

Доцент, кандидат технических наук Д. И. Костюк

НОВЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАДИУСОВ КРИВИЗНЫ ПЕРЕХОДНОЙ КРИВОЙ ПРОФИЛЯ ЗУБА КОЛЕСА

Современный метод расчёта зубьев на изгиб учитывает концентрацию напряжения в корне зуба (1). Величина коэффициента концентрации зависит от кривизны галтели (переходной кривой), сопрягающей окружности впадин с эвольвентной частью профиля зуба.

Переходная кривая при современном способе обработки зубьев методом обкатки является огибающей семейства окружностей, центры которых лежат либо на удлинённой эвольвенте (в случае реечного инструмента), либо на удлинённой эпициклоиде (в случае долбяка). Радиусы огибаемых окружностей равны радиусу закругления головки зуба режущего инструмента.

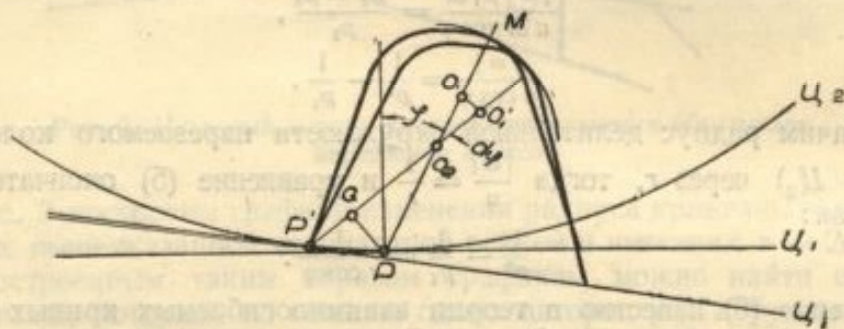


Рис. 1. Исходный контур реечного инструмента обкатывает нарезаемое колесо.

Составив уравнение огибающей в параметрическом виде, радиус кривизны её определяют (2) по формуле

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad (1)$$

Вычисление радиусов кривизны по формуле (1) требует значительной затраты времени.

В данной работе показан новый метод определения радиусов кривизны переходной кривой. Вычисления чрезвычайно упрощаются, особенно в том случае, когда переходная кривая образована реечным инструментом.

Пусть стандартное колесо нарезается реечным инструментом. Исходный контур зубчатой рейки взят по ГОСТ 3058-45.

В некоторый момент времени, когда закругление головки зуба рейки обкатывает галтель, средняя линия рейки C_1 касается делительной окружности C_2 нарезаемого колеса в точке P — полюсе станочного зацепления (рис. 1).

Расстояние от полюса до центра закругления обозначим через $p_1 = PO_1$, а угол, образуемый линией O_2P с общей нормалью к центроидам, через φ .

По истечении бесконечно малого промежутка времени dt полюс переместится в точку P' , а линия $P'O'_1$, соединяющая новый полюс P' с новым положением центра закругления O'_1 , повернется относительно прежнего её положения на угол $d\varphi$. Центр кривизны галтели в точке M будет совпадать с точкой пересечения PO_1 и $P'O'_1$, то есть с точкой O_2 .

Опуская из P перпендикуляр PQ на направление $P'O'_1$, из подобия треугольников PQO_2 и $O_1O'_1O_2$ имеем:

$$\frac{O_1O'_1}{PQ} = \frac{p_1 - p_2}{p_2}, \quad (2)$$

где: p_2 — расстояние от полюса P до центра кривизны галтели в рассматриваемый момент.

Но

$$O_1O'_1 = |\omega| p_1 dt, \quad (3)$$

а

$$PQ = PP' \cos \varphi = u dt \cos \varphi, \quad (4)$$

где:

ω — угловая скорость перекачивания,

а

u — скорость перемещения мгновенного центра вращения.

