МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Конспект лекцій з курсу
«Елементарна математика»

Рівень вищої освіти: перший (молодший бакалавр)

Другий семестр: частина 1(до зміни розкладу)

Розробник: старший викладач каф. 405
Кальчук Н. Л

Харків «ХАІ» 2020

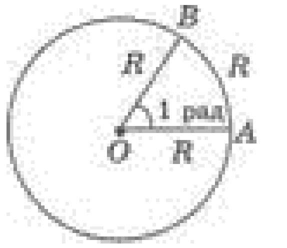
Лекція 1

Тригонометричні функції та їхні властивості.

Величину кута можна вимірювати у градусах та його частинах — хвилинах, секундах: 1° = 60'; 1' = 60'. Прямий кут дорівнює 90°, а розгорнутий — 180°.

Крім того у математиці використовують радіанну систему вимірювання кутів.

Кутом в 1 радіан називають центральний кут, якому відповідає довжина дуги, що дорівнює довжині радіуса кола.



мал. 1

Кут, що дорівнює 1 радіану (скорочено «рад»), зображено на малюнку 1; на цьому малюнку $\cup AB = R$, а тому $\angle AOB \ = \ 1\,рад$.

Можна довести, що

$$1 \text{ рад} = \frac{180}{\pi} \approx 57^\circ 18'.$$

Корисно пам’ятати, що

Оскільки

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад}, \text{ то } n^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot n \text{ рад};$$

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi}, \text{ то } \alpha \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \alpha .$$

Приклад 1. Знайдіть радіанну міру кута 108°.

Розв’язання. І спосіб (за формулою): $108^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 108 = \frac{3\pi}{5}$ (рад).

ІІ спосіб (за формулою пропорції):

$$180^\circ - \pi \text{ рад}$$

$$108^\circ - x \text{ рад}$$

$$\frac{180}{108} = \frac{\pi}{x}; \quad x = \frac{108\pi}{180}; \quad x = \frac{3\pi}{5} \text{ (рад).}$$

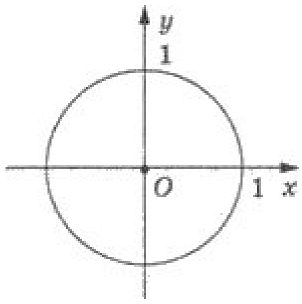
Приклад 2. Знайти градусну міру кута $\frac{11\pi}{12}$.

Розв’язання. Цей приклад можна розв’язати тими самими способами, що й попередній, але краще замінити π на 180°.

Маємо $\frac{11\pi}{12} = \frac{11 \cdot 180}{12} = 165^\circ$.

Одиничне коло

Розглянемо одиничне коло з центром у початку координат і радіусом 1 (мал. 2). Таке коло називають одиничним колом.

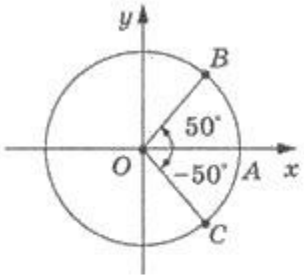


мал. 2

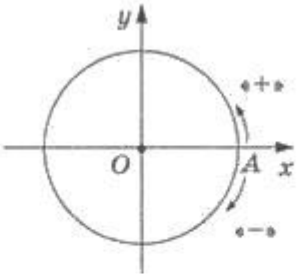
За допомогою одиничного кола зручно ввести означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кута (або числового аргумента), тобто тригонометричні функції кута (або числового аргумента).

Кут довільної величини.

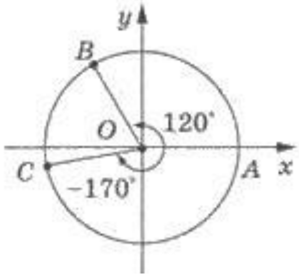
Розглянемо одиничне коло. Радіус OA, де A(1;0) назвемо початковим радіусом (мал. 3).



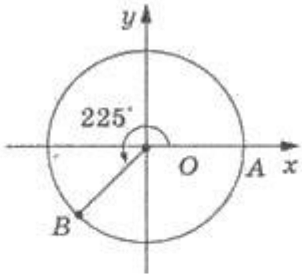
мал. 3



мал. 4



мал. 5

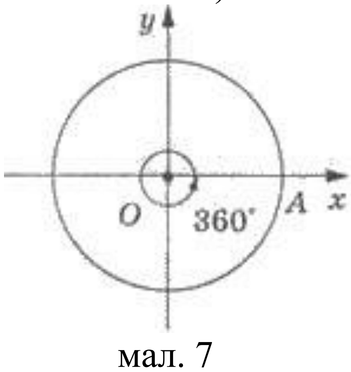


мал.6

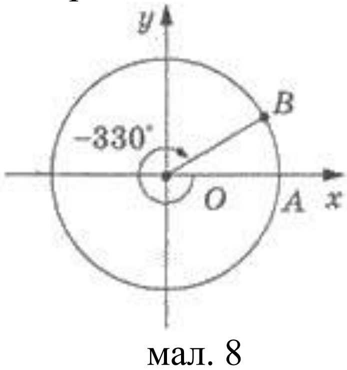
Повернемо радіус OA навколо точки O на 50° проти руху годинникової стрілки. Тоді радіус OA займе положення OB. Кажуть, що кут повороту дорівнює 50°. Повернемо тепер початковий радіус OA на кут 50° за рухом годинникової стрілки; отримаємо радіус OC. В цьому випадку кажуть, що кут повороту дорівнює -50°. На малюнку 3 стрілками показано кути повороту 50° і -50°. Взагалі, при повороті початкового радіусу проти годинникової стрілки, кут повороту вважається додатнім, а за рухом годинникової стрілки — від'ємним (мал. 4).

Кут повороту може бути будь-яким дійсним числом. На малюнку 5 показано кути повороту 120° і 170°.

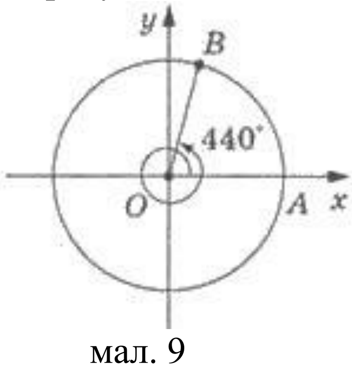
Щоб позначити кут повороту 225°, спочатку повернемо початковий радіус OA на 180° проти руху годинникової стрілки, а потім ще на 45° в тому самому напрямі (180° + 45° = 225°). На малюнку 6 стрілкою показано кут повороту 225°.



мал. 7



мал. 8

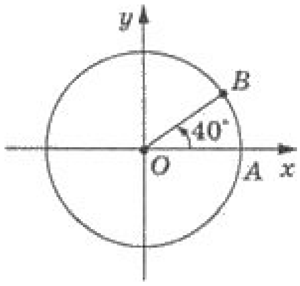


мал. 9

Якщо початковий радіус зробить повний оберт проти руху годинникової стрілки, то кут повороту дорівнюватиме 360° (мал. 7).

На малюнку 8 показано кут повороту -330°, а на малюнку 9 — кут повороту 440°.

Нехай при повороті на кут 40° початковий радіус OA перейшов у радіус OB (мал. 10). Якщо після цього радіус OB повернути на кут 360° або -360°, то знову отримаємо радіус OB. Таким чином зробимо висновок про те, що радіус OA переходить в радіус OB й при повороті на кути 40° + 360° = 400° і 40° - 360° = = -320° та й узагалі при повороті на кут 40° + +360°k, де k — будь-яке ціле число ($k \in Z$).

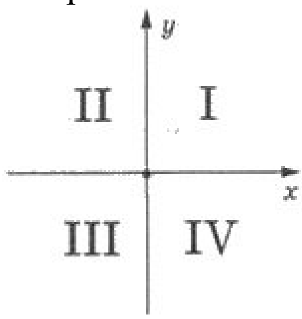


мал. 10

З іншого боку, будь-який кут а можна подати у вигляді $\alpha = \alpha_0 + 360°k$, де $0 \le \alpha_0 < 360°$, k — ціле число.

Наприклад: 1100° = 20° + 360° · 3 ; - 640° = 80° + 360° · (-2).

З геометрії відомо, що координатні осі поділяють координатну площину на чотири чверті (мал. 11). Якщо при повороті на кут α початковий радіус OA перейшов у радіус OB, то залежно від того, в якій координатній чверті буде цей радіус, кут α називають кутом цієї чверті.



мал. 11

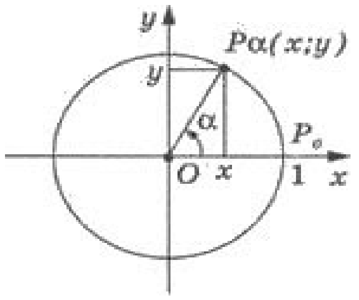
Приклад. Кутом якої чверті є кут: 1) α = 1999°; 2) β = -2010°.

Розв’язання. 1) Оскільки α = 1999° = 199° + 360° · 5, то α = 1999° — кут III чверті.

2) Оскільки (3 = -2010° = 150° + 360° · (-6), то β = -2010° — кут II чверті.

Тригонометричні функції кута і числового аргументу.

Нехай при повороті на кут а початковий радіус OP_0 одиничного кола переходить у радіус OP_α, де P_α має координати (*x*; *y*) (мал. 12).



мал. 12

Кажуть що куту α відповідає точка P_α одиничного кола. Тоді:

1) **синусом кута α** називають ординату точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола:

$$\mathbf{sin\alpha = y};$$

2) **косинусом кута α** називають абсцису точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола:

$$\mathbf{cos\alpha = x};$$

3) **тангенсом кута α** називають відношення ординати точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола до її абсциси:

$$\mathbf{tg\,\alpha = y/x\ (якщо\ x \neq 0)};$$

4) **котангенсом кута α** називають відношення абсциси точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола до її ординати:

$$\mathbf{ctg\alpha = x/y\ (якщо\ y \neq 0)}.$$

Зауважимо, що α може вимірюватися як у градусах, так і в радіанах.

Дане вище означення тангенса можна замінити рівносильним йому означенням: **тангенсом кута α** називають відношення синуса цього кута до його косинуса.

Дійсно, $tg\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, де $\cos\alpha \neq 0$.

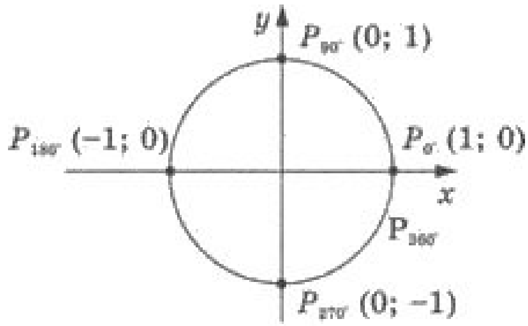
Аналогічно:

котангенсом кута α називають відношення косинуса цього кута до його синуса.

$$ctg\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \text{де}\ \sin\alpha \neq 0.$$

Тригонометричні функції деяких кутів.

Виходячи із введених у попередньому пункті означень, знайдемо тригонометричні функції кутів 0°; 90°; 180°; 270°; 360°.



мал. 13

Точка P_0 (мал. 13) має координати (1;0). Тому sin0° = 0 ; $\cos 0^0 = 1$; tg0° = 0; ctg0° — не існує.

Точка P_{90° (мал. 13) має координати (0;1). Тому $\sin 90^\circ = 1$; $\cos 90^\circ = 0$; $\mathrm{tg} 90^\circ$ — не існує; $\mathrm{ctg} 90^\circ = 0$.

Точка P_{180° (мал. 13) має координати (-1;0). Тому $\sin 180^0 = 0$; $\cos 180^\circ = -1$; $\mathrm{tg}\ 180^\circ = 0$; — не існує.

Точка P_{270° (мал. 13) має координати (0;-1). Тому $\sin 270^\circ = -1$; $\cos 270^\circ = 0$; $\mathrm{tg} 270^\circ$ — не існує; $\mathrm{ctg} 270^\circ = 0$.

Точка P_{360° (мал. 13) має такі самі координати, як і точка P_{0°. Отже, $\sin 360^\circ = \sin 0^\circ = 0$; $\cos 360^\circ = \cos 0^\circ = 1$; $\mathrm{tg} 360^\circ = \mathrm{tg} 0^\circ = 0$; $\mathrm{ctg} 360^\circ$ — не існує.

Узагальнимо отримані дані, а також дані про синус, косинус, тангенс і котангенс кутів 30°; 45°; 60°; 120°; 135°; 150° до таблиці.

Для зручності користування подано як градусну міру кута α, так і радіанну.

α, °	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
α, рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	0	1
tgα	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не іс-нує	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не іс-нує	0
ctgα	не іс-нує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	−1	$-\sqrt{3}$	не іс-нує	0	не іс-нує

Приклад.

$$1)\ \sin 30^\circ + \mathrm{tg} 135^\circ - \cos 120^\circ = \frac{1}{2} + (-1) - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0;$$

$$2)\ \mathrm{tg}\frac{\pi}{6} + 2\sin\frac{\pi}{3} - \mathrm{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

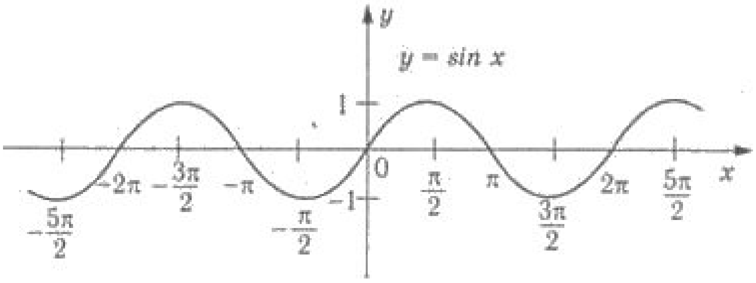
ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ, ЇХ ГРАФІКИ ТА ВЛАСТИВОСТІ.

1. Функція y = sin *x*, її графік.

Складемо таблицю значень функції y = sin x на проміжку [0; π]:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Далі, для побудови графіка врахуємо тотожність sin(-x) = -sin(x) , та найменший додатній період функції y = sin x, що дорівнює 2π. Графік функції y = sin x зображено на малюнку 14.



мал. 14

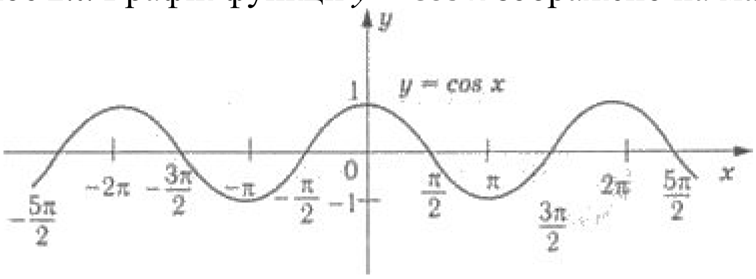
Криву, яка є графіком функції y = sin x, називають **синусоїдною**.

2. Функція y = cos x, її графік.

Для побудови функції y = cos x, спочатку складемо таблицю значень на проміжку [0;π]:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Враховуючи тотожність cos(-x) = cos x, та найменший додатній період функції y = cos x, що дорівнює 2π. Графік функції y = cos x зображено на малюнку 15.



