ТРУДЫ ХАРЬКОВСКОГО АВИАЦИОННОГО ИНСТИТУТА

Вып. 20 1960

В. Н. ЕРШОВ

К ВОПРОСУ О МИНИМУМЕ ДИССИПАЦИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

1. В гидравлике русловых потоков (см. например [1]) при определении наблюдаемых форм движения иногда применяется принцип минимума гидравлических сопротивлений (минимума диссипации механической энергии). Принцип минимума сопротивления применяется и при решении других инженерных задач (теория форсунок и др.).

Этот принцип в некоторых случаях позволяет получить решение вопроса о движении вязкой жидкости. Так, например, рассмотрим задачу о распределении скоростей в поперечном сечении прямоосной бесконечно длинной круглой трубы при стационарном ламинарном течении.

Работа, затрачиваемая на преодоление гидравлических сопротивлений в трубе длиною l, определяется выражением

$$L_{\text{г}} = 2\pi l \int_0^R V r \frac{d\tau}{dr} dr.$$

Находим условие минимума затраченной работы при заданной величине секундного расхода

$$Q = 2\pi \int_0^R V r\, dr,$$

для чего записываем уравнение Эйлера вариационного исчисления, которое принимает вид

$$\mu \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dV}{dr} + \lambda = 0.$$

После интегрирования получим

$$\frac{dV}{dr} = \frac{\lambda}{\mu} r + \frac{C}{r},$$

где константа C определяется условием равенства нулю производной от скорости по радиусу на оси трубы ($r=0$).

После второго интегрирования получим

$$V = \frac{\lambda}{2\mu} r^2 + D,$$

где константа D определяется из условия равенства нулю скорости около стенок трубы ($r=R$).

Заданная величина секундного расхода позволяет определить коэффициент λ, и тогда

$$V = 2 \frac{Q}{\pi R^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] = 2 V_{\text{ср}} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right],$$

т. е. получаем параболическое распределение скоростей в круглой цилиндрической трубе при ламинарном режиме течения.

Совершенно аналогично решаются задачи о движении между двумя плоскими стенками, о движении потока вдоль одной плоской стенки и др.

2. В 1953 году С. Корсин опубликовал заметку [4], в которой пишет, что Миликен в 1929 году показал возможность получения распределения скоростей в поперечном сечении круглой трубы при ламинарном движении из условия минимума затрат механической энергии.

Далее автор заметки, без каких-либо ссылок на теорему Гельмгольца, поясняющую результат Миликена, показывает возможность применения вариационного принципа минимума сопротивлений и на случай турбулентного течения между двумя плоскими стенками. С этой целью С. Корсин записывает вариационное условие экстремума механической энергии

$$\delta \int_{-h/2}^{h/2} \tau \frac{d\bar{V}}{dy} dy = 0,$$

где τ — касательные напряжения, зависящие только от ординаты y,

h — расстояние между стенками,

$\bar{V}$ — осередненная скорость. При заданном расходе

$$Q = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \bar{V} dy$$

решается обычная изопериметрическая задача вариационного исчисления. Решение приводит к дифференциальному уравнению одномерного движения вязкой жидкости между плоскими границами.

3. Задача о движении ламинарного потока при отсутствии сил инерции впервые была решена Гельмгольцем. В 1868 году он показал [2], что при ламинарном потоке, возникающем под действием стационарных сил, имеющих однозначный потенциал, устанавливается движение, отвечающее вариационному принципу минимума диссипации механической энергии. При этом движение, отвечающее условию минимума диссипации, есть в то же время единственно возможной формой, удовлетворяющей дифференциальным уравнениям ламинарного движения при отсутствии сил инерции.

Возникает вопрос о возможности обоснования справедливости принципа минимума диссипации механической энергии для турбулентных течений по аналогии с доказательством теоремы Гельмгольца, приводимым Г. Ламбом [2]. С этой целью ниже приводится обобщение теоремы Гельмгольца на случай турбулентного течения в простейших предположениях о справедливости прямой пропорциональности между тензорами скоростей деформаций и напряжений, а также о зависимости коэффициента пропорциональности между этими тензорами μ', для течения с заданными граничными условиями, только от координат рассматриваемой точки пространства. Такие допущения безусловно не позволяют рассматривать все нижеприведенные рассуждения как строгое доказательство, но они не выходят за рамки полуэмпирической теории турбулентности, которая применяется при решении большинства инженерных задач.