Подставляя величины из (3) и (4) в уравнение (2), получаем:

$$\frac{|\omega| p_1 dt}{u dt \cos \varphi} = \frac{p_1 - p_2}{p_2},$$

или

$$\frac{|\omega|}{u \cos \varphi} = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}. \quad (5)$$

Обозначим радиус делительной окружности нарезаемого колеса (радиус центроиды C_2) через r , тогда $\frac{|\omega|}{u} = \frac{1}{r}$ и уравнение (5) окончательно переписывается так:

$$\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{r \cos \varphi}. \quad (6)$$

Уравнение (6) известно в теории взаимноогibaемых кривых [3] под названием *уравнения Эйлера — Савари*. Оно даёт возможность установить простую зависимость между радиусом кривизны галтели и углом φ .

В дальнейшем во всех выкладках мы будем оперировать *относительными* размерами рейки и нарезаемого колеса, то есть будем считать модуль равным единице.

Обозначим:

a — расстояние от центра закругления головки зуба рейки до её средней линии;

R — радиус закругления головки зуба рейки;

ρ — радиус кривизны галтели в точке, характеризуемой углом φ ;

z — число зубьев нарезаемого колеса.

Из уравнения (6) имеем (см. рис. 1).

$$\frac{1}{\frac{a}{\cos \varphi} + R - \rho} - \frac{1}{a} = \frac{2}{z \cos \varphi},$$

откуда:

$$\rho = \frac{a}{\cos \varphi} + R - \frac{az \cos \varphi}{z \cos^2 \varphi + 2a} \quad (7)$$

У стандартной рейки, ГОСТ 3058-45 $a = 0,87$ $R = 0,38$.

Угол φ в уравнении (7) изменяется от 0 до 70° в случае нарезания колеса без подреза.

При $\varphi = 0$ получается радиус кривизны галтели в точке сопряжения её с окружностью впадин (рис. 2). При $\varphi = 70^\circ$ получается радиус кривизны галтели в точке сопряжения её с эвольвентной частью профиля зуба.

В случае нарезания колеса с подрезанными зубьями угол φ будет изменяться от 0° до $\varphi > 70^\circ$, причём значение φ для верхнего предела будет определяться величиной подреза. Так как подрезанные зубья не рекомендуется применять, то на исследовании этого вопроса не будем останавливаться.

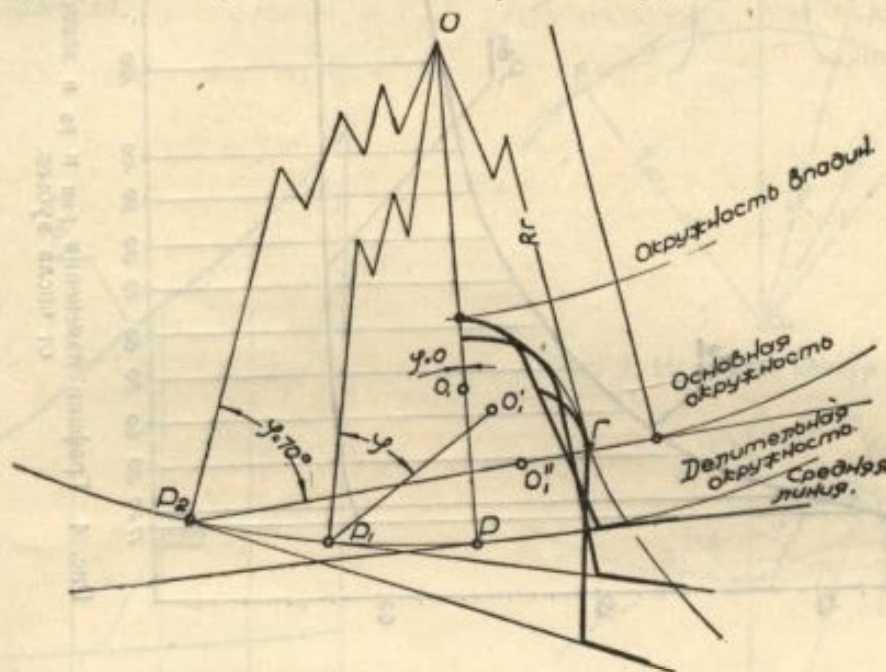


Рис. 2. Исходный контур реечного инструмента обкатывает нарезаемое колесо.