мал. 15

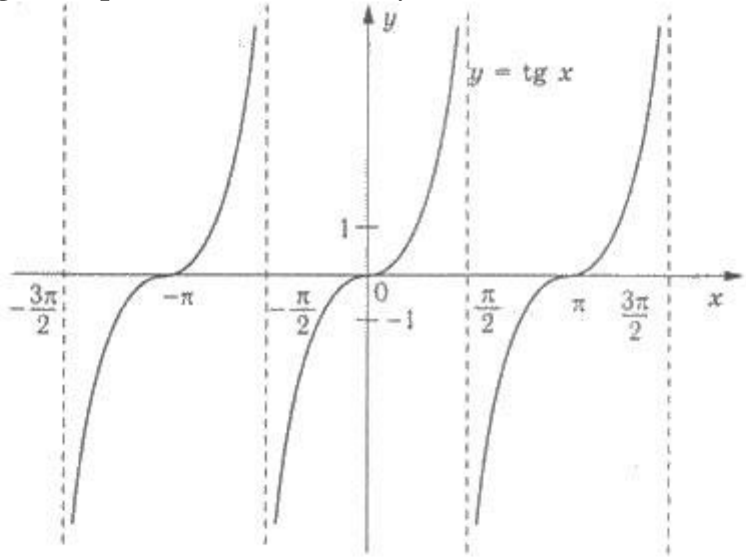
Графіком функції y = cos x є **косинусоїда**.

3. Функція y = tg x, її графік.

Функція y = tg x не визначена для чисел виду $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$. Складемо таблицю значень для функції y = tg x на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y	-	$\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-

Враховуємо найменший додатній період функції y = tg x, що дорівнює π. Графік функції y = tg x зображено на малюнку 16.



мал. 16

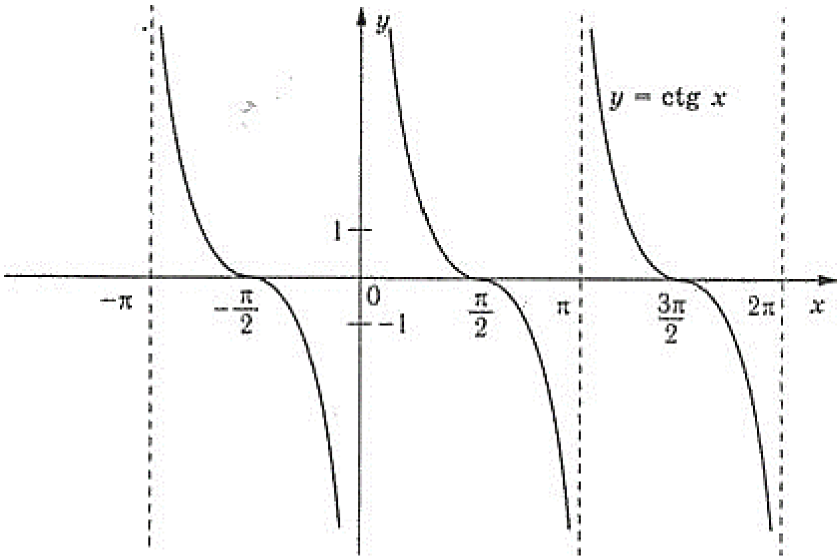
Графік функції y = tg x називають **тангенсоїдою**, він складається з безлічі окремих віток тангенсоїди.

Функція y = ctg *x*, її графік.

Функція y = ctg x не визначена для чисел виду $\pi k, k \in Z$. Складемо таблицю значень для функції y = ctg x на проміжку $(0;\pi)$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

Враховуючи найменший додатній перехід функції y = ctg x, що дорівнює π. Графік функції y = ctg x зображений на малюнку 17.



мал. 17

Графіком функції y = ctg x також є тангенсоїда. Графіком функції y = ctg x також називають **котангенсоїдою**.

Властивості	***Функції***			
	y=sin x	y=cos x	y=tg x	y=ctg x
D(y)	R	R	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	$x \neq \pi n, n \in Z$
E(y)	[-1; 1]	[-1; 1]	R	R
Парність	непарна $\sin(-x) = -\sin x$	парна $\cos(-x) = \cos x$	непарна $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x$	непарна $\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\, x$
Періодичність, період	2π	2π	π	π
Нулі функції	$\pi n, n \in Z$	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	$\pi n, n \in Z$	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$
Якщо x=0	sin x=0	cos x=1	tg x=0	не визначено
Проміжки, на яких y>0	$(2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in Z$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$	$\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$	$\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$
Проміжки, на яких y<0	$(-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$, $n \in Z$	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in Z$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in Z$
Проміжки зростання	$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$	$[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, $n \in Z$	$(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in Z$	немає
Проміжки спадання	$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$	$[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$	немає	$(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in Z$
Найменші значення	y=-1, якщо $x = -\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$	y=-1, якщо $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$	немає	немає
Найбільші значення	y=1, якщо $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	y=1, якщо $x = 2\pi n, n \in Z$	немає	немає

ВЛАСТИВОСТІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ.

Областю визначення синуса і косинуса є множина всіх дійсних чисел. **Областю визначення тангенса** є множина всіх дійсних чисел, крім чисел $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$.

Областю визначення котангенса є множина всіх дійсних чисел, крім чисел $\pi k,\ k\in Z$.

Областю значень синуса і косинуса є проміжок [-1;1].

Областю значень тангенса і котангенса є множина всіх дійсних чисел.

Приклад 1. Чи існує таке значення x, при яких виконується рівність:

$$1)\sin x=\frac{5}{6};\qquad 2)\cos x=-\sqrt{2}.$$

Розв'язання. 1) Оскільки $-1\le\frac{5}{6}\le 1$, то існує таке значення *x*, при якому $\sin x=\frac{5}{6}$.

2) Оскільки $-\sqrt{2}<-1$, то не існує значення *x*, при якому $\cos x=-\sqrt{2}$.

Приклад 2. Знайдіть область значень функції:

1) $y=\cos x-3$; 2) $y=\sin^2 x+1$.

Розв'язання. 1) Маємо $-1\le\cos x\le 1$. Віднімемо від усіх частин цієї подвійної нерівності число 3. Маємо $-1-3\le\cos x-3\le 1-3$, тобто $-4\le\cos x-3\le -2$. Отже, областю значень функції є проміжок [-4;-2].

2) Зрозуміло, що $\sin^2 x\ge 0$. З іншого боку $-1\le\sin x\le 1$, а тому $0\le\sin^2 x\le 1$. Додамо до усіх частин цієї нерівності число 1. Маємо $0+1\le\sin^2 x+1\le 1+1$, тобто $1\le\sin^2 x+1\le 2$. Отже, областю значень функції є проміжок [1;2].

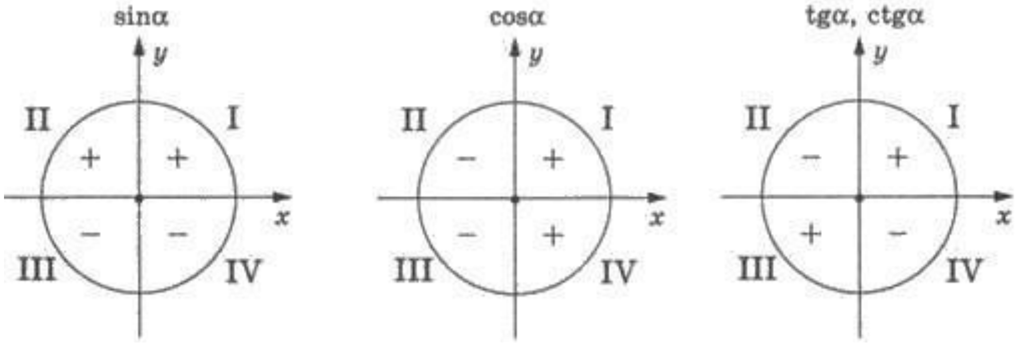
Знаки тригонометричних функцій по чвертях.

Синус кута α є ординатою точки $P_\alpha(x;y)$ одиничного кола (мал. 12). У І та ІІ чвертях $y>0$, а у ІІІ та IV чвертях $y<0$. Тому $\sin\alpha>0$, якщо α — кут І або ІІ чверті, і $\sin\alpha<0$, якщо α — кут ІІІ або IV чверті.

Косинус кута α є абсцисою точки $P_\alpha(x;y)$ одиничного кола (мал. 12). У І та IV чвертях $x>0$, а у ІІ та ІІІ чвертях $x<0$. Тому $\cos\alpha>0$, якщо α — кут І або IV чверті, і $\cos\alpha<0$, якщо α — кут ІІ або ІІІ чверті.

Оскільки $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, а $ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ то tg α і ctg α залежать від знаків sin α і cos α. У І та ІІІ чвертях sin α і cos α мають однакові знаки, а у ІІ та IV чвертях різні. Тому $tg\,\alpha>0$ і $ctg\alpha>0$, якщо α — кут І або ІІІ чверті, і $tg\,\alpha<0$ і $ctg\alpha<0$, якщо α — кут ІІ або IV чверті.

Знаки тригонометричних функцій у кожній з чвертей подано на малюнку 14.



мал. 14

Приклад. Порівняти з нулем: 1) cos152°; 2) tg 3 · sin4.

Розв'язання. 1) Оскільки 152° — кут II чверті, то cos152° < 0.

2) 3 радіани ≈ 3 · 57° = 171°, тому 3 радіани — кут II чверті і tg3 < 0.

4 радіани ≈ 4 · 57° = 228°, тому 4 радіани — кут III чверті і sin4 < 0. Остаточно маємо tg 3 · sin4 > 0.

Парність і непарність тригонометричних функцій.

Косинус — функція парна; синус, тангенс і котангенс — непарні:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

Приклади.

$$1)\ \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$2)\ \cos(-135^\circ) = \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$3)\ \operatorname{tg}(-150^\circ) = -\operatorname{tg}150^\circ = -\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$4)\ \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -1.$$

Періодичність тригонометричних функцій.

Періодом функцій косинус і синус є 360° (2π радіан), а функції тангенс і котангенс — 180° (π радіан).

У вигляді формул це можна записати наступним чином:

$\sin(\alpha + 360^\circ k) = \sin\alpha$ $\cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos\alpha$	$\operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ k) = \operatorname{tg}\alpha$ $\operatorname{ctg}(\alpha + 180^\circ k) = \operatorname{ctg}\alpha$	
для кута α у радіанах	$\sin(x + 2\pi k) = \sin x$ $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$	$\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg}x$ $\operatorname{ctg}(x + \pi k) = \operatorname{ctg}x$

Зважимо, що в усіх формулах k — ціле число, а у формулах для тангенса і котангенса розглядаються лише допустимі значення α і x.

Приклади.

1) $\cos 780^\circ = \cos(60^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$;

2) $\sin\left(-\dfrac{8\pi}{3}\right) = -\sin\dfrac{8\pi}{3} = -\sin\left(\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi\right) = -\sin\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\operatorname{tg}(-690^\circ) = \operatorname{tg}(30^\circ - 4 \cdot 180^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

4) $\operatorname{ctg}\dfrac{27\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(-\dfrac{\pi}{4} + 7\pi\right) = \operatorname{ctg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4} = -1$.

Лекція 2

Побудова графіків функцій за допомогою перетворень відомих графіків

Якщо відомий графік функцій y = f(x), то за допомогою геометричних перетворень можна побудувати графіки деяких інших функцій.

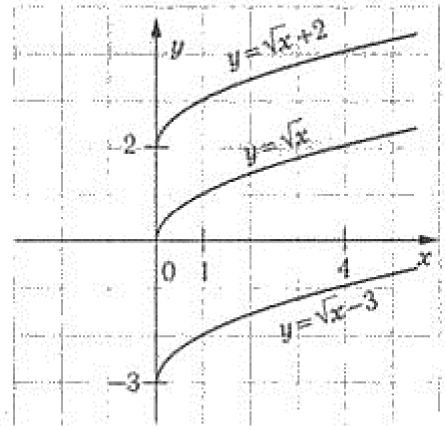
1. $f(x) \to f(x) + n$.

Щоб дістати графік функції $y = f(x) + n$, треба графік функції $y = f(x)$ перенести на n одиниць вгору вздовж осі y, якщо $n > 0$, і на $|n|$ одиниць вниз, якщо $n < 0$.

Зауваження. Замість того, щоб переносити графік функцій вгору або вниз, можна перенести вісь x на стільки ж одиниць у протилежний бік.

Приклад. Побудувати графік функцій $y = \sqrt{x} + 2$ і $y = \sqrt{x} - 3$.

Розв'язання. Графіки функції $y = \sqrt{x}$ та $y = \sqrt{x} + 2$ і $y = \sqrt{x} - 3$ подано на малюнку 1.



мал. 1

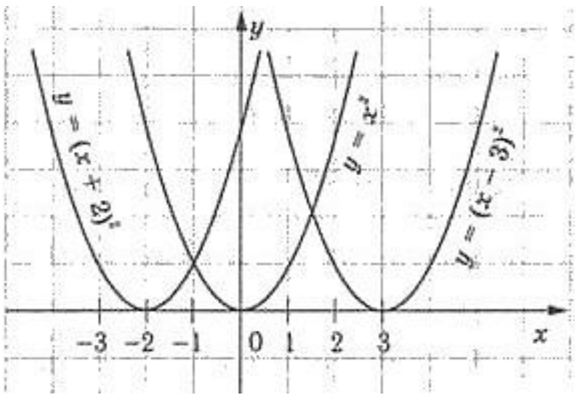
2. $f(x) \to f(x + m)$.

Щоб дістати графік функції $y = f(x + m)$, треба графік функції $y = f(x)$ перенести вздовж осі x на m одиниць вліво, якщо $m > 0$, і на $|m|$ одиниць вправо, якщо $m < 0$.

Зауваження. Замість того, щоб переносити графік функції вліво або вправо, можна перенести вісь y на стільки ж одиниць у протилежний бік.

Приклад. Побудувати графік функцій $y = (x - 3)^2$ і $y = (x + 2)^2$.

Розв'язання. Графіки функцій $y = x^2$ та функцій $y = (x - 3)^2$ і $y = (x + 2)^2$ подано на малюнку 2.



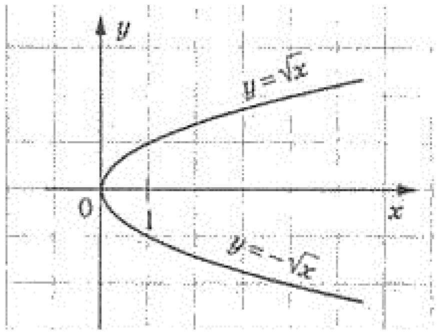
мал. 2

3. $f(x) \to -f(x)$.

Графіки функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$ симетричні відносно осі x.

Приклад. Подувати графік функцій $y = -\sqrt{x}$

Розв’язання. Графіки функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = -\sqrt{x}$ подано на малюнку 3.



Мал. 3

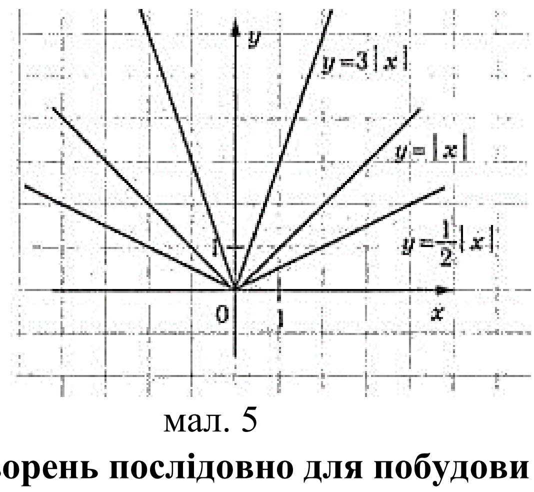
4. $f(x) \to kf(x)$, де $k > 0$, $k \neq 1$.

