

А. Н. АНЮТИН

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЦИРКУЛЯЦИИ ПО ЛОПАТКЕ ТУРБОМАШИНЫ ПРИ НАЛИЧИИ РАДИАЛЬНОГО ЗАЗОРА

Форма движения рабочего тела в межлопаточном канале оказывает существенное влияние на работу ступени турбомашин. В турбинах, например, на расчетных режимах до 50% всех потерь составляют потери, возникающие из-за существования вторичных токов [1], причем перетекание через радиальный зазор дает до 75% потерь от вторичных движений. Анализ явлений, происходящих при перетекании, необходим для учета потерь при расчете, а также с целью проектирования и доводки турбомашин, при которых потери от перетекания сводились бы к минимуму.

### Физическая сущность перетекания через радиальный зазор и применяемые аналитические схемы

Аналитическое изучение какого-либо процесса ставит вопрос о схематизации явления, причем имеют место два критерия, определяющие качество выбранной схемы:

1. Наиболее полное соответствие схемы физической сущности явления, так как лишь в этом случае результаты анализа будут соответствовать реальному процессу.

2. Достаточная простота схемы, что позволяет получить конечные результаты при выкладках, пригодные для практического использования.

В настоящее время наиболее установившимся является рассмотрение рабочего колеса осевой лопаточной машины как некоторой системы крыльев конечного размаха, обтекаемых потоком в пространстве, ограниченном твердой цилиндрической стенкой.

Наличие радиального зазора между лопаткой и кожухом приводит к перетеканию рабочего тела с нижней стороны лопатки на верхнюю в щель между торцом лопатки и кожухом, в результате чего частицы жидкости, проходящие вблизи спинки лопатки, приобретают дополнительное движение, направленное от щели, а частицы жидкости вблизи корытца лопатки — в противоположном направлении, т. е. к щели. На рис. 1 представлены проекции линий тока вблизи от зазора.

Следствием перетекания является возникновение поверхности раздела в следе за лопаткой, пред-

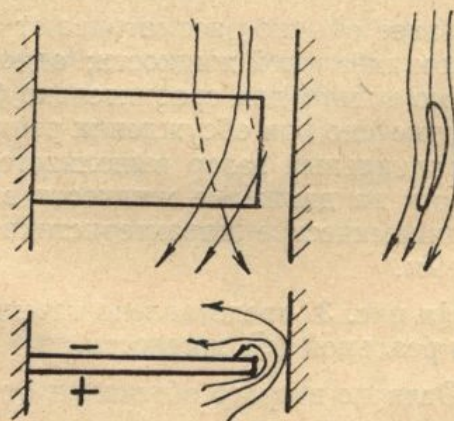


Рис. 1. Схема образования поверхности раздела в следе за лопаткой.

ставляющей не что иное, как систему сбегаящих вихрей, определяющую величину циркуляции в каждом сечении лопатки. Из теории крыла конечного размаха известно, что индуктивное сопротивление оказывается минимальным, если поверхность раздела остается за крылом в виде затвердевшей плоскости. Это предположение допустимо применять и для турбомашин, за лопатками которых образуются поверхности раздела винтообразной формы.

Заметив, что характеристики кольцевой решетки на каждом радиусе соответствуют характеристикам эквивалентной плоской решетки, а также, что влияние перетекания проявляется в наибольшей степени вблизи щели, приходим к выводу, что рассмотрение перетекания через радиальный зазор в турбомашине возможно свести к изучению дополнительного движения за плоской решеткой лопаток, установленных с односторонним зазором между двумя твердыми стенками, причем рассмотрение дополнительного движения необходимо вести в плоскости, перпендикулярной вихревой пелене, сбегаящей с лопатки, как показано на рис. 2.

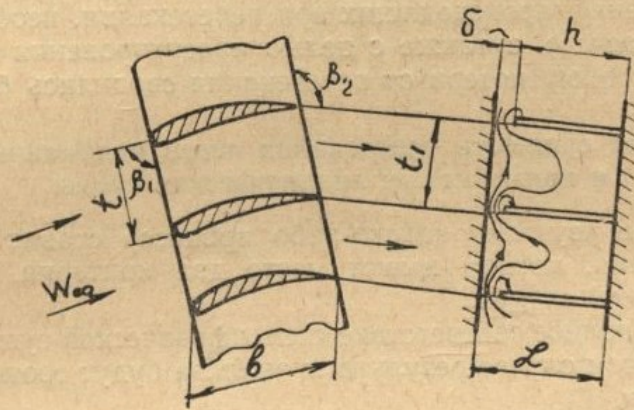


Рис. 2. Расположение расчетной плоскости:

$h$  — высота лопатки,  $\delta$  — радиальный зазор,  $L$  — высота канала,  $b$  — хорда лопатки,  $t$  — шаг решетки,  $t_1$  — приведенный шаг, причем  $t_1 = t \sin \beta_2$ ,  $\beta_1$  — угол на входе в решетку,  $\beta_2$  — угол на выходе из решетки,  $W_\infty$  — относительная скорость невозмущенного потока.

Далее обычно рассматривают обтекание полученной решетки пластины потоком идеальной жидкости; однако, пренебрежение силами вязкости допустимо только для сравнительно больших зазоров, как это было, например, отмечено при обсуждении решения Бетца [2]. В реальных турбомашинах радиальный зазор выполняется относительно малым, и влияние сил вязкости на движение жидкости в районе зазора, а следовательно, и на аэродинамические характеристики лопатки, оказывается весьма значительным.

На рис. 3. представлено течение в районе зазора в случае идеальной (а) и реальной (б) жидкости.

Отличие второго обтекания от первого заключается в следующем:

1) Перетекание жидкости с нижней поверхности на верхнюю происходит с некоторой потерей подного давления, в связи с чем давление на верхней и нижней поверхности концевого профиля не выравнивается, т. е.

подъемная сила на конце лопатки не падает до нуля; количество жидкости, протекающей через зазор, оказывается меньшим, чем при идеальной жидкости для того же начального значения подъемной силы на лопатке.

2) Изменение формы движения связано с образованием завихренной области, характерной для обтекания острых кромок.

