відношення переваги R_j характеризуються заданими функціями корисності $f_j : X \to R$. При цьому значення кожної такої функції слід розуміти як числову оцінку альтернативи x за j-ю ознакою. Чим більшою є величина оцінки $f_j(x)$, тим більший ступінь переваги за цією ознакою має альтернатива x. Задача ж полягає в тому, щоб відшукати альтернативу, що має найбільші оцінки за всіма ознаками заданої їх сукупності.

Кожна з функцій $f_j(x)$ описує звичайне відношення переваги R_j на множині X. Кожне з цих відношень можна подати у вигляді

$$R_j = \{(x,y) | x, y \in X, f_j(x) \geq f_j(y)\}.$$

Побудуємо перетинання цих відношень: $Q_1(x,y) = \bigcap_{j=1}^{m} R_j(x,y)$. Оскільки всі R_j являють собою звичайні (чіткі) відношення переваги, то функція належності має вигляд

$$\mu_j(x,y) = \begin{cases} 1, \textit{ якщо } (x,y) \in R_j, \\ 0, \textit{ якщо } (x,y) \notin R_j. \end{cases}$$

Тоді функція належності μ_{Q_1} перетину Q_1 цих відношень визначається формулою

$$\mu_{Q_1}(x,y) = \min(\mu_1(x,y), \mu_2(x,y), \ldots, \mu_m(x,y)). \tag{2.21}$$

Розглянемо більш загальний випадок, коли відношення переваги R_j мають різний ступінь важливості та описані нечітко.

У такому випадку згортка Q_1 початкових відношень переваги R_j з урахуванням значень вагових коефіцієнтів w_j, $j = \overline{1,m}$, причому $\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$, має значення функції належності

$$\mu_{Q_1}(x,y) = \min(w_1 \mu_1(x,y), w_2 \mu_2(x,y), \ldots, w_m \mu_m(x,y)),$$

яке фактично являє собою функцію належності нечіткого відношення переваги.

Оскільки згортка Q_1 як деяке узагальнене відношення переваги не є, взагалі кажучи, рефлексивним і не дозволяє врахувати можливі розбіжності між значеннями відносної важливості відношень R_j, що входять у нього, то часто для розв'язання подібних задач використовується згортка Q_2 іншого вигляду:

$$\mu_{Q_2}(x,y)=\sum_{j=1}^{m} w_j\,\mu_j(x,y). \qquad (2.22)$$

Отримане відповідно до згортки Q_2 узагальнене відношення переваги $\mu_{Q_2}(x,y)$ є рефлексивним в силу адитивності й рефлексивності початкових відношень R_j, що входять у неї, і дозволяє одержати додаткову інформацію й тим самим звузити клас реальних виборів альтернатив.

Для розв'язування багатокритеріальної задачі раціонального вибору недомінуючих альтернатив рекомендується така процедура [7].

1. Побудувати нечітке відношення переваги Q_1 як перетинання початкових відношень переваги R_j, $j=\overline{1,m}$. Функцію належності цього відношення визначити за формулою (2.21). Тоді множина недомінуючих альтернатив на множині (X,Q_1) матиме вигляд

$$\mu_{Q_1}^{НД}(x)=1-\sup_{y\in X}\left(\mu_{Q_1}(y,x)-\mu_{Q_1}(x,y)\right). \qquad (2.23)$$

2. Побудувати узагальнене нечітке відношення переваги Q_2 як згортку (2.22) початкових відношень переваги R_j, $j=\overline{1,m}$ і на його основі визначити нечітку підмножину недомінуючих альтернатив на множині (X,Q_2):

$$\mu_{Q_2}^{НД}(x)=1-\sup_{y\in X}\left(\mu_{Q_2}(y,x)-\mu_{Q_2}(x,y)\right). \qquad (2.24)$$

Ця функція впорядковує альтернативи за ступенем недомінування.

3. Знайти перетинання отриманих нечітких множин $\mu_{Q_1}^{НД}(x)$ і $\mu_{Q_2}^{НД}(x)$:

$$\mu^{НД}(x)-\min\left(\mu_{Q_1}^{НД}(x),\,\mu_{Q_2}^{НД}(x)\right).$$

4. Раціональним при цьому слід уважати вибір альтернатив із множини

$$X^{НД} = \left\{ x \middle| \; x \in X, \; \mu^{НД}(x) = \sup_{x \in X} \mu^{НД}(x') \right\}.$$

Найбільш раціональним слід уважати вибір такої альтернативи із множини $X^{НД}$, що має найбільший ступінь недомінування.