Щоб дістати графік функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, $k \neq 1$, треб графіки функції $y = f(x)$ розтягнути від осі x у k разів, якщо $k > 1$, і стиснути його до осі x у $1/k$ разів, якщо $0 < k < 1$.

Приклад. Побудувати графік функцій $y = 3|x|$ і $y = \frac{1}{2}|x|$.

Розв’язання. $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

Графік функції $y = |x|$ подано на малюнку 4. На малюнку 5 зображено графіки функцій $y = |x|$, $y = 3|x|$ і $y = \frac{1}{2}|x|$.



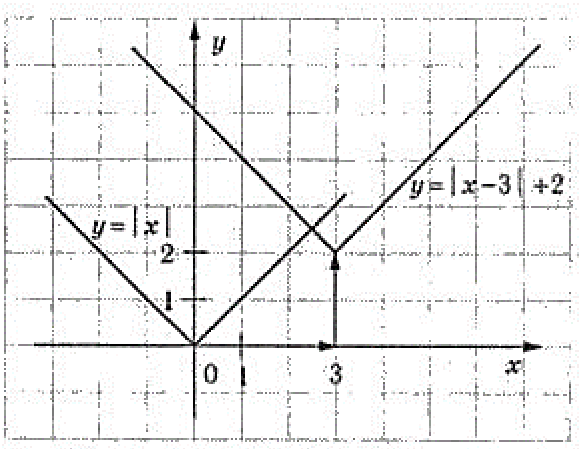
мал. 4 мал. 5

5. Використання декількох перетворень послідовно для побудови графіка функцій.

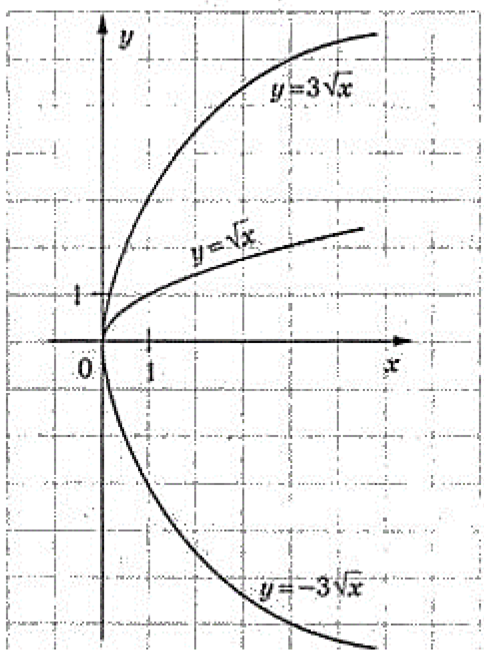
Виконуючи послідовно два і більше перетворень, можна будувати графіки функцій виду $y = f(x+m)+n,\quad y = kf(x),$ де $k<0$ і деяких інших.

Приклад 1. Побудувати графік функцій $y = |x-3|+2$.

Розв’язання. Графік функцій $y = |x-3|+2$ можна дістати із графіка функцій $y = |x|$, якщо останній перенести на 3 одиниці вправо вздовж осі x, після чого вздовж осі y — на 2 одиниці вгору (мал. 6).



мал. 6



мал. 7

Приклад 2. Побудувати графік функцій $y = -3\sqrt{x}$.

Розв’язання. Побудуємо графік функцій $y = \sqrt{x}$, після чого розтягнемо його утричі від осі x та дістанемо графік $y = 3\sqrt{x}$ (мал. 7). Графік функції $y = -3\sqrt{x}$ симетричний графіку функцій $y = 3\sqrt{x}$ відносно осі x (мал. 7).

Лекція 3

Тригонометричні вирази та їх перетворення

Тотожності, що пов'язують тригонометричні функції одного й того самого аргументу.

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$			
$\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$		$\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	
$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1$	$\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}$		$\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$
$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$		$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$	

Приклад 1. Знайти sin α , якщо $\cos\alpha=-0,8$ і $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Розв'язання. $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha;\quad \sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Оскільки α — кут II чверті, то sin α > 0. Маємо $\sin\alpha=\sqrt{1-(-0,8)^2}=0,6$.

Приклад 2. Знайти tg x, sin x, cos x, якщо $ctgx=-2,4$ і $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

Розв'язання.

1) $tgx\cdot ctgx=1\Rightarrow tgx=\dfrac{1}{ctgx}\Rightarrow tgx=\dfrac{1}{(-2,4)}=\dfrac{1}{\left(-\dfrac{12}{5}\right)}=-\dfrac{5}{12}.$

2) Маємо 1)$1+ctg^2x=\dfrac{1}{\sin^2x}$.

Звідки $\sin^2x=\dfrac{1}{1+ctg^2x};\quad \sin^2x=\dfrac{1}{1+(-2,4)^2};\quad \sin^2x=\dfrac{25}{169}.$

Оскільки x — кут IV чверті, то sin x < 0, тому $\sin x=-\sqrt{\dfrac{25}{169}}=-\dfrac{5}{13}.$

3) $ctgx=\dfrac{\cos x}{\sin x}$, тому $\cos x=ctgx\cdot\sin x=-2,4\cdot\left(-\dfrac{5}{13}\right)=-\dfrac{12}{5}\cdot\left(-\dfrac{5}{13}\right)=\dfrac{12}{13}.$

Приклад 1. Спростити вираз: 1) $(1-\cos x)(1+\cos x)$; 2) $\dfrac{\sin^2 2\alpha-1}{\cos 2\alpha}$.

Розв'язання.

1) $(1-\cos x)(1+\cos x)=1^2-\cos^2 x=1-\cos^2 x=\sin^2 x$.

2) $\frac{\sin^2 2\alpha-1}{\cos 2\alpha}=\frac{-(1-\sin^2 2\alpha)}{\cos 2\alpha}=\frac{-\cos^2 2\alpha}{\cos 2\alpha}=-\cos 2\alpha$.

Приклад 2. Довести тотожність: $\frac{\sin\alpha}{1+\cos(-\alpha)}+\text{ctg}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$.

Доведення. $\frac{\sin\alpha}{1+\cos(-\alpha)}+\text{ctg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos\alpha(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=$

$=\frac{\sin^2\alpha+\cos\alpha+\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}$, що й треба було довести.

Приклад 3. Довести, що при всіх допустимих значеннях β, значення виразу $\frac{1}{1+\text{tg}^2\beta}+\frac{1}{1+\text{ctg}^2\beta}$ не залежить від β.

Доведення.

$$\frac{1}{1+\text{tg}^2\beta}+\frac{1}{1+\text{ctg}^2\beta}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\beta}}+\frac{1}{\frac{1}{\sin^2\beta}}=\cos^2\beta+\sin^2\beta=1.$$

Значення виразу не залежить від β.

Формули зведення.

Тригонометричні функції кутів

$\frac{\pi}{2}\pm\alpha\ (90^\circ\pm\alpha)$, $\pi\pm\alpha\ (180^\circ\pm\alpha)$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\ (270^\circ\pm\alpha)$ і $2\pi\pm\alpha\ (360^\circ\pm\alpha)$

можна виразити через функції кута α за допомогою формул, які називають формулами зведення.

Подамо ці формули у вигляді таблиць:

Назва функції не змінюється

x	π + α	π - α	2π + α	2π - α
sin α	-sin α	sin α	sin α	-sin α
cos α	-cos α	-cos α	cos α	cos α
tg α	tg α	-tg α	tg α	-tg α
ctgα	ctgα	-ctgα	ctgα	-ctgα

Назва функції змінюється

	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$
sin α	cos α	cos α	-cos α	-cos α
cos α	-sin α	sin α	sin α	-sin α
tg α	-ctgα	ctgα	-ctgα	ctgα
ctgα	-tg α	tg α	-tg α	tg α

Приклад 1.

1) $\cos\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

2) $ctg330^0=ctg\left(360^0-30^0\right)=-ctg30^0=-\sqrt{3}.$

3) $\sin\left(-495^0\right)=-\sin 495^0=-\sin\left(360^0\cdot 2-225^0\right)=-\sin 225^0=-\sin\left(180^0+45^0\right)=-\left(-\sin 45^0\right)=\sin 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Приклад 2. Спростити вираз: $\sin(\alpha-\pi)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right).$

Розв’язання. Оскільки: $\sin(\alpha-\pi)=\sin(-(\pi-\alpha))=-\sin(\pi-\alpha)=-\sin\alpha$;

$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$, то

$\sin(\alpha-\pi)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha-\sin\alpha=-2\sin\alpha.$

Приклад 3. α, β і γ — кути трикутника, $\cos\frac{\gamma}{2}=0,2$. Знайти $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Розв’язання. Оскільки α, β і γ — кути трикутника, то α + β + γ = π, тому

$\alpha+\beta=\pi-\gamma$ і $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi-\gamma}{2}$; $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}$.

Маємо $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)=\cos\frac{\gamma}{2}=0,2.$

Формули додавання.

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos-\beta\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$

$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$

$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta-1}{\mathrm{ctg}\,\beta+\mathrm{ctg}\,\alpha}$

$\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta+1}{\mathrm{ctg}\,\beta-\mathrm{ctg}\,\alpha}$

Розглянемо застосування цих формул.

Приклад 1. Обчислити sin 75º.

Розв’язання. $\sin 75^\circ=\sin\left(45^\circ+30^\circ\right)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ=$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$

Приклад 2. Спростити вираз: $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$

Розв’язання.

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}-\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha=-\sin\alpha\ .$$

Приклад 3. Знайти: $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$, якщо $\sin\alpha=0{,}8$ і $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Розв'язання.

$$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha).$$

Оскільки α — кут II чверті, то cos α < 0. Маємо

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}$; $\cos\alpha=-\sqrt{1-0{,}8^2}=-0{,}6.$ Тоді

$$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha).$$

Приклад 4. Спростити вираз: $\sin 10x\cos 4x+\cos 10x\sin 4x$.

Розв'язання. $\sin 10x\cos 4x+\cos 10x\sin 4x=\sin(10x+4x)=\sin 14x.$

Приклад 5. Обчислити: tg $\frac{\pi}{12}$.

Розв'язання.

$$\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}=\frac{3-2\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3})^2-1^2}=$$

$$=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}\ .$$

Приклад 6. Спростити вираз: $\frac{\mathrm{tg}12^\circ+\mathrm{tg}18^\circ}{1-\mathrm{tg}12^\circ\mathrm{tg}18^\circ}$.

Розв'язання.

$$\frac{\mathrm{tg}12^\circ+\mathrm{tg}18^\circ}{1-\mathrm{tg}12^\circ\mathrm{tg}18^\circ}=\mathrm{tg}(12^\circ+18^\circ)=\mathrm{tg}30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Формули подвійного кута.

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

Розглянемо застосування цих формул.

Приклад 1. Спростити вираз: 1) $\frac{2\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$; 2) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$.

Розв'язання.

$$1)\ \frac{2\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{\cancel{2}\sin^{\cancel{2}}\alpha}{\cancel{2\sin\alpha}\cdot\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=tg\alpha.$$

$$2)\ \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)\cancel{(\cos\alpha+\sin\alpha)}}{\cancel{(\cos\alpha+\sin\alpha)}}=\cos\alpha-\sin\alpha.$$

Приклад 2. Обчислити: sin15°cos15°.

Розв'язання.

$$\sin15^0\cdot\cos15^0=\frac{2\sin15^0\cdot\cos15^0}{2}=\frac{\sin\left(2\cdot15^0\right)}{2}=\frac{\sin30^0}{2}=\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}.$$

Приклад 3. Виразити тригонометричну функцію через функцію аргументу, що вдвічі менший від даного:

$1)\ \sin 8x;\qquad 2)\ \cos\alpha;\qquad 3)\ tg\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right).$

Розв'язання.

$1)\ \sin 8x=\sin(2\cdot 4x)=2\sin 4x\cdot\cos 4x.$

$$2)\ \cos\alpha=\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

$$3)\ tg\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)=tg\left(2\cdot\frac{\beta-\frac{\pi}{3}}{2}\right)=tg\left(2\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{2tg\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{1-tg^2\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}.$$

Формули пониження степеня.

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}\qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$$

$$tg^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}\qquad ctg^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{1-\cos2\alpha}$$

Розглянемо застосування цих формул.

Приклад.

$$1)\ \cos^2 4\alpha=\frac{1+\cos(2\cdot4\alpha)}{2}=\frac{1+\cos8\alpha}{2}.$$

$$2)\ \sin^2\frac{\beta}{8}=\frac{1-\cos\left(2\cdot\frac{\beta}{8}\right)}{2}=\frac{1-\cos\frac{\beta}{4}}{2}.$$

$$3)\ tg^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\cos\left(2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{1+\cos\left(2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right)}=\frac{1-\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=\frac{1-\sin2\alpha}{1+\sin2\alpha}.$$

Формули половинного кута

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

Розглянемо приклади застосування цих формул.

Приклад 1. Знайти $\cos\frac{\alpha}{2}$, якщо $\cos\alpha=-\frac{7}{9}$ і $\frac{5\pi}{2}<\alpha<3\pi$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{5\pi}{2}<\alpha<3\pi$, то $\frac{5\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{2}$. Тому $\cos\frac{\pi}{2}<0$. Маємо

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2};\ \cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{7}{9}}{2}}=-\sqrt{\frac{1}{9}}=-\frac{1}{3}.$$

Приклад 2.

$$\operatorname{ctg}15^\circ=\frac{1+\cos30^\circ}{\sin30^\circ}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=2+\sqrt{3}.$$

Формули суми і різниці однойменних тригонометричних функцій

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2} \qquad \operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

Далі розглянемо приклади застосування цих формул.

Приклад 1. Подати у вигляді добутку вираз: 1) $\sin8\alpha+\sin2\alpha$; 2) $\cos4x-\cos12x$.

Розв'язання.

1) $\sin 8\alpha + \sin 2\alpha = 2\sin\frac{8\alpha + 2\alpha}{2}\cos\frac{8\alpha - 2\alpha}{2} = 2\sin 5\alpha\,\cos 3\alpha$.

2) $\cos 4x - \cos 12x = 2\sin\frac{4x + 12x}{2}\sin\frac{12x - 4x}{2} = 2\sin 8x\,\sin 4x$.

Приклад 2. Обчислити: sin 75° - sin 15°.

Розв'язання.

$$\sin 75^\circ - \sin 15^\circ = 2\sin\frac{75^\circ - 15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ + 15^\circ}{2} = 2\sin 30^\circ\cos 45^\circ =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Приклад 3. Подати у вигляді добутку вираз $\sqrt{3} + 2\cos\alpha$.

Розв'язання.

$$\sqrt{3} + 2\cos\alpha = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\alpha\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \cos\alpha\right) =$$

$$= 2\cdot 2\cos\frac{\frac{\pi}{6} + \alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{6} - \alpha}{2} = 4\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Приклад 4. Подати у вигляді частки вираз $3 + \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$.

Розв'язання.

$$3 + \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}\left(\sqrt{3} + \operatorname{tg}\alpha\right) = \sqrt{3}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\alpha\right) = \sqrt{3}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{\frac{1}{2}\cos\alpha} = \frac{2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{\cos\alpha}.$$

Лекція 4
Обернені тригонометричні функції та їхні властивості

Розглянемо функції, обернені до тригонометричних, які прийнято називати **оберненими тригонометричними функціями або аркфункціями**.

1. Функція ***y* = arcsin *x***

Розглянемо функцію $y = \sin x$. Ця функція, визначена на всій множині дійсних чисел, не є монотонною, оскільки кожного свого значення набуває в нескінченній множині точок. Для введення функції, оберненої до функції $y = \sin x$, розглянемо один з проміжків монотонності цієї функції, що містить точку 0, а саме $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ (мал.1). На цьому проміжку функція зростає, набуває усіх своїх значень від -1 до 1, отже, є оборотною.