Рис. 3в соответствует протеканию через зазор идеальной жидкости при наличии вблизи от спинки лопатки точечного вихря  $\Gamma_b$ , циркуляция которого и координаты выбраны таким образом, чтобы на конце лопатки

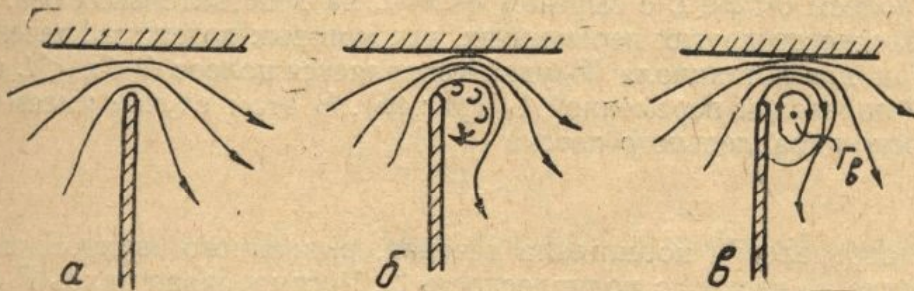


Рис. 3. Обтекание конца лопатки.

не получалось бесконечно больших скоростей. Сравнение рис. 3б и рис. 3в показывает, что форма движения вязкой жидкости в районе щели подобна форме движения идеальной жидкости при наличии вблизи от верхней кромки лопатки некоторого добавочного вихря  $\Gamma_b$ .

Заметим здесь же, что на некотором расстоянии от зазора жидкость вполне может рассматриваться как идеальная, так как уменьшение дополнительных скоростей обуславливает малое изменение полного напора от влияния вязкости.

Таким образом, форма движения вязкой жидкости при перетекании через радиальный зазор может быть представлена из рассмотрения протекания через зазор идеальной жидкости в соответствии со схемой, представленной на рис. 3в. Для практического применения эта схема является слишком сложной, в связи с чем в следующем разделе рассматриваются возможности ее упрощения.

### Исследование потенциального течения через щель в присутствии концевго вихря

Распределение циркуляции по лопатке непосредственно связано с распределением дополнительных скоростей вдоль поверхности лопатки, причем наиболее интересными являются концевые сечения, как наиболее подверженные влиянию перетекания. Проанализируем для случая одиночной

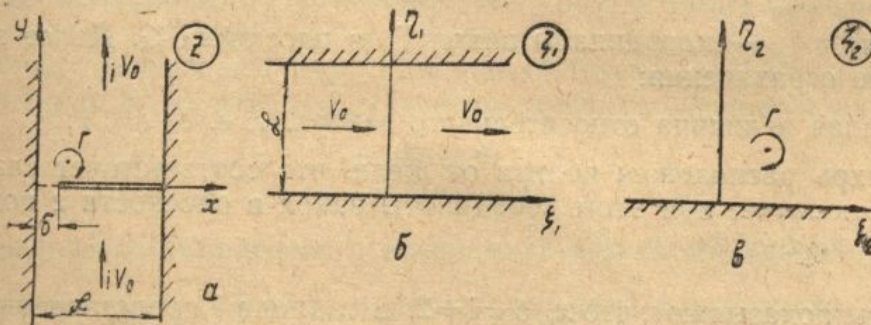


Рис. 4. Определение скорости у конца лопатки.

лопатки (редкая решетка) величину скорости перетекания на конце лопатки; схема, представленная на рис. 4, соответствует таковой на рис. 3в.

Комплексный потенциал течения можно представить как сумму потенциалов  $W_1$ , определяемого потоком, имеющим скорость  $iV_0$  на бесконечности;  $W_2$  определяемого вихрем  $\Gamma_b$  с координатами  $x_b$ ;  $y_b$ , т. е.

$$W = W_1 + W_2. \quad (1)$$

Каждый из потенциалов  $W_1$  и  $W_2$ , очевидно, можно получить, отобразив область полосы  $0 < x < L$  с вырезом  $\delta < x < L$  на действительной оси, на область в плоскости других переменных, для которых потенциал течения известен. Так, для потенциала  $W_1$  удобной является полоса  $0 < \eta_1 < L$  в плоскости комплексной переменной  $\zeta_1$  (рис. 4б). В этом случае имеем потенциал плоско-параллельного потока

$$W_1 = V_0 \zeta_1 \quad (2)$$

Для определения потенциала течения, вызванного вихрем, выгодно отображение на верхнюю полуплоскость  $\zeta_2$ . Рассматривая вихрь  $\Gamma_b$  вместе с зеркально отображенным относительно действительной оси вихрем  $\Gamma_b$ , получим выражение для комплексного потенциала

$$W_2 = \frac{i\Gamma_b}{2\pi} \left[ \ln(\zeta_2 - \zeta_b) - \ln(\zeta_2 - \bar{\zeta}_b) \right]. \quad (3)$$

Используя отображающие функции, приведенные в книге М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата [3], получим в наших координатах

$$\zeta_1 = \frac{2L}{\pi} \operatorname{ar th} \left\{ \sin \frac{\pi\delta}{2L} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi\delta}{2L} - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi z}{2L}} \right\}; \quad (4a)$$

$$\zeta_2 = \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi\delta}{2L} - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi z}{2L}}. \quad (4b)$$

Тогда скорость в плоскости  $z$  определится как

$$\bar{V} = \frac{dW_1}{d\zeta_1} \frac{d\zeta_1}{dz} + \frac{dW_2}{d\zeta_2} \frac{d\zeta_2}{dz}. \quad (5)$$

Учитывая, что на конце лопатки скорость не должна принимать бесконечно больших значений, получаем следующее выражение:

$$V_{z=\delta} = -V_0 \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi\delta}{2L}}{\sin \frac{\pi\delta}{2L}} \frac{2\xi_b}{\xi_b^2 + \eta_b^2}, \quad (6)$$

где  $\xi_b + i\eta_b = \zeta_b$  — координаты вихря  $\Gamma_b$  в плоскости  $\zeta_2$ . Далее вводятся следующие ограничения:

- 1) малая величина относительного зазора, т. е.  $\delta/L \ll 1$ ;
- 2) вихрь расположен вблизи от щели, что соответствует слабой нагрузке на лопатке; при этом координаты вихря в плоскости  $z$  подчинены условиям:  $x_b/L \ll 1$ ;  $y_b/L \ll 1$ .