На рис. 3 построены графики изменения радиуса кривизны галтели колёс, нарезанных вышеуказанной стандартной рейкой и имеющих $z = 20$ и $z = 40$.

По построенным таким образом графикам можно найти средний радиус кривизны, который, по мнению одних авторов [2], и нужно принимать при определении коэффициента концентрации. Другие авторы [4] считают, что при определении коэффициента концентрации необходимо пользоваться значением радиуса кривизны галтели в точке сопряжения её с окружностью впадин, то есть минимальным радиусом кривизны переходной кривой.

Из уравнения (7) при $\varphi = 0$ получаем:

$$\rho_{\text{вп}} = a + R - \frac{az}{z + 2a}. \tag{8}$$

На рис. 4 показан график изменения $\rho_{\text{вп}}$ в зависимости от чисел зубьев на нарезаемых колесах. Из графика видим, что $\rho_{\text{вп}}$ с увеличением числа зубьев уменьшается и при $z = \infty$ относительный радиус кривизны $\rho_{\text{вп}} = 0,38$. На том же рисунке показан график изменения радиуса кривизны ρ_a переходной кривой в точке сопряжения её с эвольвентной частью профиля зуба. Построение последнего графика выполнено по уравнению (7) при $\varphi = 70^\circ$.

Если реечным инструментом нарезать положительное или отрицательное колесо, то есть нестандартное колесо, то изменение радиуса кривизны галтели такого колеса определится по формуле:

$$\rho = \frac{a - \xi}{\cos \varphi} + R - \frac{(a - \xi) z \cos \varphi}{z \cos^2 \varphi + 2(a - \xi)}, \tag{9}$$

где:

ξ — коэффициент смещения режущего инструмента.

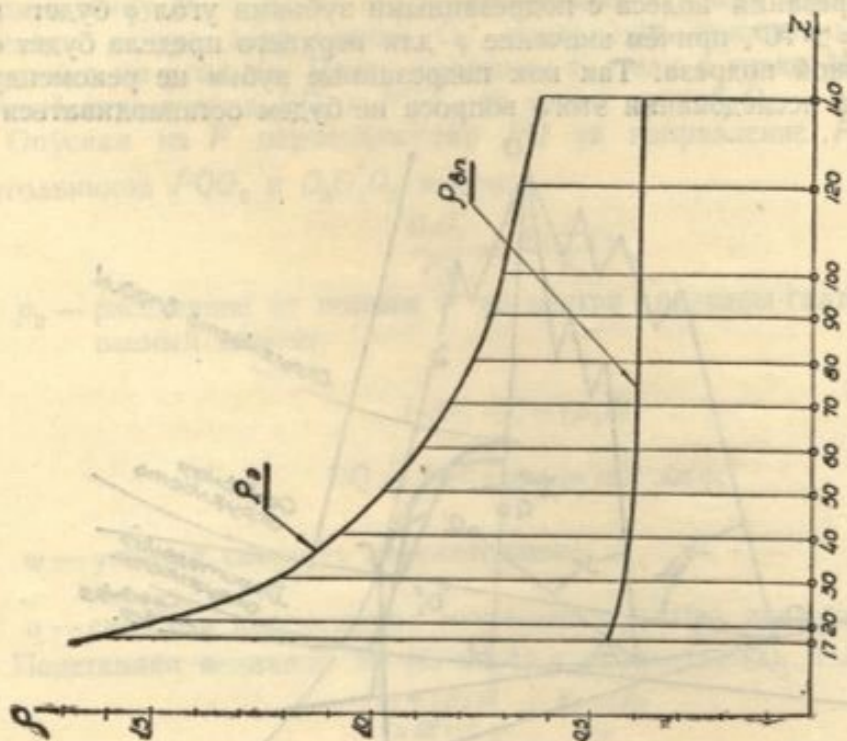


Рис. 4. Графики изменения r_{ap} и r_a в зависимости от числа зубьев.

