

РОБОЧИЙ ЗОШИТ З ГЕОМЕТРІЇ
для слухачів фізико-математичної школи ХАІ

Частина 1

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

РОБОЧИЙ ЗОШИТ З ГЕОМЕТРІЇ
для слухачів фізико-математичної школи ХАІ

Частина 1

Харків «ХАІ» 2021

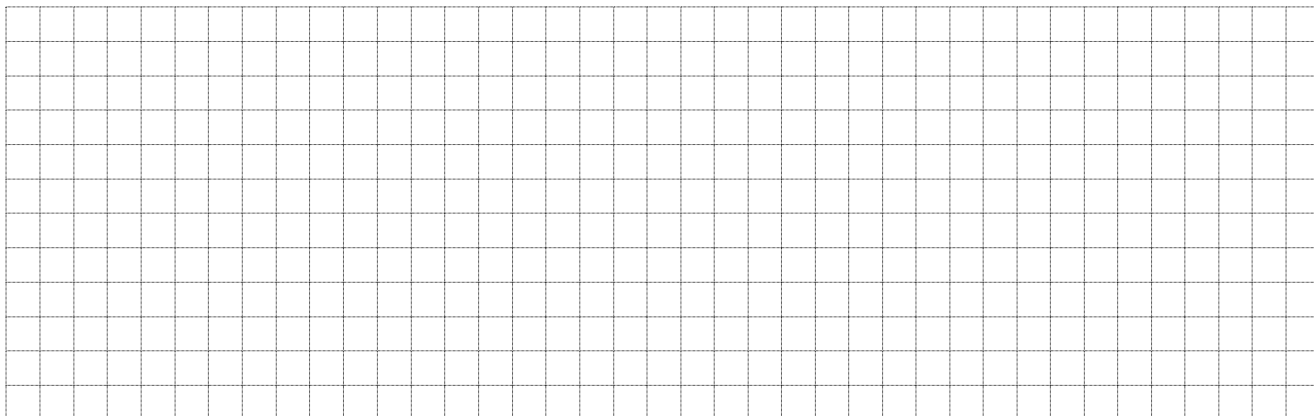
Затверджено науково-методичними комісіями університету
з відповідних галузей знань
4 грудня (протоколи № 3, 5) і 11 грудня (протокол № 4) 2020 року

Укладачі: Н. Л. Кальчук,
О. А. Мураховська,
Н. А. Українець,
О. М. Шехватова

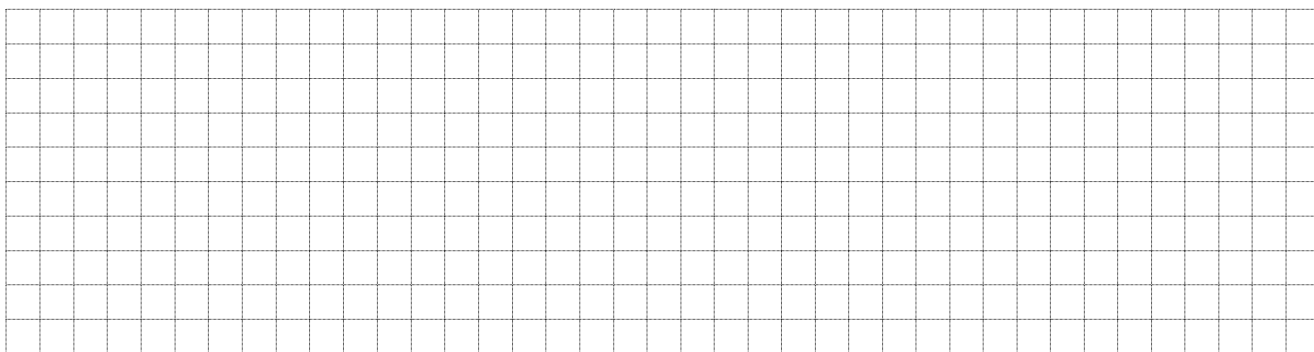
Заняття 1
НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ НА ПЛОЩИНІ
ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ. ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ. ТРИКУТНИКИ

1.1. Точка ***M*** належить відрізку ***KE***, довжина якого дорівнює **27 см**. Знайдіть довжини відрізків ***MK*** і ***ME***, якщо:

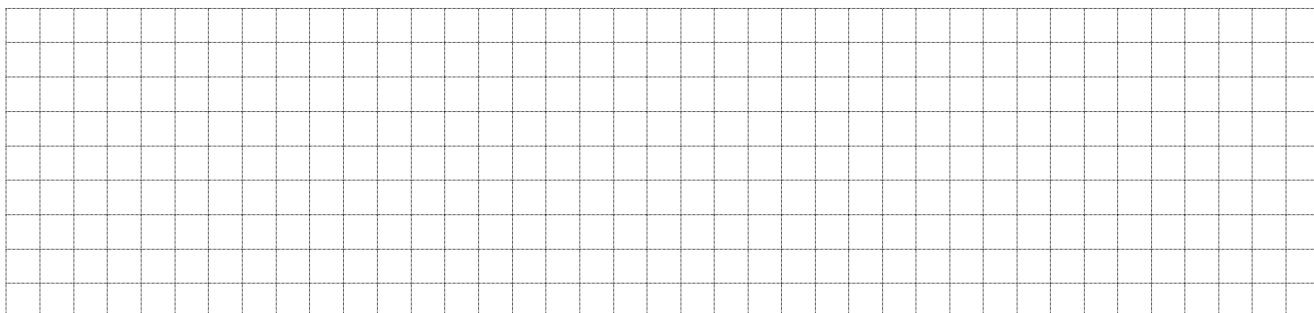
- 1) відрізок ***MK*** на **7 см** менший за відрізок ***ME***;
- 2) відрізок ***MK*** у **2** рази більший за відрізок ***ME***;
- 3) **$MK : ME = 2 : 7$** .



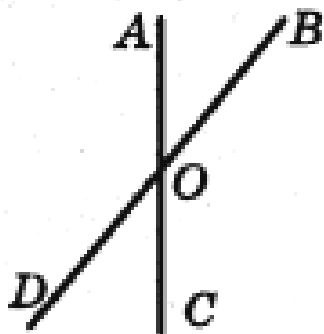
1.2. Чи можуть два суміжних кути дорівнювати: 1) **36° і 154°** ; 2) **59° і 121°** ? Знайдіть кут, суміжний з кутом: 1) **19°** ; 2) **156°** .



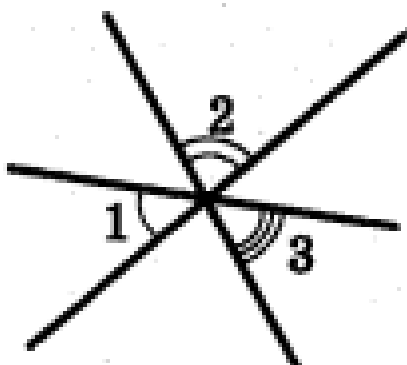
1.3. Кут між бісектрисою та променем, доповняльним до однієї з його сторін, дорівнює **124°** . Знайдіть цей кут.



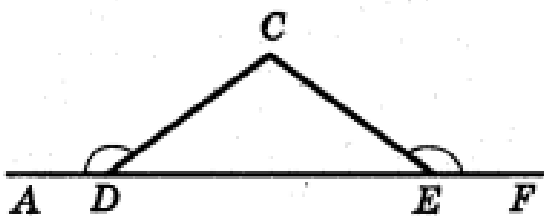
1.4. Кут $\angle AOB$ дорівнює 37° . Знайдіть кути $\angle AOD$, $\angle DOC$, $\angle BOC$.



1.5. Три прямі перетинаються в одній точці. Знайдіть кут 1 , якщо $\angle 2 + \angle 3 = 142^\circ$.



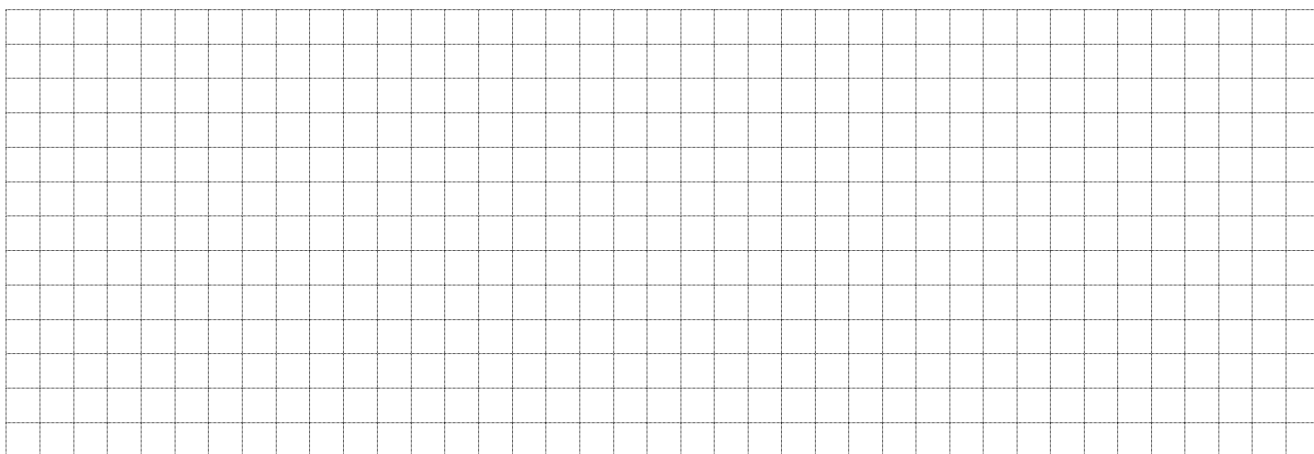
1.6. Дано $\angle ADC = \angle CEF$. Доведіть, що $\angle CDE = \angle CED$.



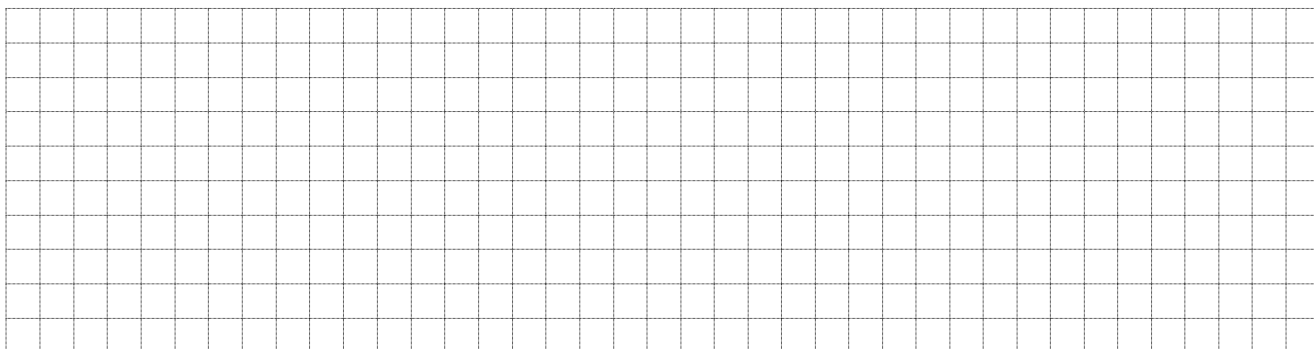
1.7. На рисунку прямі AD , BE і CF перетинаються в точці O . Промінь OE – бісектриса кута FOD . Знайдіть кут BOD , якщо $\angle FOE = 42^\circ$.



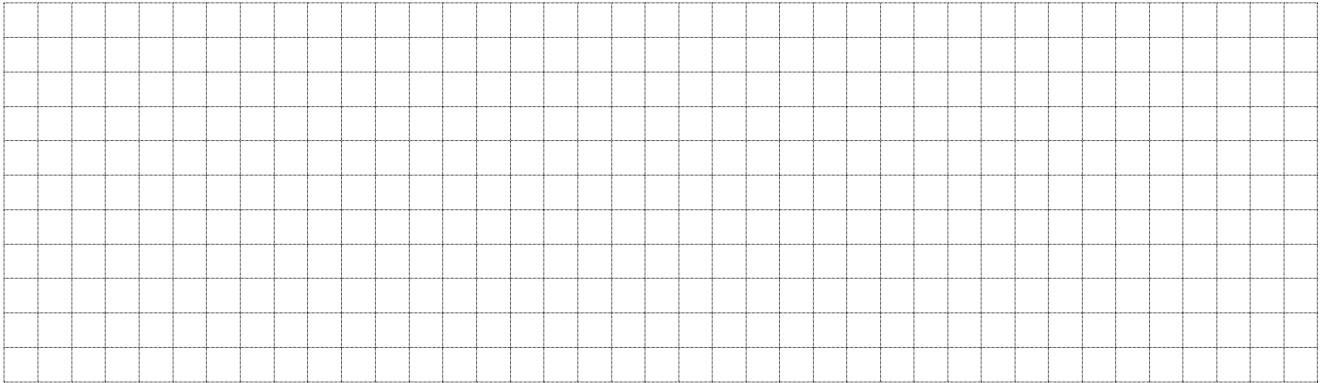
1.8. Одна із сторін трикутника на 41 см менша від другої та в 4 рази менша від третьої. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 107 см .



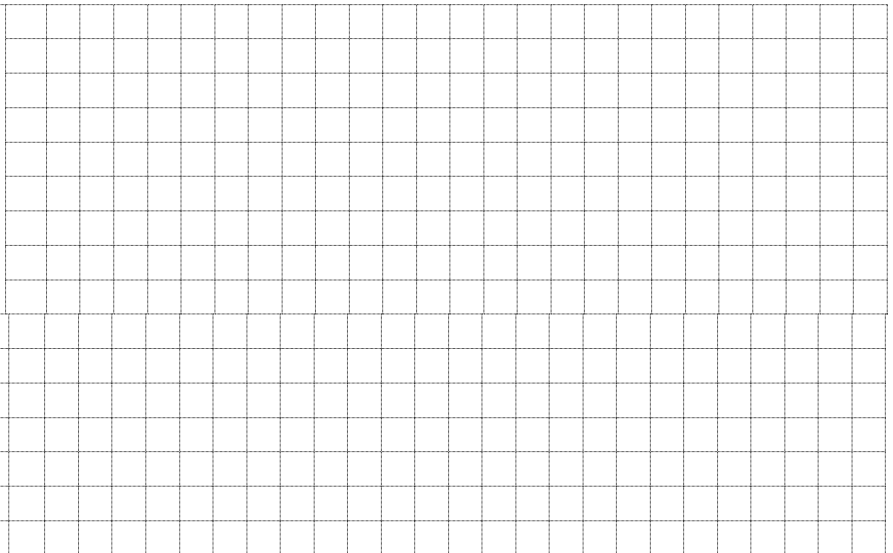
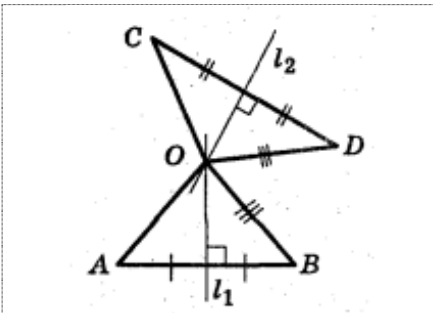
1.9. У трикутника ABC проведено медіани AD і BE . Периметри трикутників ABE і BEC рівні, а периметр трикутника ABD більший за периметр трикутника ADC на 2 см . Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо $AB = 6\text{ см}$.



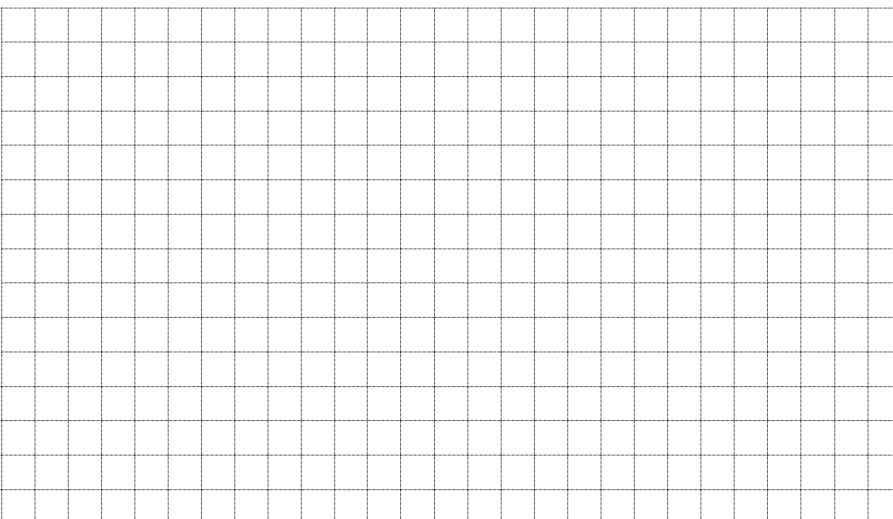
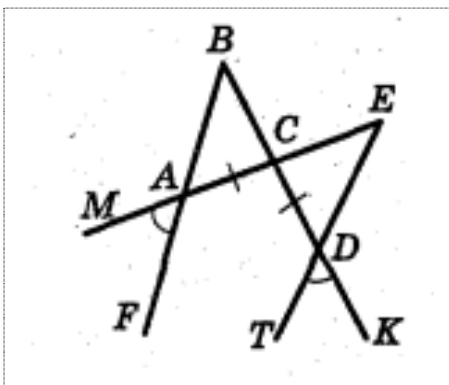
1.10. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює **28 см**, а основа на **8 см** менше бічної сторони.



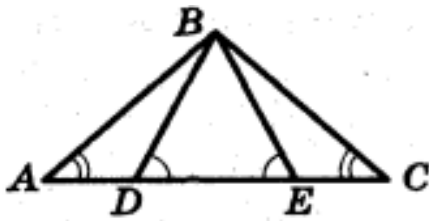
1.11. Серединні перпендикуляри l_1 і l_2 відрізків AB і CD перетинаються в точці O . Знайдіть відрізок OC , якщо $OD = OB$ і $OA = 6$ см.



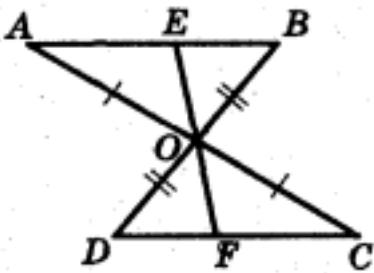
1.12. Дано $AC = CD$, $\angle MAF = \angle TDK$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle DEC$.



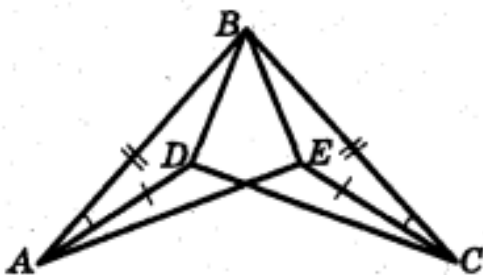
1.13. Дано $AE = DC, \angle BDE = \angle BED, \angle A = \angle C$. Доведіть, що $\angle ABD = \angle CBE$.



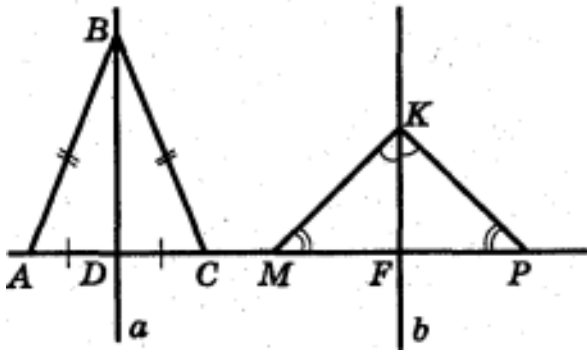
1.14. Дано $AO = OC, BO = OD$. Доведіть, що $\triangle AOE = \triangle COF$.



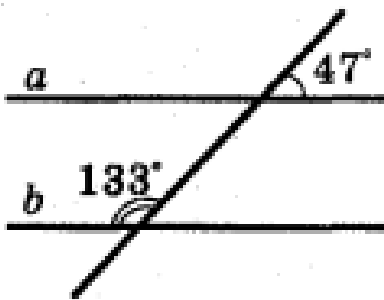
1.15. Дано $AB = BC, AD = CE, \angle BAD = \angle BCE$. Знайдіть довжину відрізка AE , якщо $CD = 8$ см.



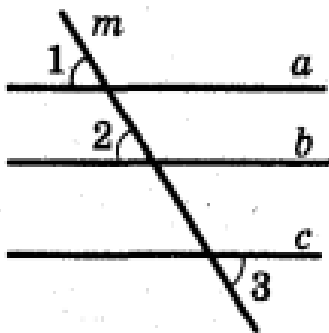
1.16. Доведіть, що прямі a і b паралельні, якщо $AB = BC$, $AD = DC$, $\angle MKF = \angle PKF$, $\angle KMF = \angle KPF$.



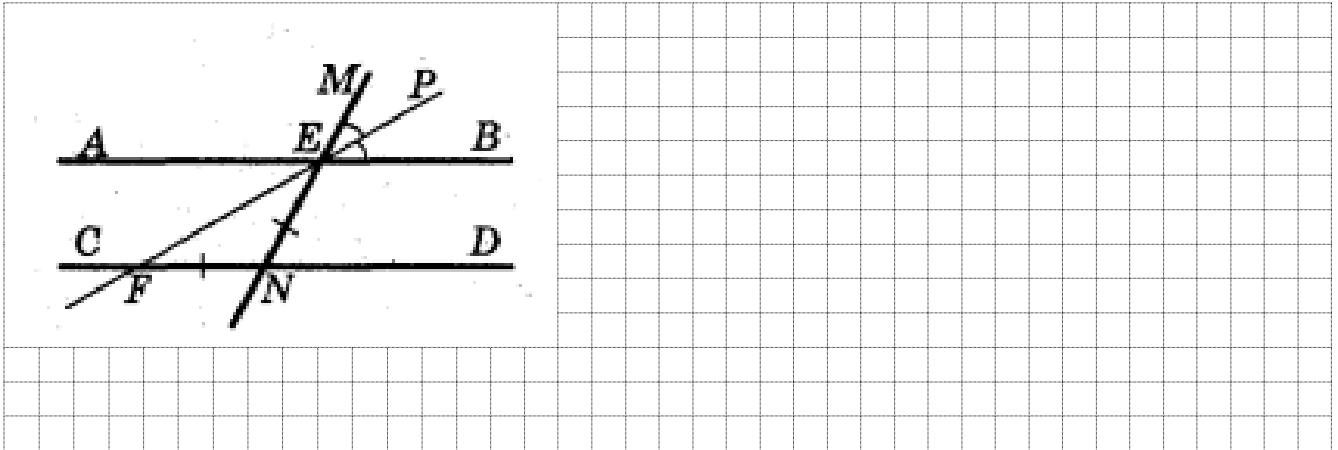
1.17. Чи паралельні прямі на рисунку? Відповідь обґрунтуйте.



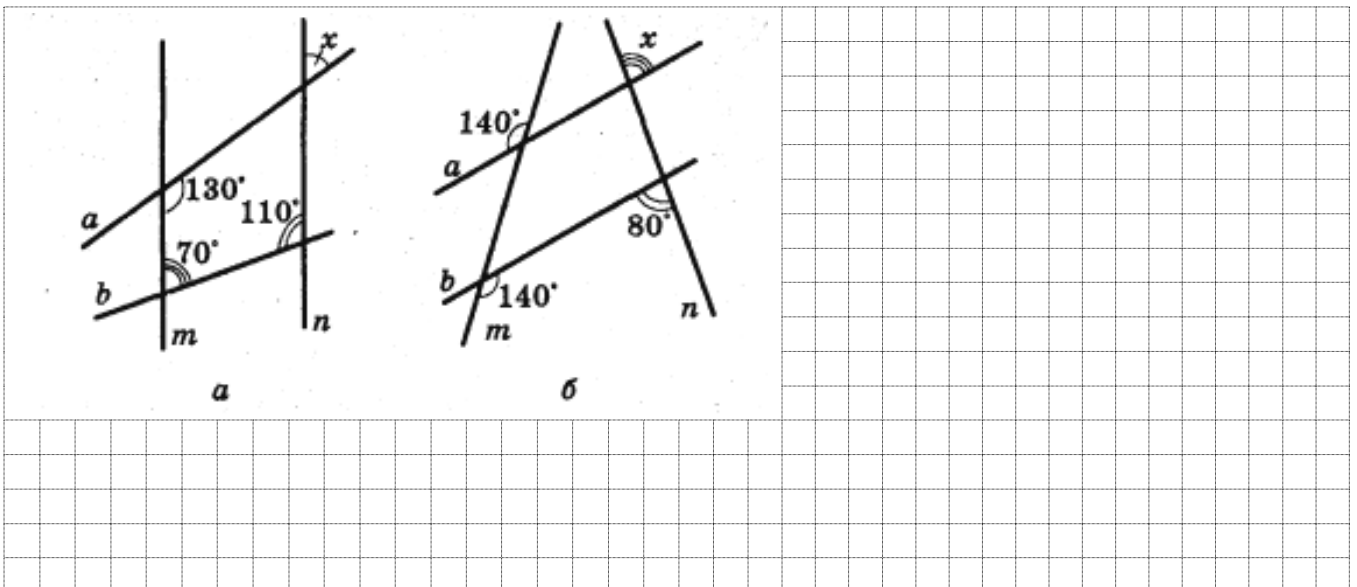
1.18. Доведіть, що прямі a і c паралельні, якщо $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 = \angle 3$.



