ТРУДЫ ХАРЬКОВСКОГО АВИАЦИОННОГО ИНСТИТУТА

Вып. 20 1960

В. К. ЗОЛОТУХИН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ УСИЛИЙ В ТОНКОСТЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ БАЛКЕ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ

Касательные усилия в тонкостенной балке при изгибе ее определяются обычно по формуле В. Н. Беляева [1]. Так как нормальные напряжения в продольных элементах при расчетных нагрузках лежат в упруго-пластической области, то пользуются редукционными коэффициентами для площадей сечений этих элементов [1, 2, 3, 4]. При этом редукционные коэффициенты определяются по секущим модулям [1, 3, 4]. На несостоятельность такого метода указывали многие авторы [2, 3]. Дело в том, что указанная формула [1] может быть получена только при предположении, что приращения нормальных напряжений в достаточно близком соседнем сечении продольного элемента определяются по закону прямой линии, соответствующей секущему модулю.

В действительности в двух таких сечениях изменение нормальных напряжений не идет по этой линии.

В настоящей работе ставится задача: найти метод определения касательных усилий в тонкостенной балке при ее изгибе с более правильным учетом изменения в продольных элементах нормальных напряжений, когда последние лежат в упруго-пластической области. При этом направление поперечной нагрузки взято произвольно.

Будем исходить из следующих гипотез:

1. Поперечное сечение балки не изменяется, так как вдоль балки имеются жесткие в своей плоскости диафрагмы; последние гибки в направлении, перпендикулярном к их плоскости;

2. Распределение относительных удлинений продольных элементов поперечного сечения балки подчиняется закону плоскости;

3. Касательные напряжения распределяются равномерно по толщине тонкой стенки и направлены по касательной к средней линии стенки.

Предполагаем, что экспериментальная диаграмма зависимости σ—ε для каждого продольного элемента соответствует работе этого элемента в системе балки.

Для упрощения решения поставленной задачи примем, что:

а) балка цилиндрическая, постоянного поперечного сечения вдоль длины;

б) поперечное сечение балки открытое;

в) к площади продольного элемента присоединена площадь обшивки так, что величины продольных усилий не изменяются; стенки в этом случае работают только на касательные усилия.

В поставленную задачу не входит создание метода определения нормальных напряжений при изгибе, когда эти напряжения лежат в упруго-пластической области. Поэтому считаем, что каким-либо способом, с достаточной степенью точности, для каждого продольного элемента сечения I нормальные напряжения определены и их можно нанести на график зависимости $\sigma-\varepsilon$ (точки 1, 2, рис. 1).

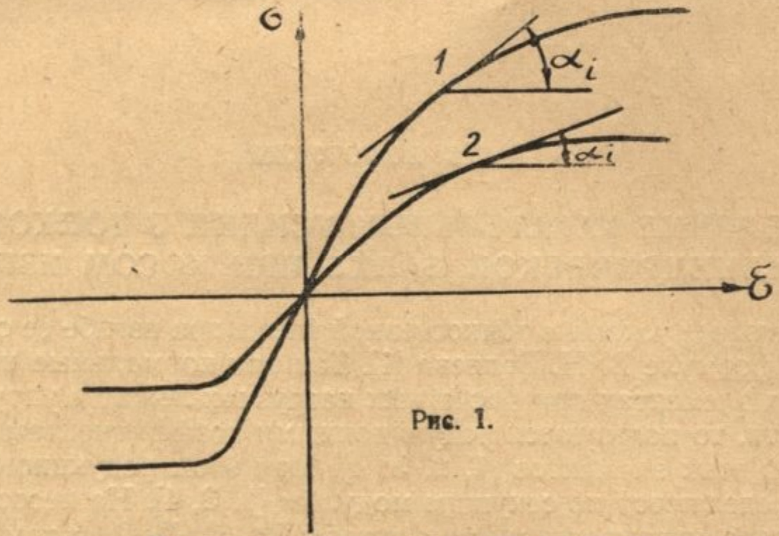

Рис. 1.

Возьмем сечение II балки на очень малом расстоянии от сечения I (рис. 2), настолько малом, что изменение нормальных напряжений происходит по касательной линии (рис. 1).

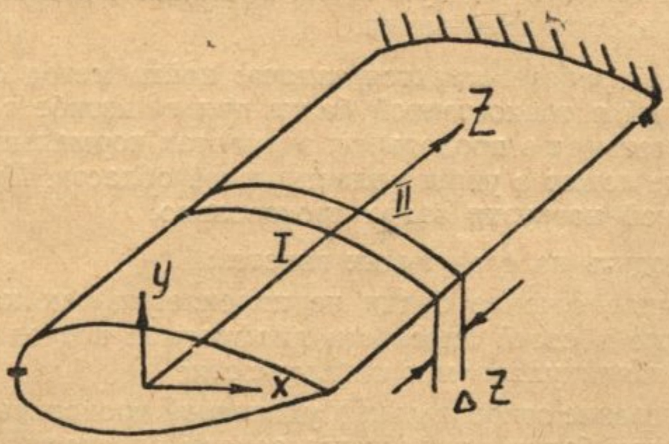

Рис. 2.