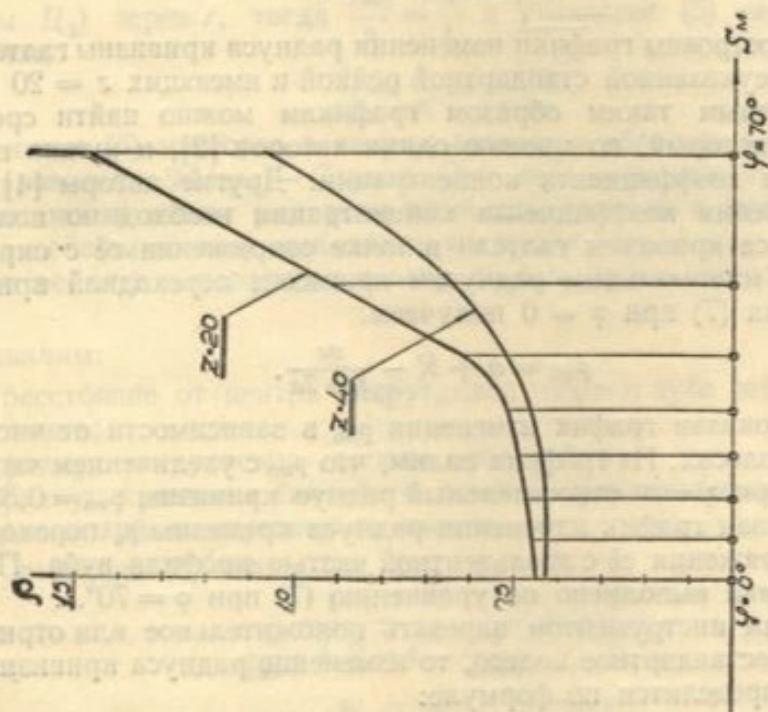


Рис. 3. Графики изменения радиуса кривизны переходной кривой колёс с числом зубьев $z = 20$ и $z = 40$.

На рис. 5 показаны графики изменения $\rho_{вп}$ и ρ_{ϕ} при изменении чисел зубьев от 17 до 9. При вычислении $\rho_{вп}$ и ρ_{ϕ} принимались минимальные коэффициенты смещения, обеспечивающие отсутствие подрезания.

На рис. 2 точка сопряжения галтели с эвольвентной частью профиля зуба обозначена через Γ . Расстояние этой точки до центра колеса обычно обозначают через R_r и называют его радиусом галтели.

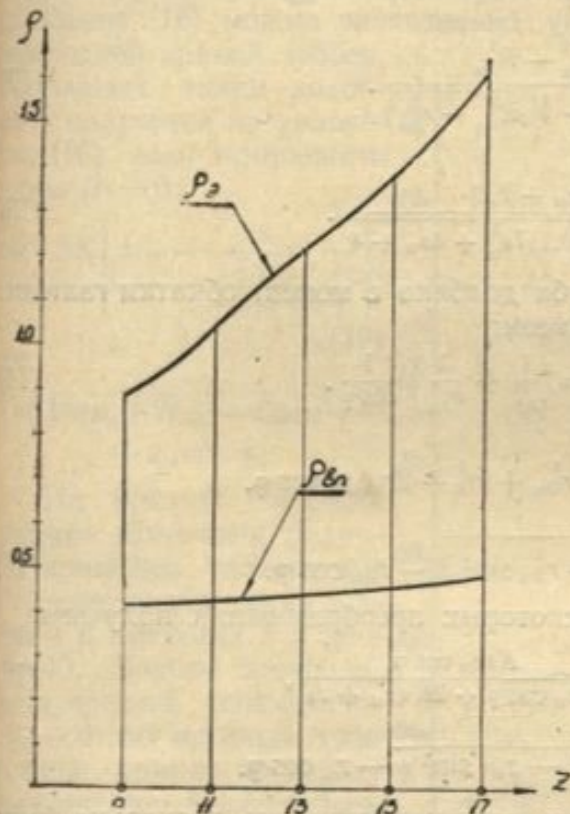


Рис. 5. То же для колёс с числом зубьев 9—17.