Опыты показывают, что  $x_b/\delta = 1 \div 2$ . В таблице 1 представлены результаты расчета множителя  $\frac{2\xi_b}{\xi_b^2 + \eta_b^2}$  в формуле (6).

Таблица 1

$y_b / x_b$		0,5	1,0	2,0	5,0	10,0
$\frac{2\xi_b}{\xi_b^2 + \eta_b^2} : \frac{\pi\delta}{L}$	$x_b = \delta$	0,995	0,920	0,938	0,983	0,995
	$x_b = 2\delta$	1,053	0,994	0,985	0,995	0,999

Изучение табличных данных показывает, что, допуская ошибку не выше 8%, можно в любом случае полагать:

$$\frac{2\xi_b}{\xi_b^2 + \eta_b^2} : \frac{\pi\delta}{L} \approx 1.$$

Тогда из формулы (6) получаем значение скорости на конце лопатки для малых  $\delta/L$

$$V_\delta = -V_0 \frac{4L}{\delta} = -\frac{4}{\pi} \frac{q_0}{\delta}. \tag{7}$$

где  $q_0 = V_0 L$  — объемный выход газа через единицу длины щели.

### Выбор аналитической схемы

Ограничиваясь областью сравнительно малых относительных величин зазоров, можно с достаточной степенью точности представить процесс перетекания в виде гидродинамической схемы источника и вихря (со стороны спинки лопатки) и стока (со стороны корытца). Размещение источника по ширине щели должно обеспечить получение скорости перетекания на конце лопатки в соответствии с формулой (9). В наиболее общем случае задача сводится к рассмотрению течения в замкнутом прямоугольнике с размерами  $L$ ;  $t_1$  (рис. 5). Комплексный потенциал течения в указанной области наиболее просто определяется путем отображения внутренности прямоугольника на верхнюю полуплоскость, в которой не представляет затруднения получить составляющие комплексного потенциала течения как от вихря  $\Gamma_b$ , так и от источника  $q_n$  со стоком  $q_c$ . Отметим здесь же очевидное соотношение

$$q_n = -q_c = q. \tag{8}$$

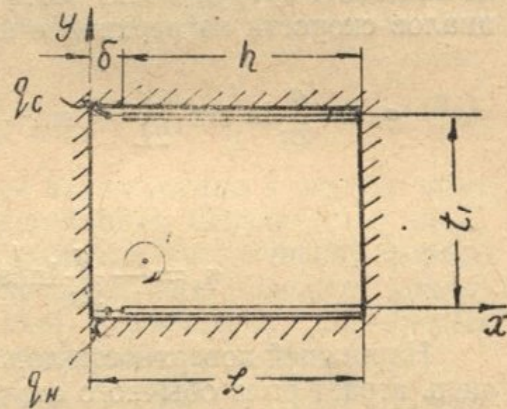


Рис. 5. Общая расчетная схема.

### Распределение комплексного потенциала для схемы одиночной лопатки

Изучим вначале перетекание на одиночной лопатке, что соответствует решетке с большим относительным шагом, когда можно пренебречь влиянием соседних лопаток. При  $t_1 \rightarrow \infty$  прямоугольник, очевидно, переходит в

полуплоскосу  $0 < x < L; y > 0$ , которую можно отобразить на верхнюю полуплоскость (рис. 6) с помощью функции

$$\zeta = 1 - \cos \frac{\pi z}{L} = 2 \sin^2 \frac{\pi z}{2L}. \quad (9)$$

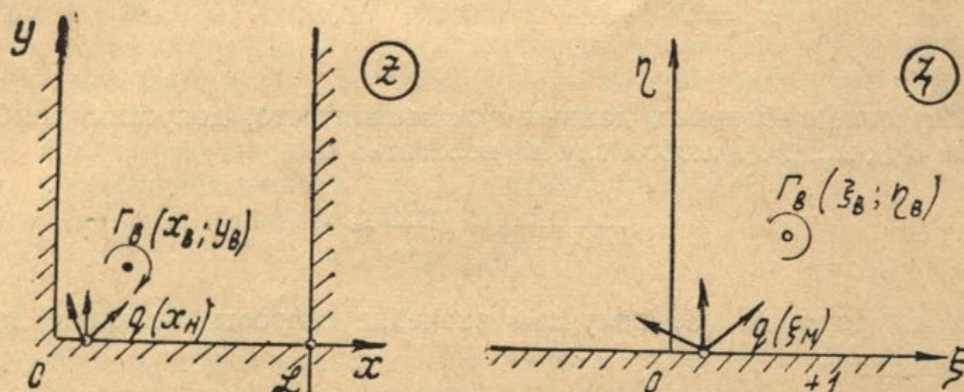


Рис. 6. Расчетная схема одиночной лопатки.

Точкам  $\infty; 0; L$  плоскости  $z$  соответствуют точки  $\infty; 0; 1$  плоскости  $\zeta$ . Участок  $OL$  оси  $x$  представляет в данном случае одиночную лопатку. В верхней полуплоскости  $\zeta$  определение комплексных потенциалов от источника  $q$ , расположенного в точке  $\xi_n$ , и вихря  $\Gamma_v$ , находящегося в точке  $(\xi_v; \eta_v)$ , не вызывает затруднений, поэтому запишем сразу выражение для потенциалов скорости на верхней и нижней поверхности лопатки

$$\varphi_b = \frac{q}{2\pi} \ln \left( \sin^2 \frac{\pi x}{2L} - \sin^2 \frac{\pi x_n}{2L} \right) + \frac{\Gamma_v}{\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{\pi^2 x_v y_v}{2L^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi x}{2L}} \right)$$

$$\varphi_n = -\frac{q}{2\pi} \ln \left( \sin^2 \frac{\pi x}{2L} - \sin^2 \frac{\pi x_n}{2L} \right).$$

На нижней поверхности лопатки никакого завихрения не происходит и щель играет роль обычного стока.