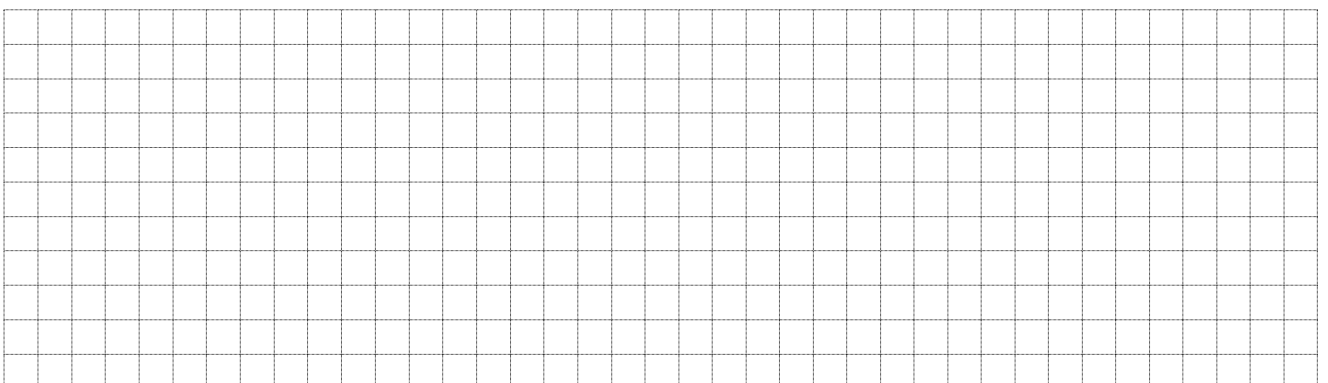
1.19. Доведіть, що прямі AB і CD паралельні, якщо $FN = NE$, $\angle MEP = \angle BEP$.



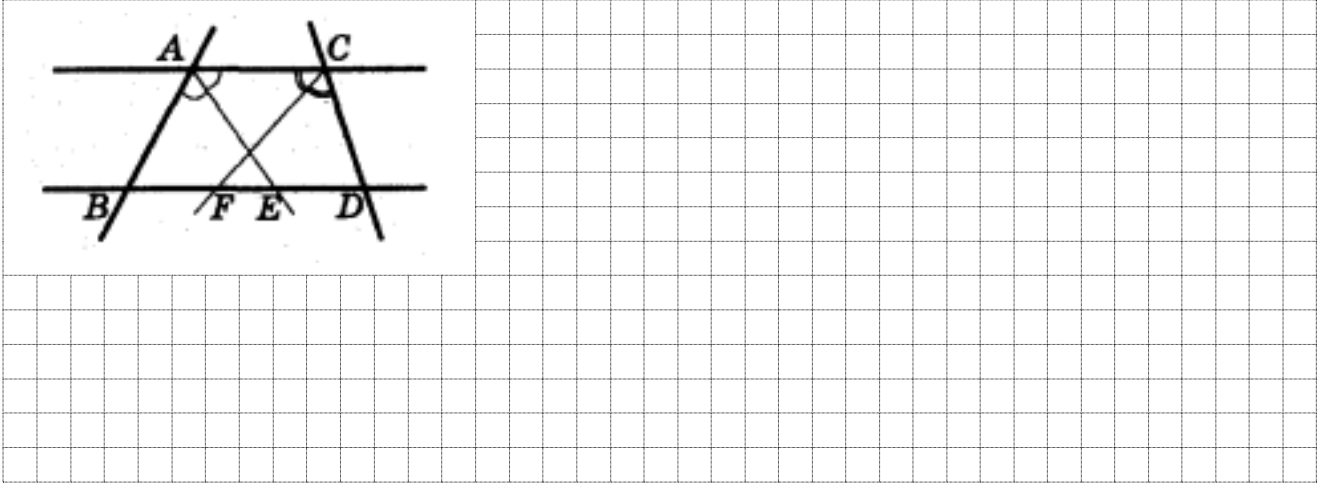
1.20. Знайдіть на рисунку градусну міру кута x .



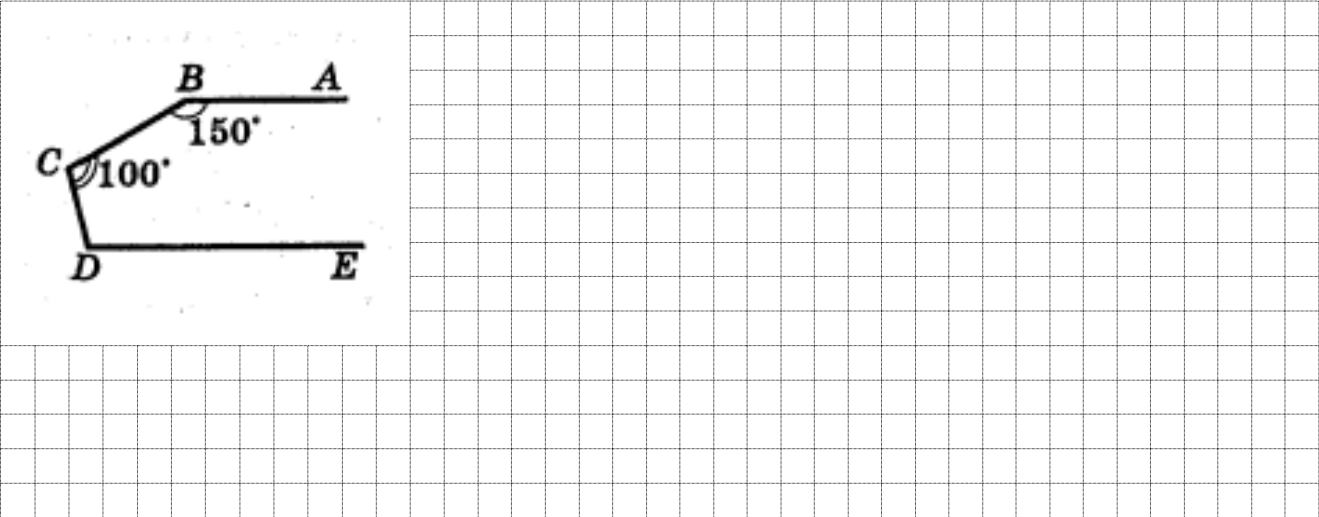
1.21. На стороні BA кута ABC позначено точку D , через яку проведено пряму, паралельну стороні BC . Ця пряма перетинає бісектрису кута ABC в точці E . Знайдіть кути DBE і BDE , якщо $\angle DEB = 25^\circ$.



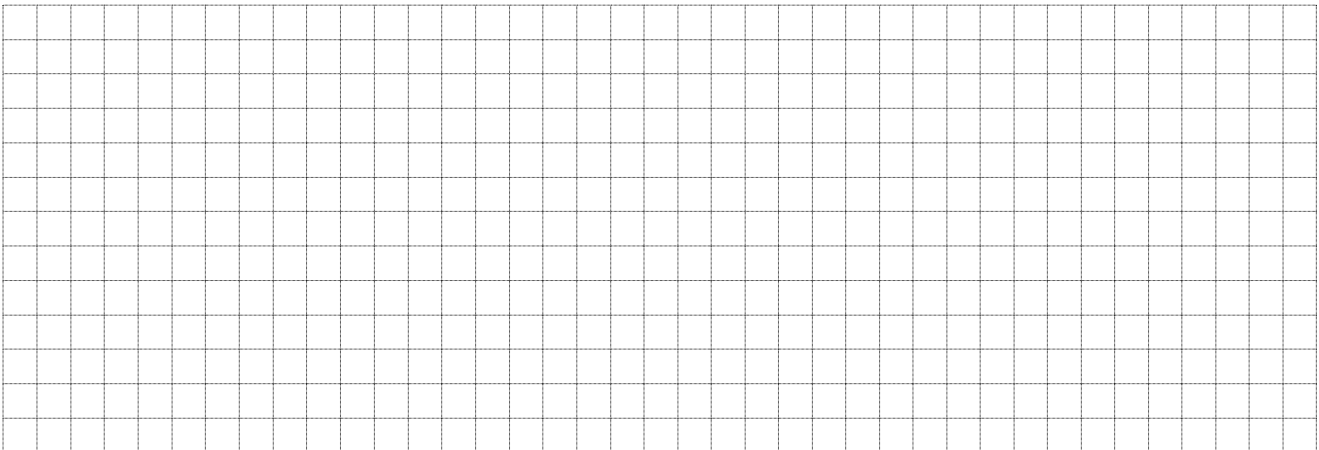
1.22. Бісектриси кутів BAC і ACD перетинають пряму BD у точках E і F . Доведіть, що коли $CD = DF$, то $AB = BE$.



1.23. Знайдіть кут CDE , якщо $\angle ABC = 150^\circ$, $\angle BCD = 100^\circ$, $AB \parallel DE$.



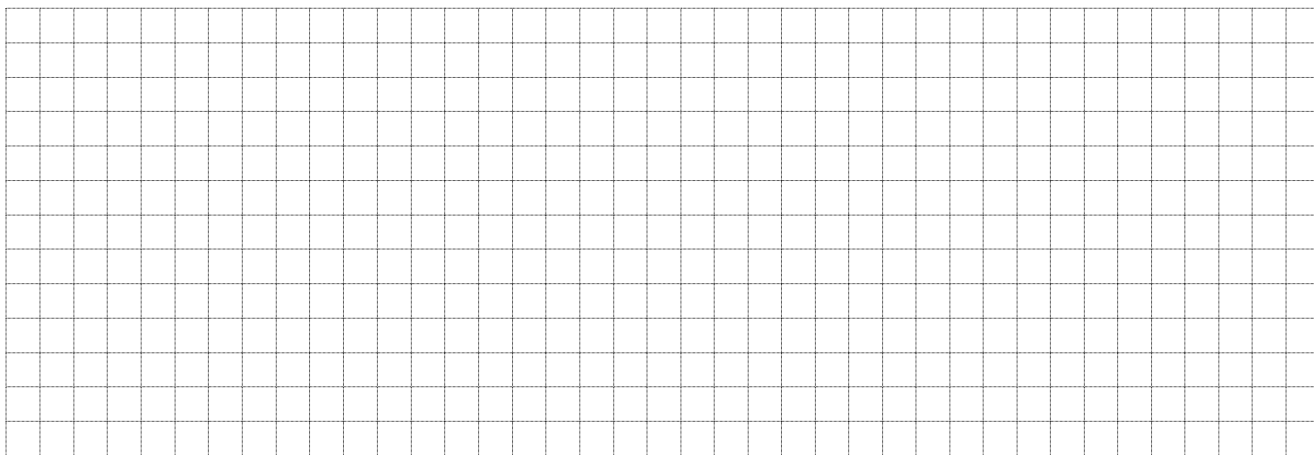
1.24. Доведіть, що бісектриса зовнішнього кута при вершині рівнобедреного трикутника паралельна його основі.



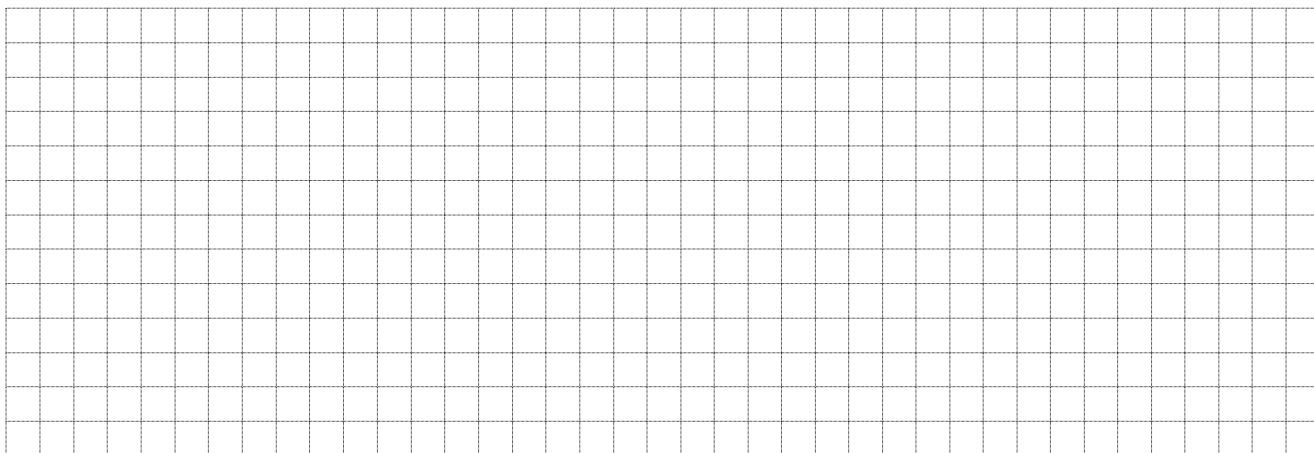
1.25. У трикутнику ABC бісектриси кутів A і C перетинаються в точці O . Доведіть, що $\angle AOC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle ABC$.



1.26. У трикутнику ABC $\angle A = \alpha$, бісектриси зовнішніх кутів при вершинах B і C перетинаються в точці O . Знайдіть кут BOC .



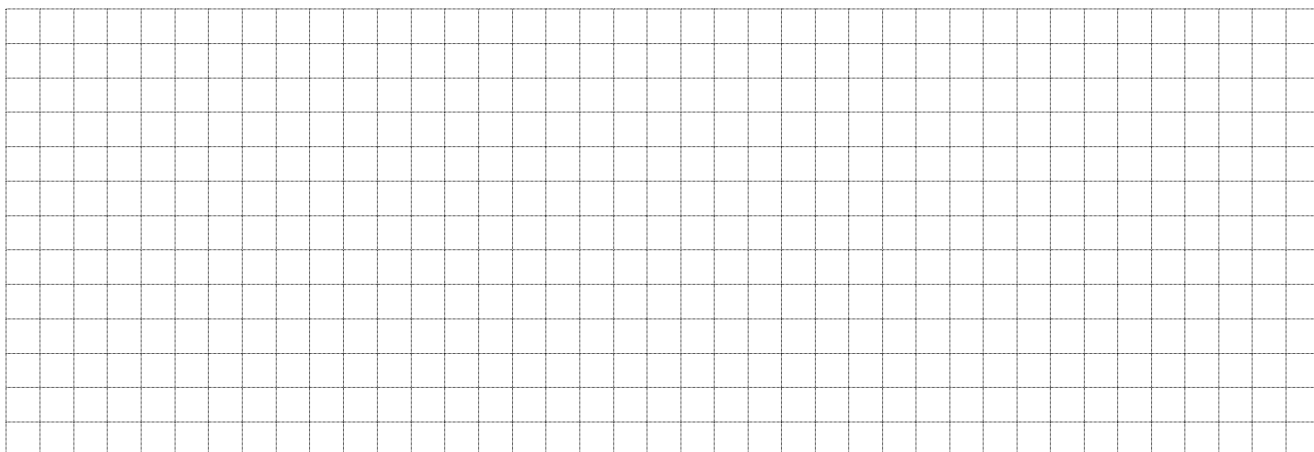
1.27. На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC позначено точки D і E так, що $AC = AE$ і $BC = BD$. Знайдіть кут DCE .



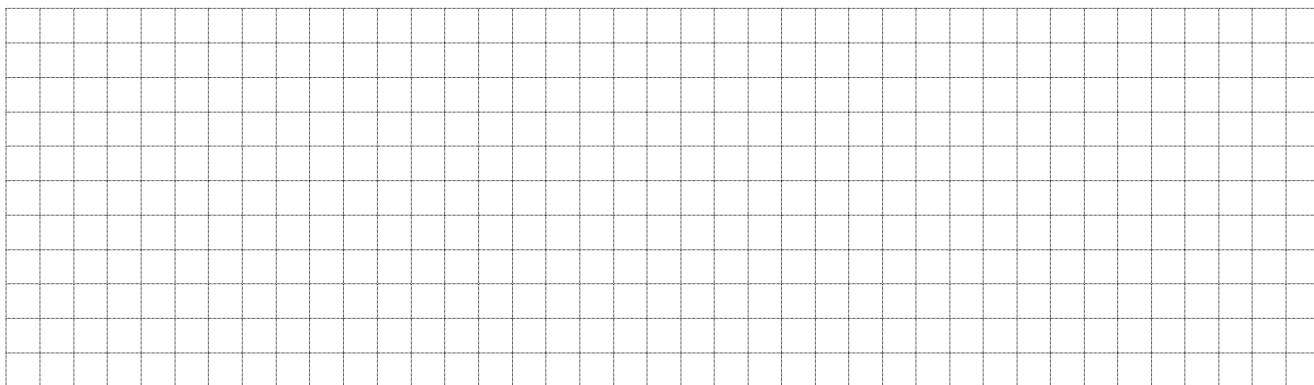
1.28. Бісектриса кута B рівнобедреного трикутника ABC поділяє його на два рівнобедрених трикутники. Знайдіть кути трикутника ABC .



1.29. На сторонах AB і BC трикутника ABC відповідно позначено точки M і N так, що $AN = BM = AB$. Відрізки AN і BM перетинаються в точці P . Доведіть, що $\angle APM = 2\angle ACB$.



1.30. Який кут утворює бісектриса кута, що дорівнює 54° , із променем, доповняльним до однієї з його сторін?



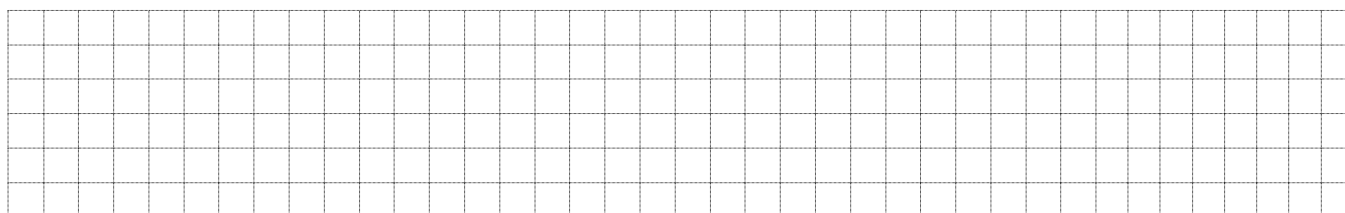
**Додаткові вправи,
які було запропоновано під час проведення ЗНО**

1.31. Три прямі розміщені в одній площині і перетинаються в одній точці (див. рисунок). Визначте градусну міру кута α .



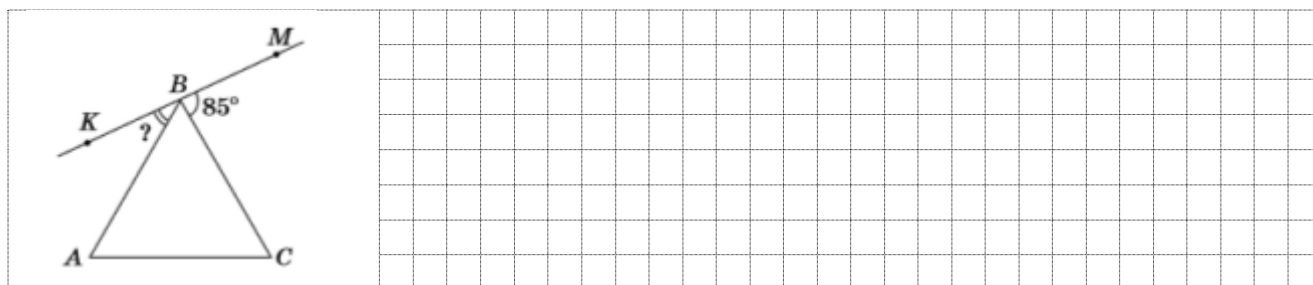
| А | Б | В | Г | Д |
|------------|------------|------------|-------------|------------|
| 80° | 50° | 90° | 100° | 70° |

1.32. На відрізку AB вибрано точку M так, що довжина відрізка AM утричі більша за довжину MB . Визначте довжину відрізка AB , якщо $MB = 12$ см.



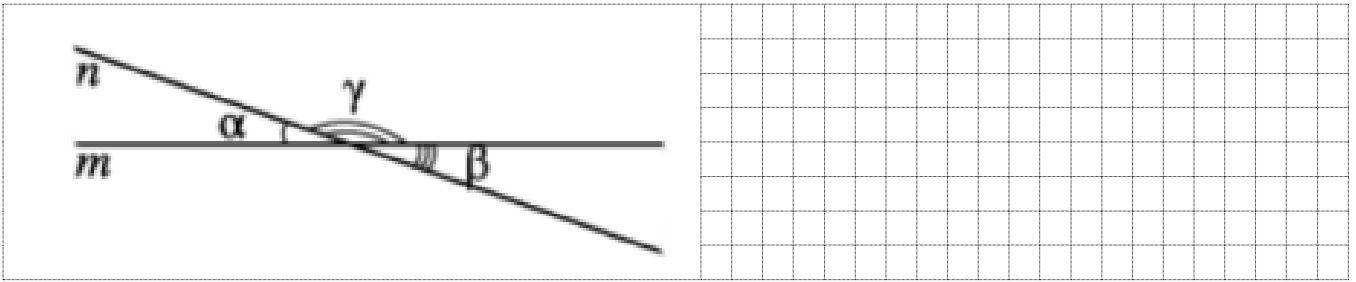
| А | Б | В | Г | Д |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 48 см | 36 см | 24 см | 42 см | 54 см |

1.33. Рівносторонній трикутник ABC і пряма KM , що проходить через точку B , лежать в одній площині (див. рисунок). Визначте градусну міру кута KBA , якщо $\angle CMB = 85^\circ$.



| А | Б | В | Г | Д |
|------------|------------|------------|------------|------------|
| 45° | 35° | 30° | 25° | 15° |

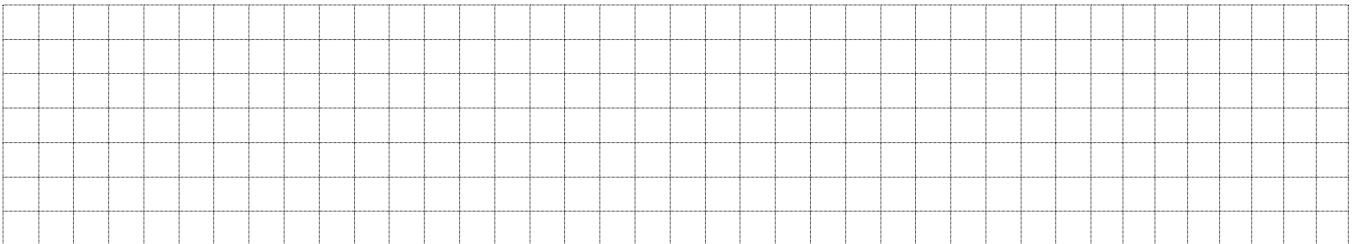
1.34. На рисунку прямі m і n , що перетинаються. Визначте градусну міру кута γ , якщо $\alpha + \beta = 50^\circ$.



| А | Б | В | Г | Д |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 130° | 140° | 145° | 155° | 310° |

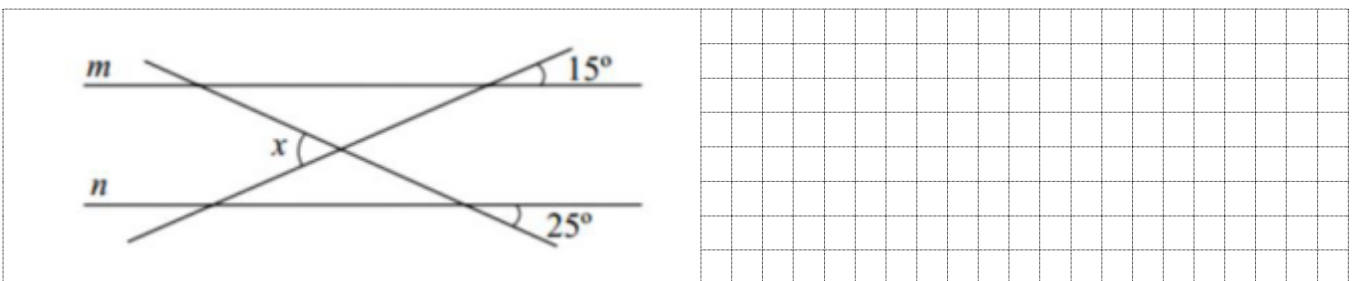
1.35. Які з наведених тверджень є правильними:

- I. Сума двох будь-яких вертикальних кутів дорівнює 180° .
- II. Сума двох будь-яких суміжних кутів дорівнює 180° .
- III. Сума будь-якого гострого кута та будь-якого тупого кута дорівнює 180° ?



| А | Б | В | Г | Д |
|--------|---------|--------------|---------------|-------------|
| лише I | лише II | лише I і III | лише II і III | I, II і III |

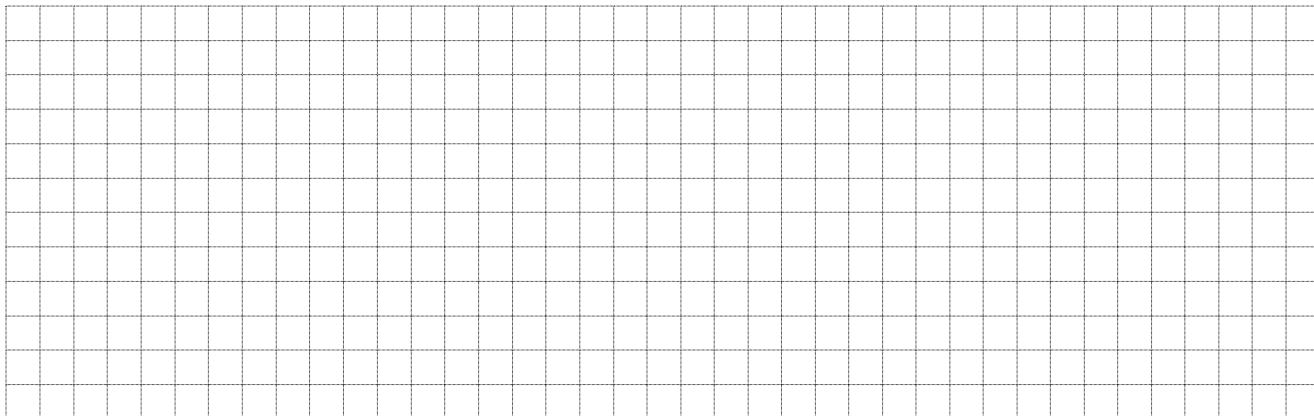
1.36. Прямі m і n паралельні. Обчисліть величину кута x , показаного на рисунку.