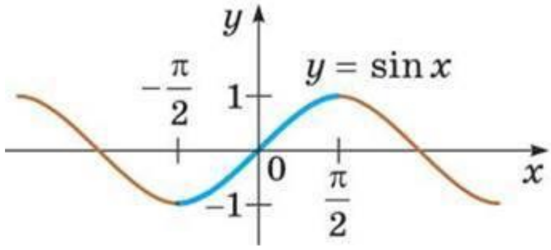
Функцію, обернену до функції y = sin x, де $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ називають **арксинусом** і позначають y = arcsin x.

Графік функції $y = \arcsin x$ зображено на малюнку 2, він є симетричним графіку функції $y = \sin x$ відносно прямої $y = x$.

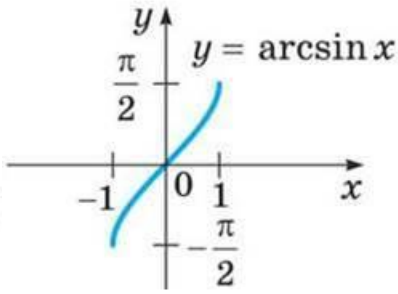
Область визначення: D(arcsin x) = $[-1;1]$.

Область значень: E(arcsin x) = $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

На всій своїй області визначення функція y = arcsin *x* зростає.



мал. 1



мал. 2

Графік функції $y = \arcsin x$ симетричний відносно початку координат. Тому функція $y = \arcsin x$ є непарною, тобто

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

Враховуючи означення функції арксинус, введемо поняття арксинуса числа.

Арксинусом числа *a*, де $|a| \le 1$, називають таке число (кут) із проміжку [- π/2; π/2], синус якого дорівнює *a*.

Позначають арксинус числа *a* так **arcsin *a***. З означення слідує, що arcsin *a* = φ тоді і тільки тоді, коли:

$$1)\ \sin\varphi = a; \qquad 2)\ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$$

Приклад 1.

1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$ (бо $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ і $\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$);

2) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$ (бо $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$).

Приклад 2. Знайти область визначення функції y = arcsin(x + 2).

Розв'язання. Оскільки D(arcsin x) = [-1; 1], маємо: -1 ≤ x + 2 < 1, звідки -3 < x < -1.

Відповідь. [-3; -1].

Оскільки arcsin a = φ за умови, що sin φ = a, отримаємо формулу:

$$\mathbf{\sin(\arcsin a) = a,\ \text{де}\ |a| \leqslant 1.}$$

Приклад 3. Знайти $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

Розв'язання. Нехай $\arcsin\frac{4}{5}=\varphi$. Оскільки $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то $\cos\varphi\ge 0$. З тотожності $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$ маємо:

$$\cos\varphi=\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}\ .$$

Але $\cos\varphi\ge 0$, тому

$$\cos\varphi=\sqrt{1-\sin^2\varphi}=$$

$$=\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}=0{,}6.$$

Відповідь. 0,6.

Якщо розглядатимемо φ такий, що $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; і sin φ = *a*, то arcsin *a* = φ. Звідси отримаємо формулу:

$$\mathbf{\arcsin(\sin\varphi)=\varphi,\ \text{де}\ \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right].}$$

Приклад 4. Обчислити:

1) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)$; 2) $\arcsin(\sin 2)$.

Розв'язання. 1) Оскільки

$$\frac{\pi}{7}\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right],\ \text{то}\ \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)=\frac{\pi}{7}.$$

2) $2\notin\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$,

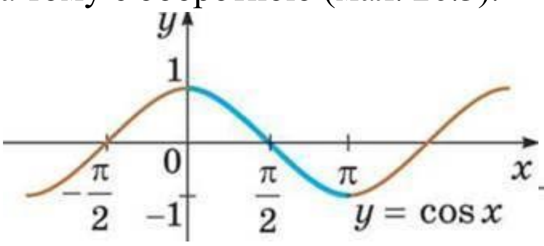
тому arcsin(sin 2) ≠ 2. Для пошуку значень виразів arcsin(sin φ) і arsin(cos φ) будемо використовувати періодичність тригонометричних функцій та формули зведення, що дозволить звести вираз до вигляду arcsin(sin y), де $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, та використати вищезгадану формулу.

Оскільки $-\frac{\pi}{2} \le \pi - 2 \le \frac{\pi}{2}$, скористаємося формулою зведення $\sin a = \sin(\pi - a)$. Тоді $\arcsin(\sin 2) = \arcsin(\sin(\pi - 2)) = \pi - 2$, оскільки $-\frac{\pi}{2} \le \pi - 2 \le \frac{\pi}{2}$.

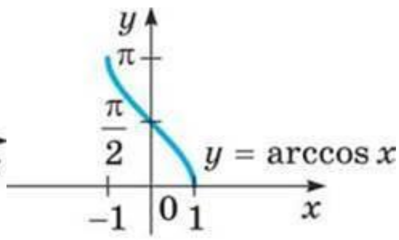
Відповідь. 1) $\frac{\pi}{7}$; 2) $\pi - 2$

2. Функція ***y* = arccos *x***

Розглянемо функцію $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$. На цьому проміжку вона є спадною, а тому є оборотною (мал. 26.3).



мал.3



мал.4

Функцію, обернену до функції $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$, називають **арккосинусом** і позначають $y = \arccos x$.

Графік функції $y = \arccos x$ зображено на малюнку 4, він є симетричним графіку функції $y = \cos x$ відносно прямої $y = x$.

Область визначення: D(arccos x) = [-1;1]

Область значень: E(arccos x) = $[0; \pi]$.

На всій області визначення функція $y = \arccos x$ спадає.

Графік функції $y = \arccos x$ не є симетричним ні відносно осі ординат, ні відносно початку координат, тому функція $y = \arccos x$ ні парна, ні непарна.

Враховуючи означення функції арккосинус, уведемо поняття арккосинуса числа.

Арккосинусом числа *a*, де $|a| \le 1$, називають таке число (кут) із проміжку $[0;\pi]$, косинус якого дорівнює a.

Позначають арккосинус числа a так **arccos *a***. З означення слідує, що $\arccos a = \varphi$ тоді і тільки тоді, коли:

$$1)\ \cos\varphi = a; \qquad 2)\ \varphi \in [0; \pi].$$

Приклад 5.

$$1)\ \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \ \left(\text{бо } \cos\frac{\pi}{2} = 0 \text{ і } \frac{\pi}{2} \in [0; \pi]\right);$$

$$2)\ \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \ \left(\text{бо } \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2};\ \frac{2\pi}{3} \in [0; \pi]\right).$$

Приклад 6. Знайти множину значень функції $y = 0,5\arccos x + \frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Ураховуючи, що $0 \le \arccos x \le \pi$, помножимо обидві частини цієї нерівності на 0,5, а потім додамо до них $\frac{\pi}{4}$, матимемо: $\frac{\pi}{4} \le 0,5\arccos x + \frac{\pi}{4} \le \frac{3\pi}{4}$.

Відповідь. $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

З означення арккосинуса числа випливає, що cos(arccos a) = a, де |a|≤ 1. Розглядаючи кут φ такий, що $\varphi \in [0;\pi]$ і cosφ = a, матимемо, що arccos a = φ. Тому

$$\arccos(\cos\varphi) = \varphi, \text{ якщо } \varphi \in [0;\pi].$$

Приклад 7. Обчислити arccos(cos 10).

Розв'язання. Як і у прикладі 4 знаходження значень виразів arccos(cos φ) і arccos(sin φ) треба зводити їх до виразу вигляду arccos(cos y), де $y \in [0;\pi]$, а далі застосувати формулу arccos(cos φ) = φ. Маємо: $\arccos(\cos 10) = \arccos(\cos(10 - 4\pi)) = \arccos(\cos(4\pi - 10)) = 4\pi$, оскільки $0 \le 4\pi - 10 \le \pi$.

Відповідь. $4\pi - 10$.

Приклад 8. Довести, що $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$, де |$a$|≤ 1.

Доведення. Нехай arccos (-a) = φ, $\varphi \in [0;\pi]$. Тоді cos φ= -a, тобто -cos φ= a. За формулою зведення $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$, тому $\cos(\pi - \varphi) = a$. Оскільки $0 \le \varphi \le \pi$, то $0 \le \pi - \varphi \le \pi$. Отже, $\cos(\pi - \varphi) = a$, $0 \le \pi - \varphi \le \pi$, тому $\pi - \varphi$ = arccos a, звідси отримаємо: $\varphi = \pi - \arccos a$. Отже, $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Корисною є таблиця значень arcsin a і arccos a для деяких значень a.

a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
arcsin a	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
arccos a	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Помічаємо, що для табличних значень a справджується рівність: arcsin a + arccos a = $\frac{\pi}{2}$. Ця рівність є істинною для будь-якого значення a з проміжку [-1; 1].

Приклад 9. Довести тотожність:

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, \text{ де } a \in [-1;\ 1].$$

Доведення. Доведемо, що $\arcsin a = \frac{\pi}{2} - \arccos a$, $a \in [-1; 1]$.

Оскільки $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin a \le \frac{\pi}{2}$ і $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - \arccos a \le \frac{\pi}{2}$, тобто обидві частини рівності $\arcsin a = \frac{\pi}{2} - \arccos a$ належать проміжку монотонності функції $y = \sin x$ – проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, знайдемо синус обох частин цієї рівності:

$\sin(\arcsin a) = a;$ $$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos a\right) = \cos(\arccos a) = a.$$

Отже, $\arcsin a = \frac{\pi}{2} - \arccos a$, тобто

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, \text{ де } a \in [-1;\ 1].$$

3. Функція ***y* = arctg *x***

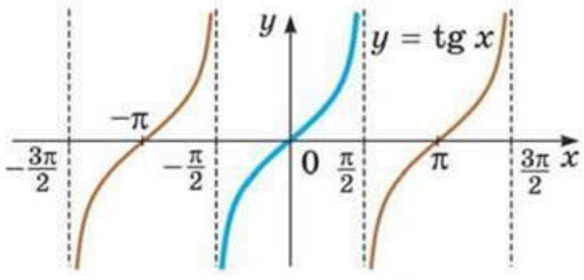
Розглянемо функцію $y = \mathrm{tg}\, x$ (мал. 5), яка монотонно зростає на проміжку

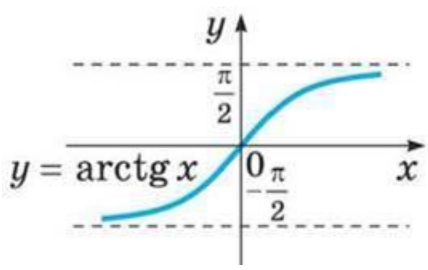
$$\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right).$$

На цьому проміжку вона набуває кожного свого значення з множини дійсних чисел тільки один раз, тому є оборотною.

Функцію, обернену до функції $$y = \mathrm{tg}\, x, \text{ де } x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right),$$

називають **арктангенсом** і позначають ***y* = arctg *x***.





мал. 5 мал. 6

Графік функції $y = \mathrm{arctg}\, x$ зображено на малюнку 6, він є симетричним графіку функції $y = \mathrm{tg}\, x$ відносно прямої $y = x$.

Область визначення: $D(arctgx) = (-\infty; \infty)$

Область значень: $E(arctgx) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

На всій області визначення функція $y = \mathrm{arctg}\, x$ зростає.

Графік функції y = arctg x симетричний відносно початку координат, тому функція y = arctg x непарна:

$$\mathbf{arctg(-x) = -arctg\,x}$$

Арктангенсом числа *a*, де a - будь-яке число, називають таке число (кут) із проміжку (-π/2; π/2), тангенс якого дорівнює a.

Позначають арктангенс числа a так **arctg *a***. З означення слідує, що arctg a = φ тоді і тільки тоді, коли:

$$1)\ \operatorname{tg}\varphi = a;\ 2)\ \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Приклад 3. $1)\ \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$ (оскільки $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ і $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$);

$2)\ \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$ (оскільки $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ і $-\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$).

З означення арктангенса випливає, що $tg\left(arctga\right) = a,$ де $a \in R$.

Приклад 10. Знайти ctg(arctg 5).

Розв'язання. Позначимо arctg 5 = φ та врахуємо, що

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Тоді

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}5) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}5)} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Відповідь. 0,2.

Якщо розглядати кут φ такий, що

$$\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)\ \text{і}\ \operatorname{tg}\varphi = a,$$

то arctg a = φ. Отримаємо формулу:

$$\mathbf{arctg(tg\,\varphi) = \varphi,\ де}\ \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right).$$

Для пошуку значень виразів arctg(tg φ) і arctg(ctg φ) зводимо їх до вигляду arctg(tg y), де

$$y \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right),$$

використовуючи періодичність та формули зведення, і далі застосовуємо формулу arctg(tg φ) = φ.

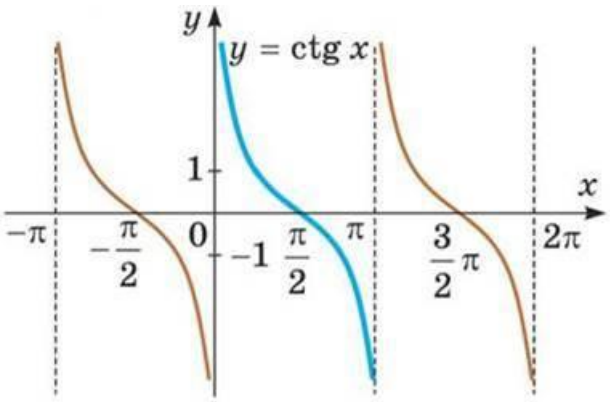
Наприклад,

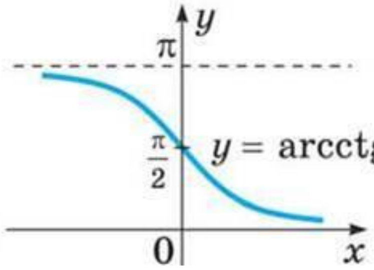
$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}\right) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right)\right) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{14}\right) = \frac{5\pi}{14}.$$

4. Функція ***y* = arcctg *x***

Функція y = ctg x на проміжку $\left(0;\pi\right)$ монотонно спадає і кожного свого значення набуває тільки один раз (мал. 7), тому є оборотною.

Функцію, обернену до функції y = ctg x, $x \in \left(0;\pi\right)$, називають **арккотангенсом** і позначають ***y* = arcctg *x*.**





мал. 7 мал. 8

Графік функції y = arcctg x зображено на малюнку 8, він є симетричним графіку функції y = ctg x відносно прямої $y = x$.

Область визначення: D(arcctg x) = (-∞; ∞)

Область значень: E(arcctg x) = $(0;\pi)$

На всій області визначення функція y = arcctg x спадає.

Графік функції y = arctg x: не симетричний ні відносно осі ординат, ні відносно початку координат, тому функція y = arcctg x ні парна, ні непарна.

Арккотангенсом числа *a*, де a - будь-яке число, називають таке число (кут) із проміжку (0;π), котангенс якого дорівнює a.

Позначають арккотангенс числа a так **arcctg *a***. З означення слідує, що arcctg a = φ тоді і тільки тоді, коли:

$$1)\ \operatorname{ctg}\varphi = a; \quad 2)\ \varphi \in (0;\ \pi).$$

Приклад 11. $1)\ \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$ (оскільки $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ і $\frac{\pi}{6} \in (0;\ \pi)$);

$2)\ \operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$ (оскільки $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = -1$ і $\frac{3\pi}{4} \in (0;\ \pi)$).