Определение координаты  $x_n$  произведем из условия, при котором скорость на конце лопатки соответствует полученной при исследовании перетекания через торец лопатки (формула 7). Для нижней стороны лопатки, которая находится под действием только стока, условие равенства скоростей запишется в виде

$$\left( \frac{d\varphi_n}{dx} \right)_{x=\delta} = V_\delta = -\frac{4}{\pi} \frac{q_0}{\delta} = -\frac{2}{\pi} \frac{q}{\delta}.$$

Заметив, что мощность источника (стока) равна удвоенному расходу воздуха через щель, т. е.  $q = 2q_0$ , а также полагая

$$\sin \frac{\pi \delta}{2L} \approx \frac{\pi \delta}{2L} \text{ и } \cos \frac{\pi \delta}{2L} \approx 1,$$

получаем

$$\sin^2 \frac{\pi x_n}{2L} = \frac{\pi^2 \delta^2}{8L^2}, \quad (12)$$

или с большой степенью точности при малых относительных зазорах

$$x_n = \frac{\delta}{\sqrt{2}}. \quad (12a)$$

### Определение зависимости между $q$ и $\Gamma_v$

Отсутствие бесконечной скорости на конце лопатки тождественно условию равенства скоростей при  $z=\delta$ , т. е. распределение потенциалов по верхней и нижней сторонам лопатки должно удовлетворять условию

$$\left( \frac{d\varphi_b}{dx} - \frac{d\varphi_n}{dx} \right)_{x=\delta} = 0.$$

Подставляя значения потенциалов из формул (10) и (11), учитывая формулу (12) и заменяя, как и прежде,  $\sin \frac{\pi \delta}{2L}$  величиной  $\frac{\pi \delta}{2L}$ , получаем выражение для отношения  $\Gamma_v/q$

$$\frac{\Gamma_v}{q} = \frac{\delta^2}{x_b y_b} + 4 \frac{x_b y_b}{\delta^2}. \quad (13)$$

Из этого уравнения видно, что отношение  $\Gamma_v/q$  зависит при малой величине зазора не непосредственно от координат вихря  $x_b$  и  $y_b$ , а от произведения этих координат  $x_b y_b$ . Называя далее обобщенной координатой вихря величину  $\frac{2x_b \cdot y_b}{\delta^2} = B$ , получаем из формулы (13)

$$\frac{\Gamma_v}{q} = 2 \left( B + \frac{1}{B} \right). \quad (13a)$$

Для определения величины циркуляции вихря можно в первом приближении применить принцип минимума диссипации механической энергии, часто используемый для отбора наблюдаемой (устойчивой) формы движения. Такова, например, задача о положении косога скачка давления в сверхзвуковом потоке сжимаемого газа. Устойчивому положению скачка соответствует и меньшее приращение энтропии в потоке.

В данном случае минимальная потеря полного напора будет соответствовать наименьшей суммарной величине завихренности вблизи от зазора, т. е. минимальной величине циркуляции  $\Gamma_v$  при данном расходе через щель  $q$ . Из формулы (13a) тотчас получаем величину  $B$  при  $\Gamma_{v \min}$ :

$$B=1,$$

и связь между  $\Gamma_v$  и  $q$  выражается весьма простой зависимостью

$$\Gamma_v = 4q. \quad (13b)$$

Тогда формулы (10), (11) преобразуются к виду

$$\varphi_b = \frac{q}{2\pi} \left\{ \ln \left( \sin^2 \frac{\pi x}{2L} - \frac{\pi^2 \delta^2}{8L^2} \right) + 8 \operatorname{ar} \operatorname{ctg} \left[ \left( \frac{\pi \delta}{2L} \right)^2 \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi x}{2L}} \right] \right\}; \quad (10a)$$

$$\varphi_n = -\frac{q}{2\pi} \ln \left( \sin^2 \frac{\pi x}{2L} - \frac{\pi^2 \delta^2}{8L^2} \right). \quad (11a)$$

### Распределение циркуляции вдоль лопатки

Изменение циркуляции по высоте лопатки объясняется образованием системы сбегających вихрей в виде вихревой пелены (рис. 7) с интенсивностью  $\gamma(x)$ , равной разности компонентов скорости, направленных вдоль лопатки, при переходе через пелену

$$\gamma(x) = (V_v - V_n)_x = \frac{d\varphi_v}{dx} - \frac{d\varphi_n}{dx}.$$

Циркуляция в любом сечении  $x$  определяется выражением

$$\Gamma_x = \Gamma_L - \int_x^L \gamma(x) dx,$$

где  $\Gamma_L$  — циркуляция у корня лопатки, устанавливающаяся при наличии зазора. Подставим значение  $\gamma(x)$  в предыдущую формулу:

$$\Gamma_x = \Gamma_L - (\varphi_L - \varphi_x)_v + (\varphi_L - \varphi_x)_n. \quad (14)$$

### Влияние индуктивного скоса потока

Принцип отвердевания вихревой пелены подразумевает постоянности скорости скоса  $W_n$  по длине лопатки. В рассматриваемом случае относительного движения (неподвижная пелена), очевидно, имеет место соотношение (рис. 3a)

$$W_n = -\frac{1}{2} V_0,$$

так как скос на лопатке вдвое меньше скоса на бесконечности. Выражая  $V_0$  через эквивалентный источник,

$$W_n = -\frac{q}{4L}.$$

Тогда, принимая гипотезу плоского течения в каждом сечении крыла, можно написать, используя уравнение связи между  $\Gamma$  и  $C_y$ :

$$\Delta\Gamma = \frac{1}{2} \Delta C_y b W_\infty = \frac{1}{2} 2m_p \frac{W_n}{W_\infty} b W_\infty,$$

где  $2m_p = \frac{dC_y}{d\alpha}$ ;  $\frac{W_n}{W_\infty} = \Delta\alpha$ .

Производя необходимые сокращения и подставляя выражение для  $W_n$ , имеем

$$\Delta\Gamma = -q \frac{m_p}{4} \frac{b}{L} = q \frac{m_p}{4\lambda},$$

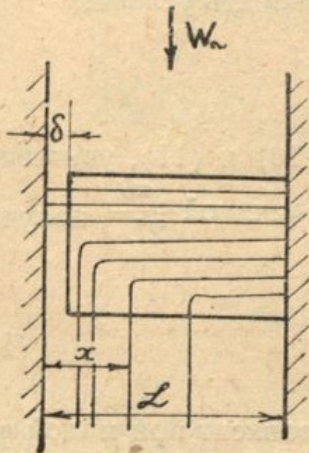


Рис. 7. Вихревая схема лопатки.