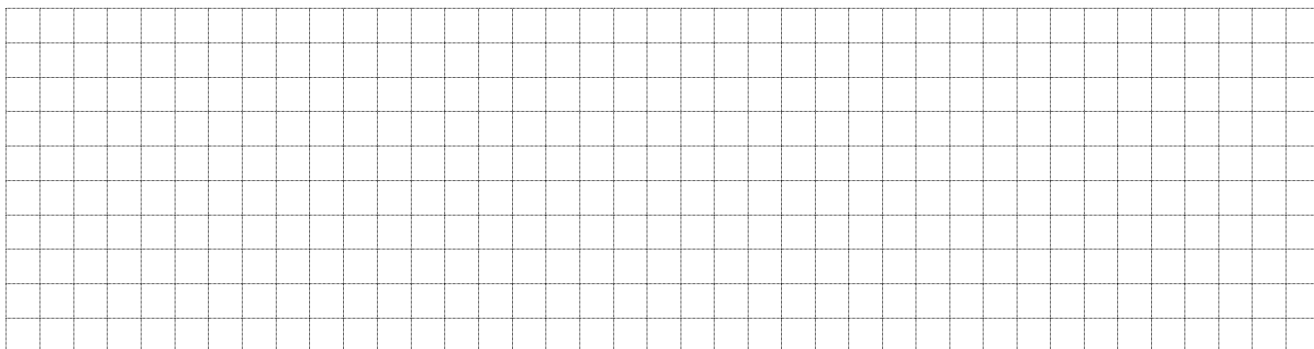
| А | Б | В | Г | Д |
|------------|------------|------------|------------|-------------|
| 40° | 45° | 50° | 80° | 140° |

Заняття 2
ТРИКУТНИКИ. СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА.
КОЛО І КРУГ

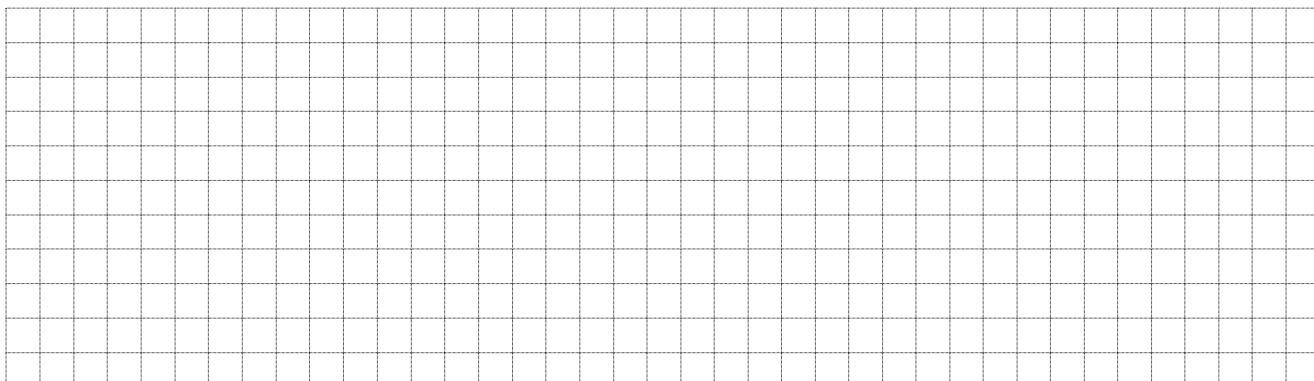
2.1. У рівнобедреному трикутнику DEF ($DE = EF$) проведено висоту EO , довжина якої дорівнює 8 см. Знайдіть периметр трикутника DEF , якщо периметр трикутника DEO дорівнює 43 см.



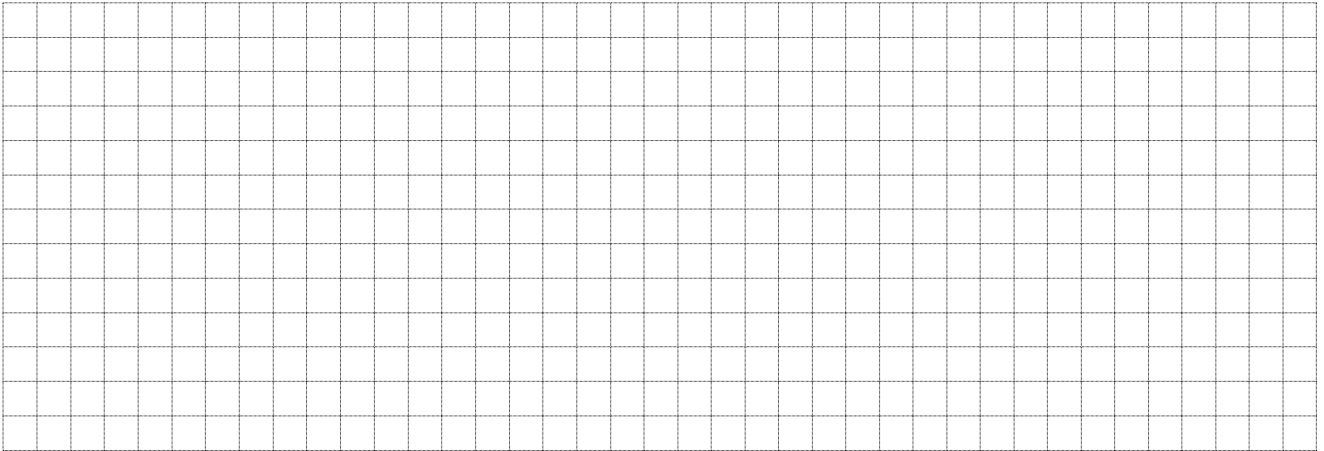
2.2. Серединний перпендикуляр сторони AB рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) перетинає сторону BC у точці F . Знайдіть сторону AC , якщо $AB = 18$ см, а периметр трикутника AFC дорівнює 27 см.



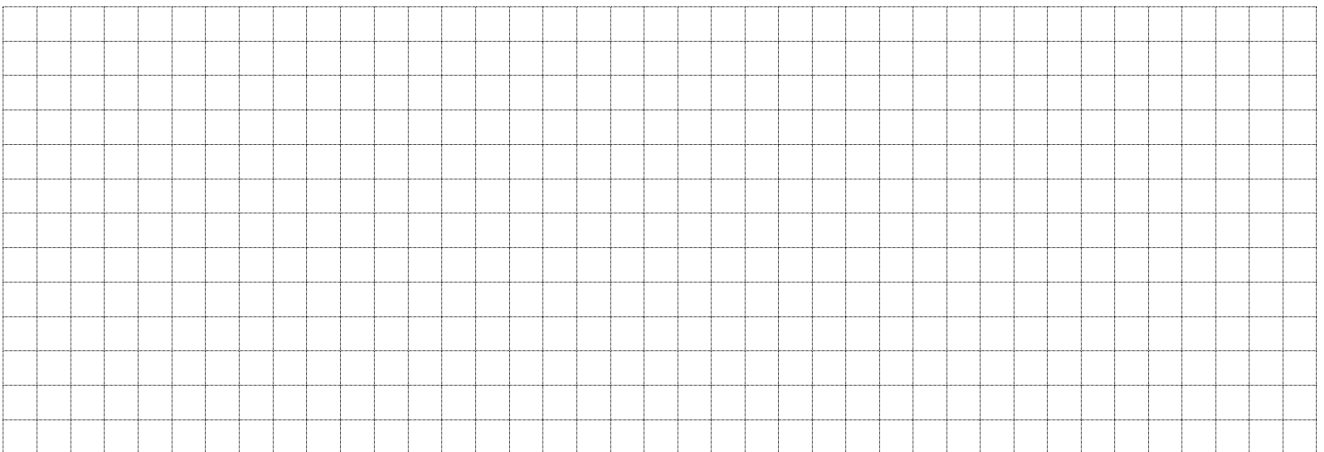
2.3. На висоті BD трикутника ABC позначено точку E . Доведіть, якщо $AE = EC$, то трикутник ABC рівнобедрений.



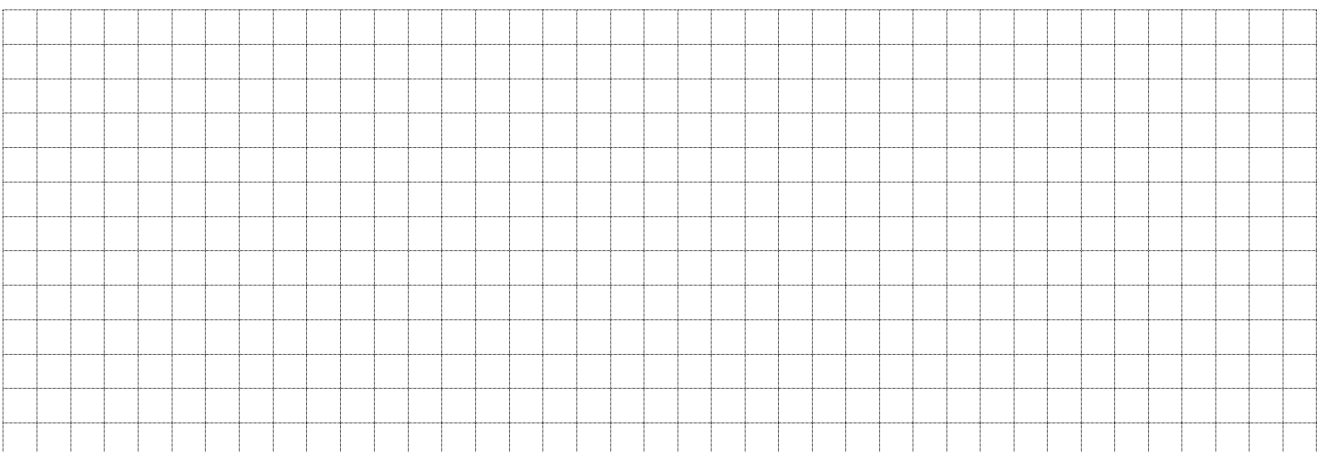
2.4. На стороні BC трикутника ABC позначено точку M так, що $BM : MC = 2:1$. Бісектриса BD перпендикулярна до відрізка AM . Знайдіть сторону BC , якщо відомо, що $AB = 6$ см.



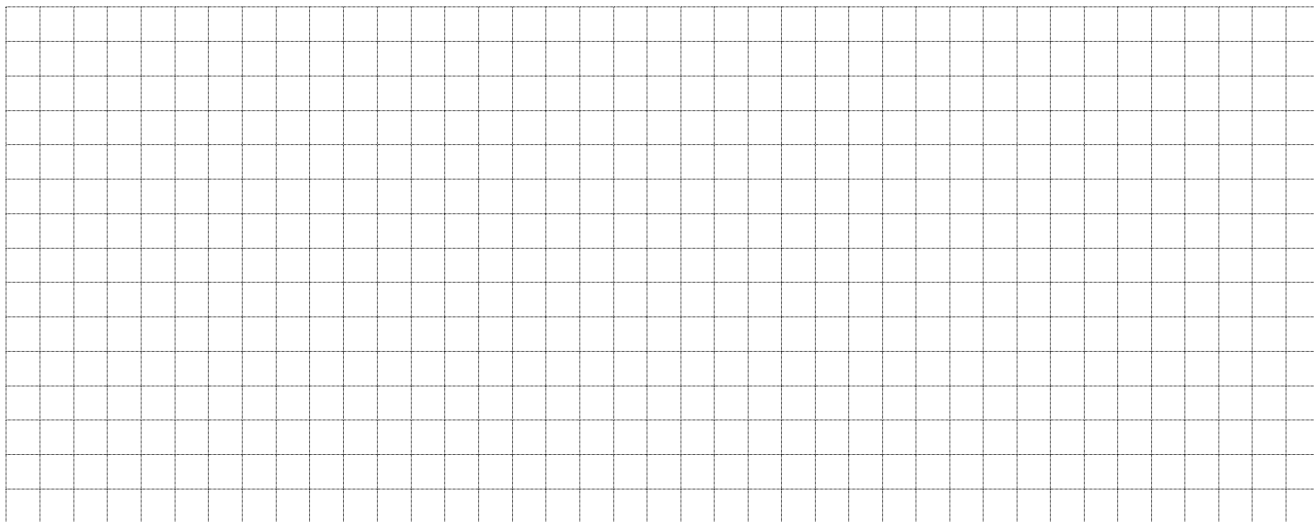
2.5. Знайдіть кути трикутника, якщо їх градусні міри співвідносяться як $3:4:5$.



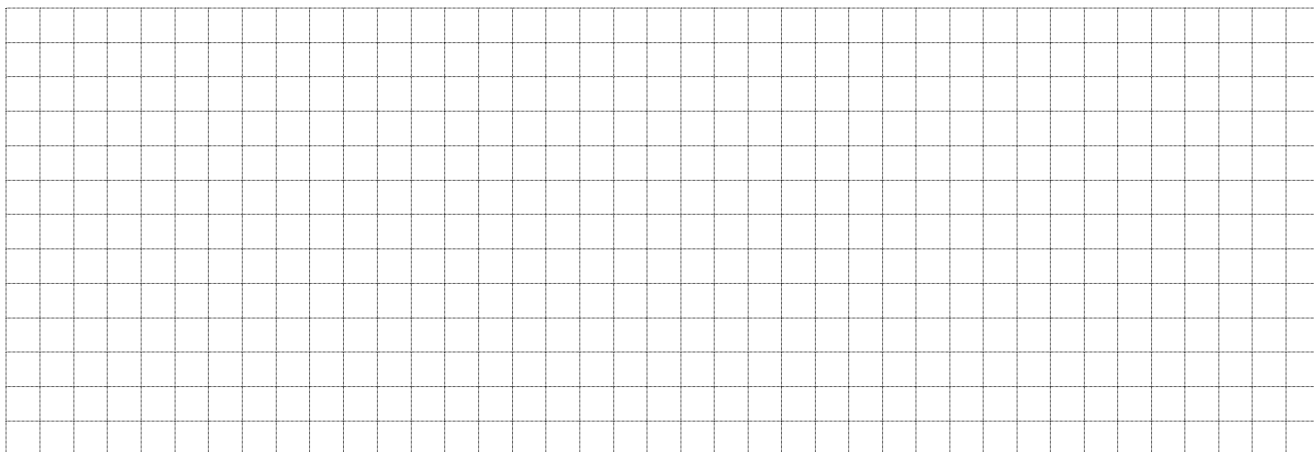
2.6. Один із кутів трикутника дорівнює 82° . Чи може зовнішній кут трикутника, не суміжний з ним, дорівнювати: 1) 80° ; 2) 83° ?



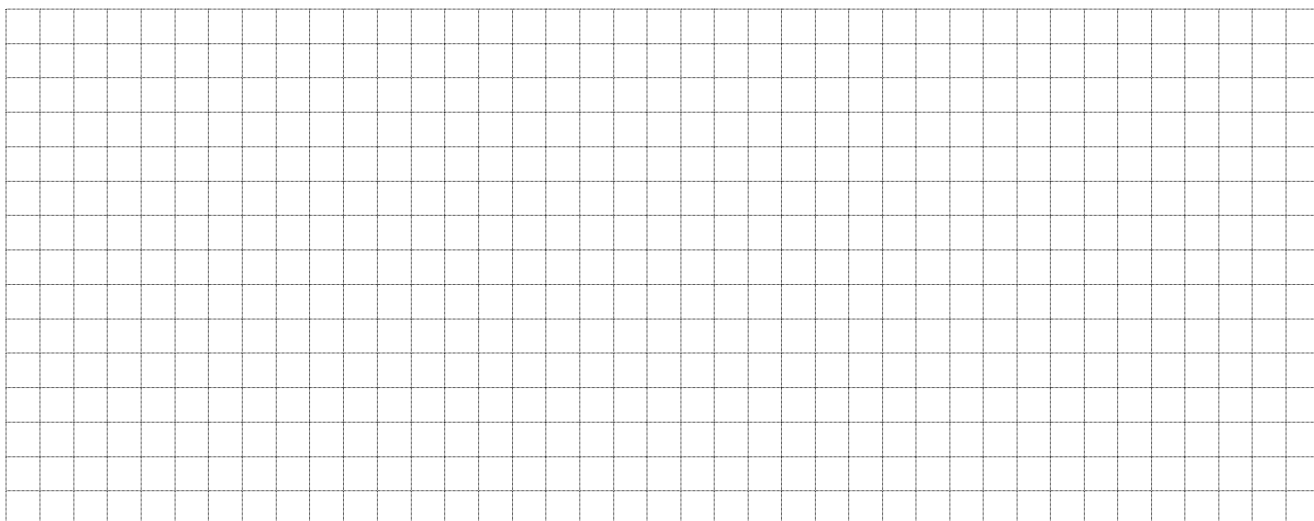
2.7. Чи існує трикутник зі сторонами: 1) **5 см, 9 см, 14 см**; 2) **6 см, 8 см, 15 см**? Відповідь обґрунтуйте.



2.8. Порівняйте кути трикутника **ABC**, якщо **$AB < BC$** і **$AB = AC$** .

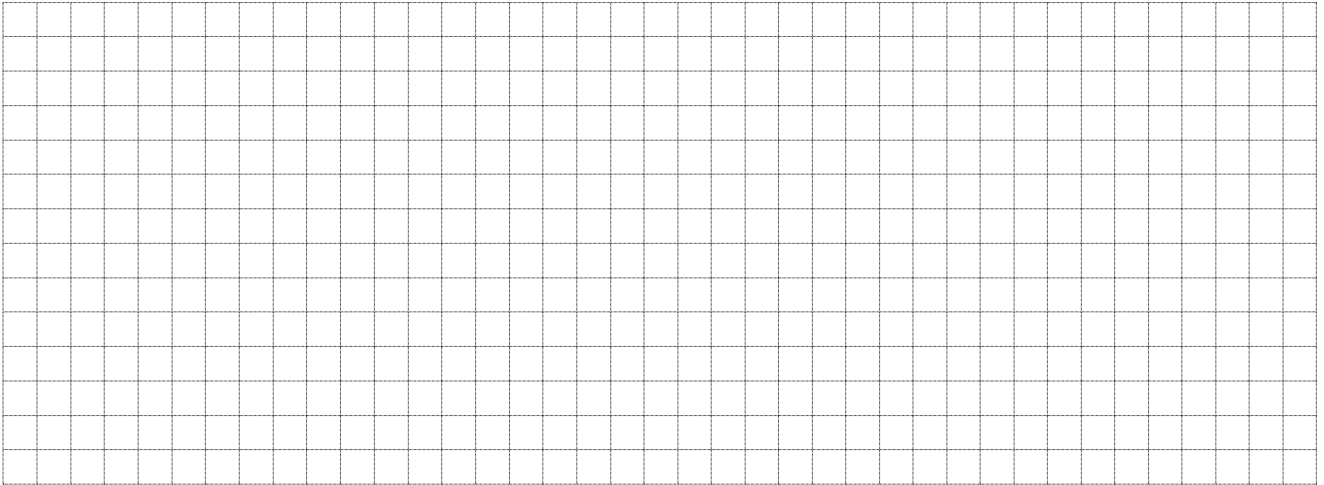


2.9. Порівняйте сторони трикутника **DEF**, якщо **$\angle D > \angle E$** і **$\angle E < \angle F$** .

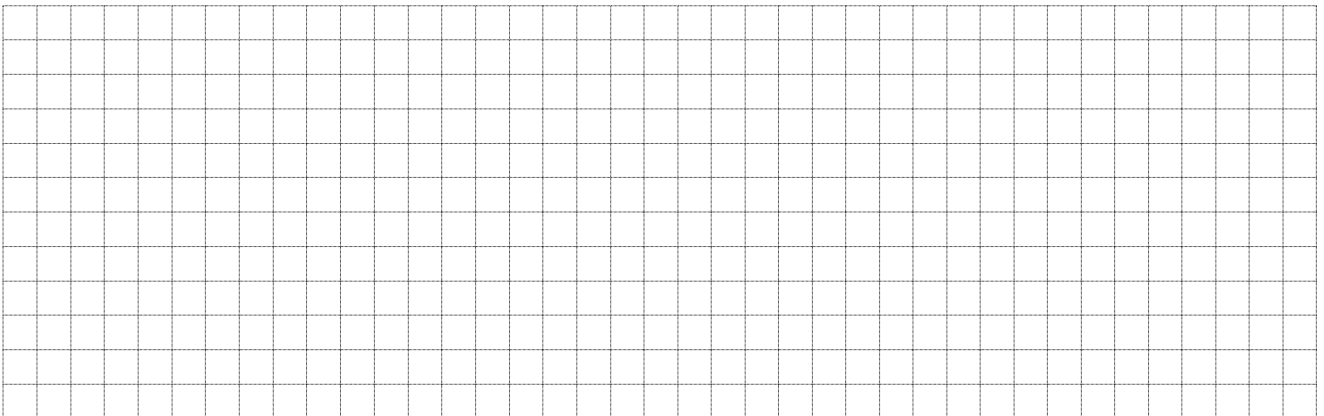


2.10. Чи існує трикутник ABC , у якому:

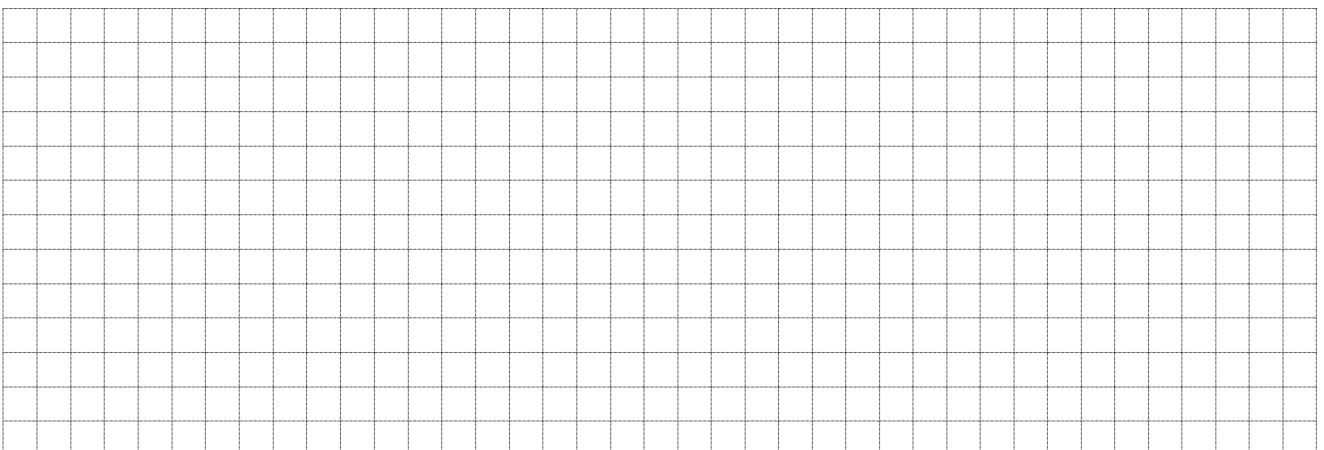
- 1) $\angle A = 32^\circ, \angle B = 74^\circ, BC = 6 \text{ см}, AC = 5 \text{ см}$;
- 2) $\angle A = 100^\circ, AB = 9 \text{ см}, BC = 4 \text{ см}$?



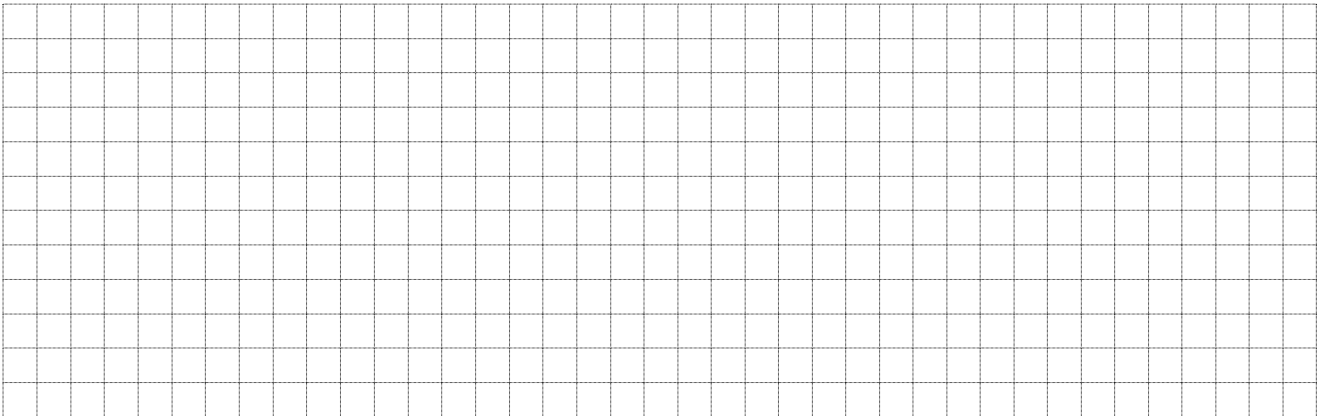
2.11. Чи може найбільша сторона трикутника лежати проти кута 42° ?