З означення арккотангенса випливає, що

$$\mathbf{ctg(arctg\,\mathit{a}) = \mathit{a}}, \text{ де } a \in R.$$

Приклад 12. Знайти

$$\sin\left(\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}\right).$$

Розв’язання. Нехай $arcctg\frac{4}{3} = \varphi$. Оскільки $\varphi \in (0;\pi)$,то sin φ > 0. За формулою

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = 1 + \operatorname{ctg}^2\varphi$$

маємо, що

$$\sin\varphi = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\varphi}}.$$

Оскільки sin φ > 0, отримаємо:

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}\right)\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{9}}} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Відповідь. 0,6.

Аналогічно до отриманих раніше формул для інших обернених тригонометричних функцій маємо:

$$\mathbf{arcctg(ctg\,\varphi) = \varphi, \text{ де } \varphi \in (0;\, \pi).}$$

Під час знаходження значень виразів arcctg(ctg φ) і arcctg(tg φ) за допомогою періодичності та формул зведення їх зводять до вигляду arcctg(ctg y), де $y \in (0;\pi)$, після чого використовують формулу arcctg(ctg φ) = φ, де $\varphi \in (0;\pi)$.

Наприклад,

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} 4) = \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-4\right)\right) = \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(\pi+\frac{\pi}{2}-4\right)\right) =$$

$$= \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-4\right)\right) = \frac{3\pi}{2}-4.$$

Можна довести, що

$$\mathbf{\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a, \text{ де } a \in R, \text{ та}}$$

$$\mathbf{\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}, \text{ де } a \in R.}$$

Доведення цих формул аналогічне до доведень у прикладах 8 і 9.

Корисною є таблиця значень arctg *a* і arcctg *a* для деяких значень *a*.

a	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
arctg a	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
arcctg a	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Розглянемо, як обчислювати значення виразів, що містять обернені тригонометричні функції.

Знайти значення виразу:

1) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - 3\operatorname{arctg}(-1)$; 2) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$.

Розв’язання.

$$1)\ \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}-3\,\mathrm{arctg}\,(-1)=$$

$$=\frac{5\pi}{6}+2\cdot\frac{\pi}{4}-3\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}=\frac{10\pi+6\pi+9\pi}{12}=\frac{25\pi}{12}.$$

$$2)\ \cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Відповідь.

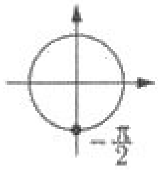
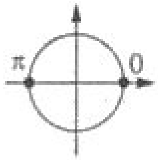
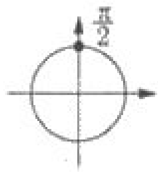
$$1)\ \frac{25\pi}{12};\ \ 2)\ \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Властивість	**Функція**			
	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$	$y = \mathrm{arctg}\, x$	$y = \mathrm{arcctg}\, x$
Область визначення	$[-1;\ 1]$	$[-1;\ 1]$	$(-\infty;\ +\infty)$	$(-\infty;\ +\infty)$
Множина значень	$\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$	$[0;\ \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$	$(0;\ \pi)$
Парність, непарність	Непарна	Ні парна, ні непарна	Непарна	Ні парна, ні непарна
Нулі функції	$x = 0$	$x = 1$	$x = 0$	–
Знакосталість, $y > 0$	$0 < x \leqslant 1$	$-1 \leqslant x < 1$	$x > 0$	$x \in R$
Знакосталість, $y < 0$	$-1 \leqslant x < 0$	–	$x < 0$	–
Проміжки зростання	$[-1;\ 1]$	–	$(-\infty;\ +\infty)$	–
Проміжки спадання	–	$[-1;\ 1]$	–	$(-\infty;\ +\infty)$
Найбільше значення функції	$\frac{\pi}{2}$ при $x = 1$	π при $x = -1$	–	–
Найменше значення функції	$-\frac{\pi}{2}$ при $x = -1$	0 при $x = 1$	–	–

Лекція 5
Тригонометричні рівняння та нерівності
НАЙПРОСТІШІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ.
1. Рівняння sin *t* = *a*.

Схему розв'язування рівняння sin *t* = *a*, де *a* — деяке число подамо у вигляді таблиці.

sin *t* = *a*, *a* - число

a	Розв'язки рівняння
a < -1 або *a* > 1	Рівняння не має розв'язків
a = -1	$\sin t = -1$ $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$ 
a = 0	$\sin t = 0$ $t = \pi k,\ k \in Z$ 
a = 1	$\sin t = 1$ $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$ 
|*a*| < 1, *a* ≠ 0	$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$

Приклад. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sin x = 1{,}8$; 4) $\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = 1$.

Розв'язання.

1) $\sin x = \frac{1}{2}$; $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, тому маємо

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k,\ k \in Z;\quad x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$$

2) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right| < 1$, маємо

$$x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k,\ k \in Z;\quad x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k,\ k \in Z.$$

Відповідь цього рівняння можна знайти також у вигляді

$$x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$$

3) sin *x* = 1,8. Оскільки 1,8 > 1, то рівняння не має розв'язків.

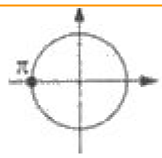
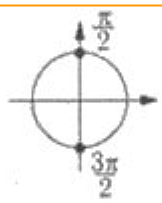
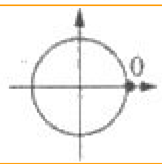
4) $\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=1$; $x-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$;

$x=\frac{5\pi}{8}+2\pi k,\ k\in Z$.

2. Рівняння cos *t* = *a*.

Схему розв’язування рівняння $\cos t = a$, де a — деяке число подамо у вигляді таблиці.

$\cos t = a$, a - число

a	Розв’язки рівняння
$a < -1$ або $a > 1$	Рівняння не має розв’язків
$a = -1$	$\cos t = -1$ $t=\pi+2\pi k,\ k\in Z$ 
$a = 0$	$\cos t = 0$ $t=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ 
$a = 1$	$\cos t = 1$ $t=2\pi k,\ k\in Z$ 
$\lvert a\rvert < 1,\ a \neq 0$	$t=\pm\arccos a+2\pi k,\ k\in Z$

Приклад. Розв’яжіть рівняння:

1) $\cos x=-\frac{1}{2}$; 2) $\cos x=-\frac{\pi}{3}$;

3) $\cos x=\frac{1}{4}$; 4) $\cos 2x=0$.

Розв’язання.

1) $\cos x=-\frac{1}{2}$; $\left|-\frac{1}{2}\right|<1$. Маємо $x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi k,\ k\in Z$;

$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$.

2) $\cos x=-\frac{\pi}{3}$; оскільки $-\frac{\pi}{3}\approx-\frac{3{,}14}{3}<-1$, то рівняння не має розв’язків.

3) $\cos x=\frac{1}{4}$; $\left|\frac{1}{4}\right|<1$. Маємо $x=\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi k,\ k\in Z$. Значення $\arccos\frac{1}{4}$ не можна знайти точно, а лише наближено (наприклад, за допомогою калькулятора). Розв’язуючи прикладні задачі, значення $\arccos\frac{1}{4}\approx 1{,}3181$ і записують розв’язок наближено:

$x=\pm 1{,}3181+2\pi k,\ k\in Z$.

У математиці ж залишають такий розв'язок:

$x = \pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi k,\ k \in Z.$

4) $\cos 2x = 0$; $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$.

3. Рівняння tg *t* = *a*.

Множину розв'язків рівняння tg $t = a$, де a — будь-яке число записують у вигляді: $t = arctga + \pi k,\ k \in \mathrm{Z}$.

Приклад. Розв'яжіть рівняння: 1) $tgx = \sqrt{3}$; 2) $tg2x = 3$.

Розв'язання. 1) $tgx = \sqrt{3}$; $x = arctg\sqrt{3} + \pi k,\ k \in \mathrm{Z}$; $x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathrm{Z}$.

2) $tg2x = 3$; $2x = arctg3 + \pi k,\ k \in \mathrm{Z}$; Поділимо ліву і праву частину рівняння на 2, маємо $x = \frac{arctg3}{2} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathrm{Z}$ Цю відповідь прийнято записувати у вигляді: $x = \frac{1}{2}arctg3 + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathrm{Z}$.

4. Рівняння ctg *t* = *a*.

Множину розв'язків рівняння ctg $t = a$, де a — будь-яке число записують у вигляді: $t = \mathrm{arcctg}a + \pi k,\ k \in Z.$

Приклад. Розв'яжіть рівняння:

1) $\mathrm{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

2) $\mathrm{ctg}(x + 20°) = 1.$

Розв'язання.

1) $\mathrm{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $x + \frac{\pi}{3} = \mathrm{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi k,\ k \in Z$;

$x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$; $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$; $x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$

2) $\mathrm{ctg}(x + 20°) = 1.$ Оскільки необхідно знайти кут x такий, що котангенс кута $x + 20°$ дорівнює 1, то x — кут у градусах. Тому формулою для запису множини розв'язків треба користуватися в іншому вигляді: $\mathrm{arcctg}1 = \frac{\pi}{4} = 45°$; $\pi k = 180°\pi,\ \ k \in Z.$ Отже,

$x + 20° = 45° + 180°k,\ \ k \in Z$; $x = 45° - 20° + 180°k,\ \ k \in Z$;

$x = 25° + 180°k,\ \ k \in Z.$

5. Тригонометричні рівняння, які зводяться до найпростіших.

За допомогою алгебраїчних перетворень або формул тригонометрії деякі рівняння можуть бути зведені до найпростіших тригонометричних рівнянь.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння: $4\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{3}\right)-4=0.$

Розв'язання. Оскільки $\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{3}\right)=-\operatorname{tg}\frac{x}{3},$ то маємо

$$-4\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{3}-4=0;\ \ -4\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{3}=4;\ \ \operatorname{tg}\frac{x}{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\frac{x}{3}=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\pi k,\ k\in Z;\ \ \frac{x}{3}=-\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z;\ \ x=-\frac{\pi}{2}+3\pi k,\ k\in Z.$$

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння: $\cos^2 4x-\sin^2 4x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Розв'язання. Використовуючи формулу подвійного кута для спрощення лівої частини рівняння, маємо

$$\cos 8x=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \ 8x=\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi k,\ k\in Z;$$

$$8x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z;\ \ x=\pm\frac{\pi}{48}+\frac{\pi k}{4},\ k\in Z.$$

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння: $\sin 4x\cos x-\cos 4x\sin x=-1.$

Розв'язання. Спрощуючи ліву частину рівняння, маємо: $\sin(4x-x)=-1;$

$$\sin 3x=-1;\ \ 3x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z;\ \ x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3},\ k\in Z.$$

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ.

1. Заміна змінних у тригонометричних рівняннях.

Якщо тригонометричне рівняння містить лише одну тригонометричну функцію з одним і тим самим аргументом, то позначивши цю функцію новою змінною, отримаємо алгебраїчне рівняння відносно цієї змінної.

Приклад. Розв'яжіть рівняння $\sin^2 x+3\sin x-4=0.$

Розв'язання. Позначимо $\sin x=t,\ |t|\le 1$. Маємо рівняння $t^2+3t-4=0;$ $t_1=1;\ \ t_2=-4$. Оскільки |t| ≤ 1, то підходить лише перший корінь. Маємо $\sin x=1;\ \ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \ k\in Z.$

2. Зведення тригонометричного рівняння до однієї функції одного того самого аргументу.

Досить часто після використання відповідних тригонометричних формул вдається звести рівняння до однієї функції одного й того самого аргументу, після чого застосувати заміну змінних.

Якщо в рівняння входить лише tg *x* і ctg *x*, то після застосування формули ctg *x* = 1/tg *x* отримаємо рівняння, що містить лише tg *x*.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $2\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=-3.$

Розв'язання. ОДЗ рівняння складається з усіх значень x, крім тих, для яких $\cos x = 0$ або $\sin x = 0$. На ОДЗ рівняння маємо $\mathrm{ctg}\, x = 1/\mathrm{tg}\, x$. Запишемо отримане рівняння

$$2\mathrm{tg}x + \frac{1}{\mathrm{tg}x} = -3$$

та введемо заміну $\mathrm{tg}\, x = t$.

Маємо рівняння $2t + \frac{1}{t} = -3,$ коренями якого є числа -1 і -1/2.

$$1)\ t = -1;\ \ \mathrm{tg}x = -1;\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$$

$$2)\ t = -\frac{1}{2};\ \ \mathrm{tg}x = -\frac{1}{2};\ \ x = \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k,\ \ k \in Z;\ \ x = -\mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \pi k,\ k \in Z.$$

Якщо в рівняння входить лише $\sin x$ і $\cos x$, причому хоча б одна з функцій тільки у парних степенях (наприклад, $\sin x$), то застосовуємо формулу $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ з подальшою заміною $\cos x = t$. Аналогічно застосовуємо формулу $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, якщо $\cos x$ входить у рівняння лише у парних степенях.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $6\sin^2 x + 5\cos 2x - 2 = 0.$

Розв'язання. Оскільки $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$, то маємо

$$6(1 - \cos^2 2x) + 5\cos 2x - 2 = 0;$$

$$-6\cos^2 2x + 5\cos 2x + 4 = 0.$$

Робимо заміну $\cos 2x = t,\ \ |t| \le 1.$ Маємо

$$-6t^2 + 5t + 4 = 0;\ \ t_1 = -\frac{1}{2};\ \ t_2 = 1\frac{1}{3}.$$

Другий корінь не задовольняє рівняння, оскільки $|t| \le 1$.

Отже, $t = -\frac{1}{2};\ \ \cos 2x = -\frac{1}{2};\ \ 2x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k,\ k \in Z;$

$$2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z;\ \ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$$

Якщо в тригонометричне рівняння входять лише $\cos 2x$ і $\cos x$, то застосовуємо формулу $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ і вводимо заміну $\cos x = t$.

Якщо в тригонометричне рівняння входять лише $\cos 2x$ і $\sin x$, то застосовуємо формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ і вводимо заміну $\sin x = t$.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0.$

Розв'язання. Маємо $1 - 2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0;$ заміна $\sin x = t,\ \ |t| \le 1.$

Рівняння $2t^2 + 5t + 2 = 0$ має корені $t_1 = -\frac{1}{2};\ \ t_2 = -2,$ з яких лише перший задовольняє умову $|t| \le 1$. Отже,

$$\sin x = -\frac{1}{2},\ \ x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$$

3. Метод розкладання на множники.

Нехай маємо рівняння $f(x) = 0$, ліву частину якого вдається розкласти на множники $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot ... \cdot f_n(x) = 0$. Оскільки добуток кількох множників дорівнює нулю, коли дорівнює нулю хоча б один із множників, то далі необхідно розв'язати кожне з рівнянь $f_1(x) = 0$; $f_2(x) = 0 ... f_n(x) = 0$ і перевірити отримані корені на предмет входження їх в ОДЗ початкового рівняння.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\sin 2x - 3\cos x = 0$.

Розв'язання. ОДЗ рівняння складається з усіх дійсних чисел. $\sin 2x$ — $\sin x \cos x$. Маємо $2\sin x\cos x - 3\cos x = 0;\quad \cos x(2\sin x - 3) = 0;$

$$\cos x = 0 \qquad \text{або} \qquad 2\sin x - 3 = 0.$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z \qquad \Bigg| \qquad \sin x = \frac{3}{2};\ \left|\frac{3}{2}\right| > 1 \ \text{ немає розв'язків}$$

Отже, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$ - множина розв'язків початкового рівняння.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\sin 7x - \sin 3x = 0$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \in R$. Застосовуємо формулу

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Матимемо

$$2\sin\frac{7x-3x}{2}\cos\frac{7x+3x}{2} = 0;\quad 2\sin 2x\cos 5x = 0;$$

$$\sin 2x = 0 \qquad \text{або} \qquad \cos 5x = 0$$

$$2x = \pi k, k \in Z \qquad \Bigg| \qquad 5x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z$$

$$x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z \qquad \Bigg| \qquad x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}, m \in Z$$

4. Однорідні тригонометричні рівняння та рівняння, що зводяться до однорідних.