Доказательство теоремы Гельмгольца для ламинарного течения основывается на рассмотрении уравнений Навье-Стокса, предполагающих постоянство коэффициента вязкости для всей массы потока. Поэтому, даже допуская справедливость гипотезы о линейной связи между тензорами скоростей деформаций осередненного движения и турбулентными напряжениями, нельзя непосредственно обобщить эти рассуждения на случай турбулентного течения.

С целью обобщения теоремы Гельмгольца следует рассматривать дифференциальные уравнения движения в форме уравнений Рейнольдса [3], которые содержат члены, определяющие дополнительные турбулентные напряжения. Однако можно показать, что уравнения осередненного турбулентного движения могут быть записаны и в форме уравнений в напряжениях

$$\rho \frac{d\overline{V}}{dt} = \rho \overline{F} + \operatorname{div} P = \rho \overline{F} + \frac{\partial \overline{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \overline{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \overline{p}_z}{\partial z}$$

где тензор P и его компоненты $\overline{p}_x, p_y, p_z$ следует рассматривать возникающими в результате одновременного проявления вязкостных и турбулентных напряжений.

Таким образом, уравнения турбулентного движения формально совпадают с уравнениями для ламинарного течения [3], только коэффициент пропорциональности μ' в отличие от коэффициента вязкости μ не сохраняет постоянного значения для всей массы потока. При этом следует иметь в виду, что в допущениях Л. Прандтля и Т. Кармана для турбулентного движения можно принять, что величина μ' является только функцией координат в потоке с заданными граничными условиями.

Рассматривая движение несжимаемой жидкости в объеме τ, ограниченном некоторой произвольной поверхностью S, который характеризуется стационарным полем скоростей $\overline{V}$, запишем полную величину диссипации механической энергии в объеме τ в единицу времени

$$\int_\tau D\, d\tau,$$

где

$$D = \frac{\partial \overline{V}}{\partial x} \overline{p}_x + \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \overline{p}_y + \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \overline{p}_z . \tag{1}$$

Теперь предположим, что в том же объеме (при неизменной граничной поверхности S) возможно иное стационарное движение с полем скоростей $\overline{V} + \delta \overline{V}$, удовлетворяющее только уравнению неразрывности. При этом отметим, что допущение о неизменности граничной поверхности при варьировании движения исключает возможность использования полученных результатов для движения жидкости со свободной поверхностью.

Диссипация энергии в варьированном движении, очевидно, равна

$$\int_\tau D'\, d\tau = \int_\tau D\, d\tau + \int_\tau \left(\frac{\partial \delta \overline{V}}{\partial x} \overline{p}_x + \frac{\partial \delta \overline{V}}{\partial y} \overline{p}_y + \frac{\partial \delta \overline{V}}{\partial z} \overline{p}_z \right) d\tau +$$

$$+ \int_\tau \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial x} \delta \overline{p}_x + \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \delta \overline{p}_y + \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \delta \overline{p}_z \right) d\tau + \int_\tau D''\, d\tau, \tag{2}$$

где

$$\int_\tau D''\, d\tau = \int_\tau \left(\frac{\partial \delta \overline{V}}{\partial x} \delta \overline{p}_x + \frac{\partial \delta \overline{V}}{\partial y} \delta \overline{p}_y + \frac{\partial \delta \overline{V}}{\partial z} \delta \overline{p}_z \right) d\tau$$

— диссипация механической энергии в потоке, возмущающем начальное движение, есть существенно положительная величина.