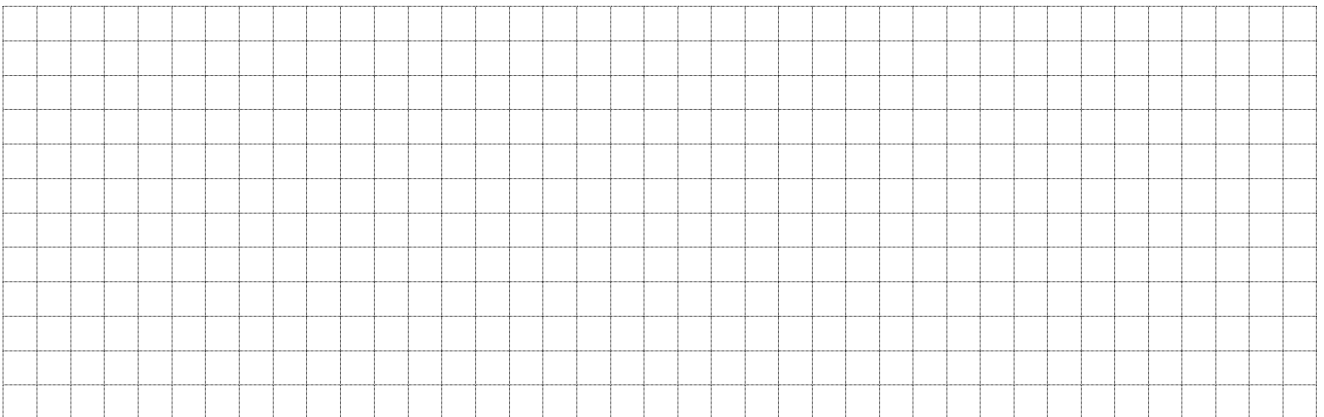
2.12. Бісектриси кутів E і F трикутника DEF перетинаються в точці O . Знайдіть кут EDF , якщо $\angle EOF = 115^\circ$.



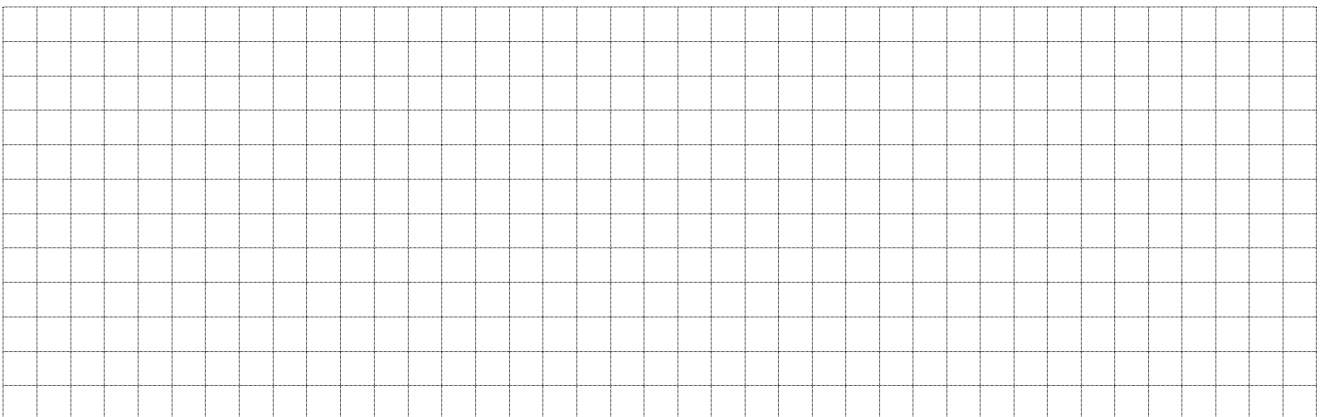
2.13. Один із кутів, утворених при перетині бісектрис двох кутів рівнобедреного трикутника, дорівнює 124° . Знайдіть кути трикутника. Скільки розв'язків має задача?



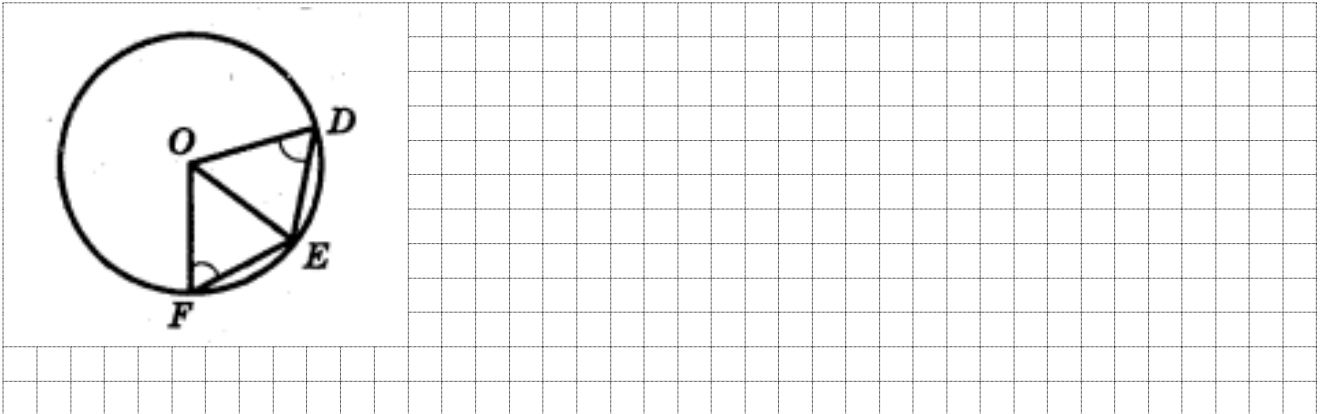
2.14. Прямокутні трикутники ABC і ABD мають спільну гіпотенузу AB , а точки C і D лежать у різних півплощинах відносно прямої AB . Доведіть, якщо $AD = BC$, то прямі AC і BD паралельні.



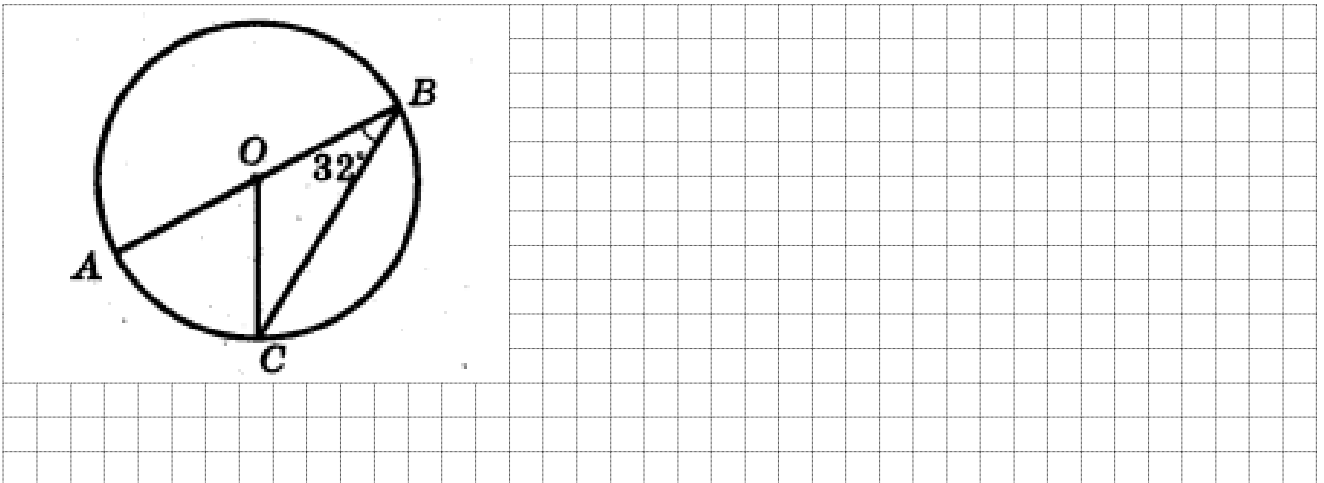
2.15. Із точки M до прямої AB проведено похилі MA і MB та перпендикуляр MC так, що точка C лежить між точками A і B , а кут BMC дорівнює 35° . Порівняйте відрізки MA і BC .



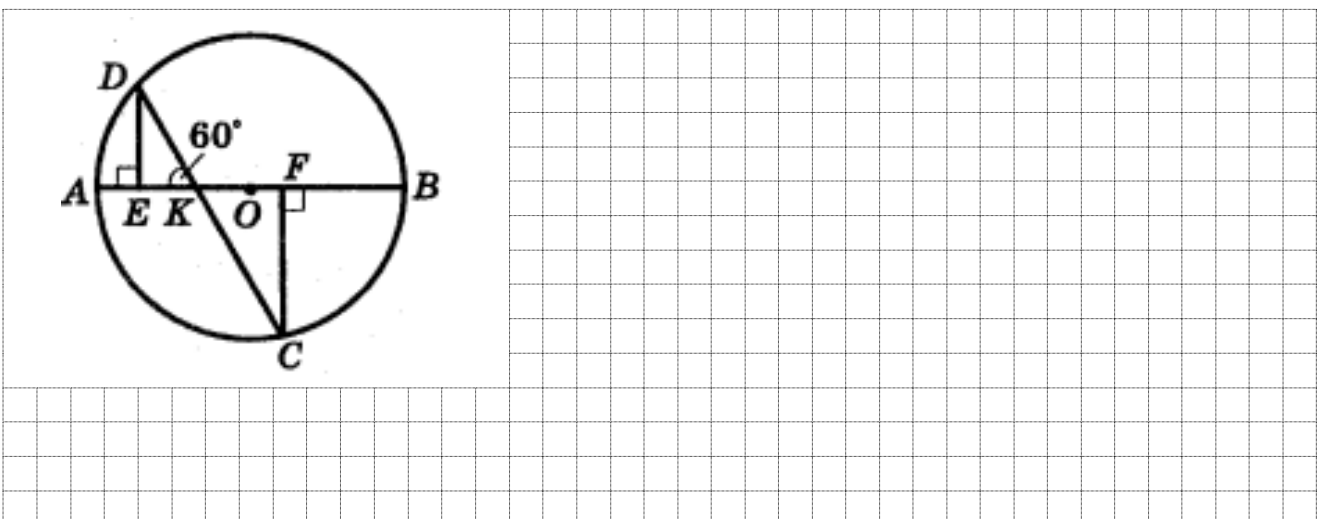
2.16. У колі проведено радіуси OD , OE і OF . Знайдіть хорду FE , якщо $\angle OFE = \angle ODE$ і $DE = 8$ см.



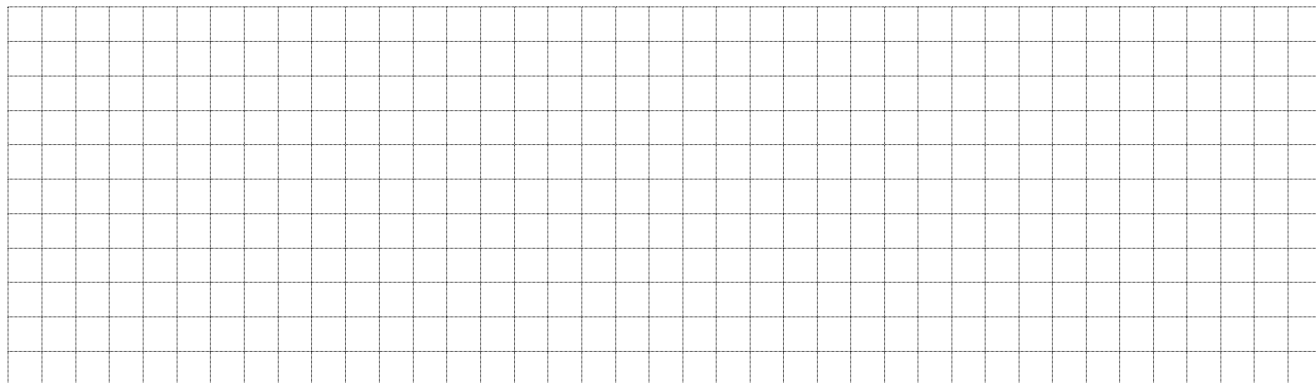
2.17. Точка O – центр кола, $\angle ABC = 32^\circ$. Знайдіть кут AOC .



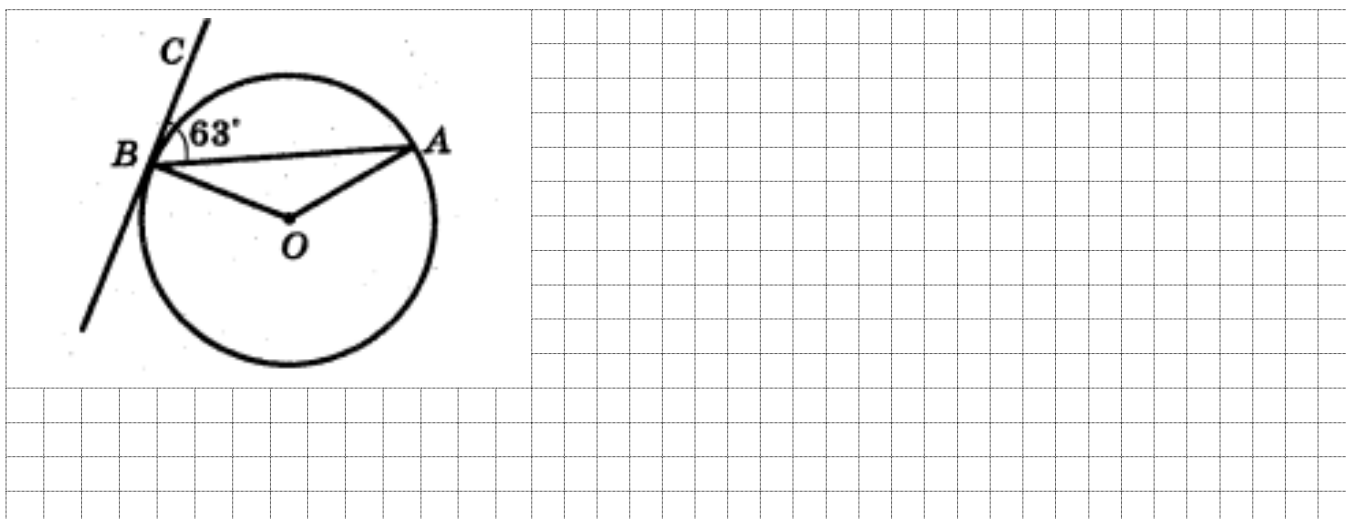
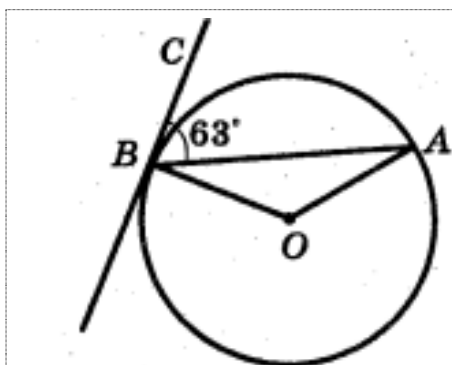
2.18. Хорда CD перетинає діаметр AB у точці K , $\angle DEK = \angle CFK = 90^\circ$, $\angle DKA = 60^\circ$, $EF = 10$ см. Знайдіть хорду CD .



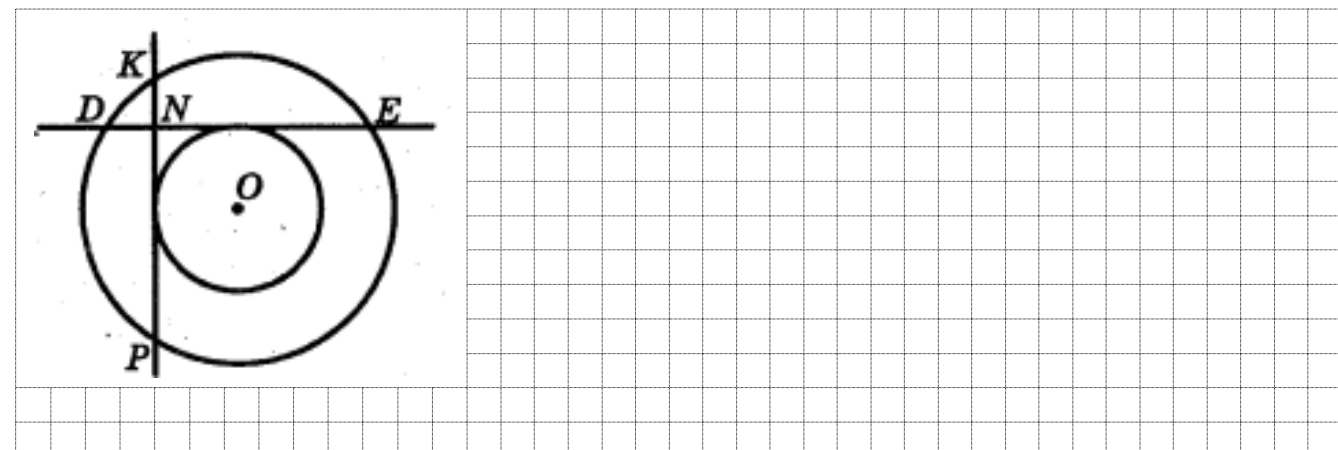
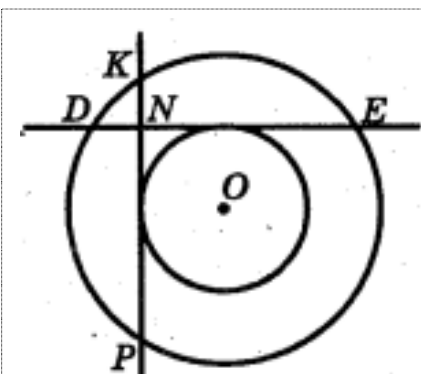
2.19. Прямі a і b перетинаються. Знайдіть ГМТ, які знаходяться на відстані 1 см від прямої a і на відстані 2 см від прямої b .



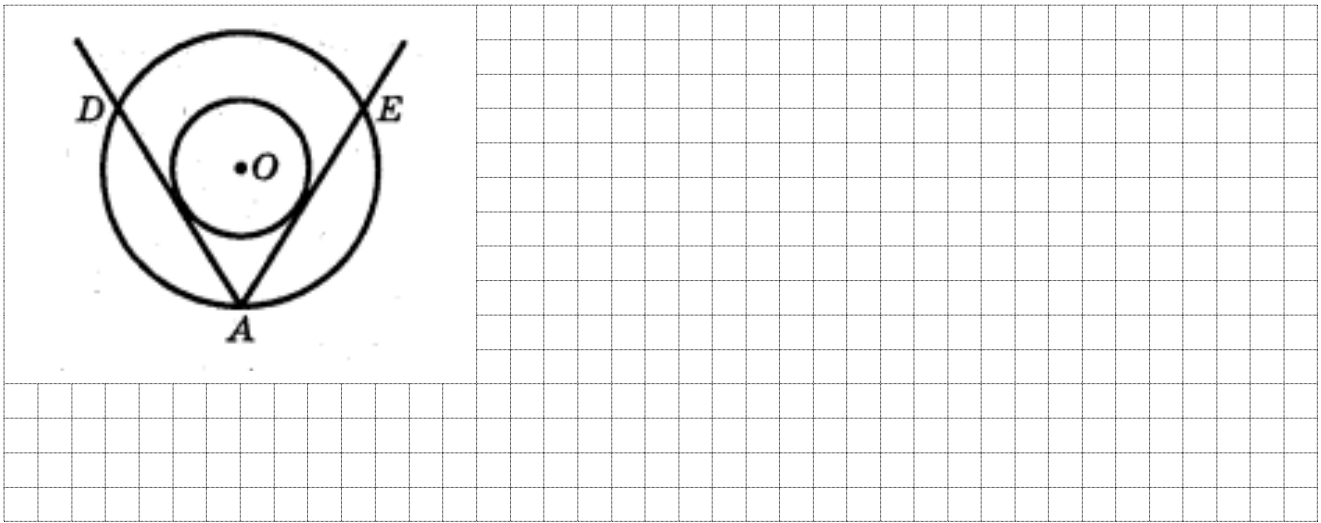
2.20. Пряма BC дотикається до кола з центром O в точці B . Знайдіть кут AOB , якщо $\angle ABC = 63^\circ$.



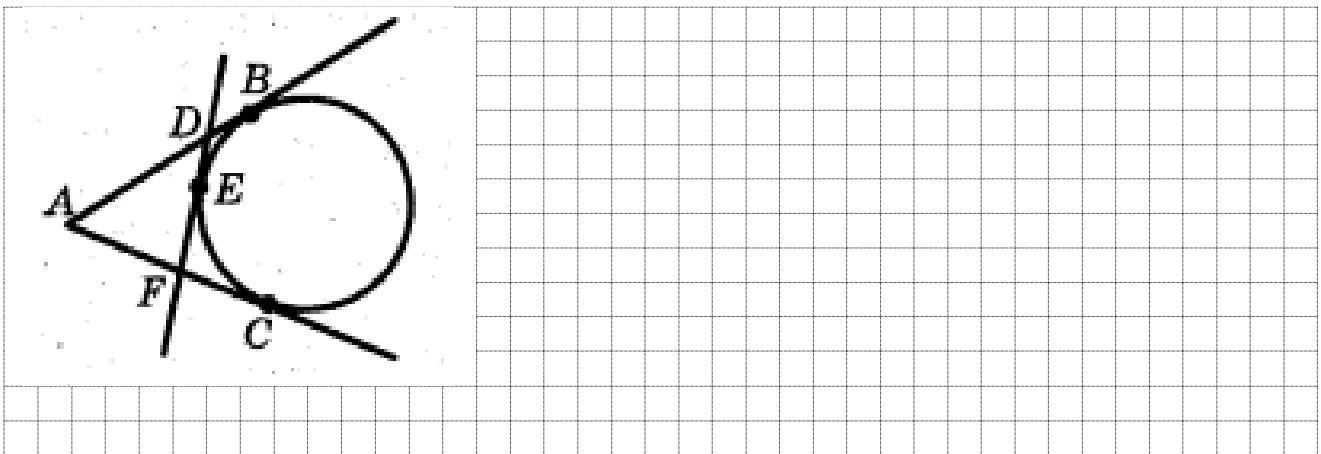
2.21. Два кола мають спільний центр O . До меншого з них проведено перпендикулярні дотичні DE і KP , які перетинаються в точці N . Знайдіть відрізок NE , якщо $ND = 3\text{ см}$, а радіус кола дорівнює 4 см .



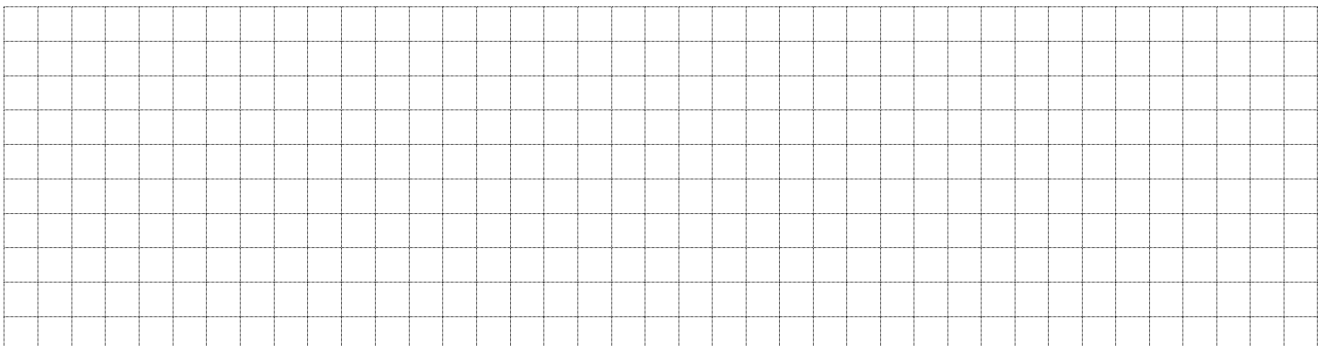
2.22. Два кола мають спільний центр O . Через точку A більшого кола проведено дотичні AD і AE до меншого кола. Знайдіть радіус більшого кола, якщо радіус меншого дорівнює 5 см , а $\angle DAE = 60^\circ$.



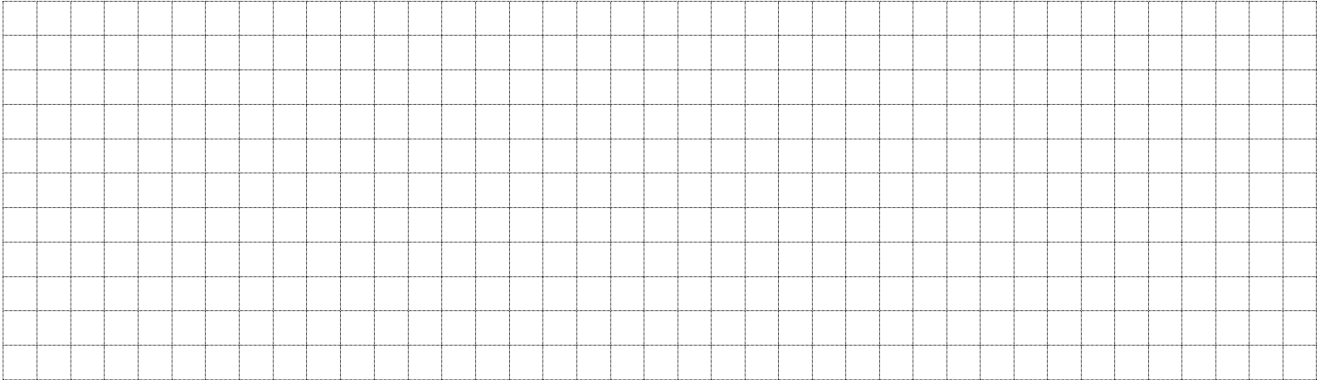
2.23. Прямі AB , AC і DF дотикаються до кола в точках B , C і E відповідно. Знайдіть відрізок AB , якщо периметр трикутника ADF дорівнює 16 см .