Тригонометричні рівняння $a \sin x + b \cos x = 0$, де a і b — числа, $a \neq 0$, $b \neq 0$, називають **однорідними тригонометричними рівняннями** 1-го степеня відносно $\sin x$ і $\cos x$.

Ті значення x, при яких $\cos x = 0$, не є коренями рівняння. Дійсно у разі $\cos x = 0$ рівняння набуває вигляду $a \sin x = 0$. Оскільки $a \neq 0$, то матимемо $\sin x = 0$. Проте $\sin x$ і $\cos x$ не можуть одночасно дорівнювати нулю.

Поділивши ліву і праву частини рівняння $a \sin x + b \cos x = 0$ на $\cos x \neq 0$, матимемо $a \operatorname{tg} x + b = 0$, після чого закінчуємо розв'язання.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $2 \sin x - 7 \cos x = 0$.

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на $\cos x \neq 0$. Матимемо

$$\frac{2\sin x}{\cos x} - \frac{7\cos x}{\cos x} = 0;$$

$$2\mathrm{tg}x - 7 = 0;$$

$$\mathrm{tg}x = 3,5;$$

$$x = \mathrm{arctg}\,3,5 + \pi k,\ k \in Z.$$

Тригонометричне рівняння $a\sin^2 x + b\cos x\sin x + c\cos^2 x = 0,$ де a, b, c — числа, з яких хоча б два відмінні від нуля, називають однорідними тригонометричними рівняннями другого степеня відносно sin x і cos x. Сума показників степенів у всіх доданків при sin x і cos x дорівнює двом.

Якщо $a \neq 0$, то рівняння (по аналогії з однорідним 1-го степеня) розв'язують, поділивши на $\cos^2 x \neq 0$ з подальшою заміною tg $x = t$. Якщо ж $a = 0$, то виносимо cos x за дужки та застосовуємо прийом відомий нам з попереднього пункту.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\sin^2 x - 3\cos x\sin x - 4\cos^2 x = 0.$

Розв'язання. Ті значення x, при яких cos $x = 0$, не є коренями рівняння. Розділимо ліву і праву частини рівняння на $\cos^2 x \neq 0$. Маємо

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x\cos x}{\cos^2 x} - \frac{4\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0;$$

$$\mathrm{tg}^2 x - 3\mathrm{tg}x - 4 = 0.$$

Заміна tg $x = t$, маємо $t^2 - 3t - 4 = 0;\quad t_1 = -1; t_2 = 4$.

1) $t_1 = -1;\ tgx = -1;\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

2) $t_2 = 4;\ tgx = 4;\ x = arctg4 + \pi m,\ m \in Z.$

До однорідних можуть зводитися рівняння, які мають зовнішній вигляд, відмінний від зовнішнього вигляду однорідного рівняння. При цьому часто застосовують формули тригонометричних функцій подвійного кута та тотожність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $5\sin^2 x - 3\cos^2 x - \sin 2x = 2.$

Розв'язання. Застосовуємо формулу sin $2x$ = 2sin x cos x і таку тотожність $2 = 2\cdot 1 = 2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$. Маємо

$$5\sin^2 x - 3\cos^2 x - \sin 2x = 2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right);$$

$$5\sin^2 x - 3\cos^2 x - 2\sin x\cos x - 2\sin^2 x - 2\cos^2 x = 0;$$

$$3\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0.$$

Поділимо ліву і праву частини на $\cos^2 x \neq 0$.

Маємо $3tg^2x - 2tgx - 5 = 0$ Заміна tg $x = t$. Рівняння $3t^2 - 2t - 5 = 0$ має корені $t_1 = -1; t_2 = \frac{5}{3}$. Тоді

1) $t_1 = -1;\ tgx = -1;\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

2) $t_2 = \frac{5}{3};\ tgx = \frac{5}{3};\ x = arctg\frac{5}{3} + \pi m,\ m \in Z.$

5. Рівняння виду *a* sin *x* + *b* cos *x* = *c*.

Розглянемо рівняння $a \sin x + b \cos x = c$, де $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ — деякі числа. Є багато способів розв'язування такого рівняння. Покажемо один із них.

За допомогою формул

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}; \quad \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}; \quad 1 = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}$$

дане рівняння можна звести до однорідного.

Приклад. Розв'яжіть рівняння $2 \sin x - 3 \cos x = 2$.

Розв'язання. Маємо

$$2 \cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \left(3\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 2\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right);$$

$$\sin^2\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 5\cos^2\frac{x}{2} = 0; \quad \mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + 4\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 5 = 0.$$

Заміна $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t, \quad t^2 + 4t - 5 = 0;\ t_1 = 1;\ t_2 = -5.$ Далі

$$1)\ t_1 = 1;\ \mathrm{tg}\frac{x}{2} = 1;\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z;\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

$$2)\ t_2 = -5;\ \mathrm{tg}\frac{x}{2} = -5;\ \frac{x}{2} = -\mathrm{arctg}5 + \pi m,\ m \in Z;\ x = -2\mathrm{arctg}5 + 2\pi m,\ m \in Z.$$

НАЙПРОСТІШІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ.

Нерівності, що містять невідомі під знаками тригонометричних функцій, називають **тригонометричними нерівностями**.

Прикладами тригонометричних нерівностей є нерівності

$$\sin x < \frac{1}{2}, \quad \cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 4\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > -\sqrt{3}$$

тощо.

До найпростіших будемо відносити нерівності виду $\sin t > a,\ \cos t > a,\ \mathrm{tg}t > a,\ \mathrm{ctg}t > a$ та інші, у яких на місці знака > стоїть один із знаків ≥, < або ≤. Загальні формули для розв'язування цих нерівностей є досить громіздкими. Тому розглянемо методи розв'язування цих нерівностей на прикладах. Для наочності будемо використовувати одиничне коло, лінії тангенса і котангенса.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\sin t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$

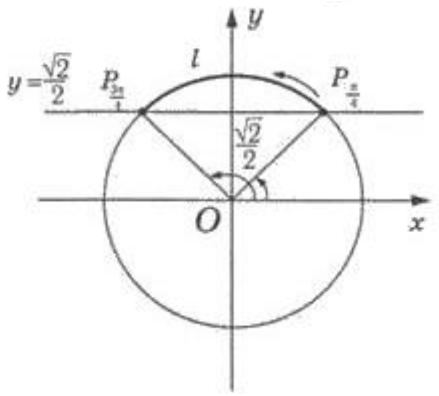
Розв'язання. $\sin t$ - це ордината точки одиничного кола, що відповідає куту t. Спочатку позначимо на одиничному колі всі точки, ординати яких більші за

$\frac{\sqrt{2}}{2}$; ці точки знаходяться вище прямої $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (мал. 1). Множина всіх таких точок — дуга *l*. Якщо рухатися по цій дузі проти руху годинникової стрілки, то початкова точка дуги *l* відповідає куту $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, а кінцева — $\pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Кути, що відповідають цим точкам, входять у відповідь (оскільки знак нерівності ≥), а тому на малюнку точки позначені жирно. Таким чином, нерівність $\sin t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ задовольняють всі значення *t* такі, що $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$. Оскільки синус є функцією періодичною з найменшим додатним періодом 2π, то множину всіх розв'язків нерівності отримаємо, додавши до чисел $\frac{\pi}{4}$ і $\frac{3\pi}{4}$ числа виду $2\pi k, k \in Z$. Отже, маємо:

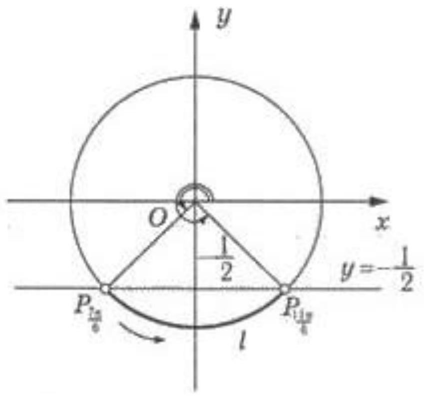
$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq t \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

Відповідь можна подати і так:

$$\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right], k \in Z.$$



мал. 1



мал. 2

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\sin 2x < -\frac{1}{2}$.

Розв'язання. Позначимо $2x = t$, маємо нерівність $\sin t < -\frac{1}{2}$. Позначимо на одиничному колі всі точки, ординати яких менші за $-\frac{1}{2}$, це точки дуги *l*, які розташовані нижче прямої $y = -\frac{1}{2}$ (мал. 2). Кінці цієї дуги — точки, ординати яких дорівнюють $-\frac{1}{2}$; кути, що відповідають цим точкам, не входять у відповідь, оскільки знак нерівності “<“. Тому точки на малюнку «виколоті». Якщо рухатися по дузі *l* проти годинникової стрілки, то початкова точка дуги *l* відповідає куту $\pi + \arcsin\frac{1}{2} = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$, а кінцева – куту $2\pi - \arcsin\frac{1}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.

Враховуючи періодичність, маємо:

$$\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{11\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Повертаємося до змінної *x*:

$$\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < 2x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Розділимо всі три частини подвійної нерівності на 2. Маємо:

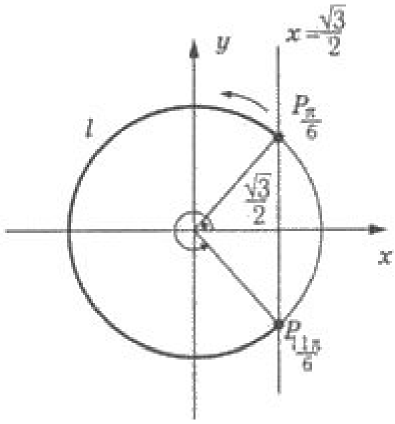
$$\frac{7\pi}{12} + \pi k < x < \frac{11\pi}{12} + \pi k,\ k \in Z.$$

Приклад 3. Розв’язати нерівність $\cos t \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

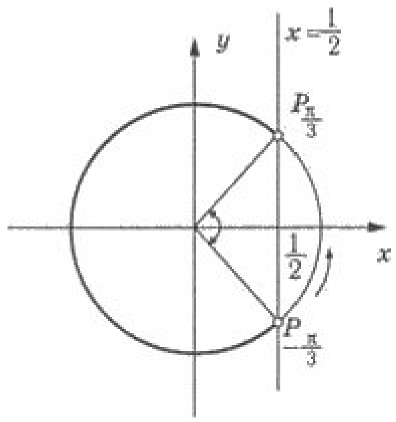
Розв’язання. cos *t* — це абсциса точки одиничного кола, що відповідає куту *t*. Позначимо на одиничному колі всі точки, абсциси яких менші за $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ці точки розташовані лівіше прямої $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (мал. 3), утворюють дугу *l*. Кути, що відповідають крайнім точкам дуги, входять у відповідь (оскільки знак нерівності ≤), тому точки на малюнку позначені жирно. При русі проти годинникової стрілки початкова точка дуги *l* відповідає куту $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, а кінцева — куту $2\pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.

Враховуючи періодичність косинуса, отримаємо розв’язки нерівності:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k \le t \le \frac{11\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z.$$



мал. 3



мал. 4

Приклад 4. Розв’язати нерівність $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2}$.

Розв’язання. Позначимо $x+\frac{\pi}{3}=t$, маємо $\cos t > \frac{1}{2}$. На малюнку 4 виділено відповідну дугу *l*, її кінцева точка відповідає куту $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, а початкова — куту $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$. Маємо:

$$-\frac{\pi}{3}+2\pi k < t < \frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k \in Z.$$

Повертаємося до змінної *x*:

$$-\frac{\pi}{3}+2\pi k < x+\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \ k \in Z.$$

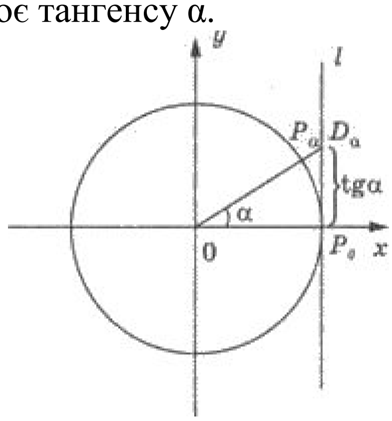
Віднімемо від трьох частин подвійної нерівності $\frac{\pi}{3}$. Маємо:

$$-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+2\pi k < x < \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \ k \in Z;$$

$$-\frac{2\pi}{3}+2\pi k < x < 2\pi k,\ \ k \in Z.$$

Для ілюстрації розв’язків нерівностей, у яких в лівій частині знаходиться tg *t*, а в правій — число, ознайомимося з лінією тангенсів.

Розглянемо пряму *l*, яка є дотичною до одиничного кола і проходить через точку (1;0) (мал. 5). Нехай при повороті на кут α початковий радіус OP_0 переходить у радіус OP_α. Нехай пряма OP_α перетинає пряму *l* у точці D_α. Тоді ордината точки D_α дорівнює тангенсу α.



мал. 5

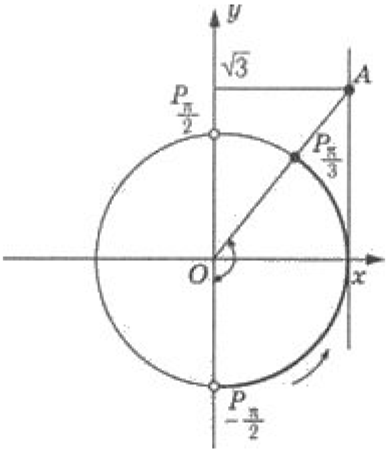
Приклад 5. Розв’язати нерівність tg t $\leq\sqrt{3}$.

Розв’язання. Період функції тангенс дорівнює π,тому спочатку знайдемо розв’язки нерівності на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, а потім використаємо періодичність.

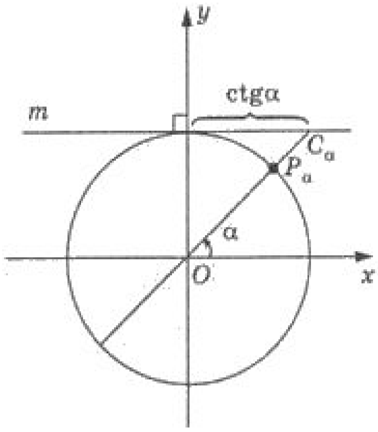
Проведемо лінію тангенсів, tg *t* - це ордината точки лінії тангенсів, що відповідає куту *t*. Позначимо на лінії тангенсів точку, ордината якої дорівнює

$\sqrt{3}$ — точку A (мал. 6). Ця точка відповідає куту $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, а точки лінії тангенсів, у яких ординати менші за $\sqrt{3}$, відповідають кутам від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{3}$. Зауважимо, що кут $\frac{\pi}{3}$ буде входити у відповідь (оскільки знак нерівності ≤), а кут $-\frac{\pi}{2}$ - не буде, оскільки tg $(-\frac{\pi}{2})$ — не існує. Отже на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ нерівність $tgt \le \sqrt{3}$ має розв'язки $-\frac{\pi}{2} < t \le \frac{\pi}{3}$. Враховуючи періодичність, маємо:

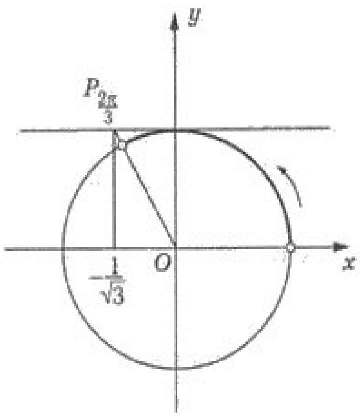
$$-\frac{\pi}{2} + \pi k < t \le \frac{\pi}{3} + \pi k, \ \ k \in Z.$$



мал. 6



мал. 7



мал. 8

Приклад 6. Розв'язати нерівність $tgt \ge \sqrt{3}$.