Рассматривая подынтегральные выражения второго и третьего интегралов правой части (2), можно показать, что имеет место равенство

$$\frac{\partial\delta\overline{V}}{\partial x}\overline{p}_x+\frac{\partial\delta\overline{V}}{\partial y}\overline{p}_y+\frac{\partial\delta\overline{V}}{\partial z}\overline{p}_z=\frac{\partial\overline{V}}{\partial x}\delta\overline{p}_x+\frac{\partial\overline{V}}{\partial y}\delta\overline{p}_y+\frac{\partial\overline{V}}{\partial z}\delta\overline{p}_z\,.$$

Для этого достаточно подставить значения $\overline{p}_x$, $\overline{p}_y$, $\overline{p}_z$, $\overline{V}$ и их вариации, допуская, что при варьировании коэффициент пропорциональности μ^1 сохраняет свое значение для каждой точки пространства (степень турбулентности потока в каждой точке пространства при варьировании движения сохраняется).

Тогда уравнение (2) принимает вид

$$\int\limits_\tau D'd\tau=\int\limits_\tau D\,d\tau+2\int\limits_\tau\left(\frac{\partial\delta\overline{V}}{\partial x}\overline{p}_x+\frac{\partial\delta\overline{V}}{\partial y}\overline{p}_y+\frac{\partial\delta\overline{V}}{\partial z}\overline{p}_z\right)d\tau+\int\limits_\tau D''d\tau\,. \quad (3)$$

Интегрируя по частям второй интеграл правой части (3), получим

$$\int\limits_\tau\left[\frac{\partial}{\partial x}(\delta\overline{V}\,\overline{p}_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\delta\overline{V}\,\overline{p}_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\delta\overline{V}\,\overline{p}_z)\right]d\tau-\int\limits_\tau\delta\overline{V}\left(\frac{\partial\overline{p}_x}{\partial x}+\frac{\partial\overline{p}_y}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\overline{p}_z}{\partial z}\right)d\tau.$$

В свою очередь на основании формулы Остроградского, первый интеграл этой разности принимает вид

$$\int\limits_S(\delta\overline{V}\,\overline{p}_n)dS \quad (4)$$

и обращается в нуль при условии, что на варьированные движения наложено ограничение о равенстве нулю вариаций скорости на ограничивающей поверхности S.

В этом случае получим

$$\int\limits_\tau D'\,d\tau=\int\limits_\tau D\,d\tau-2\int\limits_\tau\delta\overline{V}\left(\frac{\partial\overline{p}_x}{\partial x}+\frac{\partial\overline{p}_y}{\partial y}+\frac{\partial\overline{p}_z}{\partial z}\right)d\tau+\int\limits_\tau D''d\tau. \quad (5)$$

Теперь предположим, что движение с полем скоростей $\overline{V}$ осуществляется при отсутствии сил инерции в потенциальном поле массовых сил, т. е. описывается дифференциальными уравнениями вида

$$\rho\frac{d\overline{V}}{dt}=0=-\operatorname{grad}\Pi+\frac{\partial\overline{p}_x}{\partial x}+\frac{\partial\overline{p}_y}{\partial y}+\frac{\partial\overline{p}_z}{dz}\,;$$

тогда второй интеграл правой части (5) запишется в форме

$$-2\rho\left[\int\limits_\tau\operatorname{div}(\Pi\delta\overline{V})\,d\tau-\int\limits_\tau\Pi\operatorname{div}(\delta\overline{V})\,d\tau\right].$$

Предполагая кинематическую возможность варьированного движения, запишем

$$\operatorname{div}(\delta\overline{V})=0$$

и, следовательно,

$$\int\limits_\tau\Pi\operatorname{div}(\delta\overline{V})\,d\tau=0. \quad (6)$$

Далее

$$\int\limits_\tau\operatorname{div}(\Pi\delta\overline{V})\,d\tau=\int\limits_S\Pi(n\delta\overline{V})\,dS=0$$

аналогично интегралу (4).

Тогда

$$\int\limits_{\tau} D'\,d\tau = \int\limits_{\tau} D\,d\tau + \int\limits_{\tau} D''\,d\tau$$

и диссипация механической энергии во всяком вариированном, по отношению к стационарному безынерционному, движении будет больше, т. е. стационарное движение при отсутствии инерционных сил, отвечающее уравнениям движения, одновременно отвечает и условию минимума диссипации механической энергии, что и требовалось доказать.