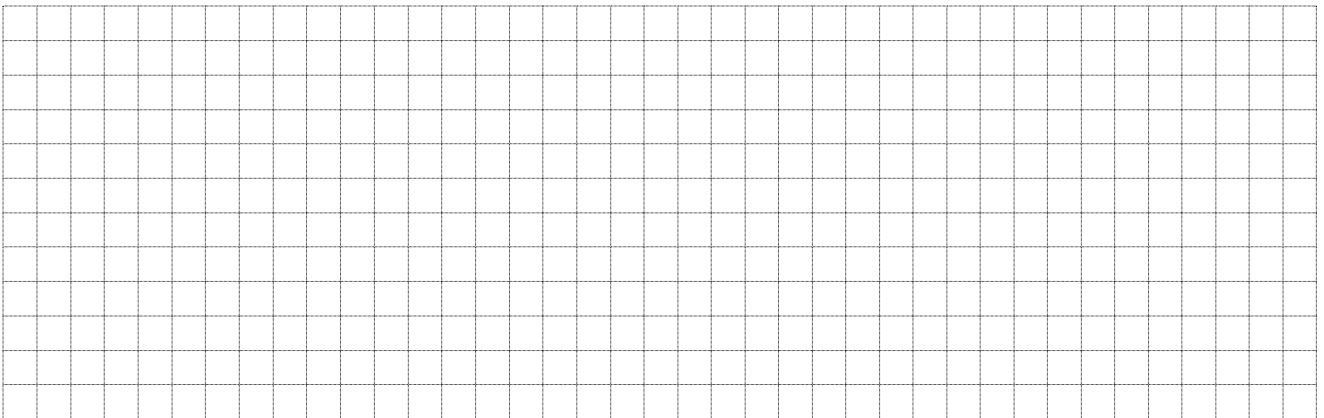
2.24. Знайдіть висоту рівностороннього трикутника, якщо радіус кола, вписаного в цей трикутник, дорівнює 8 см .



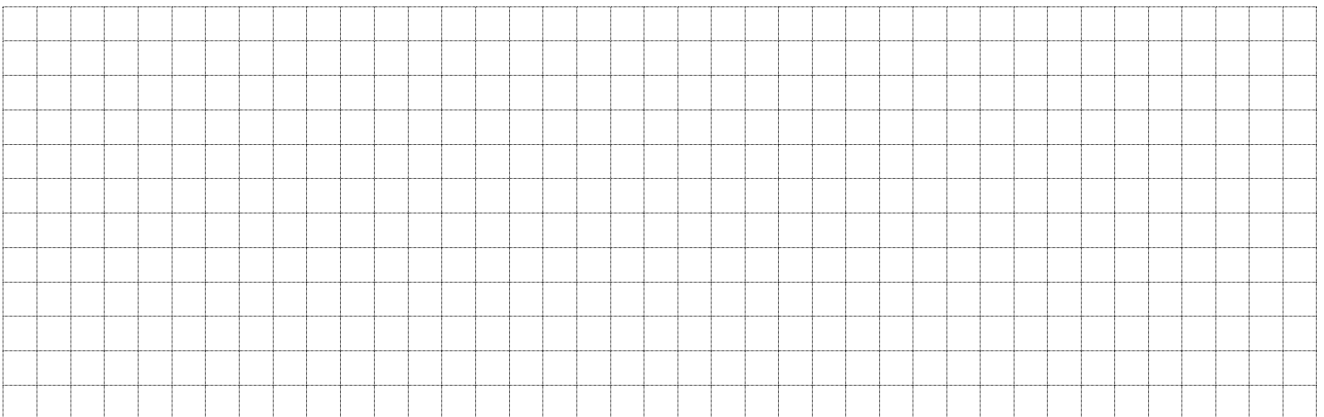
2.25. Бічну сторону рівнобедреного трикутника поділено точкою дотику вписаного кола у співвідношенні **3:4**, рахуючи від вершини кута при основі трикутника. Знайдіть бічну сторону трикутника, якщо його основа дорівнює **12 см**.



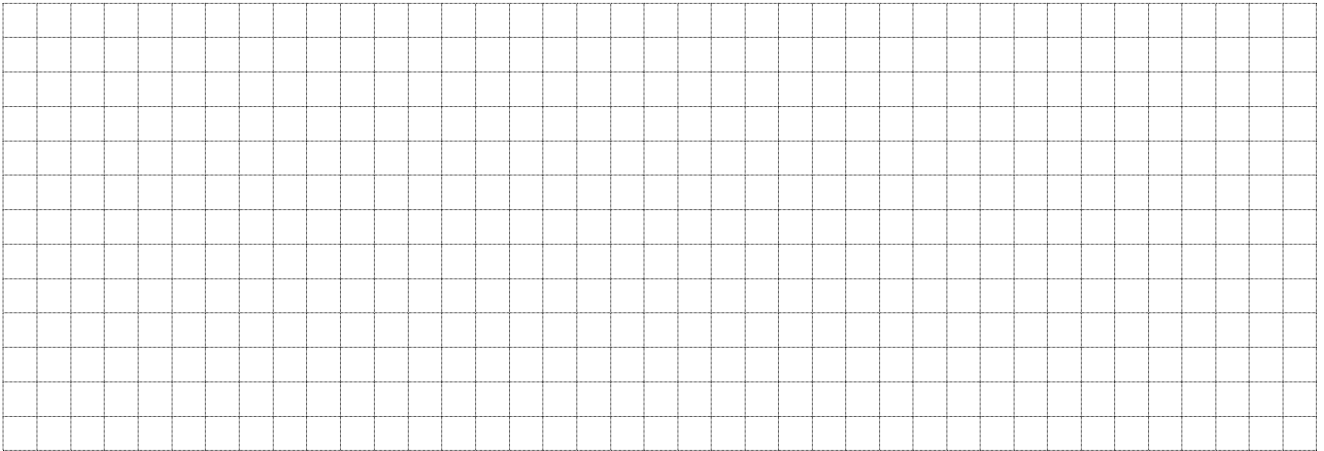
2.26. У прямокутному трикутнику точкою дотику вписаного кола поділено гіпотенузу на відрізки **4 см** і **6 см**. Знайдіть периметр трикутника, якщо радіус кола дорівнює **2 см**.



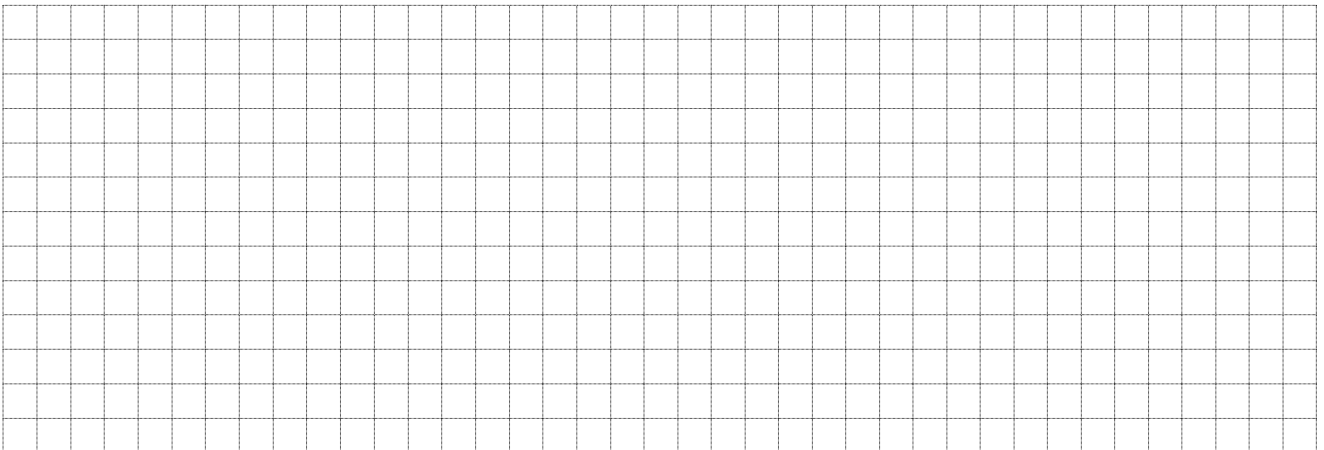
2.27. До кола, вписаного в рівнобедрений трикутник **ABC**, проведено дотичну, яка перетинає бічні сторони **AC** і **BC** у точках **D** і **E** відповідно. Знайдіть периметр трикутника **CDE**, якщо периметр трикутника **ABC** дорівнює **20 см** і **AB = 6 см**.



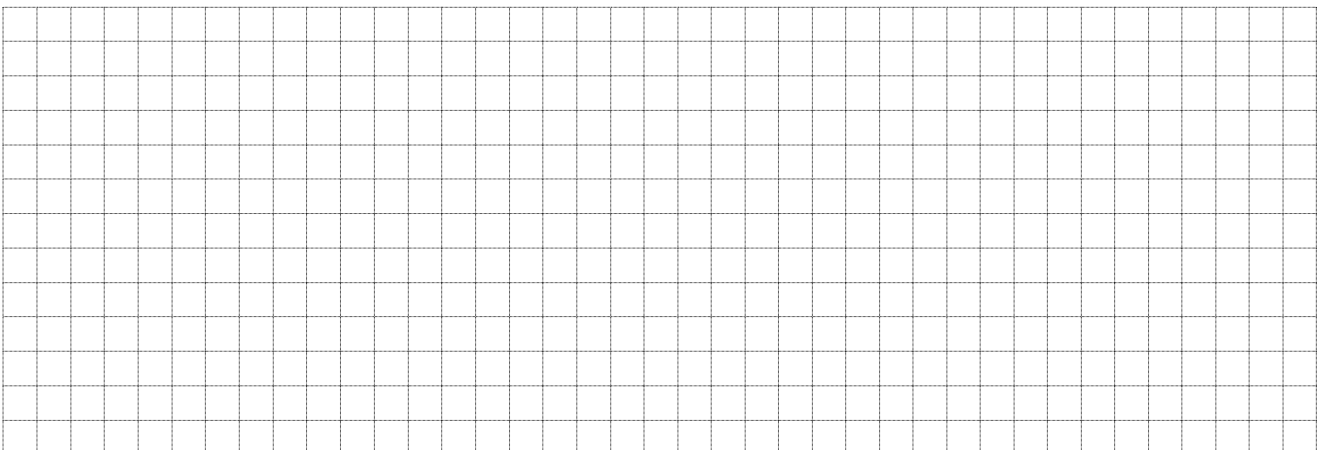
2.28. Через точку C кола з центром O проведено дотичну до цього кола, AB – діаметр кола. З точки A на дотичну опущено перпендикуляр AD . Доведіть, що промінь AC є бісектрисою кута BAD .



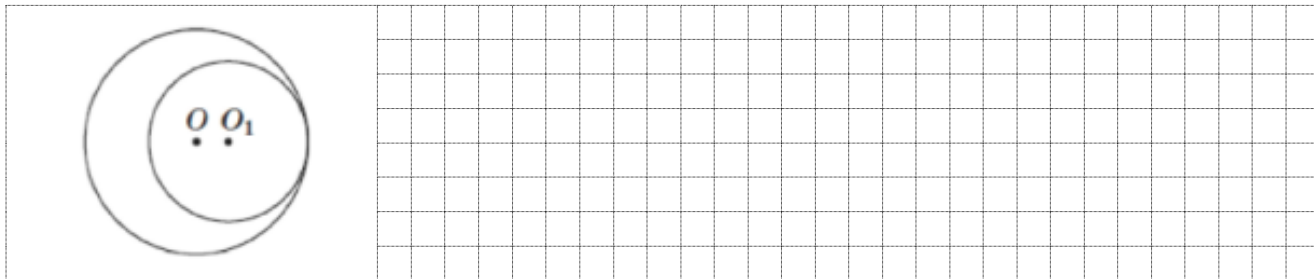
2.29. Центр кола, описаного навколо трикутника, належить його стороні. Доведіть, що трикутник – прямокутний.



2.30. Медіана AM трикутника ABC перпендикулярна до його бісектриси BK . Знайдіть сторону AB , якщо $BC = 16$ см.

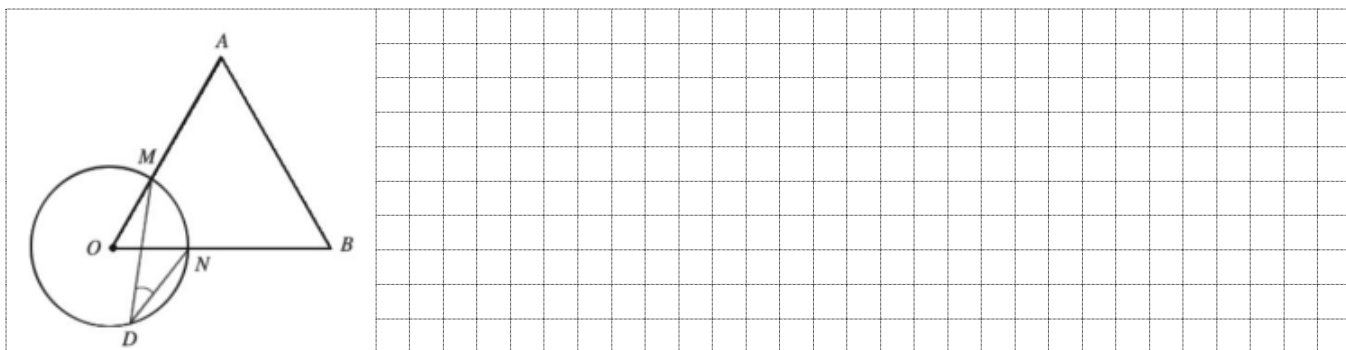


2.34. Два кола з центрами в точках O і O_1 мають внутрішній дотик (див. рисунок). Обчисліть відстань OO_1 , якщо радіуси кіл дорівнюють **12 см** і **8 см**.



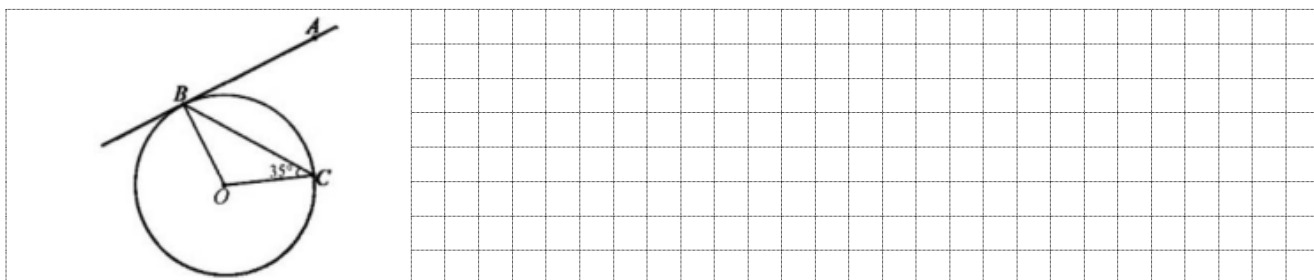
| А | Б | В | Г | Д |
|--------|------|------|------|------|
| 1,5 см | 2 см | 3 см | 4 см | 8 см |

2.35. На рисунку зображено коло з центром у точці O і рівносторонній трикутник AOB , що перетинає коло в точках M і N . Точка D належить колу. Знайдіть градусну міру кута MDN .



| А | Б | В | Г | Д |
|-----|-----|-----|-----|------|
| 15° | 30° | 45° | 60° | 120° |

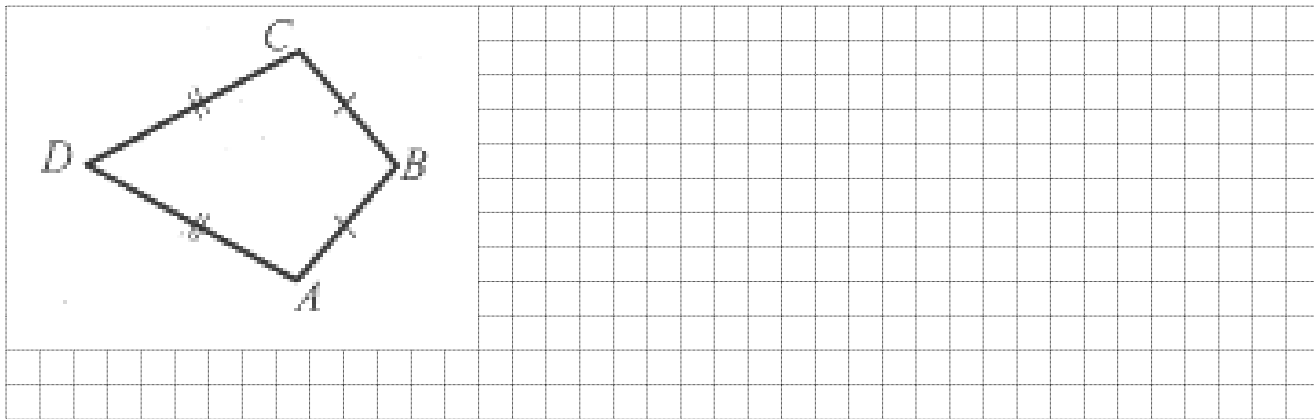
2.36. До кола з центром у точці O проведено дотичну AB (B – точка дотику). BC – хорда, що утворює з радіусом кола кут 35° (див. рисунок). Знайдіть градусну міру кута ABC .



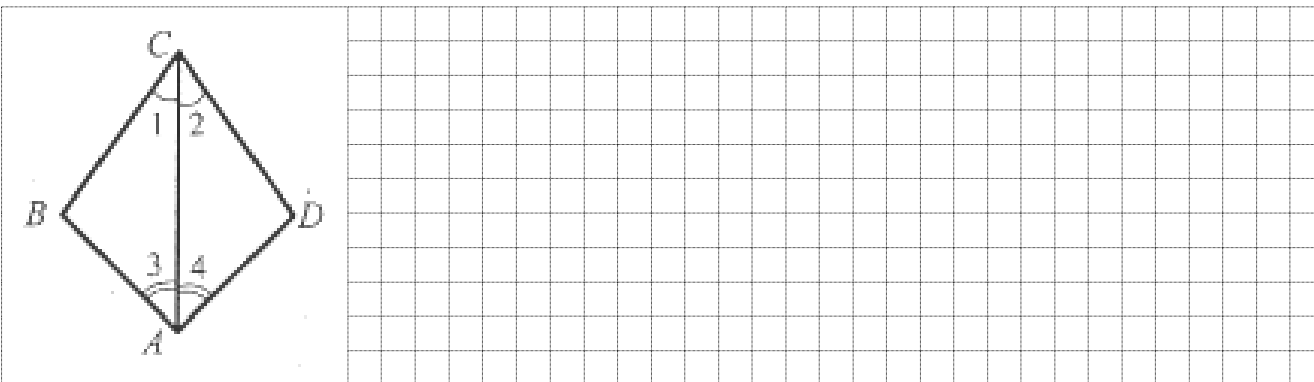
| А | Б | В | Г | Д |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 35° | 45° | 55° | 65° | 70° |

Заняття 3
ЧОТИРИКУТНИК ТА ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ.
ПАРАЛЕЛОГРАМ. ВЛАСТИВОСТІ ТА ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛОГРАМА

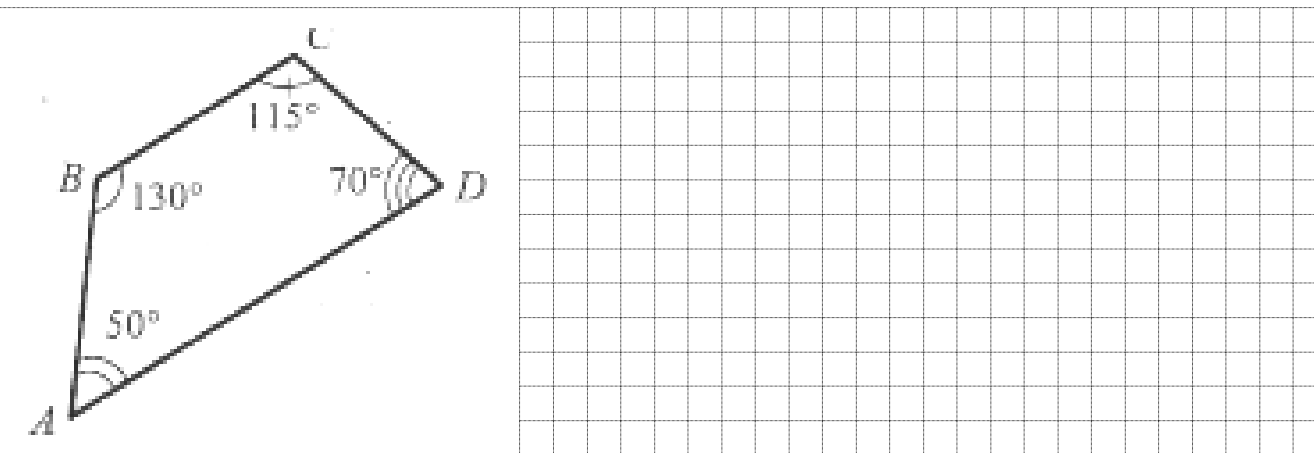
3.1. У чотирикутнику $ABCD$ $AB = BC$, $AD = DC$. Доведіть, що кути A і C рівні.



3.2. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Доведіть, що $AB = AD$, $BC = DC$.

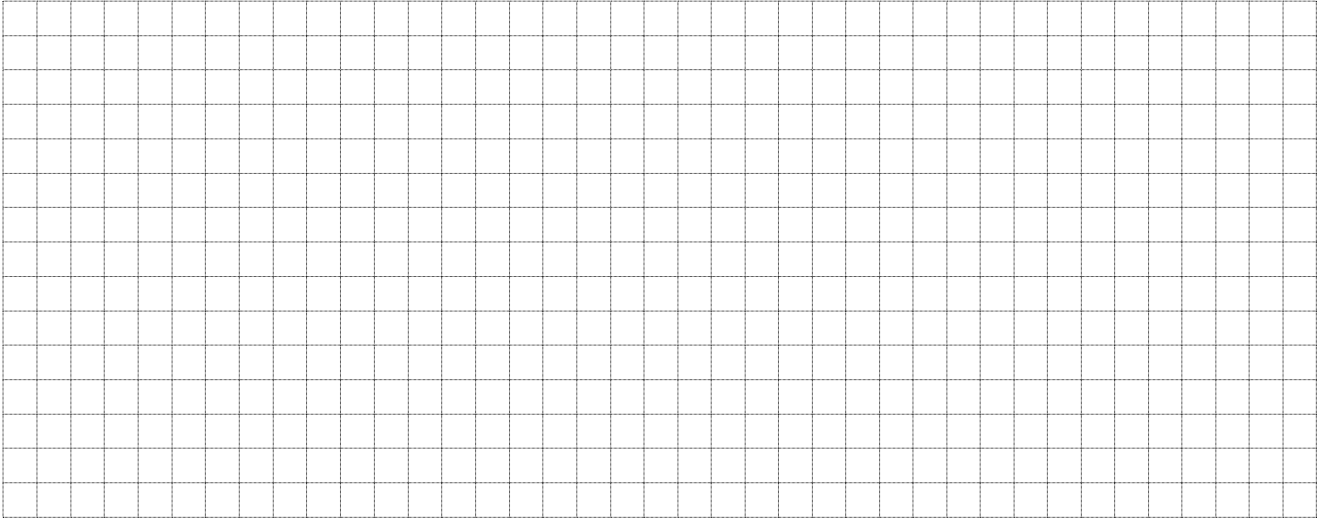


3.3. У чотирикутнику $ABCD$ сторони BC і AD паралельні. Чи правильно визначено його кути?