Розв'язання. Використовуючи малюнок 6 та періодичність, маємо:

$$\frac{\pi}{3} + \pi k \le t < \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \ k \in Z.$$

Пряму *m*, яка проходить через точку (0;1) перпендикулярно до осі ординат, називають лінією котангенсів (мал. 7). Абсциса точки C_α перетину прямої OP_α з лінією котангенсів дорівнює котангенсу α.

Приклад 7. Розв'язати нерівність $ctgt > -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Розв'язання (мал. 8). Використовуючи лінію котангенсів, отримаємо розв'язок нерівності на проміжку $(0;\pi)$: $0 < t < \frac{2\pi}{3}$.

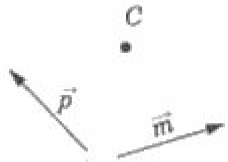
Далі використаємо періодичність: $\pi k \le t \le \frac{2\pi}{3} + \pi k, \ \ k \in Z.$

Лекція 6

Вектори. Лінійні операції над векторами. Декартова система координат.

Поняття вектора.

Відрізок, для якого визначено напрям називають **вектором** (мал. 1). Вектор зручно зображувати відрізком із стрілкою, що показує напрям векторів. На малюнку 1 точку *A* називають початком вектора, точку *B* - кінцем вектора. Вектори позначають двома великими латинськими літерами із стрілкою над ними. Вектор, зображений на малюнку 1, записують так:. Перша буква позначає початок вектора, а друга - кінець.



мал. 1 мал. 2

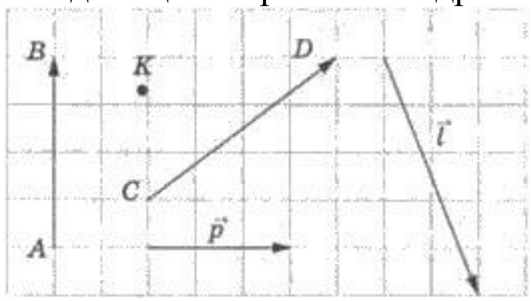
Інколи вектори позначають однією малою латинською буквою. На малюнку 2 вектори $\vec{p}$ і $\vec{m}$.

Вектор, у якого початок збігається з кінцем, називають **нульовим вектором**. На малюнку такий вектор зображують точкою. Якщо, наприклад, точку, що зображує нульовий вектор, позначити буквою C, то даний нульовий вектор можна позначити $\overrightarrow{CC}$ (мал. 2). Нульовий вектор позначають також символом $\vec{0}$. Напрям нульовий вектор не має.

Довжиною (або модулем, або абсолютною величиною) вектора називають довжину відрізка AB.

Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ позначають так: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, модуль вектора $\left|\vec{p}\right|$ позначають так: $\left|\vec{p}\right|$. Довжина нульового вектора дорівнює нулю: $\left|\vec{0}\right| = 0$.

Приклад. Знайдіть модулі векторів, зображених на малюнку 3, якщо сторони клітинки дорівнює одиниці вимірювання відрізків.



мал. 3

Розв’язання. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 4$; $\left|\overrightarrow{KK}\right| = \left|\vec{0}\right| = 0$;

$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$; $\left|\vec{p}\right| = 3$;

$\left|\vec{l}\right| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$.

Колінеарні вектори. Рівні вектори.

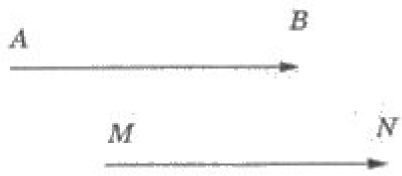
Колінеарними називають два ненульових вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Наприклад, на малюнку 3 колінеарними пари векторів $\vec{a}$ і $\vec{m}$, $\vec{a}$ і $\vec{c}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ тощо. Колінеарні вектори можуть бути співнапрямленими, тобто однаково напрямленими (вектори $\vec{a}$ і $\vec{m}$ на малюнку 4), або протилежно напрямленими (вектори $\vec{a}$ і $\vec{d}$ на малюнку 4). Записують це так: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{m}$, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{d}$.

Два вектори називають **рівними**, якщо вони співнапрямлені і їх довжини рівні.

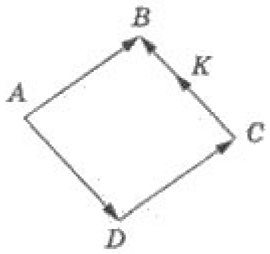
На малюнку 5 вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{MN}$ рівні. Це записують так $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$.

мал. 4



мал. 5

Приклад. ABCD – ромб (мал. 6). Чи рівні вектори: 1) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$; 3) $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{CB}$; 4) $\overrightarrow{CB}$ і $\overrightarrow{CK}$?



мал. 6

Розв’язання. 1) Так, оскільки $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$ і $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$.

2) Оскільки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$ не є співнапрямленими, то вони не є рівними.

3) $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{CB}$ також не рівні між собою, оскільки не співнапрямлені.

4) $\overrightarrow{CB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CK}$, але $|\overrightarrow{CB}| \neq |\overrightarrow{CK}|$, тому вектори $\overrightarrow{CB}$ і $\overrightarrow{CK}$ не рівні між собою.

Додавання і віднімання векторів.

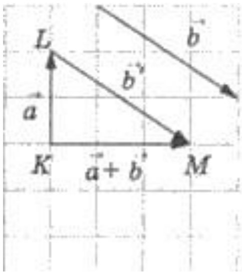
При **додаванні векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$, можна використовувати правило трикутника або правило паралелограма.

За правилом трикутника:

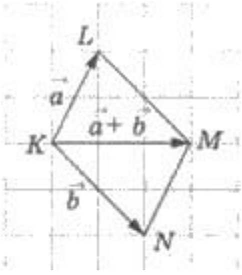
1) від кінця вектора $\vec{a}$, відкладаємо вектор $\vec{b}'$, що дорівнює вектору $\vec{b}$;

2) вектор, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець з кінцем вектора $\vec{b}'$, є сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

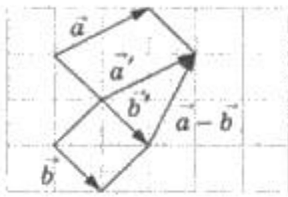
Зауважимо, що з малюнка 7 слідує, що $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{KM}$. Дану векторну рівність можна використовувати при спрощені виразів із векторами.



мал. 7



мал. 8



мал. 9

Приклад 1. Знайдіть суму векторів $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{BK}$.

Розв'язання. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{BK}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK})+\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{AM}$.

За правилом паралелограма (мал. 8):

1) відкладаємо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ від спільного початку (точки К);

2) будуємо на даних векторах паралелограм;

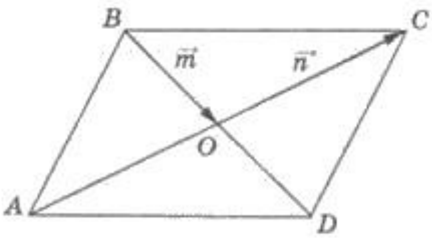
3) вектор, що зображується діагоналлю паралелограма, яка виходить з точки *К*, є сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Правило побудови різних двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (мал. 9):

1) відкладаємо від однієї точки вектор $\vec{a}'$, що дорівнює вектору $\vec{a}$ і вектор $\vec{b}'$, що дорівнює вектору $\vec{b}$;

2) вектор, початок якого збігається з кінцем вектора $\vec{b}'$, а кінець — з кінцем вектора $\vec{a}'$, є різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Приклад 2. Діагоналі паралелограма ABCD перетинаються в точці О (мал. 10), $\overrightarrow{BO}=\vec{m}; \overrightarrow{OC}=\vec{n}$. Виразіть вектори $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{DC}$ через вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$.



мал. 10

Розв'язання. 1) $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}=\vec{m}+\vec{n}$.

Але $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, тому $\overrightarrow{AD}=\vec{m}+\vec{n}$.

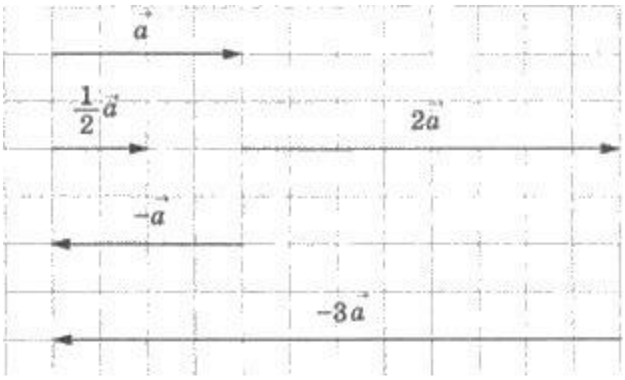
2) $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}$, звідки $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$.

Але $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}$, тому $\overrightarrow{DC}=\vec{n}-\vec{m}$.

Множення вектора на число.

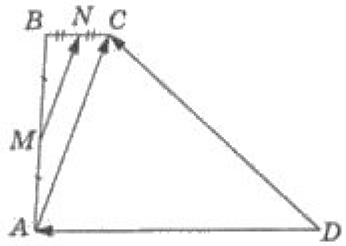
Нехай задано вектор $\vec{a}$. Необхідно побудувати вектор $\lambda\vec{a}$, де $\lambda \neq 0$ – число.

Модуль вектора $\lambda\vec{a}$ дорівнює $|\lambda||\vec{a}|$. Вектор $\lambda\vec{a}$ співнапрямлений з вектором, якщо $\lambda > 0$, і протилежно напрямлений з вектором $\vec{a}$, якщо $\lambda < 0$.



мал. 11

На малюнку 11 задано вектор $\vec{a}$ та побудовані вектори $2\vec{a}, \frac{1}{2}\vec{a}, -\vec{a}, -3\vec{a}$.



мал. 12

Приклад. M і N – середини сторін AB і BC трапеції $ABCD$ (мал. 12); $\overrightarrow{DC} = \vec{c}, \overrightarrow{DA} = \vec{a}$. Виразіть вектор $\overrightarrow{MN}$ через вектори $\vec{c}$ і $\vec{a}$.

Розв'язання. 1) В ΔACD: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC}$; $\vec{a} + \overrightarrow{AC} = \vec{c}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$.

2) MN – середня лінія ΔABC, тому $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a})$.

Координати вектора.

Координатами вектора $\overrightarrow{AB}$ з початком $A(x_1;\ y_1)$ і кінцем $B(x_2;\ y_2)$ називають числа $x = x_2 - x_1$ і $y = y_2 - y_1$.

Записують вектор $\overrightarrow{AB}$, вказуючи його координати так: $\overrightarrow{AB}(x;\ y)$. Наприклад, $\overrightarrow{KL}(3; -2), \vec{b}(-2; 0)$.

Приклад 1. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо A(-4; 1), B(2; -5).

Розв'язання. $\overrightarrow{AB}(2 - (-4); -5 - 1)$, тобто $\overrightarrow{AB}(6; -6)$.

Модуль вектора $\overrightarrow{AB}(x;\ y)$ дорівнює $\sqrt{x^2 + y^2}$. Отже, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Приклад 2. Знайдіть модуль вектора: $\overrightarrow{KL}(-3; 4), \vec{p}(2; -1)$.

Розв'язання.

1) $\left|\overrightarrow{KL}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$;

2) $|\vec{p}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$.

Приклад 3. Модуль вектора $\vec{c}(x; -8)$ дорівнює 10. Знайдіть x.

Розв'язання. $|\vec{c}| = \sqrt{x^2 + (-8)^2} = \sqrt{x^2 + 64}$.

За умовою $\sqrt{x^2 + 64} = 10$; $x^2 + 64 = 100$; $x^2 = 36$; $x = 6$ або $x = -6$.

Рівні вектори мають відповідно рівні координати. І навпаки: якщо у векторів відповідні координати рівні, то вектори рівні.

Приклад 4. Дано точки $A(-2; 3)$, $B(4; -1)$, $C(x; -2)$, $D(0; y)$. Знайдіть x і y, якщо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Розв'язання. $\overrightarrow{AB} = \left(4-(-2); -1-3\right)$, тобто $AB = (6; -4)$;

$\overrightarrow{CD} = \left(0-x; y-(-2)\right)$, тобто $\overrightarrow{CD} = (-x; y+2)$. Оскільки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $-x = 6$ і $y + 2 = -4$. Звідки $x = -6$; $y = -6$.

Сума і різниця векторів, що задані координати.

Сумою векторів $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ є вектор $\vec{c}(x_1 + x_2; y_1 + y_2)$.

Наприклад сумою векторів $\vec{a}(-2; 3)$ і $\vec{b}(9; -1)$ є вектор $\vec{c}\left(-2+9; 3+(-1)\right)$, тобто $\vec{c}(7; 2)$.

Для суми векторів справджується:

переставна властивість додавання: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

сполучна властивість додавання: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Різницею векторів $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ є вектор $\vec{d}(x_1 - x_2; y_1 - y_2)$.

Наприклад різницею векторів $\vec{a}(-3; -1)$ і $\vec{b}(2; -5)$ є вектор $\vec{d}(-3-2; -1-(-5))$, тобто $\vec{d}(-5; 4)$.

Приклад 1. Дано точки $A(-2; 6)$ і $B(0; 2)$. Знайдіть координати точки C такої, що $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 0$.

Розв'язання. Нехай координати точки $C(x; y)$. Тоді $\overrightarrow{CA}(x+2; y-6); \overrightarrow{CB}(x; y-2)$, а $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ має координати $(x + 2 + x; y - 6 + y - 2)$, тобто $(2x + 2; 2y - 8)$. За умовою $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 0$. Тому $2x + 2 = 0$ і $2y - 8 = 0$; $x = -1$; $y = 4$.

Приклад 2. При якому значення x модуль вектора $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ найменший, якщо $\vec{a}(-1; 3), \vec{b}(x; 4), \vec{c}(2; 3)$.

Розв'язання. Нехай $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. Тоді $\vec{d} = (-1 + x - 2; 3 + 4 - 3)$, тобто $\vec{d} = (x-3; 4)$. Маємо $|\vec{d}| = \sqrt{(x-3)^2 + 4^2}$. Модуль вектора $\vec{d}$ буде найменшим, коли вираз $(x - 3)^2$ прийме найменше значення. Це значення дорівнює 0 і досягається, якщо $x = 3$.

Множення вектора, що задано координатами, на число. Умова колінеарності векторів.

Добутком $\vec{a}(x; y)$ на число $\lambda(\lambda \neq 0)$ є вектор $\lambda\vec{a}(\lambda x; \lambda y)$.