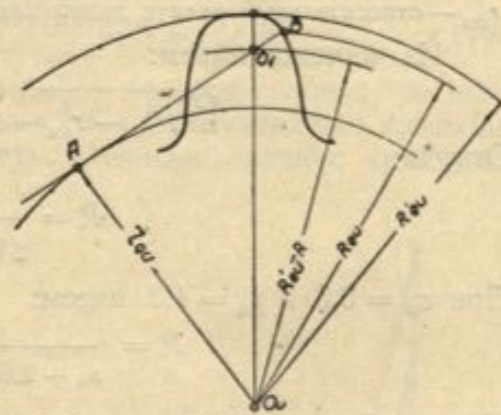


Рис. 6. Исходный контур долбяка.

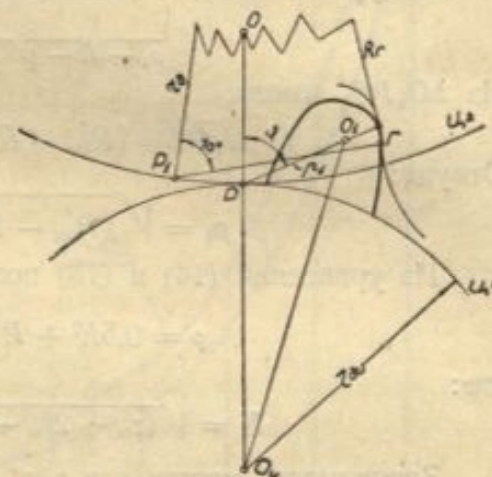


Рис. 7. Исходный контур долбяка обкатывает нарезаемое колесо.

Существуют взгляды [5], что опасное сечение зуба при работе на изгиб совпадает с окружностью радиуса R_r .

Из треугольника $O\Gamma P_2$ находим величину относительного радиуса галтели R_r :

$$R_r = \sqrt{\frac{z^2}{4} + \left(\frac{a}{\cos 70^\circ} + R\right)^2} - z \left(\frac{a}{\cos 70^\circ} + R\right) \cos 70^\circ. \quad (10)$$

Для принятой нами стандартной рейки уравнение (10) принимает такой простой вид:

$$R_r = \frac{1}{2} \sqrt{z^2 - 4z + 34}. \quad (11)$$

В случае нарезания нестандартного колеса в уравнение (10) вместо a нужно поставить $a - \xi$.

Рассмотрим зубчатые колёса, нарезанные долбяком. Исходный расчётный контур долбяка показан на рис. 6, ГОСТ 322-41.

Обозначим:

R'_{ϕ} — относительный радиус выступов долбяка;

R_{ϕ} — относительный радиус окружности долбяка, с которой начинается закругление его головок;

R — относительный радиус закругления головок долбяка;
 r_{ou} — относительный радиус основной окружности долбяка;
 z_u — число зубьев долбяка;
 z — число зубьев нарезаемого колеса;
 r_{∂} — относительный радиус делительной окружности нарезаемого колеса;
 $r_{\partial u}$ — относительный радиус делительной окружности долбяка.