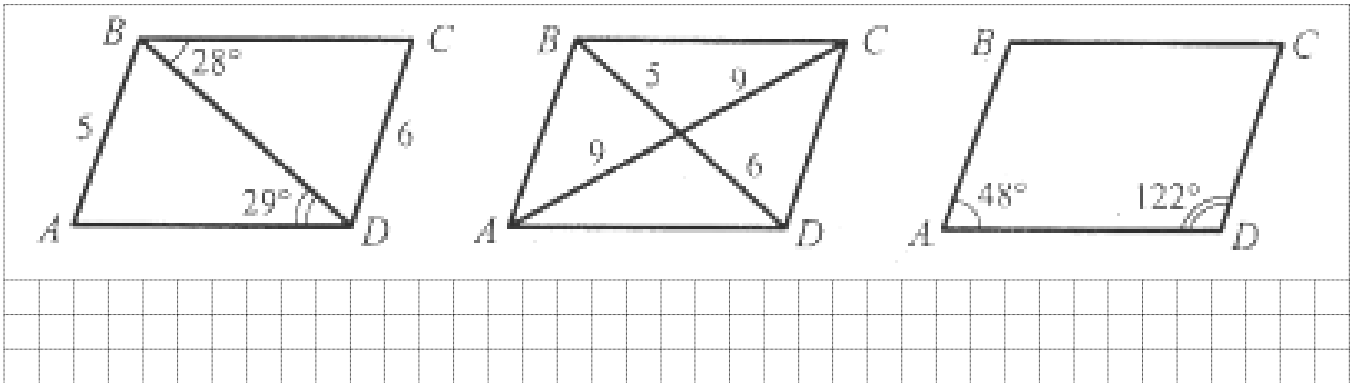


3.4. Знайдіть кути паралелограма, якщо:

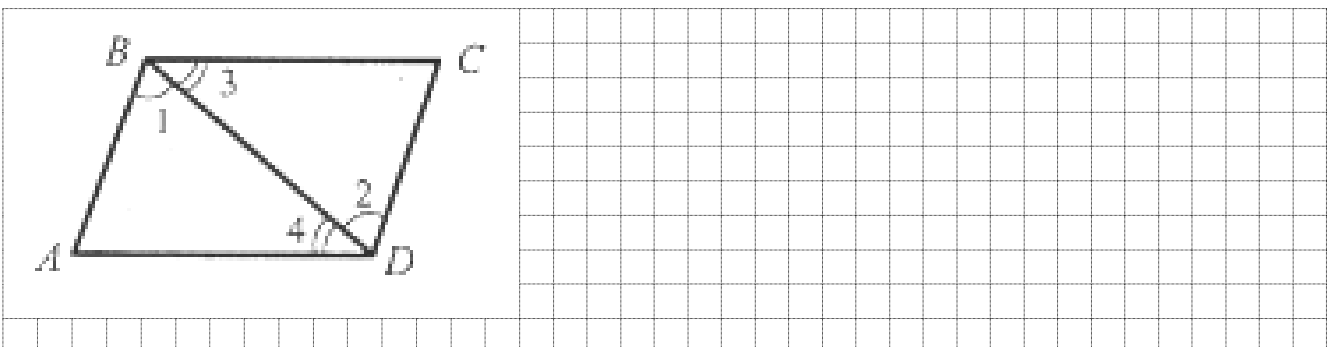
- 1) один з його кутів дорівнює 46° ;
- 2) сума двох його кутів дорівнює 186° ;
- 3) один з його кутів на 36° більший за другий;
- 4) один з його кутів у 3 рази менший від другого;
- 5) два кути паралелограма співвідносяться як $5:7$.



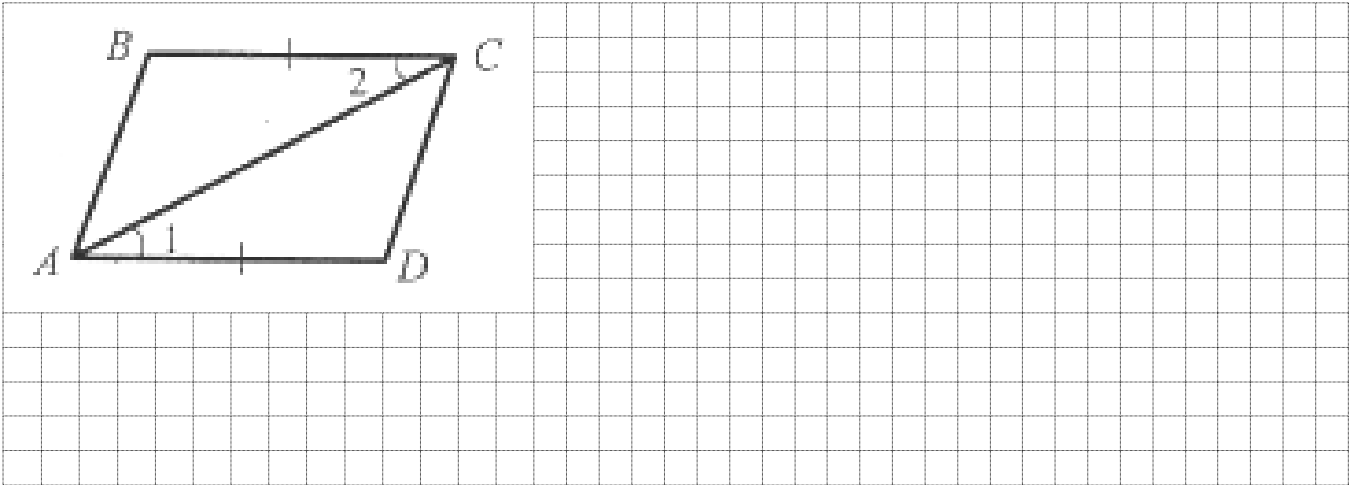
3.5. Які помилки допущено в зображенні паралелограма $ABCD$ на рисунку?



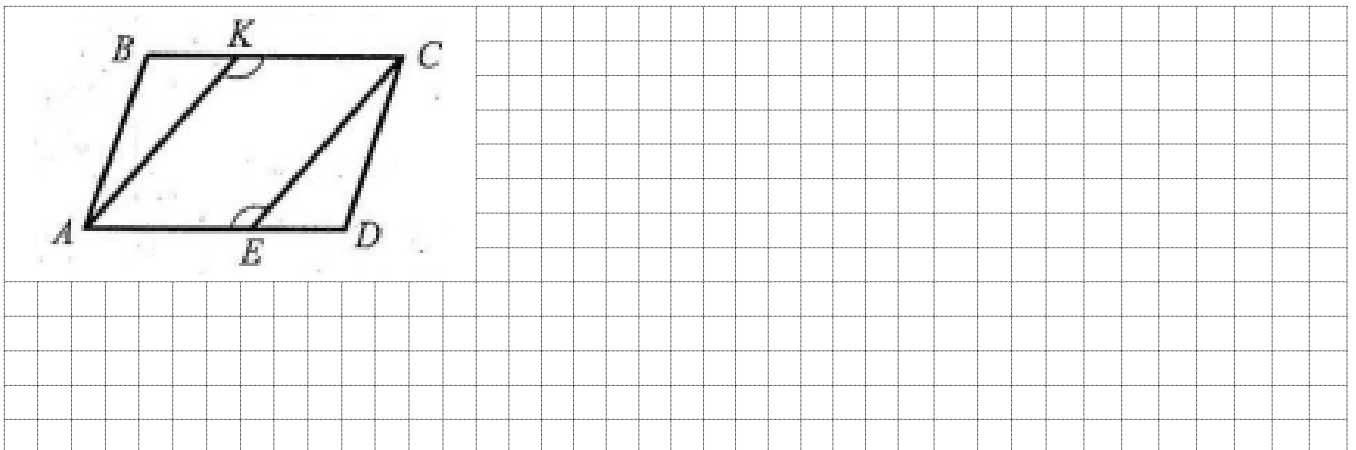
3.6. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.



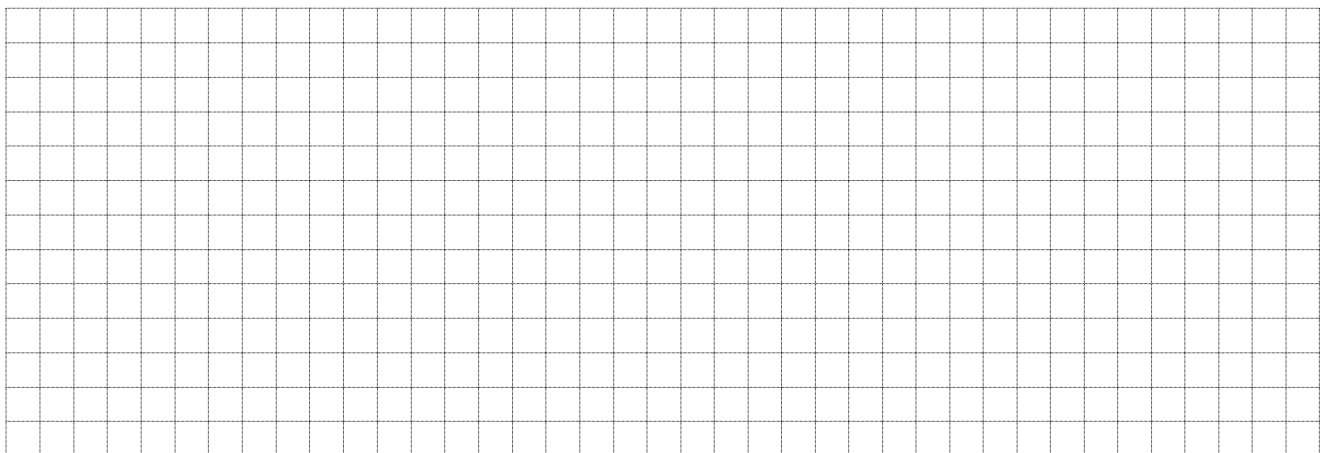
3.7. У чотирикутнику $ABCD$ $AD = BC$, $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.



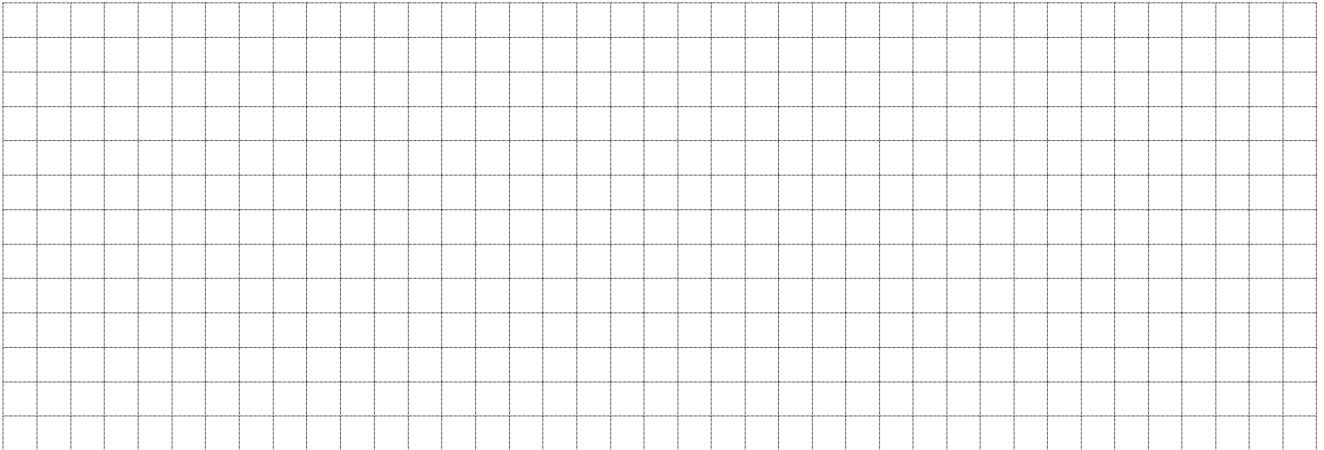
3.8. На сторонах BC і AD паралелограма $ABCD$ позначено точки K і E такі, що $\angle AKC = \angle AEC$. Доведіть, що чотирикутник $AKCE$ — паралелограм.



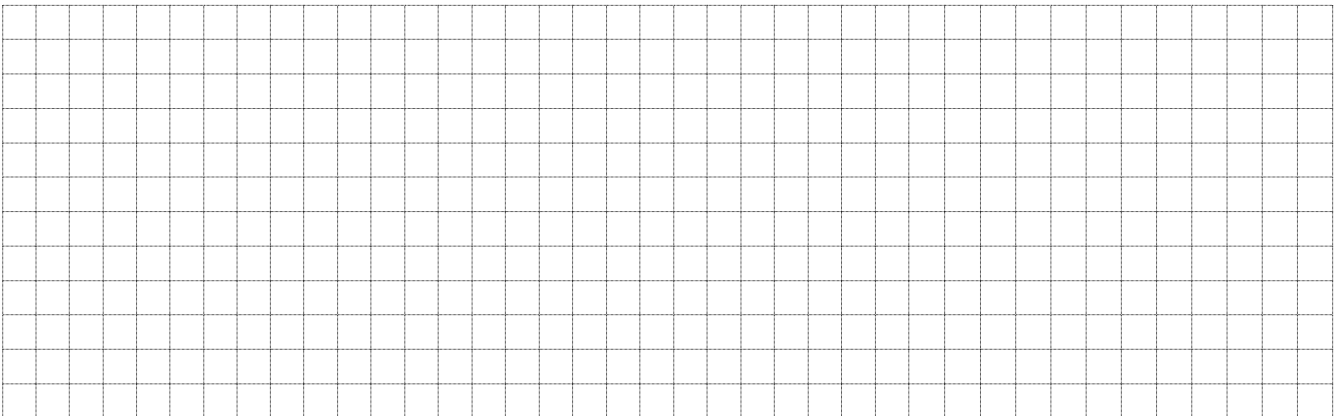
3.9. Доведіть, що бісектриси паралелограма, що прилягають до однієї сторони, перетинаються під прямим кутом.



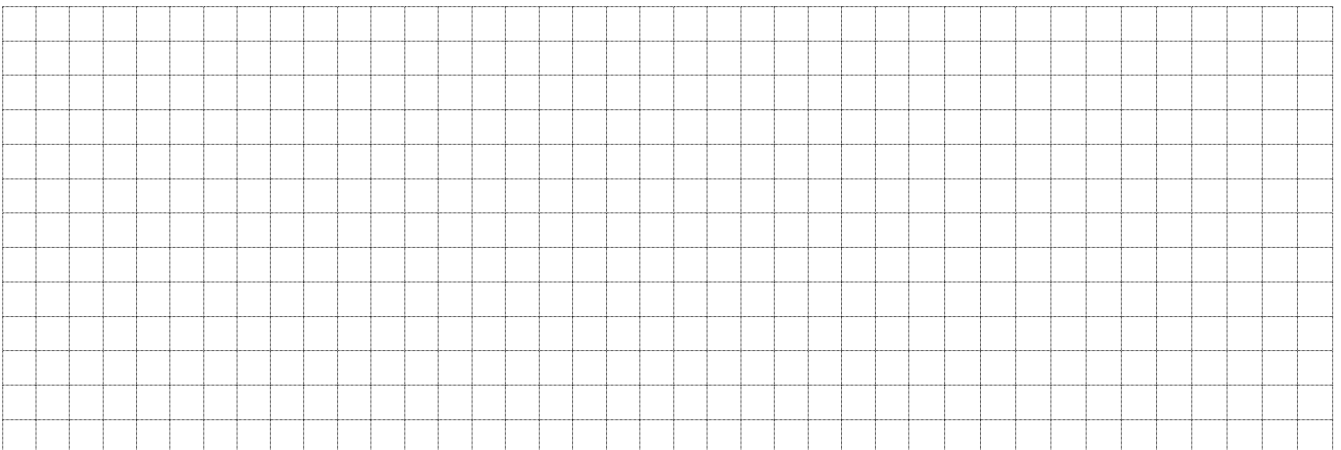
3.10. У паралелограмі $ABCD$ $AB = 7$ см, $AD = 12$ см. Бісектриса кута A перетинає сторону C у точці E . Знайдіть відрізки BE і EC .



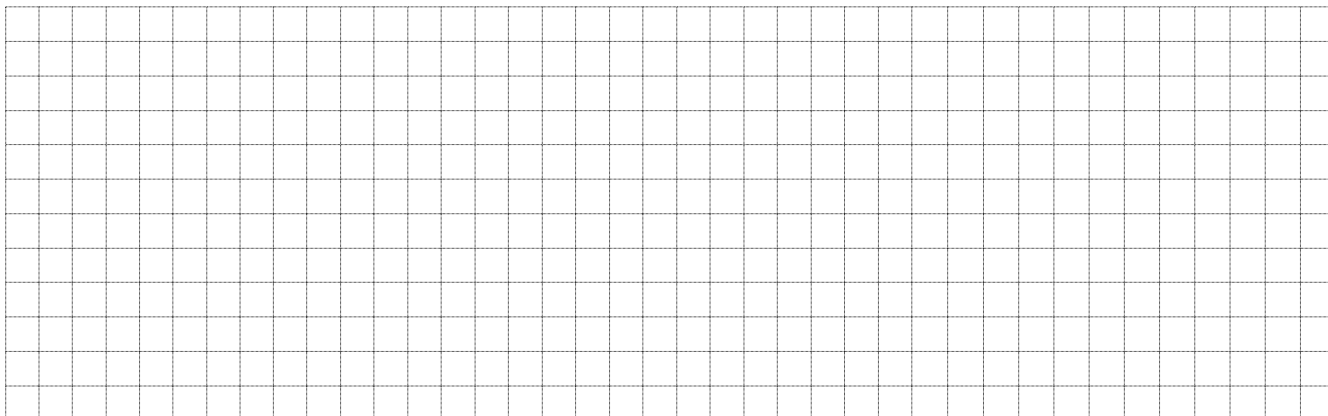
3.11. Бісектриса тупого кута паралелограма поділяє його сторону у співвідношенні $1:3$, рахуючи від вершини тупого кута. Периметр паралелограма дорівнює 84 см. Знайдіть його сторони.



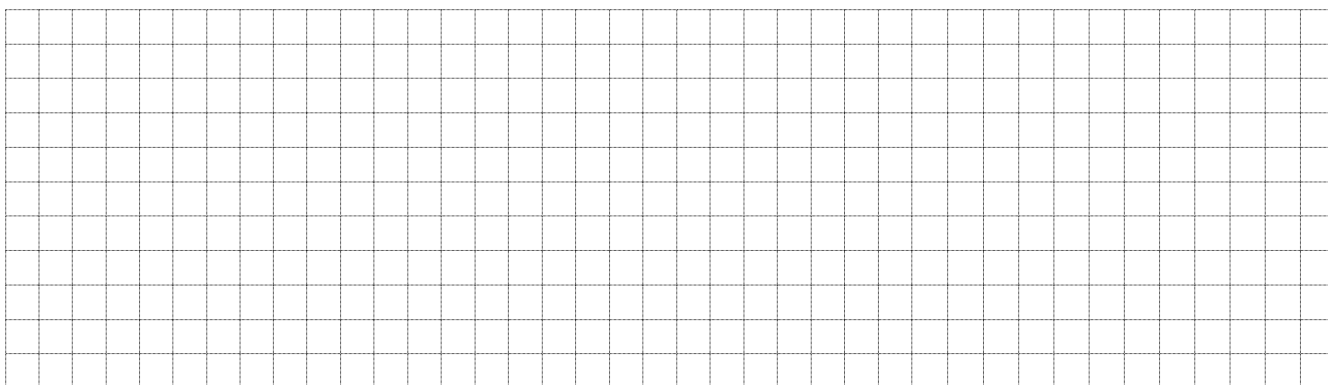
3.12. У паралелограмі $ABCD$ кут A дорівнює 60° . Висота BE поділяє сторону AD на дві рівні частини. Знайдіть довжину діагоналі BD , якщо периметр паралелограма дорівнює 48 см.



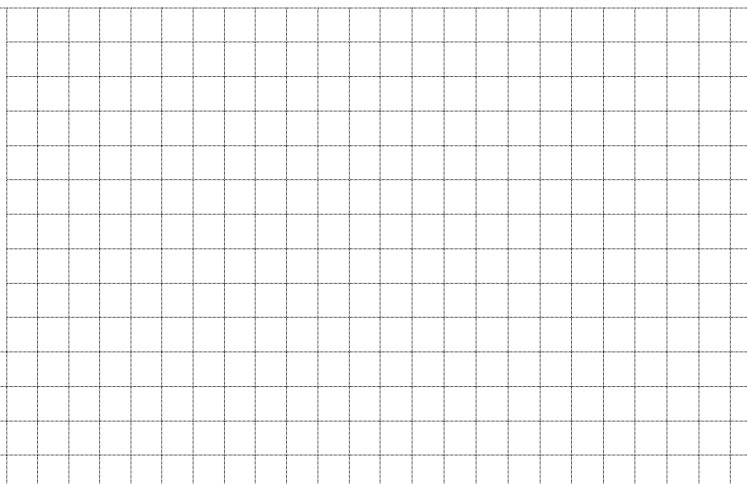
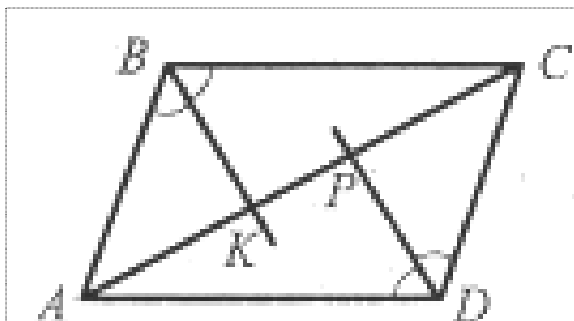
3.13. У паралелограмі $ABCD$ з вершини тупого кута B проведено висоти BM і BK . Доведіть, що кути MBK і BAD рівні.



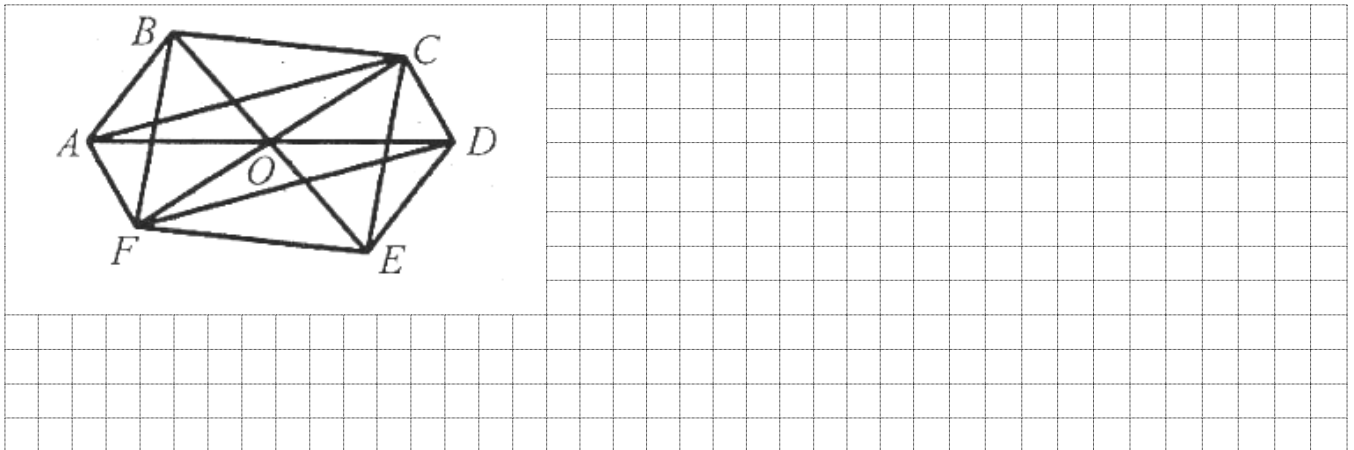
3.14. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 6 см . На основі трикутника взято довільну точку, через яку проведено дві прямі, паралельні бічним сторонам трикутника. Знайдіть периметр отриманого паралелограма.



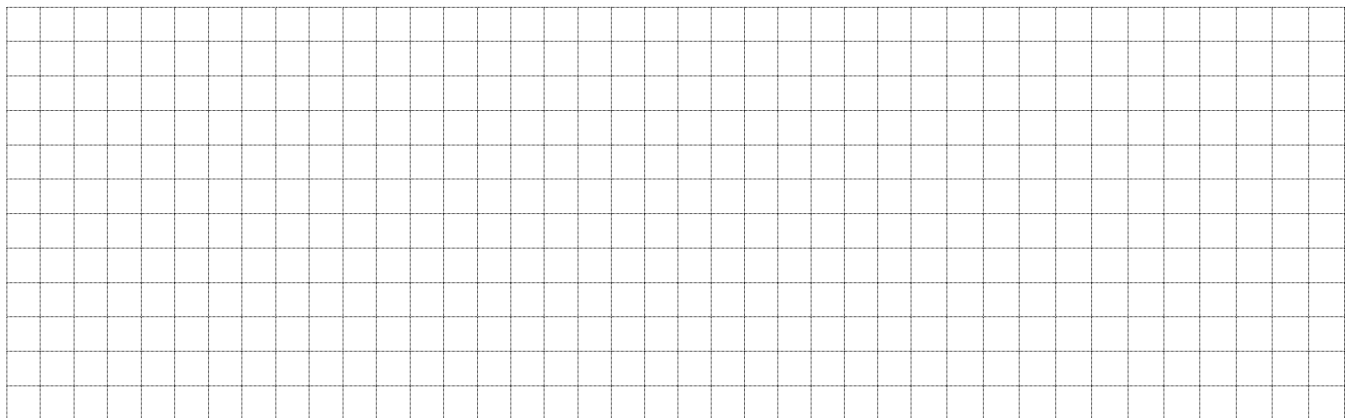
3.15. У паралелограмі $ABCD$ бісектриси кутів B і D перетинають діагональ AC у точках K і P відповідно. Доведіть, що чотирикутник $BPKD$ — паралелограм.