где  $\lambda = \frac{L}{b}$  — геометрическое удлинение лопатки. Тогда получаем циркуляцию в корневом сечении лопатки, выраженную через  $\Gamma_0$  — циркуляцию на лопатке, установленной без зазора:

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Delta\Gamma = \Gamma_0 - q \frac{m_p}{4\lambda}. \quad (15)$$

#### Определение интенсивности эквивалентного источника

Применим метод расчета, предложенный В. Н. Ершовым [5]. По существу аналогичный способ использовался и С. А. Довжиком [6], но в более упрощенной схеме исследования влияния радиального зазора.

Сущность метода заключается в следующем. Газ, протекая через щель, теряет часть полного напора, определяемую соотношением

$$\Delta p_0 = \zeta \rho \frac{v_{щ}^2}{2},$$

где  $\rho$  — плотность газа,

$\zeta$  — коэффициент сопротивления перетеканию,

$v_{щ}$  — средняя скорость движения в зазоре.

Дополнительные скорости, вызванные перетеканием, на корытце и на спинке лопатки около щели равны, поэтому потеря полного напора эквивалента разности статических давлений на верхней и нижней поверхностях лопатки, т. е. получаем, оперируя со средними величинами давлений

$$\Delta p_0 = p_{ст.н} - p_{ст.в} = \frac{\rho \Gamma_k \omega_\infty}{b}, \quad (17)$$

где  $p_{ст.н}$  и  $p_{ст.в}$  — статические давления на нижней и верхней поверхностях лопатки,

$\Gamma_k$  — циркуляция на конце лопатки,

$\omega_\infty$  — относительная скорость невозмущенного потока,

$b$  — хорда профиля на конце лопатки.

Из (16) и (17) находим

$$v_{щ} = \sqrt{\frac{2\Gamma_k \omega_\infty}{b\zeta}}, \quad (18)$$

и так как имеет место равенство

$$q = 2q_0 = 2v_{щ} \delta,$$

то, следовательно,

$$q = 2\delta \sqrt{\frac{2\Gamma_k \omega_\infty}{b\zeta}}. \quad (19)$$

Из формул (10а), (11а), (14), (19) получаем, отбрасывая малые величины высших порядков, выражение для циркуляции в любом сечении лопатки

$$\Gamma_x = \Gamma_0 + \frac{2\delta}{\pi} \sqrt{\frac{2\Gamma_k w_\infty}{b\zeta}} \left\{ \ln \left( \sin^2 \frac{\pi x}{2L} - \frac{\pi^2 \delta^2}{8L^2} \right) - \frac{\pi m_p}{4\lambda} + \right. \\ \left. + 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{\left( \frac{\pi \delta}{2L} \right)^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{2L}} \right] \right\}. \quad (20)$$

Решая уравнение (20) для случая  $\Gamma_x = \Gamma_k$  и  $x = \delta$ , получим следующее выражение для определения  $\Gamma_k$ :

$$\Gamma_k = \Gamma_0 + m - \sqrt{2\Gamma_0 m + m^2}, \quad (21)$$

где

$$m = \left\{ \frac{2\delta}{\pi} \left[ \ln \left( \sin^2 \frac{\pi \delta}{2L} - \frac{\pi^2 \delta^2}{8L^2} \right) - \frac{\pi m_p}{4\lambda} + 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{\left( \frac{\pi \delta}{2L} \right)^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi \delta}{2L}} \right] \right]^2 \frac{w_\infty}{b\zeta} \right\},$$

или в более простом виде

$$m = \left\{ \frac{2\delta}{\pi} \left[ \ln \frac{\pi^2 \delta^2}{8L^2} - \frac{\pi m_p}{4\lambda} + \pi \right]^2 \frac{w_\infty}{b\zeta} \right\}. \quad (22)$$

Все выкладки проделаны для одиночной лопатки, заключенной с односторонним зазором между твердыми стенками, т. е. формула (20) может быть применена для расчета распределения циркуляции в решетках с большим относительным шагом.

#### Распределение комплексного потенциала в решетке лопаток

Как уже отмечалось, при заданной схеме перетекания (рис. 5) необходимо и достаточно найти отображающую функцию, устанавливающую связь между точками внутренности прямоугольника на плоскости  $z$  и точками верхней полуплоскости  $\zeta$  (рис. 8). Такая функция выражается эллиптическим интегралом первого рода (4)

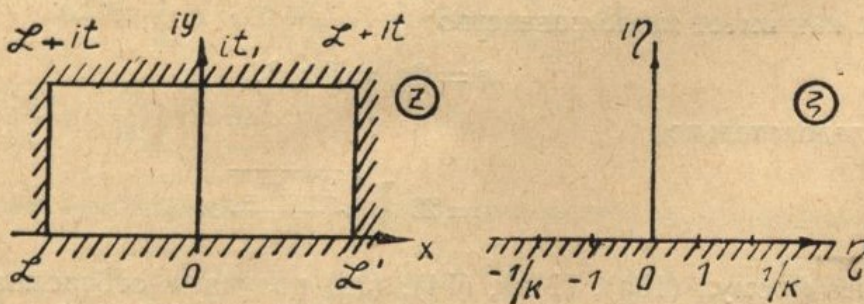


Рис. 8. Отображение прямоугольника на верхнюю полуплоскость.

$$z = C \int_0^L \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}.$$

Точкам  $z=0; L; L+it_1; it_1$  соответствуют точки  $\zeta=0; 1; 1/k; \infty$ .