Известна плоскость действия приращения изгибающего момента (вектор ΔM на рис. 3).

Расположим в поперечном сечении оси координат так, чтобы ось x была параллельна вектору ΔM, а ось y перпендикулярна к оси x. Начало координат выбрано в произвольной точке.

Предполагаем, что в сечении II приращения относительных удлинений подчиняются закону плоскости. Если это не будет выполняться, то гипотеза 2 не будет иметь места.

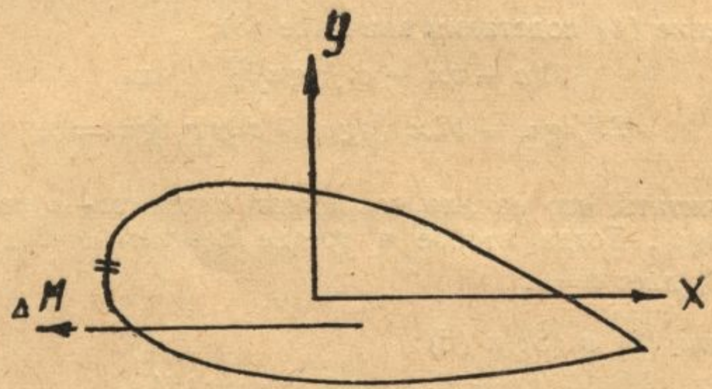

Рис. 3.

Введем следующие обозначения:

$\Delta\varepsilon_i$ — приращение относительного удлинения в i-ом продольном элементе на длине Δz;

$\Delta\sigma_i$ — приращение нормального напряжения;

$\operatorname{tg}\alpha_i$ — тангенс угла наклона с осью ε касательной к линии σ—ε в i-ой точке действительного напряжения;

F_i — действительная площадь сечения i-го продольного элемента;

n — количество продольных элементов сечения, работающих на нормальные напряжения;

q — касательное усилие в стенке, определяемое как погонная касательная сила $q = \tau\delta$, где δ — толщина стенки.

Пусть нейтральная ось дополнительных нормальных напряжений в сечении II проходит произвольно.

Приращения относительных удлинений вдоль оси z в этом сечении подчиняются уравнению плоскости

$\Delta\varepsilon_z = a + bx + cy$ или для i-го продольного элемента

$$\Delta\varepsilon_i = a + bx_i + cy_i. \tag{1}$$

Из рис. 1 следует, что

$$\frac{\Delta\sigma_i}{\Delta\varepsilon_i} = \operatorname{tg}\alpha_i \quad \text{или} \quad \Delta\varepsilon_i = \frac{\Delta\sigma_i}{\operatorname{tg}\alpha_i}, \tag{2}$$

Подставим (2) в (1)

$$\frac{\Delta\sigma_i}{\operatorname{tg}\alpha_i} = a + bx_i + cy_i \quad \text{или} \quad \Delta\sigma_i = (a + bx_i + cy_i)\operatorname{tg}\alpha_i. \tag{3}$$

Составим уравнения равновесия:

$$\Sigma\Delta\sigma_i F_i = 0, \tag{4}$$

$$\Sigma\Delta\sigma_i y_i F_i = \Delta M, \tag{5}$$

$$\Sigma\Delta\sigma_i x_i F_i = 0, \tag{6}$$

где в сумму входят все n продольных элементов.

В уравнение (4) подставим значение (3):

$$\Sigma(a + bx_i + cy_i)\,\mathrm{tg}\,\alpha_i F_i, \quad \text{или}$$

$$a\Sigma F_i\,\mathrm{tg}\,\alpha_i + b\Sigma x_i F_i\,\mathrm{tg}\,\alpha_i + c\Sigma y_i F_i\,\mathrm{tg}\,\alpha_i = 0. \tag{7}$$

Будем считать, что начало координат находится в центре тяжести площадей $F_i\,\mathrm{tg}\,\alpha_i$. Тогда второе и третье слагаемые будут равны 0 и уравнение (7) дает $a=0$.

Подставим (3) в (5) и (6):

$$\Sigma(bx_i + cy_i)y_i F_i\,\mathrm{tg}\,\alpha_i = \Delta M, \tag{8}$$

$$\Sigma(bx_i + cy_i)\,x_i F_i\,\mathrm{tg}\,\alpha_i = 0. \tag{9}$$

или

$$b\Sigma x_i y_i F_i\,\mathrm{tg}\,\alpha_i + c\Sigma y_i^2 F_i\,\mathrm{tg}\,\alpha_i = \Delta M, \tag{10}$$

$$b\Sigma x_i^2 F_i\,\mathrm{tg}\,\alpha_i + c\Sigma x_i y_i F_i\,\mathrm{tg}\,\alpha_i = 0. \tag{11}$$