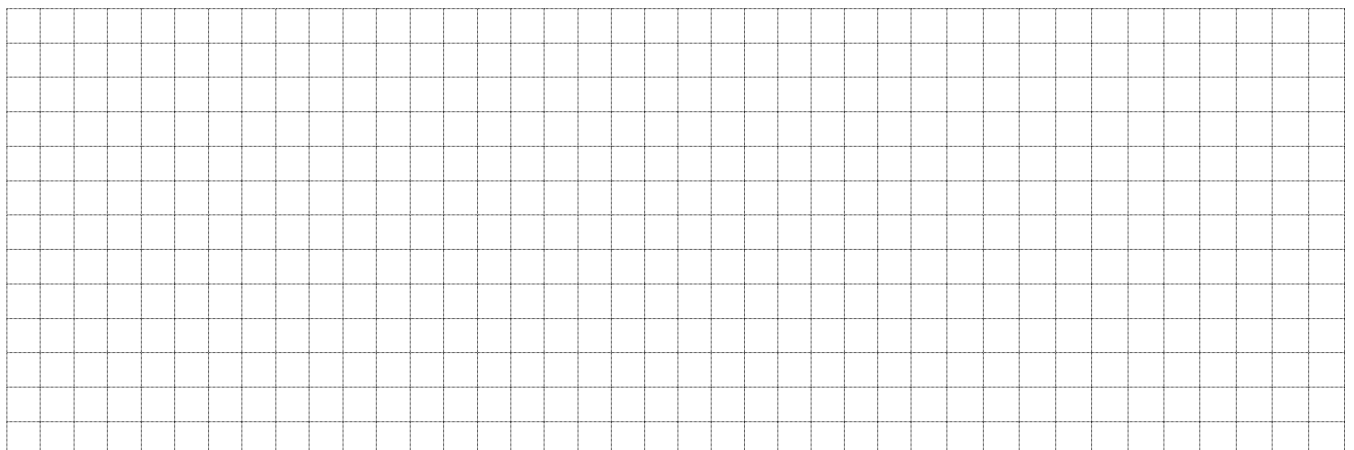
3.16. На рисунку точка O — спільна середина відрізків AD , BE і CF . Які з чотирикутників на цьому рисунку є паралелограмами?



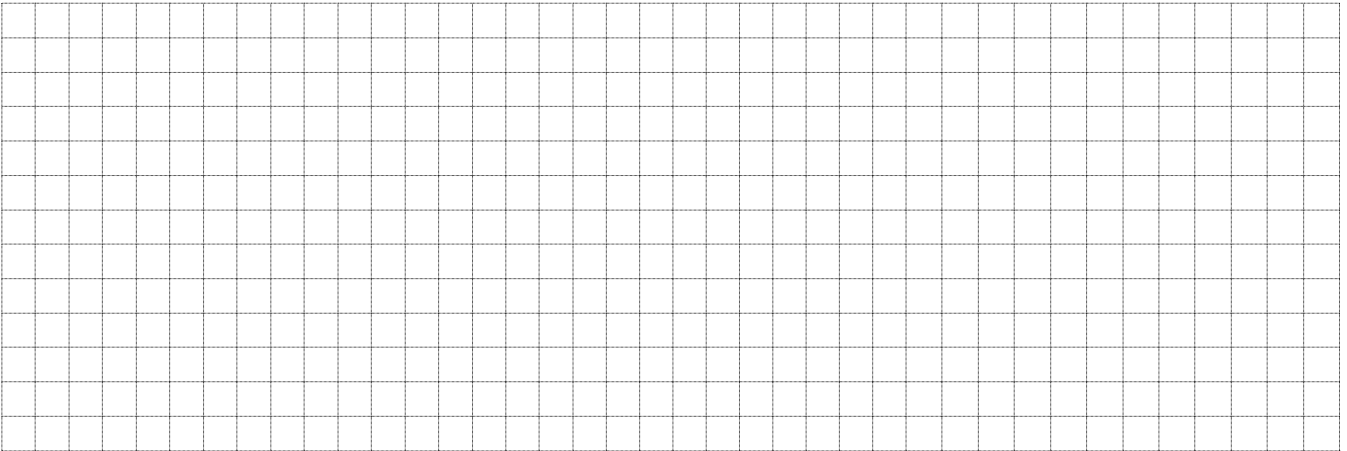
3.17. У паралелограмі $ABCD$ бісектриси кутів A і D поділяють сторону BC на три рівних відрізки. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 40 см.



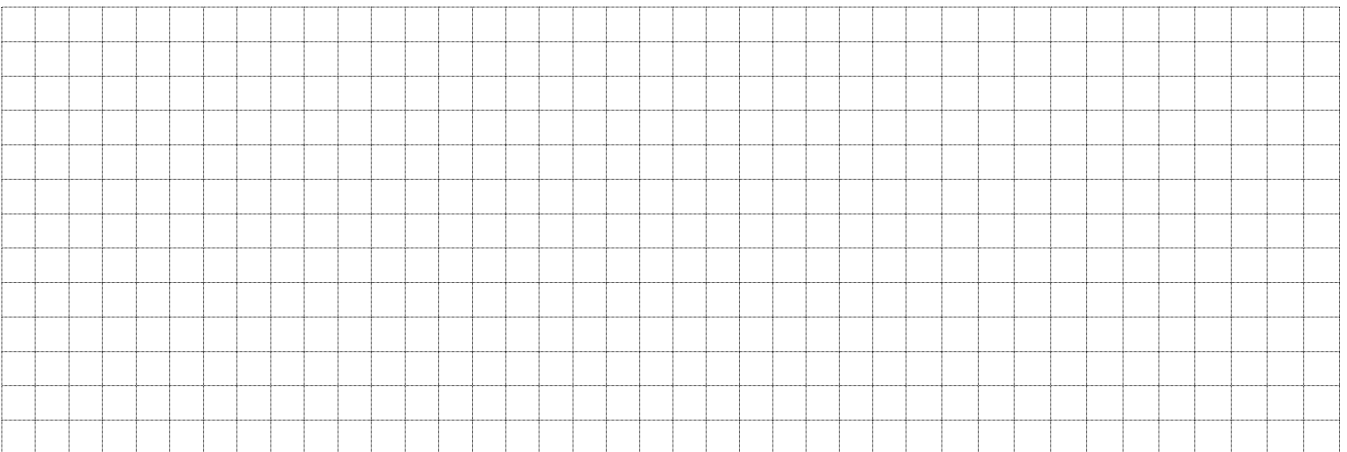
3.18. Побудуйте паралелограм: 1) за стороною, проведеною до неї, висотою і діагоналлю; 2) за гострим кутом і двома висотами, які відповідають двом сусіднім сторонам.



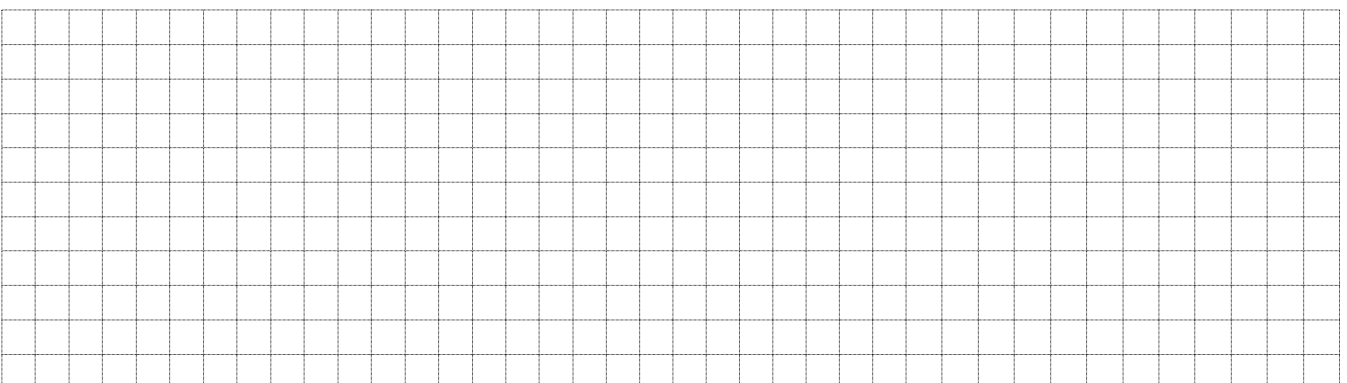
3.19. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M , а бісектриса кута AMC проходить через точку D . Знайдіть кути паралелограма, якщо $\angle MDC = 45^\circ$.



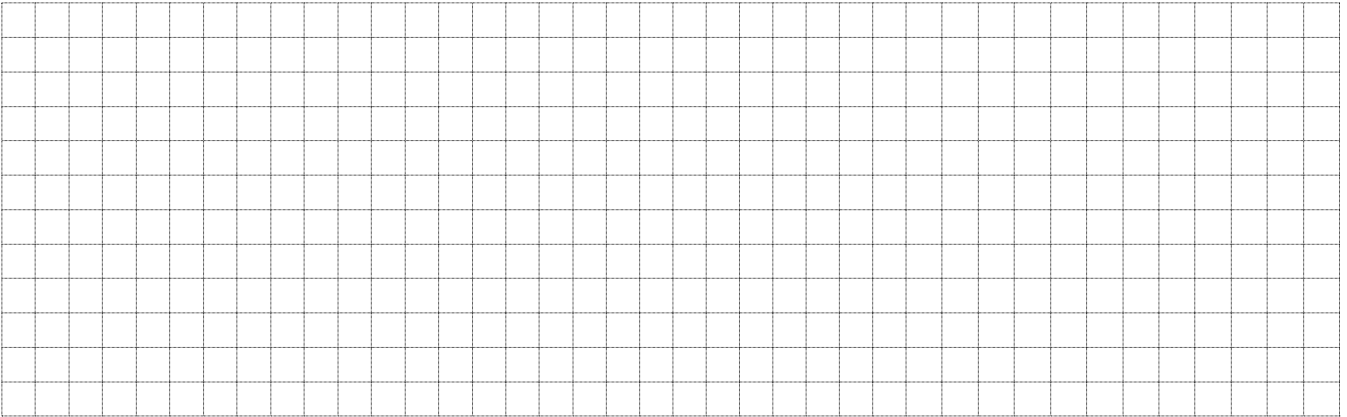
3.20. Через вершини A , B і D паралелограма $ABCD$ проведено прямі, перпендикулярні до прямих BD , BC і CD відповідно. Доведіть, що проведені прямі перетинаються в одній точці.



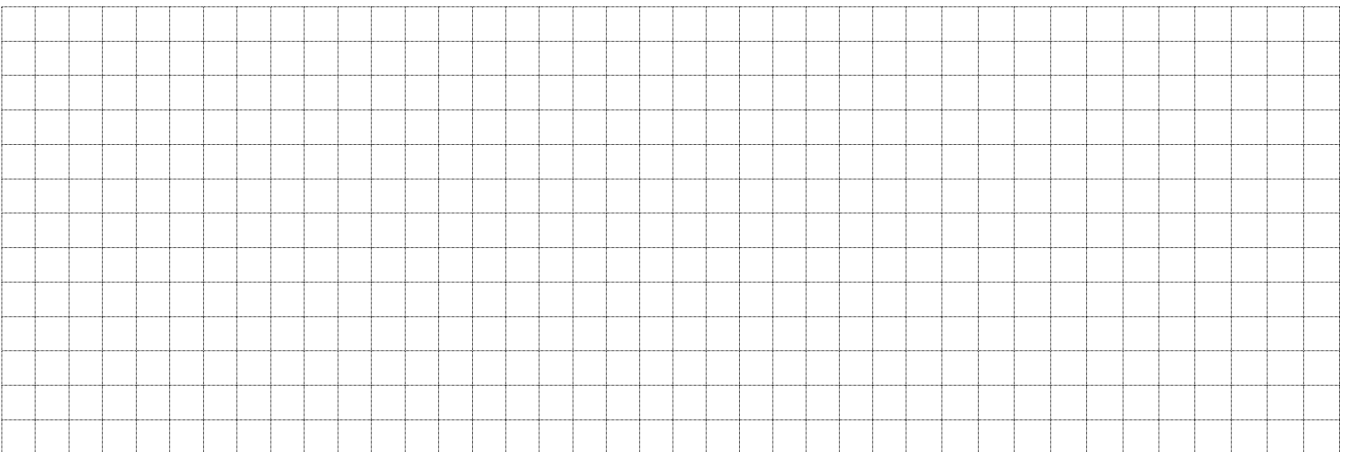
3.21. Через точку всередині кута проведіть пряму так, щоб відрізок цієї прямої, який лежить між сторонами кута, був поділений цією точкою навпіл.



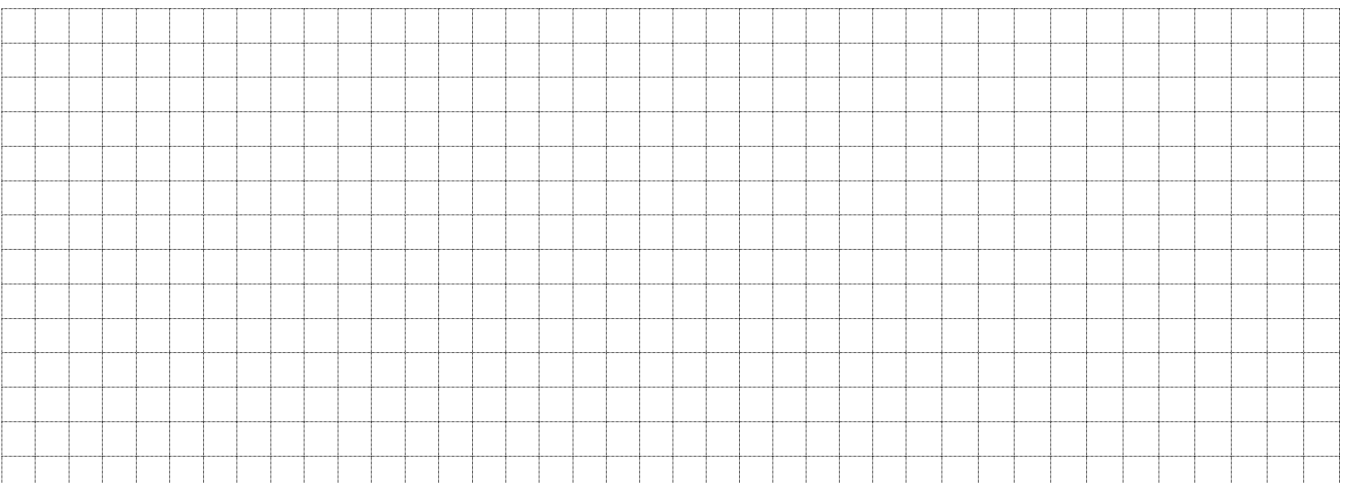
3.22. Периметр паралелограма дорівнює **125 см**. Знайдіть його сторони, якщо дві з них співвідносяться як **4:5**.



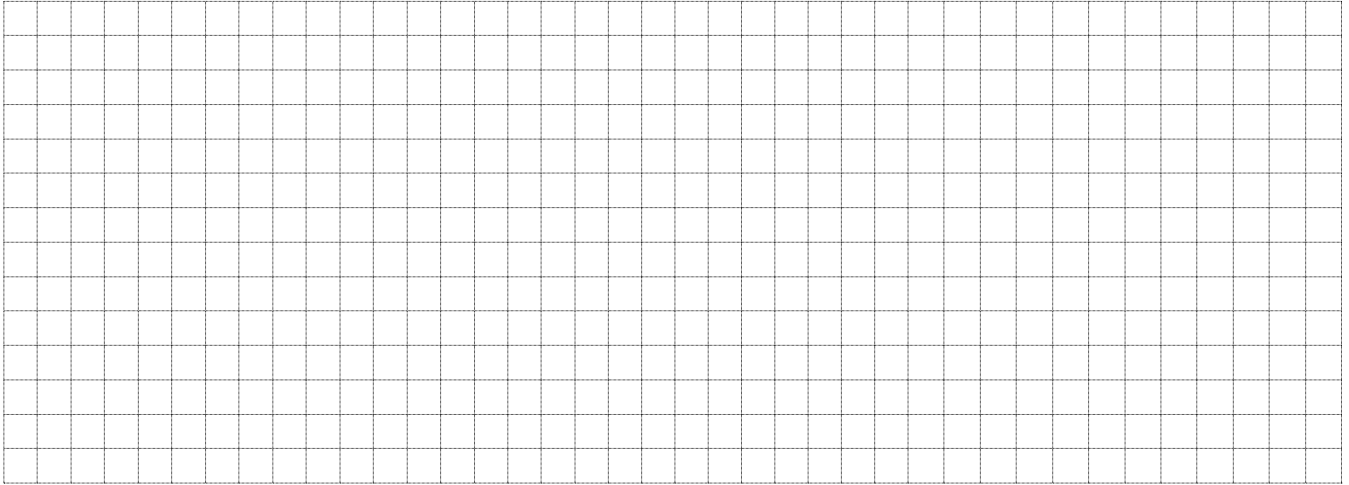
3.23. Через точку **O** перетину діагоналей паралелограма **ABCD** проведено пряму, яка перетинає сторони **AB** і **CD** у точках **E** і **F** відповідно. Доведіть, що **OE = OF**.



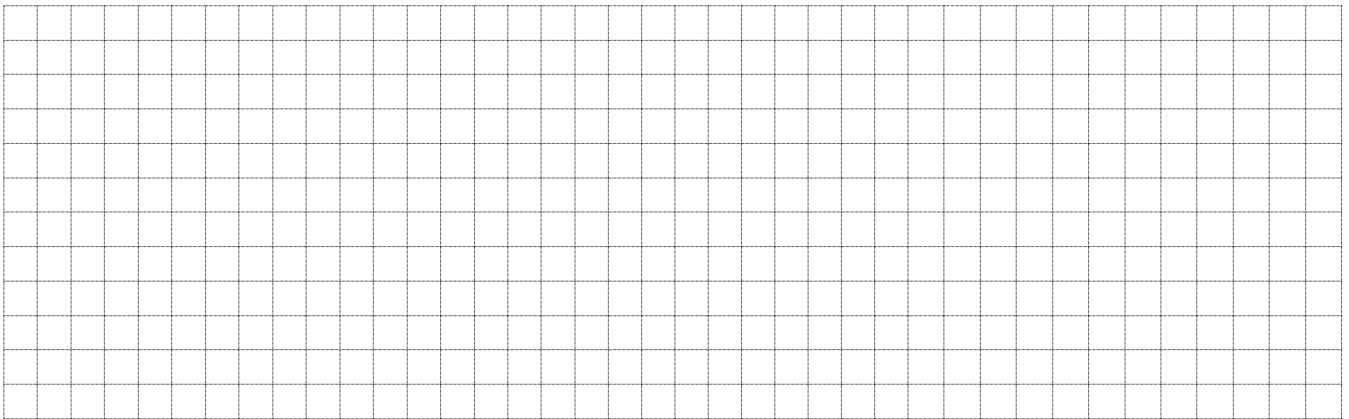
3.24. Два кути паралелограма співвідносяться як **1:5**. Знайдіть кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини: 1) тупого кута; 2) гострого кута.



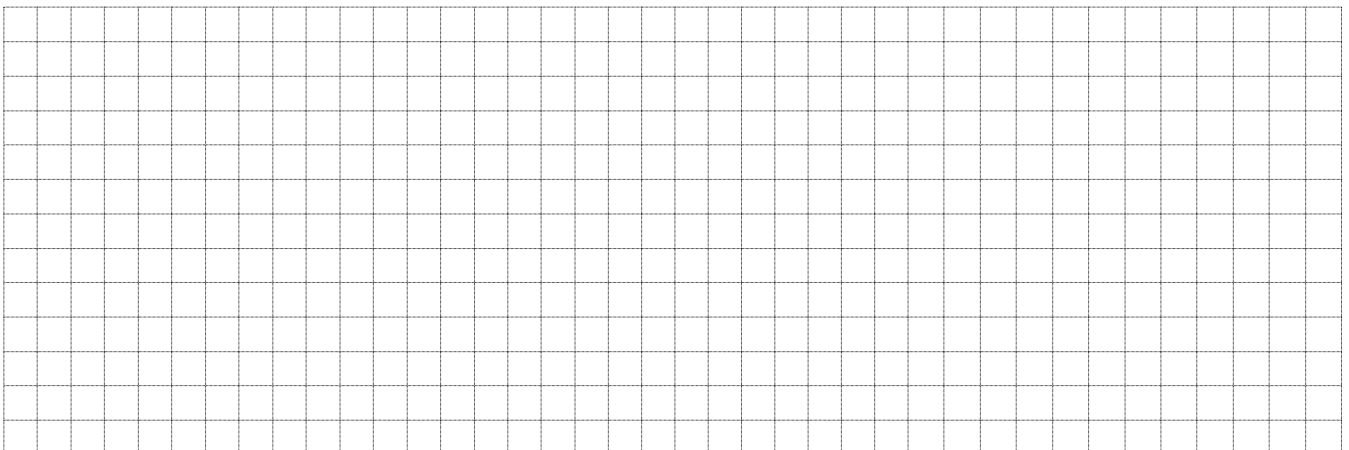
3.25. Дано відрізок DE і точку M , яка не лежить на прямій DE . Побудуйте паралелограм так, щоб однією з його сторін був відрізок DE , а точка M — точкою перетину його діагоналей.



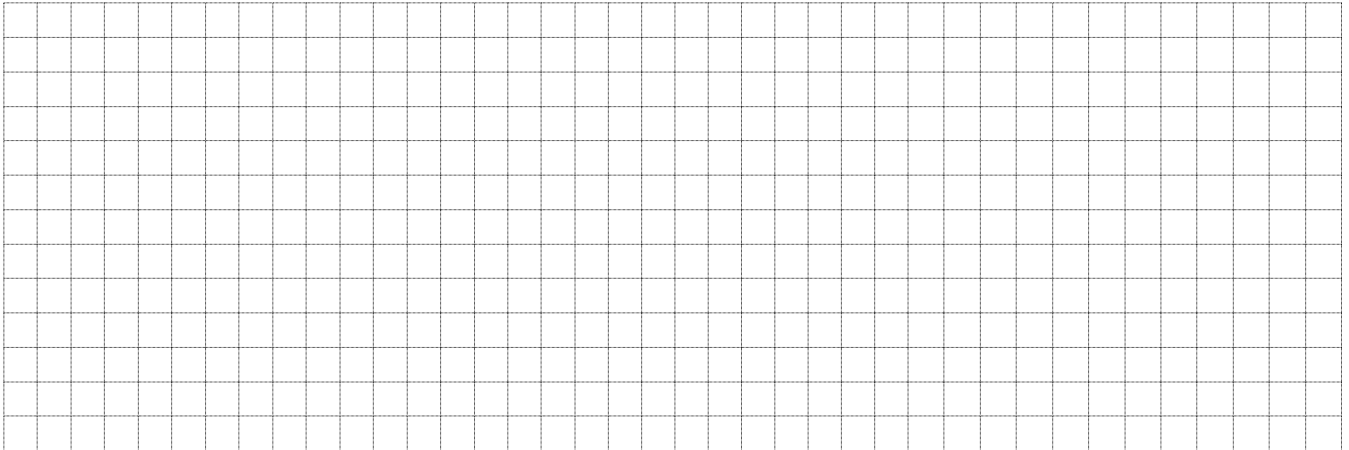
3.26. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = 180^\circ$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ – паралелограм.



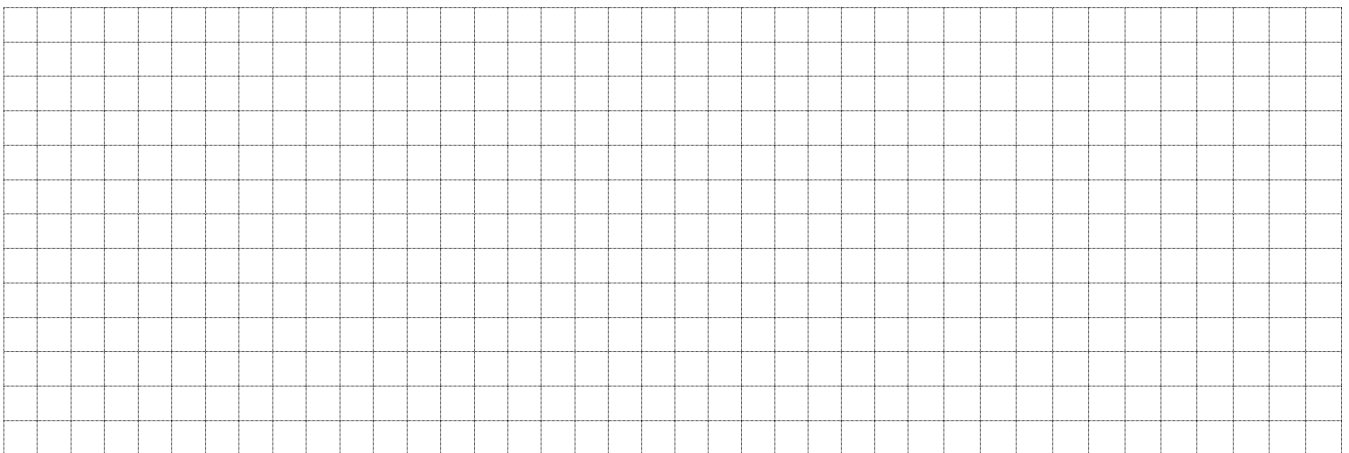
3.27. Доведіть, що кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює гострому куту паралелограма.