Приклад 2.8. У процесі функціонування деякої фірми надійшло досить вигідне замовлення на роботу, що трохи відрізняється від тієї, за якою фірма спеціалізується. Для прийняття рішення про можливий спосіб виконання цього замовлення керівник фірми має три альтернативні можливості:

- x_1 – навчити цій роботі одного зі своїх співробітників;
- x_2 – прийняти на роботу співробітника, що вже вміє виконувати таку роботу;
- x_3 – укласти договір з іншою організацією про виконання цієї роботи на умовах субпідряду.

У процесі підготовки й прийняття рішення стосовно вибору конкретної альтернативи керівник виходить із таких критеріїв:

1) строки виконання замовлення;
2) матеріальні витрати на його виконання;
3) якість виконання робіт.

Для простоти будемо вважати, що ці критерії рівноважні. Кожний з цих критеріїв генерує певне відношення переваги на множині альтернативних можливостей виконання замовлення. Ці відношення будемо вважати такими:

- R_1 – альтернатива x_1 і альтернатива x_2 однакові за перевагою, а альтернатива x_3 є кращою, ніж x_2, за першим критерієм;
- R_2 – альтернатива x_1 є кращою, ніж x_2 і x_3, а альтернатива x_2 – кращою, ніж x_3, за другим критерієм;
- R_3 – альтернативи x_1 і x_2 однакові за перевагою, а альтернатива x_3 є кращою, ніж x_1, за третім критерієм.

На основі цих характеристик складемо матриці відношень R_1, R_2 і R_3, причому елементи матриць r_{ij}^{k} будемо визначати згідно з таким правилом:

$$r_{ij}^{k}=\begin{cases}\mathbf{1},\ \textit{якщо}\ i-\textit{та альтернатива краща від}\ j-\textit{ї за}\ k-\textit{м критерієм};\\ \mathbf{0},\ \textit{якщо альтернативи однакові за перевагою або}\\ \quad i-\textit{та альтернатива гірша від}\ j-\textit{ї за}\ k-\textit{м критерієм}.\end{cases}$$

Отже, одержали такі матриці відношень переваги R_1, R_2 і R_3:

$$\mu_1=\begin{array}{c|ccc|} & x_1 & x_2 & x_3\\ x_1 & 1 & 1 & 0\\ x_2 & 1 & 1 & 0\\ x_3 & 0 & 1 & 1\end{array};\quad \mu_2=\begin{array}{c|ccc|} & x_1 & x_2 & x_3\\ x_1 & 1 & 1 & 1\\ x_2 & 0 & 1 & 1\\ x_3 & 0 & 0 & 1\end{array};\quad \mu_3=\begin{array}{c|ccc|} & x_1 & x_2 & x_3\\ x_1 & 1 & 1 & 0\\ x_2 & 1 & 1 & 0\\ x_3 & 1 & 0 & 1\end{array}.$$

Вибираючи мінімальні значення відповідного елемента кожної з матриць μ_1,μ_2 і μ_3, одержимо

$$\mu_{Q_1}(x_i,x_j)=\begin{array}{c|ccc|} & x_1 & x_2 & x_3\\ x_1 & 1 & 1 & 0\\ x_2 & 0 & 1 & 0\\ x_3 & 0 & 0 & 1\end{array}.$$

Знаходимо множину недомінуючих альтернатив на множині (X,Q_1) за всіма i та j $(i\neq j)$:

$$\mu_{Q_1}^{НД}(x_1)=1-\sup(\mu_{Q_1}(x_2,x_1)-\mu_{Q_1}(x_1,x_2);$$
$$\mu_{Q_1}(x_3,x_1)-\mu_{Q_1}(x_1,x_3))=1-\sup(0-1;\ 0-0)=1;$$
$$\mu_{Q_1}^{НД}(x_2)=1-\sup(\mu_{Q_1}(x_1,x_2)-\mu_{Q_1}(x_2,x_1);$$
$$\mu_{Q_1}(x_3,x_2)-\mu_{Q_1}(x_2,x_3))=1-\sup(1-0;\ 0-0)=0;$$
$$\mu_{Q_1}^{НД}(x_3)=1-\sup(\mu_{Q_1}(x_1,x_3)-\mu_{Q_1}(x_3,x_1);$$
$$\mu_{Q_1}(x_2,x_3)-\mu_{Q_1}(x_3,x_2))=1-\sup(0-0;\ 0-0)=1.$$