Модуль эллиптического интеграла  $\kappa$  и постоянная  $C$  определяются из следующих двух уравнений:

$$L = C \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\kappa^2 t^2)}} = C K(\kappa);$$

$$t_1 = C \int_1^{1/\kappa} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\kappa^2 t^2)}} = C \int_0^1 \frac{dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(1-\kappa'^2 t'^2)}} = C K(\kappa');$$

здесь  $\kappa'^2 = 1 - \kappa^2$ ;  $K(\kappa)$  и  $K(\kappa')$  — полные эллиптические интегралы первого рода. Так как имеем соотношения  $\kappa = \sin \alpha$ ;  $\kappa' = \cos \alpha$ , то по таблице полных эллиптических интегралов  $K(\alpha)$  можем построить кривую

$$\frac{K(\kappa')}{K(\kappa)} = \frac{t_1}{L} = f(\alpha),$$

и модуль  $\kappa$  легко определяется при заданном соотношении между шагом решетки и высотой лопатки. Известны и другие методы определения  $\kappa$  (3).

По модулю  $\kappa$  находим значение интеграла  $K(\kappa)$ , а следовательно, и величину постоянной:

$$C = \frac{L}{K(\kappa)}.$$

Для упрощения решения задачи заметим, что для большинства реальных турбомашин можно считать

$$t_1/L < 0,5,$$

где, как и ранее,  $t_1 = t \sin \beta_2$  — приведенный шаг решетки. При этом условии имеют место неравенства

$$90^\circ > \alpha = \arcsin \kappa > 80^\circ; 1 > \kappa > 0,985.$$

Поэтому с точностью, достаточной для инженерных расчетов, можно положить

$$\kappa = 1; \kappa' = 0.$$

Тогда получаем

$$K(\kappa') = \frac{\pi}{2};$$

$$K(\kappa) = K(\kappa') \cdot \frac{L}{t_1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{L}{t_1};$$

$$C = \frac{L}{K(\kappa)} = \frac{2 \cdot t_1}{\pi}.$$

Подставляя значение  $C$  и  $\kappa$  в отображающую функцию, будем иметь:

$$z = \frac{2t_1}{\pi} \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{1-\zeta^2} = \frac{2t_1}{\pi} \operatorname{arth} \zeta.$$

или же

$$\zeta = \operatorname{th} \frac{\pi z}{2t_1}. \quad (23)$$

Как известно из [4], полученная функция отображает полосу  $0 < y < t_1$  плоскости  $z$  на полуплоскость  $\eta > 0$  плоскости  $\zeta$ . В связи с тем, что межлопаточный канал представлен правой половиной прямоугольника (рис. 7), а левая половина является лишь его зеркальным отображением с целью получения линии тока вдоль оси  $y$ , возможно заменить исследование течения внутри полосы  $0 < y < t_1$  изучением течения внутри полуполосы  $0 < y < t_1; x > 0$ , используя выведенные ранее формулы. Расчетные математические схемы представлены на рис. 9 и 10.

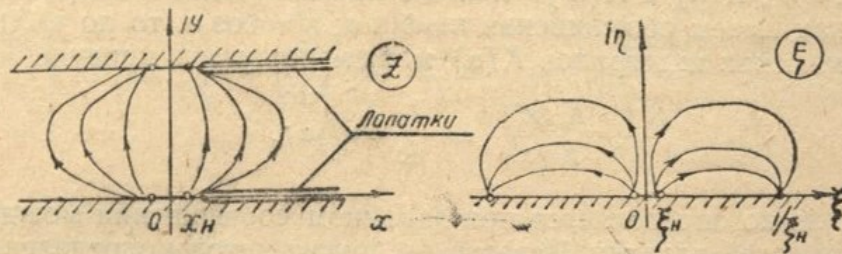


Рис. 9. Схема для расчета потенциального течения, вызванного источниками и стоками.

Изучение движения жидкости в межлопаточном канале между источником, расположенным, как и ранее, в точках  $x_n = \delta/\sqrt{2}$  (со стороны спинки лопатки), и стоком, находящимся в точке  $x_n + it_1$  (со стороны корытца), сводится к решению задачи о течении в плоскости  $\zeta$  между двумя источниками  $q$  в точках  $\xi_n$  и  $-\xi_n$  и двумя стоками  $-q$  в точках  $1/\zeta_n$  и  $-1/\xi_n$  (рис. 9), что не вызывает затруднений.

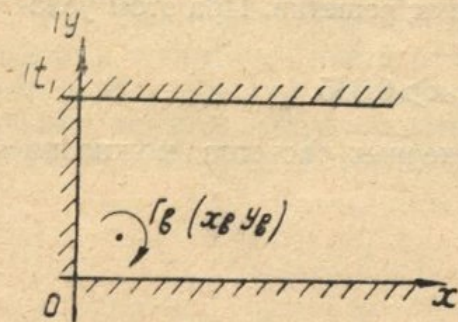


Рис. 10. Расчетная схема для густой решетки лопаток.

Движение внутри полуполосы, обусловленное наличием вихря  $\Gamma$  (рис. 10), фактически уже было определено при исследовании одиночной лопатки.

Таким образом, суммарное значение потенциала на спинке лопатки:

$$\varphi_B = \frac{q}{2\pi} \ln \left( \operatorname{th}^2 \frac{\pi x}{2t_1} - \frac{\pi^2 \delta^2}{8t_1^2} \right) + \frac{\Gamma_B}{\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{\pi^2 x_B y_B}{2t_1^2} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{2t_1}} \right) \quad (24)$$

и на корытце:

$$\varphi_n = -\frac{q}{2\pi} \ln \left( \operatorname{th}^2 \frac{\pi x}{2t_1} - \frac{\pi^2 \delta^2}{8t_1^2} \right) - \frac{\Gamma_B}{\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{\pi^2 x_B y_B}{2t_1^2} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi x}{2t_1}} \right). \quad (25)$$

**Определение зависимости между  $q$  и  $\Gamma_n$**

Как и для одиночной лопатки, используем условие

$$\left( \frac{d\varphi_B}{dx} - \frac{d\varphi_H}{dx} \right)_{x=\delta} = 0.$$

Произведя упрощающие замены  $\text{sh} \alpha \approx \alpha$  и  $\text{ch} \alpha \approx 1$  для малых  $\alpha$  порядка  $\delta/t_1$  и пренебрегая малыми величинами высших порядков, получим уже известную связь между  $\Gamma_B$  и  $q$  (формула 13)

$$\frac{\Gamma_B}{q} = \frac{\delta^2}{x_B y_B} + \frac{4x_B y_B}{\delta^2} = 2 \left( B + \frac{1}{B} \right).$$