Таким образом, минимум затрат механической энергии при движении внутри круглой цилиндрической трубы или между двумя параллельными стенками есть необходимый результат теоремы Гельмгольца.

Можно сказать, что условию минимума диссипации механической энергии отвечают и некоторые формы стационарного движения вязкой жидкости при действии инерционных сил. В этом случае имеют место уравнения движения в виде

$$\rho(\overline{V}\,\mathrm{grad})\,\overline{V} = -\rho\,\mathrm{grad}\,\Pi + \frac{\partial\overline{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial\overline{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial\overline{p}_z}{\partial z}.$$

Тогда (5) можно написать в форме

$$\int\limits_{\tau} D'\,d\tau = \int\limits_{\tau} D\,d\tau - 2\rho\int\limits_{\tau}\delta\overline{V}\left[(\overline{V}\,\mathrm{grad})\,\overline{V} + \mathrm{grad}\,\Pi\right]d\tau + \int\limits_{\tau} D''\,d\tau. \qquad (7)$$

Имея в виду соотношение

$$(\overline{V}\,\mathrm{grad})\overline{V} = \mathrm{grad}\,\frac{V^2}{2} - [\,\overline{V}\times\mathrm{rot}\,\overline{V}],$$

перепишем второй интеграл правой части (7)

$$\int\limits_{\tau}\delta\overline{V}\,\mathrm{grad}\left(\frac{V^2}{2} + \Pi\right)d\tau - \int\limits_{\tau}\delta\overline{V}\,[\overline{V}\times\mathrm{rot}\,\overline{V}]\,d\tau.$$

В свою очередь

$$\int\limits_{\tau}\delta\overline{V}\,\mathrm{grad}\left(\frac{V^2}{2} + \Pi\right)d\tau = \int\limits_{\tau}\mathrm{div}\left[\left(\frac{V^2}{2} + \Pi\right)\delta\overline{V}\right]d\tau - \int\limits_{\tau}\left(\frac{V^2}{2} + \Pi\right)\mathrm{div}\,\delta\overline{V}\,d\tau,$$

где первый и второй интегралы правой части равняются нулю аналогично (4) и (6) соответственно.

Тогда (7) запишется в форме

$$\int\limits_{\tau} D'\,d\tau = \int\limits_{\tau} D\,d\tau + 2\rho\int\limits_{\tau}\delta\overline{V}\,[\overline{V}\times\mathrm{rot}\,\overline{V}]\,d\tau + \int\limits_{\tau} D''\,d\tau. \qquad (8)$$

Второй интеграл правой части (8) обращается в нуль, когда: а) кинематически возможные вариирования движения осуществляются с сохранением направления скорости во всех точках потока (возможно вариирование только изменением модуля вектора скорости); б) направления векторов скорости и вихря совпадают, т. е. в случае так называемого винтового движения жидкости; в) в потоке жидкости завихренность отсутствует.

Таким образом, безынерционное, чисто винтовое или безвихревое установившееся движение вязкой жидкости (как ламинарное, так и турбулентное), удовлетворяющее уравнению движения, одновременно подчиняется и условию минимума диссипации механической энергии.

4. В общем случае движения вязкой жидкости в произвольном объеме форма потока не отвечает минимуму диссипации механической

энергии, что непосредственно вытекает из вывода теоремы Гельмгольца. Поэтому если принцип минимума и справедлив, то он не может применяться для произвольно выбранного объема жидкости (произвольно выбранного участка потока).

ЛИТЕРАТУРА

1. Великанов М. А. Динамика русловых потоков. Т. 2, изд. 3, ГИТТЛ, 1955.

2. Ламб Г. Гидродинамика. ГИТТЛ, М.—Л. 1947, стр. 776—779.

3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. ГИТТЛ М.—Л., 1950, стр. 471—475 и 594—602.

4. Corsin S. Turbulent Chanal Flow from a Variational Principle. J. of the Aeronautical Sciences, 20, Nr. 5, 357 (1953).