Таким чином, множина недомінуючих альтернатив за узагальненим відношенням переваги Q_1 має вигляд

$$\begin{array}{cccc} & x_1 & x_2 & x_3\\ \mu_{Q_1}^{НД}(x)= & \{1 & 0 & 1\}.\end{array}$$

Тепер побудуємо відношення переваги Q_2 за формулою (2.22). Оскільки $w_1 = w_2 = w_3 = 1/3$, то

$$\mu_{Q_2}(x_1, x_1) = \frac{1}{3}(1 + 1 + 1) = 1; \; \mu_{Q_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{3}(1 + 1 + 1) = 1;$$

$$\mu_{Q_2}(x_1, x_3) = \frac{1}{3}(0 + 1 + 0) = \frac{1}{3}; \; \mu_{Q_2}(x_2, x_1) = \frac{1}{3}(1 + 0 + 1) = \frac{2}{3};$$

$$\mu_{Q_2}(x_2, x_2) = \frac{1}{3}(1 + 1 + 1) = 1; \; \mu_{Q_2}(x_2, x_3) = \frac{1}{3}(0 + 1 + 0) = \frac{1}{3};$$

$$\mu_{Q_2}(x_3, x_1) = \frac{1}{3}(0 + 0 + 1) = \frac{1}{3}; \; \mu_{Q_2}(x_3, x_2) = \frac{1}{3}(1 + 0 + 0) = \frac{1}{3};$$

$$\mu_{Q_2}(x_3, x_3) = \frac{1}{3}(1 + 1 + 1) = 1.$$

Таким чином, матриця функції належності узагальненого нечіткого відношення Q_2 набуває вигляду

$$\mu_{Q_2}(x_i, x_j) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/3 \\ 2/3 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Тепер знайдемо підмножину недомінуючих альтернатив множини (X, Q_2) за всіма i та j $(i \neq j)$ за формулою (2.24):

$$\mu_{Q_2}^{НД}(x_1) = 1 - \sup(\mu_{Q_2}(x_2, x_1) - \mu_{Q_2}(x_1, x_2);$$

$$\mu_{Q_2}(x_3, x_1) - \mu_{Q_2}(x_1, x_3)) = 1 - \sup\left(\frac{2}{3} - 1; \; \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = 1;$$

$$\mu_{Q_2}^{НД}(x_2) = 1 - \sup(\mu_{Q_2}(x_1, x_2) - \mu_{Q_2}(x_2, x_1);$$

$$\mu_{Q_2}(x_3, x_2) - \mu_{Q_2}(x_2, x_3)) = 1 - \sup\left(1 - \frac{2}{3}; \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3};$$

$$\mu_{Q_2}^{НД}(x_3) = 1 - \sup(\mu_{Q_2}(x_1, x_3) - \mu_{Q_2}(x_3, x_1);$$

$$\mu_{Q_2}(x_2, x_3) - \mu_{Q_2}(x_3, x_2)) = 1 - \sup\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}; \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = 1.$$

Отже, множина недомінуючих альтернатив за узагальненим відношенням переваги Q_2 набуває вигляду

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad x_1\; x_2\; x_3 \\ \mu_{Q_2}^{НД}(x) = \{1 \;\; 0 \;\; 1\}. \end{array}$$

Побудуємо результуючу множину недомінуючих альтернатив як перетинання множин $\mu_{Q_1}^{НД}(x)$ і $\mu_{Q_2}^{НД}(x)$:

$$\mu^{НД}(x) = \mu_{Q_1}^{НД}(x) \cap \mu_{Q_2}^{НД}(x) = \{(1\;0\;1)\} \cap \{(1\;0\;1)\} = \{(1\;0\;1)\}.$$

Таким чином, для керівника фірми в цій задачі однаково раціональним буде вибрати альтернативу x_1, тобто навчити відповідній роботі одного зі своїх співробітників, і альтернативу x_3, тобто укласти договір з якоюсь спеціалізованою організацією про виконання цієї роботи на умовах субпідряду.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений / И.Г. Черноруцкий. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.