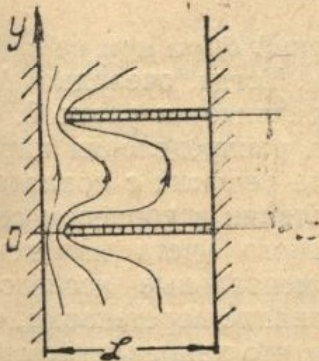
**Определение циркуляции у корня лопатки**

Исследование перетекания через радиальный зазор в решетке с лопатками бесконечной длины, проделанное Бетцем [2], не требовало определения циркуляции в корневом сечении, так как, очевидно, на бесконечности обтекание решетки не изменяется при появлении зазора. В дальнейшем ряд авторов развивали метод Бетца с целью применения результатов расчета к решеткам с соизмеримыми геометрическими размерами решетки  $L$  и  $t_1$  (7); (8).

Уменьшение циркуляции в корневом сечении вычислялось (рис. 11) «на бесконечности» за решеткой в виде

$$\Delta\Gamma_L = \int_0^{t_1} V(L, y) dy = (\varphi_{t_1} - \varphi_0)_{x=L},$$

причем, по существу предполагалось, что расположение сбегавшей вихревой пелены не изменяется при различных зазорах и совпадает с предельным положением при  $\delta \rightarrow 0$ . В действительности, как будет показано далее, такое предположение справедливо только для бесконечно длинных лопаток.



Определим  $\Delta\Gamma_L$  при  $L/t_1 > 2$ . Наиболее просто найти разность потенциалов в плоскости  $\zeta$  (рис. 8):

$$\Delta\Gamma_L = \varphi_{\zeta=1/k} - \varphi_{\zeta=1}.$$

Вычисление проведем для системы, состоящей только из источников и стоков (рис. 9), как полностью соответствующей схеме потенциального обтекания решетки пластин.

Рис. 11. Перетекание идеальной жидкости через радиальный зазор.

Получим

$$\Delta\Gamma_L = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 - \xi_n^2}{1 - \left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 \xi_n^2}.$$

Так как имеем

$$\kappa \ll 1; \quad \xi_n \ll 1;$$

то можно получить следующее приближенное выражение для  $\Delta\Gamma_L$ :

$$\Delta\Gamma_L = \frac{q}{2\pi} \ln(1 + \kappa'^2),$$

где  $\kappa'^2 = 1 - \kappa^2$  — дополнительный модуль интеграла.

Ограничиваясь первыми членами разложения в ряд функции  $\ln$  вследствие малости величины  $\kappa'^2$ , получаем

$$\Delta\Gamma_L = \frac{q}{2\pi} \kappa'^2. \quad (26)$$

Но значение дополнительного модуля  $\kappa'^2$  можно получить, используя разложение в ряд полного эллиптического интеграла  $K$

$$K = \ln \frac{4}{\kappa'} + \frac{\ln \frac{4}{\kappa'} - 1}{4} \kappa'^2 + \dots \approx \ln \frac{4}{\kappa'} = \frac{\pi}{2} \frac{L}{t_1},$$

отсюда

$$\kappa'^2 = \frac{16}{e^{\pi \frac{L}{t_1}}}.$$

Уже при  $L/t_1 = 2$   $\kappa'^2 = 0,03$  и далее весьма быстро уменьшается.

Совместный анализ формулы (19) и уравнения связи между  $\Gamma_L$  и  $C_y$  дает следующее неравенство:

$$q < \frac{4\delta}{b} \frac{\Gamma_L}{\sqrt{C_y \zeta}},$$

т. е. для обычно встречающихся на практике значений  $\delta/b$  и при не слишком малых  $C_y$  имеем  $q$  в несколько раз меньше  $\Gamma_L$ . Тогда, очевидно,  $\Delta\Gamma_L$ , вычисленное по формуле (26), уже при  $L/t_1 = 2$  практически равно 0, что а) подтверждает возможность применения формул распределения циркуляции по лопаткам бесконечной длины для расчета решетки с лопатками конечной длины  $L$  при  $L/t_1 > 2$  и известной циркуляции в корневом сечении  $\Gamma_L$ ; б) вызывает сомнение в достаточности такого учета изменения циркуляции в корневом сечении, так как экспериментальные исследования (1) показывают значительно более сильное влияние перетекания, чем это определено формулой (26); в) указывает на то, что направление средней по сечению скорости у корня лопатки совпадает на «бесконечности» с направлением поверхностей разрыва, образующихся за решеткой.

Поскольку гипотеза плоских сечений связывает изменение циркуляции с изменением направления скорости на выходе из решетки, определим изменение этого направления, вызванное перетеканием, посредством вычисления отклонения вихревых поверхностей от предельного положения при  $\delta = 0$ .

На рис. 12 представлено обтекание решетки лопаток, установленных с односторонним зазором, и сечение потока плоскостью  $z$ , нормальной направлению вихревых нитей. Движение в плоскости  $z$  можно рассматривать

как результат взаимодействия плоскопараллельного потока перетекания, определяемого скоростью  $V_0$ , и движения, вызванного наличием системы вихревых поверхностей с интенсивностью, характеризуемой величиной  $\gamma_x$ ,

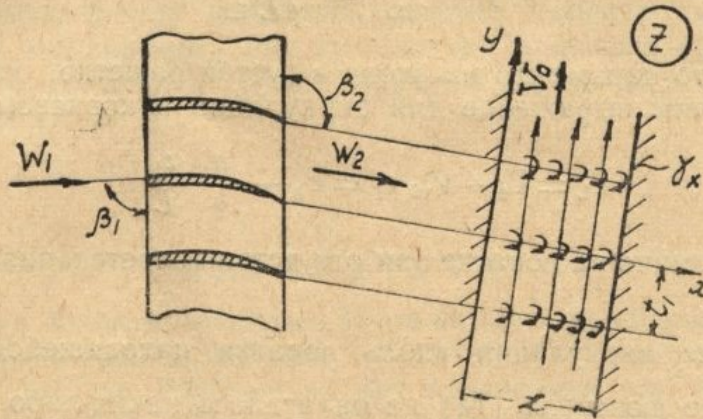


Рис. 12. Отклонение вихревой пелены потоком перетекания.