Из чертежа имеем:

$$\sqrt{R_{cu}^2 - r_{ou}^2} - R = \sqrt{(R'_{cu} - R)^2 - r_{ou}^2}$$

Откуда:

$$R = \frac{R_{cu}^2 - R_{cu}^2}{2(R'_{cu} - \sqrt{R_{cu}^2 - r_{ou}^2})} \quad (12)$$

При $c_u = 0,3$ и $f_u = 1,3$ имеем:

$$R = \frac{0,3(z_u + 2,3)}{z_u + 2,6 - \sqrt{0,117z_u^2 + 4z_u + 4}} \quad (13)$$

На рис. 7 показано одно положение зуба долбяка в момент обкатки галтели. По уравнению Эйлера — Савари имеем:

$$\frac{1}{\rho_1 + R - \rho} - \frac{1}{\rho_1} = \left(\frac{1}{r_{\partial}} + \frac{1}{r_{\partial u}} \right) \frac{1}{\cos \varphi} \quad (14)$$

Из $\Delta O_u P O_1$ имеем:

$$\overline{O_u O_1}^2 = (R'_{cu} - R)^2 = r_{\partial u}^2 + \rho_1^2 + 2r_{\partial u} \rho_1 \cos \varphi$$

Откуда:

$$\rho_1 = \sqrt{(R'_{cu} - R)^2 - r_{\partial u}^2 \sin^2 \varphi} - r_{\partial u} \cos \varphi \quad (15)$$

Из уравнений (14) и (15) после некоторых преобразований получаем:

$$\rho = 0,5K + R - \frac{Kz z_u \cos \varphi}{2z z_u \cos \varphi + 2K(z_u + z)} \quad (16)$$

где:

$$K = \sqrt{(z_u + 2f_u - 2R)^2 - z_u^2 \sin^2 \varphi} - z_u \cos \varphi$$

Зависимость между ρ и φ в данном случае получилась несколько более сложная, чем в случае реечного инструмента. Но если нас интересует лишь радиус кривизны галтели в точке сопряжения её с окружностью впадины (минимальный радиус кривизны), то уравнение значительно упростится.

При $\varphi = 0$ уравнение (16) даёт:

$$\rho_{\text{вп}} = f_u - \frac{z z_u (f_u - R)}{z z_u + 2(z_u + z)(f_u - R)} \quad (17)$$

Приравнивая в этом уравнении $z_u = \infty$, получим:

$$\rho_{\text{вп}} = f_u - \frac{z(f_u - R)}{z + 2(f_u - R)}$$

что совпадает с уравнением (8), выведенным непосредственно для реечного инструмента.

Если долбяком нарезается смещенное (нестандартное) колесо, либо он смещается для получения неплотного зацепления, припусков на доводку зубьев, то в уравнениях (14) и (15) вместо радиусов делительных окружностей нужно подставить радиусы начальных окружностей, которые, как известно, получаются умножением радиусов делительных окружностей на отношение

$$\frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}$$

где:

α — угол зацепления при смещенном станочном зацеплении.

Радиус галтели R_r определяется из треугольника $OP_1\Gamma$ (рис. 7).

$$R_r = \sqrt{r_0^2 + (\rho_1 + R)^2 - 2r_0(\rho_1 + R)\cos 70^\circ}, \quad (18)$$

где:

$$\rho_1 \text{ имеет значение, полученное из уравнения (15) при } \varphi = 70^\circ. \quad (15)$$

В случае долбяков, не имеющих скруглений у вершин головок, то есть долбяков, у которых эвольвентная часть пересекается с окружностью головок, уравнение (16) можно значительно упростить. Очевидно, радиус кривизны переходной кривой зубьев, нарезанных таким долбяком, получится из уравнения (16), если приравнять в нем $R = 0$:

$$\rho = 0,5K \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{K(z_u + z)}{z_u z \cos \varphi}} \right]; \quad (19)$$

где:

$$K = \frac{\sqrt{(z_u + 2f_u)^2 - z_u^2 \sin^2 \varphi} - z_u \cos \varphi}{z_u}$$

На рис. 8 показаны графики изменения радиусов кривизны галтели колёс, нарезанных таким долбяком и имеющих $z = 20$ и $z = 40$. Долбяк предполагался средней изношенности, поэтому профиль зуба долбяка принят по исходному сечению. Число зубьев долбяка $z_u = 25$, коэффициент высоты головки $f_u = 1,3$.