Наприклад, добуток вектора $\vec{a}(-2;3)$ на число 4 є вектор $4\vec{a}(-8;12)$, на число -1 — вектор $-\vec{a}(2;-3)$, на число -3 — вектор $-3\vec{a}(6;-9)$.
Для добутку вектора на число справджується властивості:
Для будь-якого вектора $\vec{a}$ і чисел α і β виконується

$$(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}.$$

Для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і числа α виконується

$$\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}.$$

Приклад 1. Дано вектори $\vec{a}(1;-4)$ і $\vec{b}(-2;3)$. Знайдіть координати вектора: 1) $\vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$; 2) $\vec{n} = 3\vec{a} - \vec{b}$.
Розв’язання. Запис розв’язання зручно вести так:

$$1)\quad +\begin{array}{r} 2\vec{a}(2;-8) \\ 3\vec{b}(-6;9) \\ \hline \vec{m}(-4;1) \end{array} \qquad\qquad 2)\quad -\begin{array}{r} 3\vec{a}(3;-12) \\ \vec{b}(-2;3) \\ \hline \vec{n}(5;-15) \end{array}$$

Вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a}$, можна подати у вигляді $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, λ ≠ 0 і навпаки, якщо $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — колінеарні.
З цього можна отримати умову колінеарності векторів, що задані координатами.
Нехай задано вектори $\vec{a}(x_1;y_1)$ і $\vec{b}(x_2;y_2)$, якщо

1) $x_1 = x_2 = 0$, то вектори(0; y_1) і(0; y_2) — колінеарні, причому, якщо $\frac{y_2}{y_1} > 0$, то $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$; а якщо $\frac{y_2}{y_1} < 0$, то $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.

2) $y_1 = y_2 = 0$, то вектори $\vec{a}$ (x_1; 0) і $\vec{b}$ (x_2; 0) - колінеарні, причому, якщо $\frac{x_2}{x_1} > 0$, то $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, а якщо $\frac{x_2}{x_1} < 0$, то $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.

3) $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, якщо $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \lambda$, причому, якщо λ > 0, то $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$; а якщо λ < 0, то $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.
Приклад 2. При якому значення y вектори $\vec{a}(2;-7)$ і $\vec{b}(-6;y)$ колінеарні? Співнапрямлені чи протилежно напрямлені ці вектори?
Розв’язання. Маємо $\frac{2}{-6} = \frac{-7}{y}$; $2y = 42$; $y = 21$. Оскільки $\frac{2}{-6} = \frac{-7}{y} = -\frac{1}{3} < 0$, то $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.

Розкладання вектора за двома колінеарними векторами.

Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відмінні від нуля неколінеарні вектори. Тоді будь-який вектор $\vec{c}$ можна подати у вигляді $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \beta\vec{b}$, де λ і β – деякі числа.

В цьому випадку кажуть, що вектор $\vec{c}$ розклали за вектором $\vec{a}$ і $\vec{b}$.
Приклад. Розкласти вектор $\vec{c}(-7;-10)$ за векторами $\vec{a}(-2;1)$ і $\vec{b}(1;4)$.
Розв’язання. Знайдемо числа λ і β в формулі $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\beta\vec{b}$,

$$+\begin{array}{l}\lambda\vec{a}(-2\lambda;\lambda)\\ \beta\vec{b}(\beta;4\beta)\\ \hline \vec{c}(\beta-2\lambda;\lambda+4\beta)\end{array}$$

Оскільки $\vec{c}(-7;-10)$, то маємо систему $\begin{cases}\beta-2\lambda=-7\\ \lambda+4\beta=-10\end{cases}$. Звідки, λ = 2; β = -3. Отже, $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$ - розклад вектора $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Скалярний добуток векторів.

Скалярним добутком векторів $\vec{a}(x_1;y_1)$ і $\vec{b}(x_2;y_2)$ називають число $x_1x_2+y_1y_2$.

Позначають скалярний добуток векторів так само, як добуток чисел $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Приклад 1. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}(-2;7)$ і $\vec{b}(1;-2)$.

Розв’язання. $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\cdot1+7\cdot(-2)=-2-14=-16$.

Властивості скалярного добутку векторів.

Для будь-яких векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ та чисел λ, виконується рівність:

$$1.\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$
$$2.\ (\lambda\vec{a})\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$$
$$3.\ (\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

Скалярний добуток векторів можна знайти і по-іншому.

Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх модулів на косинус кута між ними, тобто $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$, де φ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Приклад 2. Знайдіть скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=2; |\vec{b}|=3$ і кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює: 1) 30°; 2) 120°.

Розв’язання.

$$1)\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi=2\cdot3\cos30^\circ=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3};$$

$$2)\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi=2\cdot3\cos120^\circ=6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-3.$$

Формула для знаходження кута між векторами, що задані координатами.

Скалярний добуток векторів дає змогу знайти косинус кута між векторами $\vec{a}(x_1;y_1)$ і $\vec{b}(x_2;y_2)$. Оскільки $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, де φ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Оскільки $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$; $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$; $|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$, то маємо

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

- формулу для знаходження косинуса кута між векторами, що задано координатами.

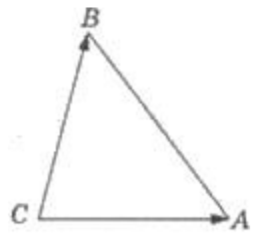
Знаючи, косинус кута між векторами, можна знайти цей кут (за таблицями або за допомогою калькулятора).

Приклад. Знайдіть градусну міру кута *C* трикутника *ABC*, якщо *A*(4; 6), *B*(4; 8), *C*(2; 6).

Розв'язання. Кут *C* трикутника *ABC* збігається з кутом між векторами $\vec{CA}$ і $\vec{CB}$. Маємо: $\vec{CA}$ (4 - 2; 6 - б), тобто $\vec{CA}$ (2;0); $\vec{CB}$ (4 - 2;8 - б), тобто $\vec{CB}$ (2;2). Тоді

$$\cos C = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|} = \frac{2\cdot 2 + 0\cdot 2}{\sqrt{2^2+0^2}\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{4}{2\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

звідки $\angle C = 45^0$.



мал. 13

Умова перпендикулярності векторів, що задані координатами.

Оскільки $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, де φ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Маємо умову перпендикулярності векторів, що задані координатами.

Приклад. При якому значенні *x* вектори $\vec{a}(x;-2)$ і $\vec{b}(4;10)$ перпендикулярні?

Розв'язання, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 4x - 20$. Вектори перпендикулярні, якщо $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, тобто $4x - 20 = 0$. Звідки, $x = 5$.

Скалярний квадрат вектора.

Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату модуля цього вектора: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

З останньої рівності випливає, що $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Розглянемо використання скалярного квадрата при розв'язуванні задач.

Приклад. Дано вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$, $|\vec{b}| = 2; |\vec{c}| = 3$, кут φ між векторами $\vec{b}$ і $\vec{c}$ дорівнює 120°. Знайдіть $|2\vec{c} - 3\vec{b}|$.

Розв'язання. Оскільки $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$, то

$$|2\vec{c} - 3\vec{b}| = \sqrt{(2\vec{c} - 3\vec{b})^2} = \sqrt{(2\vec{c} - 3\vec{b})(2\vec{c} - 3\vec{b})} = \sqrt{4\vec{c}^2 - 6\vec{b}\vec{c} - 6\vec{b}\vec{c} + 9b^2} =$$

$$= \sqrt{4|\vec{c}|^2 - 12\vec{b}\vec{c} + 9|\vec{b}|^2} = \sqrt{4|\vec{c}|^2 - 12 \cdot |\vec{b}||\vec{c}|\cos 120^\circ + 9|\vec{b}|^2} =$$

$$= \sqrt{4 \cdot 3^2 - 12 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 9 \cdot 2^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}\ .$$

Лекція 7
Елементи комбінаторики.
Правило суми і правило добутку

Багато комбінаторних задач можуть бути розв'язані за допомогою двох важливих правил, які називають відповідно правило суми і правило добутку.

Спочатку розглянемо **правило суми**:

якщо деякий елемент A можна вибрати m способами, а елемент B — r способами (причому будь-який вибір елемента A відрізняється від вибору елемента B), то вибрати A або B можна $m + r$ способами.

Приклад 1. В ящику знаходиться 7 білих і 4 чорних кульки. Тоді вибрати одну кульку: білу або чорну можна $7 + 4 = 11$ способами.

Зрозуміло, що правило суми можна розповсюдити на три і більше елементів.

Сформулюємо **правило добутку**:

якщо деякий елемент A можна вибрати m способами, а після кожного такого вибору інший елемент B можна вибрати (незалежно від вибору елемента A) — r способами, то пару об'єктів A і B можна вибрати mr способами.

Приклад 2. У шкільній їдальні є вибір з 3 перших і 5 других блюд. Тоді обід з першого і другого блюда можна обрати $3 \cdot 5 = 15$ способами.

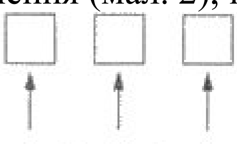
Правило добутку розповсюджується на три і більше елементів.

Приклад 3. Скільки трицифрових чисел можна скласти з цифр 1; 2; 3; 4; 5, якщо в числі: 1) цифри не повторюються; 2) цифри повторюються.

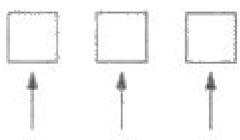
Розв'язання.

1) Маємо 5 способів для сотень числа (мал. 1). Після того, як місце сотень заповнене (наприклад, цифрою 1), для десятків залишається 4 способи. Міркуючи далі, для одиниць - 3 способи. Отже, маємо: «5 способів, і після кожного з них — 4, і після кожного з них — 3 способи». За правилом добутку маємо $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ чисел.

2) Якщо цифри у числі повторюються, то на кожне з трьох місць є по 5 варіантів заповнення (мал. 2), і тоді всіх чисел буде $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.



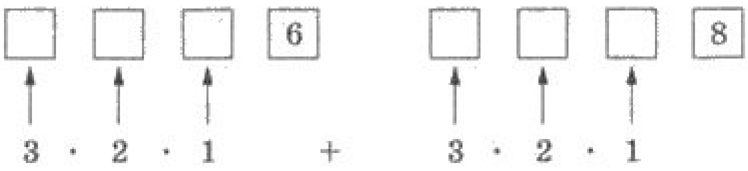
мал. 1



мал. 2

Приклад 4. Скільки парних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 6; 7; 8; 9, якщо в числі цифри не повторюються?

Розв'язання. Парне чотирицифрове число можна отримати, якщо останньою цифрою буде 6 або 8. Чисел, у яких остання цифра 6 буде $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (мал. 3), чисел, у яких остання цифра 8 буде також 6. За правилом суми всього парних чисел, що задовольняють умові, буде $6 + 6 = 12$.



мал. 3

Поняття факторіалу.

Факторіалом числа *n*, де *n* — ціле невід’ємне число називають добуток всіх натуральних чисел від 1 до *n*.

Позначають це так **n!** Отже, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n - 1) \cdot n$. За означенням приймають **0! = 1**. Наприклад, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Приклад. Спростити вираз $\frac{6!}{5!}$.

Розв’язання. Маємо $\frac{6!}{5!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 6}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}} = 6$

Розміщення.

Нехай дано множину *X* з *n* елементів x_1, x_2, x_{n-1}, x_n.

Розміщенням з *n* елементів по *m* ($m < n$) називають будь-яку впорядковану підмножину *У* множини *X*, причому дві такі підмножини вважають різними, якщо вони відрізняються складом або порядком елементів.

Приклад 1. Нехай дано множину $X = \{1;2;3\}$. Тоді по одному можна скласти такі розміщення: (1), (2), (3) - їх буде 3; по два можна скласти такі розміщення: (1;2), (1;3), (2;1), (2;3), (3;1), (3;2) - їх буде 6; по три можна скласти такі розміщення: (1;2;3), (1;3;2), (2;1;3), (2;3;1), (3;1;2), (3;2;1) - їх буде 6.

Кількість розміщень з *n* елементів по *m* позначають A_n^m. Можна записати $A_3^1 = 3$; $A_3^2 = 6$; $A_3^3 = 6$.

Формула для обчислення:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-2))(n-(m-1)).$$

Цю формулу можна запам’ятати за допомогою такого правила:

A_n^m є добутком *m* натуральних чисел, починаючи з *n*, взятих у порядку спадання.

Наприклад, $A_7^4 = \frac{7!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

A_n^m можна обчислювати ще й за такою формулою:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Приклад 2. Розклад на день містить 6 уроків. Визначити кількість всіх можливих розкладів при виборі з 9 предметів, при умові, що жоден предмет не стоїть у розкладі двічі.

Розв’язання. Зрозуміло, що таких розкладів буде

$$A_9^6 = \frac{9!}{3!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 60480.$$

Приклад 3. Скільки різних правильних дробів можна скласти з чисел 1; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19, які використовують для запису чисельника і знаменника дробу?

Розв'язання. Дробів, у яких чисельник не дорівнює знаменнику можна скласти A_8^2 штук, але лише половина з них правильні. Отже, шукана кількість дробів $\frac{1}{2} \cdot A_8^2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 = 28$.

Перестановки.

Перестановкою з n елементів називають будь-яку впорядковану множину з усіх цих елементів, причому дві такі множини називаються різними, якщо вони відрізняються між собою порядком елементів.

Кількість перестановок з n елементів позначають $\mathbf{P_n}$. З означення випливає, що $P_n = A_n^n$. Тоді враховуючи формулу для A_n^m та 0! = 1, маємо $P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$. Отже, $P_n = n!$

Приклад 1. Скількома способами можна розставити на полиці 6 книжок?

Розв'язання. Очевидно, що шукана кількість способів дорівнює кількості перестановок з 6 елементів (книг): $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Приклад 2. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0; 1; 2; 3, якщо в кожному числі жодна з цифр не повторюється?

Розв'язання. З чотирьох цифр 0; 1; 2; 3 можна утворити P_4 перестановок. Але ті перестановки, які починаються з нуля не будуть записами чотирицифрових чисел, таких перестановок — P_3. Отже, шукана кількість чотирицифрових чисел дорівнює $P_4 - P_3 = 4! - 3! = 3!4 - 3! = 3!(4 - 1) = 6 \cdot 3 = 18$.

Комбінації (сполучення).

Нехай дано множину X з елементів $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$.

Комбінацією (сполученням) з n елементів по m ($m \le n$) називають будь-яку під множину Y множини X; причому дві такі підмножини вважають різними, якщо вони відрізняються складом.

Кількість комбінацій з n елементів по m позначають C_n^m. Для обчислення C_n^m використовують формулу:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Наприклад, $C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$.

Приклад. У вазі 6 червоних і 4 білих троянди. Скількома способами з вази можна вибрати: 1) три троянди; 2) дві червоні і одну білу троянду?

Розв'язання. 1) Оскільки порядок вибору не має значення, то вибрати три троянди з 10 можна C_{10}^3 способами.

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{3! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120 \text{ (способів)}.$$

2) Дві червоні троянди можна вибрати C_6^2 способами, а одну білу – C_4^1 способами. Тому вибрати дві червоні і одну білу троянди можна способами. Маємо

$$C_6^2 \cdot C_4^1 = \frac{6!}{2!(6-2)!} \cdot \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{2! \cdot 4!} \cdot \frac{3! \cdot 4}{3!} = 15 \cdot 4 = 60 \text{ (способів).}$$

Якщо в комбінаторній задачі необхідно вибрати m елементів з n, то важливим є питання необхідно враховувати порядок слідування елементів чи ні. Від цього залежить яку формулу (комбінаторну схему) необхідно використовувати:

якщо порядок має значення, то використовуємо A_n^m, якщо ні — то C_n^m. Пропонується наступна задача-схема.

В класі 20 учнів. Скількома способами з цього класу можна вибрати...

старосту й його заступника	двох чергових
Обов’язки різні! Порядок має значення. $A_{20}^2 = 20 \cdot 19 = 380$	Обов’язки однакові! Порядок не має значення. $C_{20}^2 = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$