Введем обозначения:

$$\Sigma x_i y_i F_i\,\mathrm{tg}\,\alpha_i = I_{rxy}, \tag{12}$$

$$\Sigma y_i^2 F_i\,\mathrm{tg}\,\alpha_i = I_{rx}, \tag{13}$$

$$\Sigma x_i^2 F_i\,\mathrm{tg}\,\alpha_i = I_{ry}. \tag{14}$$

Тогда (10) и (11) перепишутся так:

$$bI_{rxy} + cI_{rx} = \Delta M, \tag{15}$$

$$bI_{ry} + cI_{rxy} = 0. \tag{16}$$

Из (15) и (16) находим значение *в* и *с*:

$$b = -\frac{I_{rxy}}{I_{rx} I_{ry} - I_{rxy}^2}\,\Delta M, \tag{17}$$

$$c = \frac{I_{ry}}{I_{rx} I_{ry} - I_{rxy}^2}\,\Delta M. \tag{18}$$

Подставим полученные значения в (3):

$$\Delta\sigma_i = \frac{I_{ry} y_i - I_{rxy} x_i}{I_{rx} I_{ry} - I_{rxy}^2}\,\mathrm{tg}\,\alpha_i\,\Delta M. \tag{19}$$

Уравнение нейтральной линии приращений нормальных напряжений получим из (19), считая $\Delta\sigma_i$ равным нулю,

$$I_{ry} y - I_{rxy} x = 0. \tag{20}$$

Нейтральная линия проходит через начало координат, и положение ее зависит от напряженного состояния, так как в моменты инерции входят площади, умноженные на $\mathrm{tg}\,\alpha_i$.

Найдем значение касательного усилия в элементе обшивки, расположенной между K-м и $K+1$-м продольными элементами.

Из условия равновесия получим

$$\sum_{i=1}^{k} \Delta\sigma_i F_i = q_k \Delta_z. \tag{21}$$

Подставим (19) в (21) и получим

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{I_{ry} y_i - I_{rxy} x_i}{I_{rx} I_{ry} - I_{rxy}^2} \operatorname{tg} \alpha_i \, \Delta M F_i = q_k \Delta z,$$

или

$$q_k = \frac{\Delta M}{\Delta z} \frac{I_{ry} \sum_{i=1}^{k} y_i F_i \operatorname{tg} \alpha_i - I_{rxy} \sum_{i=1}^{k} x_i F_i \operatorname{tg} \alpha_i}{I_{rx} I_{ry} - I_{rxy}^2}.$$

Обозначив

$\sum_{i=1}^{k} y_i F_i \operatorname{tg} \alpha_i = S_{rx}$ — статический момент K площадей $F_i \operatorname{tg} \alpha_i$ и

$\sum_{i=1}^{k} x_i F_i \operatorname{tg} \alpha_i = S_{ry}$

и перейдя к пределу, получим

$$q_k = \frac{Q}{I_{rx} I_{ry} - I_{rxy}^2} (I_{rx} S_{rx} - I_{rxy} S_{ry}). \tag{22}$$

Если оси x и y главные, то $I_{rxy} = 0$ и (22) примет вид

$q_k = \frac{Q}{I_{rx}} S_{rx}$, т. е. известная [7] формула для частного вида задачи.

Для определения касательных усилий в практических расчетах необходимо выполнить следующее:

Найти значение $\operatorname{tg}\alpha$ по кривой σ—ε для каждого продольного элемента. Действительное сечение с площадями F заменить фиктивным с площадями $F\operatorname{tg}\alpha$.

Для сечения с фиктивными площадями найти положение центра тяжести. Начало осей координат расположить в центре тяжести и ось y направить параллельно внешней поперечной нагрузке Q.

Подсчитать значение моментов инерции поперечного сечения с фиктивными площадями относительно принятых осей. Найти для каждого участка значения статических моментов S_{rx} и S_{ry} фиктивных площадей $F\operatorname{tg}\alpha$ от начала отсчета до рассматриваемого участка.

Определить касательные усилия по формуле (22).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученная формула для определения касательных усилий при произвольном направлении поперечной нагрузки при изгибе тонкостенной балки, продольные элементы которой имеют напряжения, лежащие в упруго-пластической зоне, имеет практическое значение.

Формула полностью применима для случая работы балки в упругой области. В этом частном случае значение $\operatorname{tg}\alpha$ будет одинаковым для любого продольного элемента и при решении может быть опущено.

Если модули E продольных элементов различны, а нормальные напряжения лежат в упругой области, то значения $\operatorname{tg}\alpha$ должны быть учтены

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Беляев. Расчет моноблочного крыла на изгиб. Труды ЦАГИ, вып. 428, 1939.

2. М. Ф. Астахов и др. Справочная книга по расчету самолета на прочность. Оборонгиз, М. 1954.

3. Справочник авиаконструктора. Т. III, прочность самолета. Издание ЦАГИ, М. 1939.

4. А. Ю. Ромашевский. Упруго-пластический изгиб балочных конструкций при произвольной зависимости между напряжением и деформацией. Труды ЦАГИ, № 524, изд-во БНТ, 1947.

5. А. Ю. Ромашевский. К расчету тонкостенных балочных конструкций на изгиб при произвольной зависимости между напряжением и деформацией. Труды ЦАГИ, № 658, изд-во БНТ, 1948.