- $w_1$  — скорость на входе в решетку.
- $w_2$  — скорость на выходе из решетки,
- $\beta_1$  — угол входа,
- $\beta_2$  — угол выхода,
- $V_0$  — скорость потока перетекания,
- $\gamma_x$  — интенсивность вихревой пелены,
- $L$  — высота канала.

причем на бесконечности скорость  $V_0$  полностью компенсируется в плоскости поверхности разрыва, т. е.

$$V_{y\infty} = V_0 + V_{y\infty}(\gamma_x) = 0;$$

$$y = 0; \quad \pm t_1;$$

$$\delta < x < z.$$

Здесь  $V_{y\infty}(\gamma_x)$  обозначает величину скорости, индуцированной вихрями нормально к поверхности разрыва на  $\infty$  за решеткой. Скорость  $V_0$  определяется только количеством воздуха, перетекающего через единицу длины зазора. причем имеет место соотношение

$$V_0 = \frac{q_0}{L} = \frac{q}{2L},$$

и устанавливается уже в межлопаточном канале, т. е. остается постоянной за решеткой от 0 до  $\infty$ . Непосредственно за лопаткой вихревые поверхности, рассматриваемые как системы полувихрей, создают индуктивные скорости, равные половине соответствующих скоростей на  $\infty$ . В этом случае

$$V_{y0} = V_0 + \frac{1}{2}V_{y\infty}(\gamma_x) = \frac{1}{2}V_0.$$

Таким образом, поток на выходе из решетки приобретает в результате перетекания через радиальный зазор дополнительную скорость, определяемую величиной

$$V_{y0} = \frac{q}{4L}.$$

что приводит к отклонению поверхностей разрыва, а следовательно, и средней скорости в корневом сечении на угол:

$$\Delta\beta_2 = \frac{V_{y0}}{w_2} = \frac{q}{4L w_2}.$$

Полагая, что параметры на входе в густой решетке остаются неизменными, получим выражение для циркуляции в корневом сечении

$$\Gamma_L = \Gamma_0 - V_{y0} t_1 = \Gamma_0 - \frac{q}{4} \frac{t_1}{L}, \quad (27)$$

где  $\Gamma_0$  — циркуляция на лопатке при отсутствии перетекания.

#### Распределение циркуляции вдоль лопатки, находящейся в решетке

При выводе формулы (14) не налагалось каких-либо условий, специфических для одиночной лопатки, т. е. формула применима и для случая лопатки в решетке. Единственное отличие будет заключаться в том, что в соответствии с принятыми граничными условиями интегрирование необходимо вести не на участке  $x=L$ , а в пределах  $x-\infty$ . Таким образом, в данном случае формула (20) приобретает вид

$$\Gamma_x = \Gamma_L - (\varphi_\infty - \varphi_x)_в + (\varphi_\infty - \varphi_x)_н. \quad (28)$$

Из формул (13), (19), (24), (25), (28) получаем, пренебрегая малыми величинами высших порядков, выражение для циркуляции в любом сечении лопатки, причем в формуле (19) для случая решетки, очевидно, необходимо заменить  $w_\infty$  на  $w_m$  — среднюю геометрическую скорость:

$$\Gamma_x = \Gamma_0 + \frac{2\delta}{\pi} \sqrt{\frac{2\Gamma_k w_m}{b\zeta}} \left\{ \ln \left( \operatorname{th}^2 \frac{\pi x}{2 t_1} - \frac{\pi^2 \delta^2}{8 t_1^2} \right) - \frac{\pi}{4} \frac{t_1}{L} + \right. \\ \left. + 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{\left( \frac{\pi \delta}{t_1} \right)^2 \operatorname{ch} \frac{\pi x}{t_1}}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{t_1}} \right] \right\}. \quad (29)$$

$\Gamma_k$  как и для одиночной лопатки может быть получено из выражения

$$\Gamma_k = \Gamma_0 + m - \sqrt{2\Gamma_0 m + m^2},$$

где

$$m = \left\{ \frac{2\delta}{\pi} \left[ \ln \frac{\pi^2 \delta^2}{8 t_1^2} - \frac{\pi}{4} \frac{t_1}{L} + \pi \right] \right\}^2 \frac{w_m}{b\zeta}. \quad (30)$$

Расчетная формула (29) может применяться для густых решеток с длинными лопатками.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Полученные в результате теоретического исследования формулы позволяют по данным продувки или расчета плоской решетки  $\Gamma_0$  получить распределение циркуляции на той же решетке, установленной с односто-



ронным зазором, что дает возможность полностью использовать имеющиеся многочисленные материалы по изучению плоских решеток.

2. В связи с тем, что принятая теоретическая схема достаточно полно отражает реальную форму движения, следует ожидать хорошего соответствия теории эксперименту при выполнении основных предположений классической аэродинамики: а) безотрывное обтекание и б) малая нагрузка на лопатках.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. Л. Повх. Влияние радиального зазора на характер обтекания лопаток турбомашин. «Котлотурбостроение», 1950, №3.
- А. Betz. Über die Vorgänge an den Schaufelenden von Kaplan-Turbinen, Göttingen, «Hydraulische Probleme», VDI, Verlag, Berlin, 1926.
3. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. ГИТТЛ, 1951.
4. В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Т. 3, ч. 2, ГИТТЛ, 1950.
5. В. Н. Ершов. Влияние радиального зазора на работу осевого компрессора. Сб. Ин-та энергетики АН УССР, 1947.
6. С. А. Довжик. Аэродинамика осевого компрессора. Ч. 1, труды ЦАГИ № 626, 1947, стр. 17—22; 32—37.
7. Mahmoud Ali Hassan. Anwendungen der electrolitischen Methode auf die Betz'sche Theorie der spaltverluste an Schaufelgittern. Dissertation, technische Hochschule in Zürich, 1949.
8. З. М. Ронин. К вопросу о влиянии радиального зазора на распределение циркуляции вдоль лопатки рабочего колеса одноступенчатой газовой турбины. Автореф. дисс., МАИ, М. 1950.