Из графиков видим, что с увеличением числа зубьев на нарезаемом колесе радиусы кривизны переходной кривой соответственно уменьшаются. Для рейки радиус кривизны переходной кривой определится по уравнению, полученному из (19), если приравнять в нём $z = \infty$:

$$\rho = 0,5K \left[1 - \frac{1}{1 - \frac{K}{z_u \cos \varphi}} \right]. \quad (20)$$

Минимальный радиус кривизны переходной кривой будет у рейки в точке сопряжения переходной кривой с прямой впадины.

При $\varphi = 0$, $K = z_u + 2f_u - z_u = 2f_u$ и уравнение (20) даёт:

$$\rho_{\min} = f_u \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{2f_u}{z_u}} \right).$$

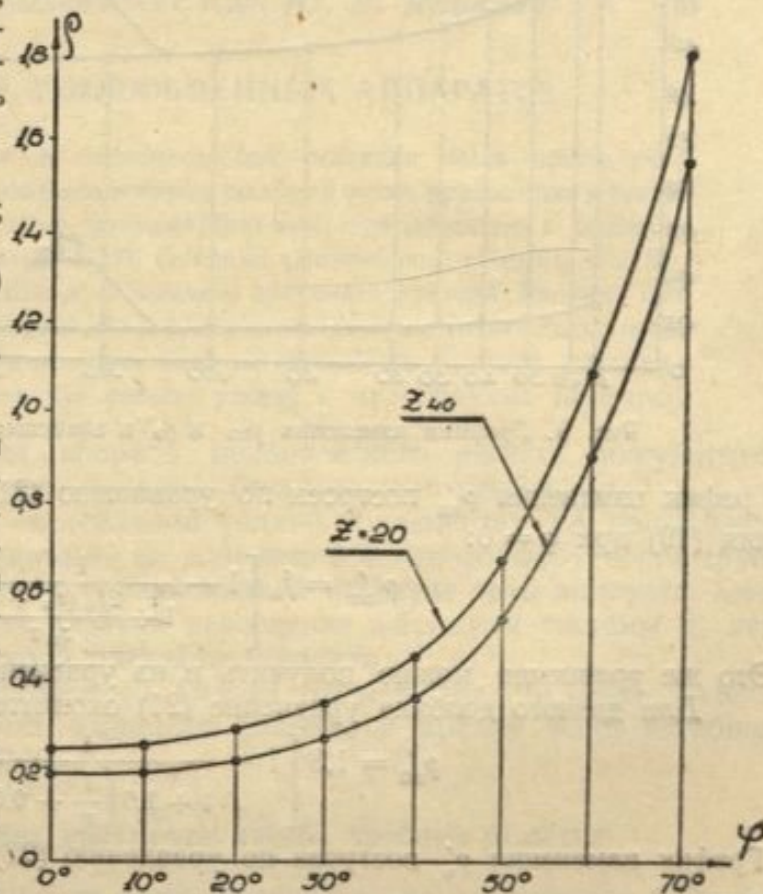


Рис. 8. График изменения радиуса кривизны переходной кривой зуба, нарезанного долбяком, при $z = 20$ и $z = 40$.

При выбранном долбьяке минимальный относительный радиус кривизны переходной кривой профиля рейки будет равен:

$$\rho_{\min} = 1,3 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{2,6}{25}} \right) = 0,127.$$

На рис. 9 показаны графики изменения $\rho'_{\text{вп}}$ и ρ'_s в зависимости от числа зубьев на нарезаемых колёсах тем же долбьяком.