2. Афоничкин А.И. Управленческое решение в экономических системах : учебник для вузов / А.И. Афоничкин, Д.Г. Михаленко. – СПб.: Питер, 2009. – 480 с.

3. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л.А. Заде. – М. : Мир, 1976. – 165 с.

4. Мушик З. Методы принятия технических решений / З. Мушик, П. Мюллер. – М. : Мир, 1990. – 208 с.

5. Колпаков В.М. Теория и практика принятия управленческих решений : учеб. пособие / В.М. Колпаков. – К. : МАУП, 2004. – 504 с.

6. Борисов А.Н. Принятие решений на основе нечетких моделей. Примеры использования / А.Н. Борисов, О.А. Крумберг, И.П. Федоров. – Рига : Зинатне, 1990. – 184 с.

7. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой информации / С.А. Орловский. – М. : Наука, 1981. – 206 с.

8. Раскин Л.Г. Нечеткая математика. Основы теории. Приложения / Л.Г. Раскин, О.В. Серая. – Х. : Парус, 2008. – 352 с.

9. Бочарников В.П. Прогнозные коммерческие расчеты и анализ рисков на Fuzzy for Excel / В.П. Бочарников, С.В. Свешников, С.Н. Возняк. – К. : 2000. – 159 с.

10. Бочарников В.П. Fuzzy Technology: модальность и принятие решения в маркетинговых коммуникациях / В.П. Бочарников. – К. : Ника-Центр, Эльга, 2002. – 224 с.

11. Павлов А.Н. Принятие решений в условиях нечеткой информации : учеб. пособие / А. Н. Павлов, Б.В. Соколов. – СПб. : ГУАП, 2006. – 72 с.

12. Хаптахаева Н.Б. Введение в теорию нечетких множеств : учеб. пособие / Н.Б. Хаптахаева, С.В. Дамбаева, Н.Н. Аюшева. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2004. – 68 с.

13. Прикладные нечеткие системы : пер. с яп. / К. Асаи, Д. Ватада, С. Иваи и др.; под ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугэно. – М. : Мир, 1993. – 368 с.

14. Блюмин С.Л. Модели и методы принятия решений в условиях неопределенности / С.Л. Блюмин, И.А. Шуйкова. – Липецк : ЛЭГИ, 2001. – 138 с.

15. Пономарёв О.С. Нечеткие множества в задачах автоматизированного управления и принятия решения : учеб. пособие / О.С. Пономарёв. – Х. : НТУ „ХПІ”, 2005. – 232 с.

16. Штовба С.Д. Проектирование нечетких систем средствами MATLAB / С.Д. Штовба. – М. : Горячая линия – Телеком, 2007. – 288 с.

17. Юдин Д.Б. Математические методы управления в условиях неполной информации / Д.Б. Юдин. – М. : Сов. радио, 1974. – 400 с.

18. Иваненко В.И. Проблема неопределенности в задачах принятия решений / В.И. Иваненко, В.А. Лабковский. – К : Наук. думка, 1990. – 134 с.

19. Раскин Л.Г., Серая О.В. Формирование скалярного критерия предпочтения по результатам попарных сравнений объектов

/ Л.Г. Раскин, О.В. Серая // Вісн. Нац. Техн. Ун-ту НТУ „ХПІ” / 2003. – № 6. – С. 63–68.

20. Модели принятия решений на основе лингвистической переменной / А.Н. Борисов, А.В. Алексеев, О.А. Крумберг и др. – Рига : Зинатне, 1982. – 256 с.

21. Беллман Р. Принятие решений в расплывчатых условиях. – В кн.: Вопросы анализа и процедуры принятия решений. – М. : Мир, 1976. – С. 172–215.

22. Zadeh L. A. Fuzzy algorithms / L. A. Zadeh //. – Inf. Contr. – 1968. – № 12. – P. 94–102.

23. Саак А.Э. Разработка управленческого решения : учебник для вузов / А.Э. Саак, В.Н. Тюшняков. – СПб. : Питер, 2007. – 272 с.

ЗМІСТ

Мураховська Олена Анатоліївна

УПРАВЛІННЯ СКЛАДНИМИ СИСТЕМАМИ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Редактор Т. О. Іващенко

Зв. план, 2010
Підписано до друку 07.07.2010
Формат 60×84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк
Ум. друк. арк. 4,9. Обл.-вид. арк. 5,5. Наклад 100 прим. Замовлення 236.
Ціна вільна

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khau.edu