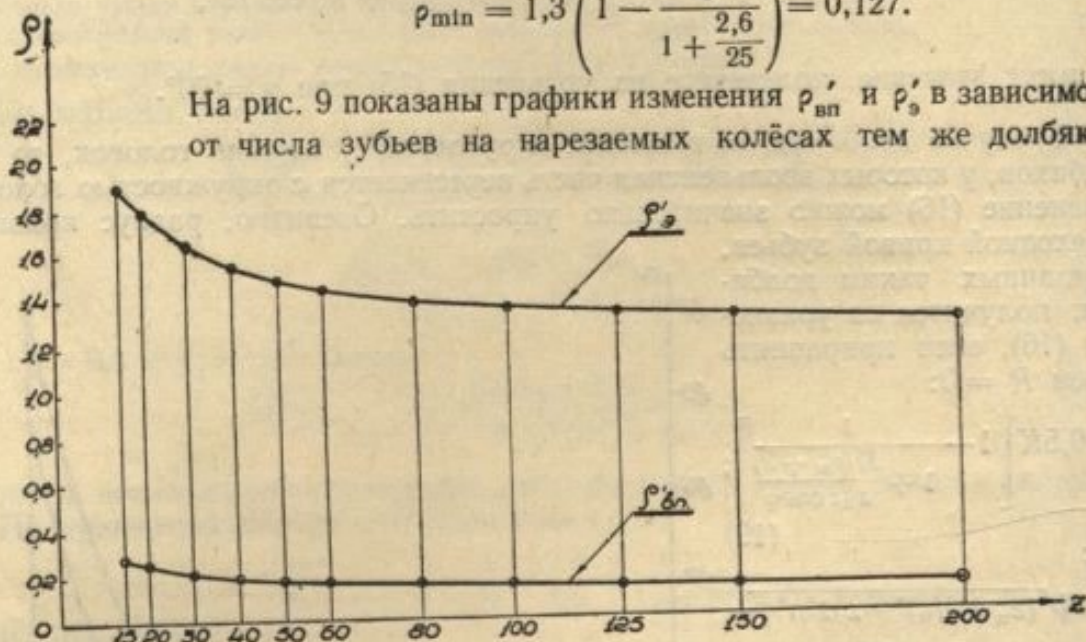


Рис. 9. Графики изменения $\rho'_{\text{вп}}$ и ρ'_s в зависимости от числа зубьев.

График изменения $\rho'_{\text{вп}}$ построен по уравнению (21), полученному из уравнения (19) при $\varphi = 0$:

$$\rho'_{\text{вп}} = f_u \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{2f_u(z_u + z)}{z_u z}} \right]. \quad (21)$$

Это же уравнение можно получить и из уравнения (17), приравняв $R = 0$. Для данного долбьяка уравнение (21) окончательно переписывается так:

$$\rho'_{\text{вп}} = 1,3 \left[1 - \frac{1}{1 + 2,6 \left(\frac{1}{z} + 0,04 \right)} \right].$$

График изменения ρ'_s построен по уравнению (22), полученному из (19) при $\varphi = 70^\circ$.

При $z_u = 25$ и $f_u = 1,3$.

Имеем: $K = \sqrt{(z_u + 2f_u)^2 - z_u^2 \sin^2 70^\circ} - z_u \cos 70^\circ = 5,88$,

$$\rho'_s = 2,94 \left[1 - \frac{1}{1 + 17,2 \left(\frac{1}{z} + 0,04 \right)} \right]. \quad (22)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. «Машиностроение». Энциклопедический справочник, т. II, Москва, Гос. научно-техническое изд. машиностроительной литературы, 1948.
2. ЦНИИТМАШ, книга 13. Теория и расчёт зубчатых передач и подшипников скольжения. Машгиз, 1948. Статья кандидата технических наук М. С. Полоцкого «Исходный и рабочий контуры зубчатой рейки».
3. И. И. Артоболевский. Теория механизмов и машин. Изд. II, Москва, Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1951.
4. ЛОНИТОМАШ, книга 13. Теория и расчёт зубчатых колёс. МАШГИЗ, 1949. «Статья доцента, кандидата технических наук В. Д. Андожского, «Определение напряжений в корне зубцов шестерён».
5. А. В. Осипин. Расчёт на прочность зубьев шестерён коробок передач автомобилей. Сборник института машиноведения Академии наук СССР, 1944.