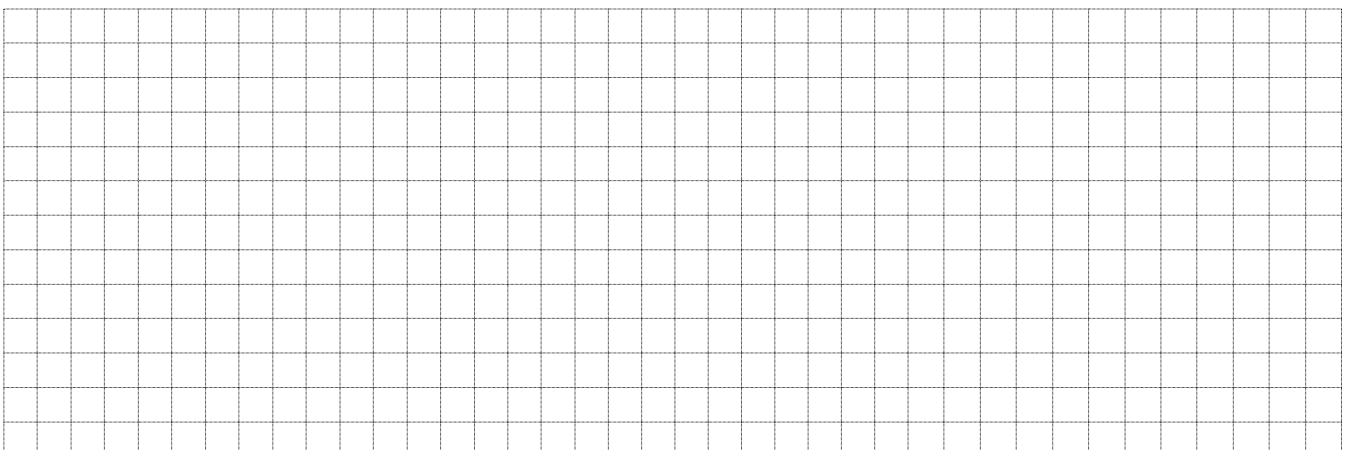
3.28. Доведіть, що кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини гострого кута, дорівнює тупому куту паралелограма.



3.29. Периметр паралелограма $ABCD$ дорівнює 24 см , $\angle ABC = 160^\circ$, діагональ AC утворює зі стороною AD кут 10° . Знайдіть сторони паралелограма.

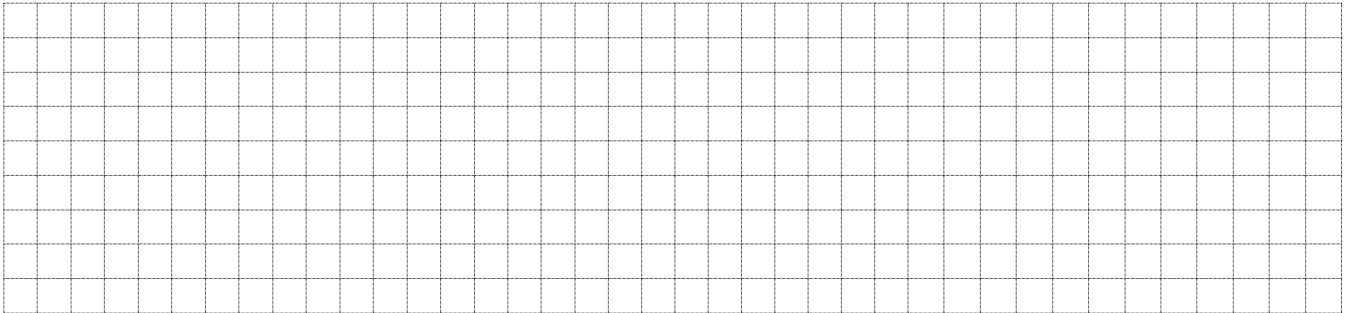


3.30. Діагональ BD паралелограма $ABCD$ утворює зі стороною AB кут 65° , $\angle C = 50^\circ$, $AB = 8\text{ см}$. Знайдіть периметр паралелограма.



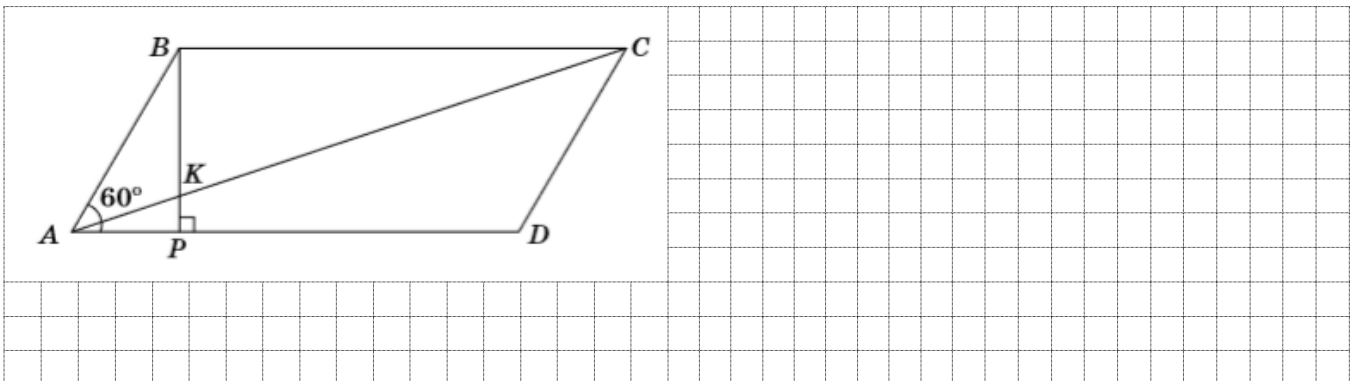
3.34. З вершини тупого кута B паралелограма $ABCD$ опущено перпендикуляр BO на сторону AD . Коло з центром у точці A проходить через вершину B та перетинає сторону AD у точці K . Відомо, що $AK = 6$ см, $KD = 4$ см, $AO = 5$ см.

1. Визначте периметр паралелограма $ABCD$, см.
2. Обчисліть довжину діагоналі BD , см.



3.35. Діагональ AC та висота BP паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці K (див. рисунок). Відомо, що $AB = 12$, $\angle BAD = 60^\circ$, $BK : KP = 4:1$.

1. Визначте довжину відрізка AP .
2. Обчисліть периметр паралелограма $ABCD$.

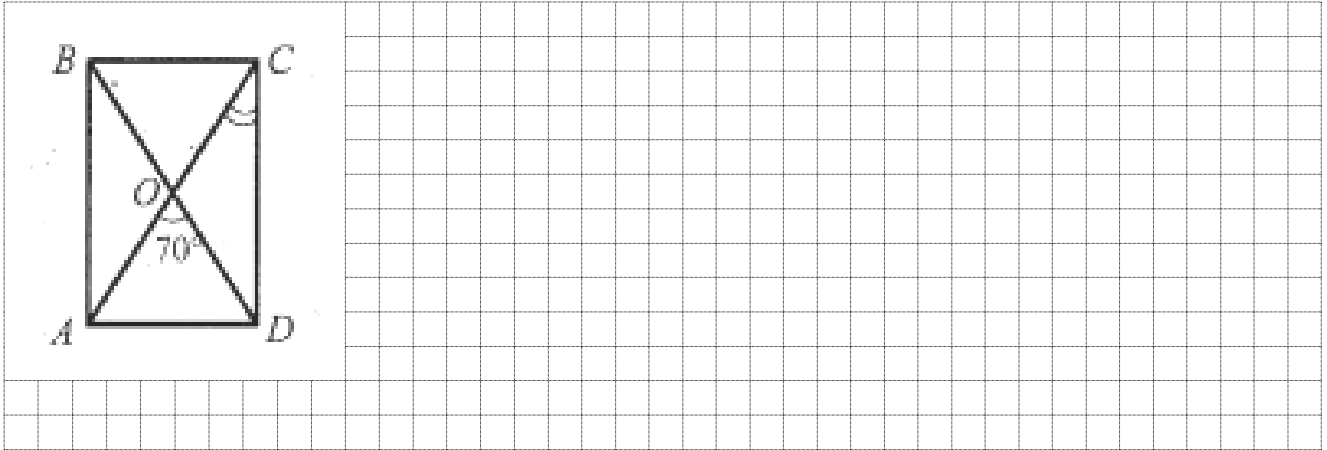


3.36. Бісектриса гострого кута A паралелограма $ABCD$ поділяє сторону BC на відрізки $BM = 3$ см і $MC = 5$ см (див. рисунок). Знайдіть периметр паралелограма $ABCD$.

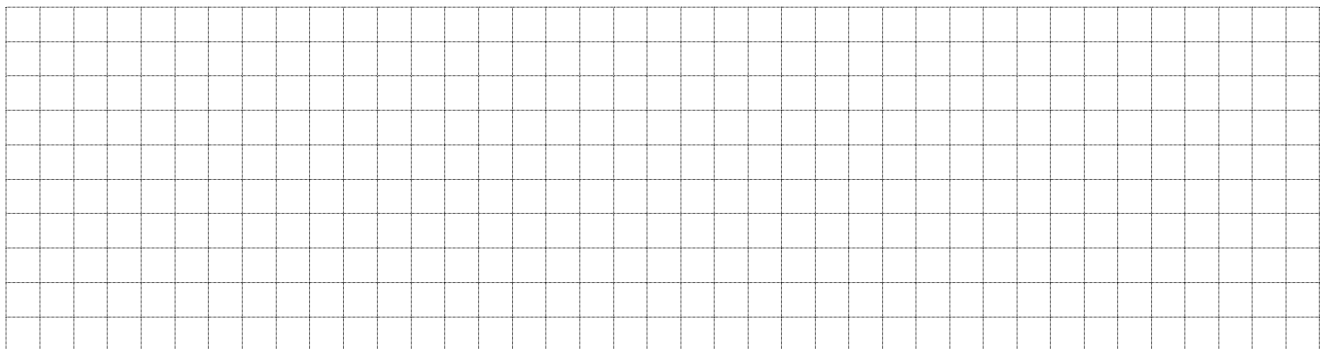
| А | Б | В | Г | Д |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 18 см | 20 см | 22 см | 24 см | 26 см |

Заняття 4
ПРЯМОКУТНИК. РОМБ. КВАДРАТ

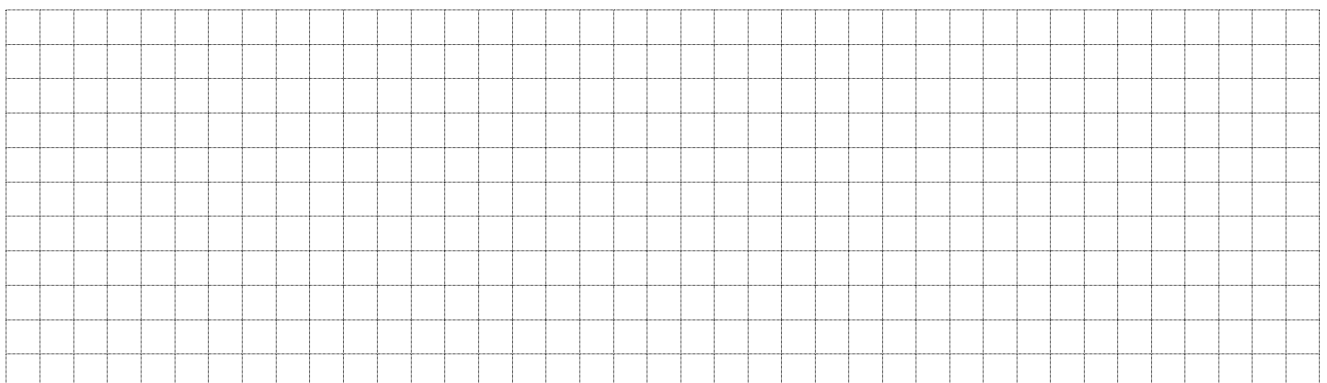
4.1. У прямокутнику $ABCD$ точка O – точка перетину діагоналей, $\angle AOD = 70^\circ$. Знайдіть кут OCD .



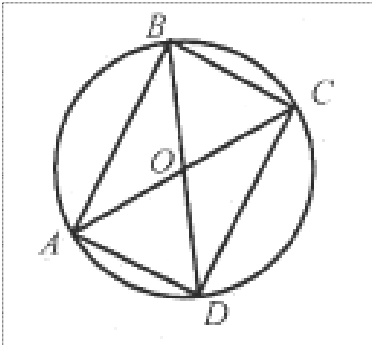
4.2. У прямокутнику діагональ утворює з більшою стороною кут, що дорівнює 32° . Знайдіть кут між діагоналями прямокутника, який лежить проти його меншої сторони.



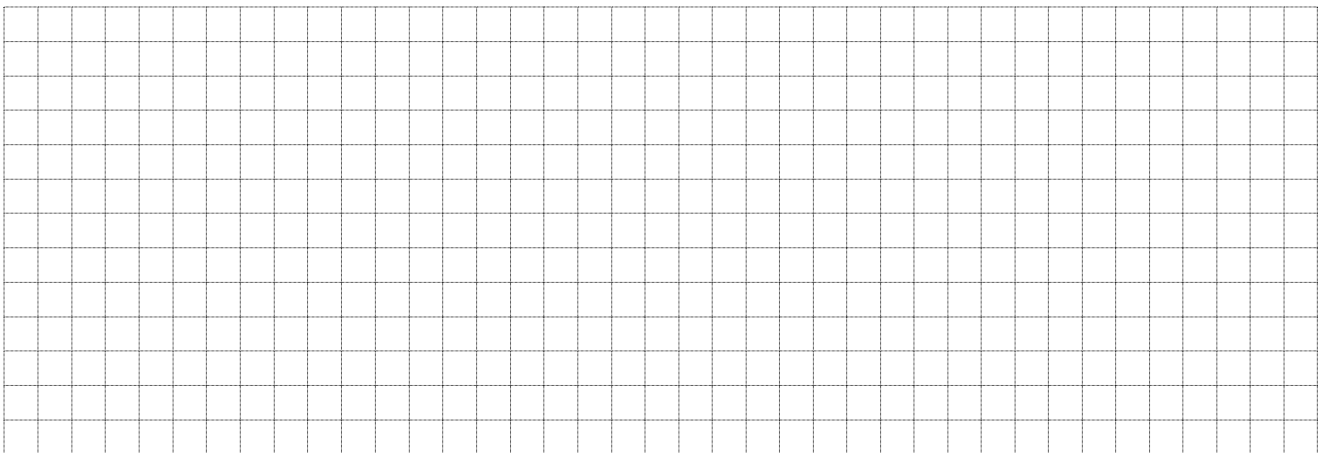
4.3. У прямокутнику $ABCD$ точка K – середина сторони AD . Точки M і N належать сторонам AB і CD відповідно, причому $BM = CN$. Доведіть, що $KM = KN$.



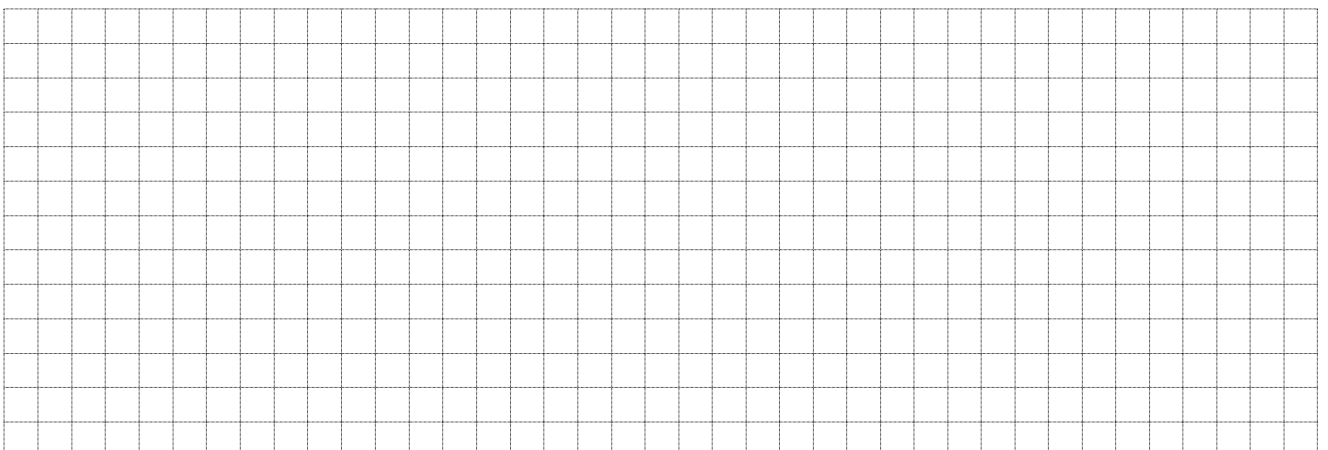
4.4. У колі з центром O проведено діаметри AC і BD . Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ – прямокутник.



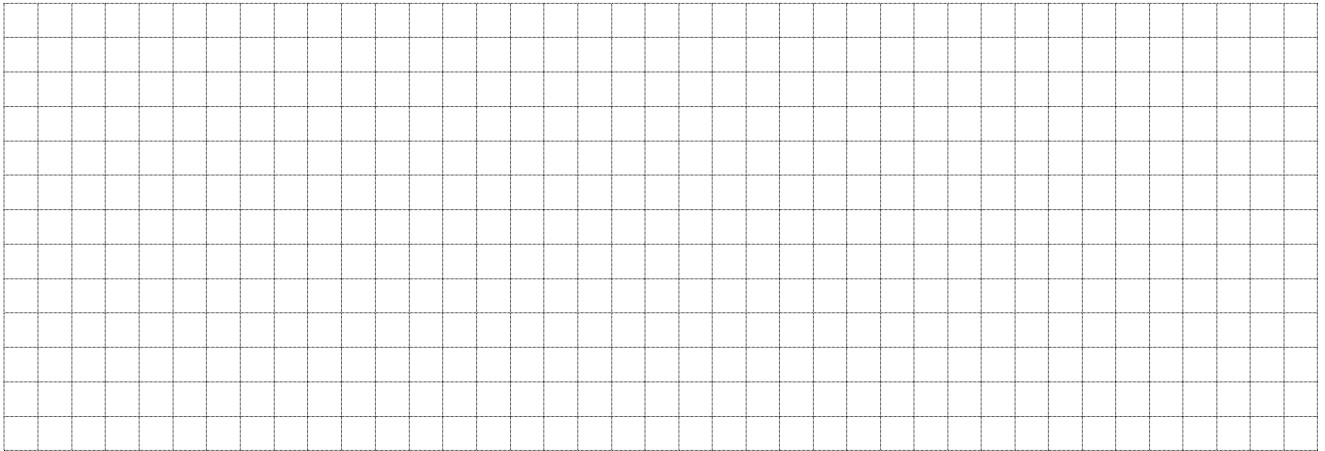
4.5. Діагоналі паралелограма утворюють рівні кути з однією з його сторін. Доведіть, що цей паралелограм – прямокутник.



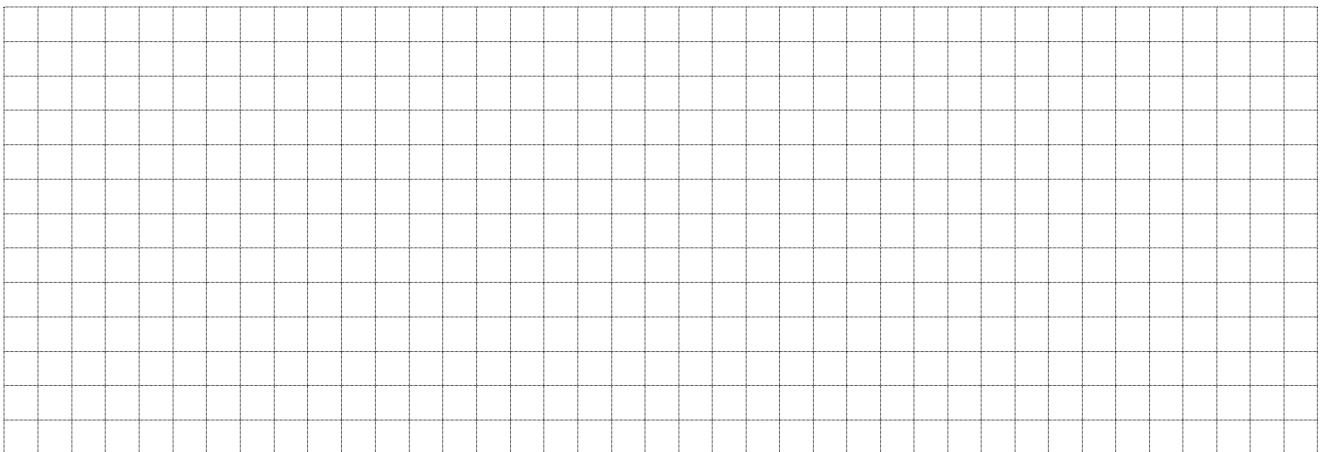
4.6. У прямокутнику $ABCD$ бісектриса кута A перетинає сторону CD у точці E – середині CD . Доведіть, що промінь BE – бісектриса кута B .



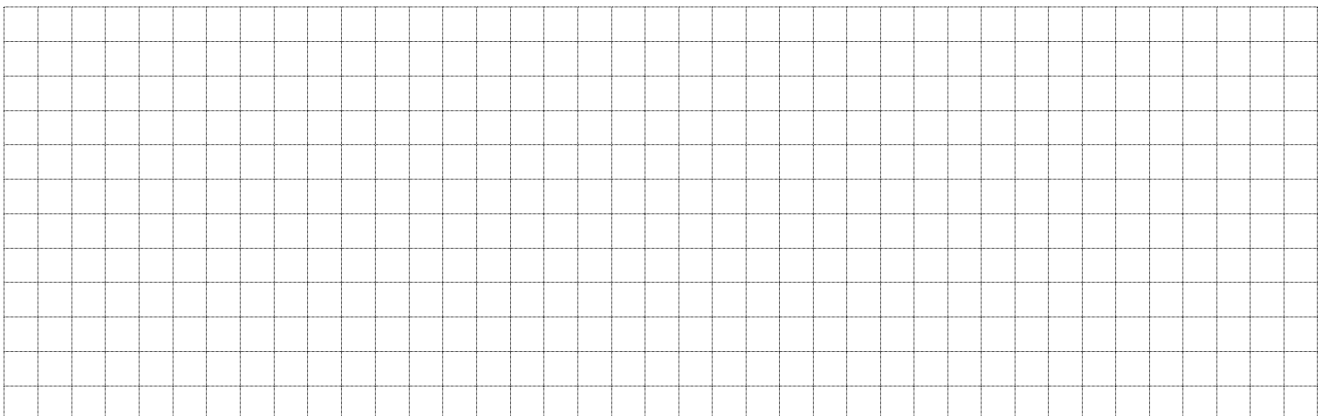
4.7. Перпендикуляри, проведені з точки перетину діагоналей прямокутника до двох його сусідніх сторін, дорівнюють **5 см** і **7 см**. Визначте периметр прямокутника.



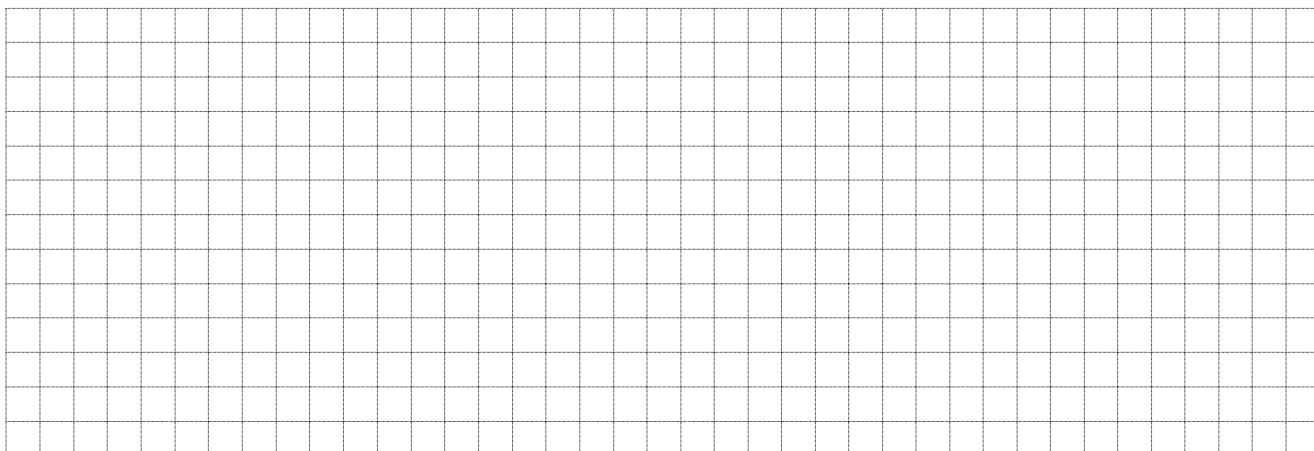
4.8. У прямокутнику ***ABCD*** точка ***K*** – середина сторони ***AB***, кут ***CKD*** дорівнює **90°** . Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює **36 см**.



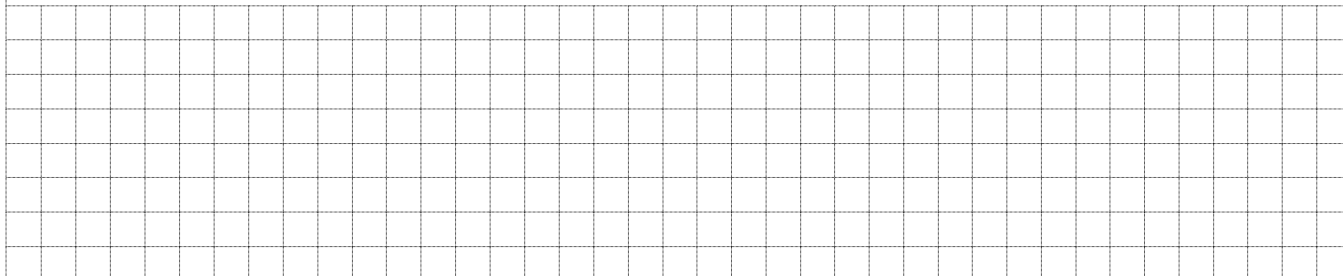
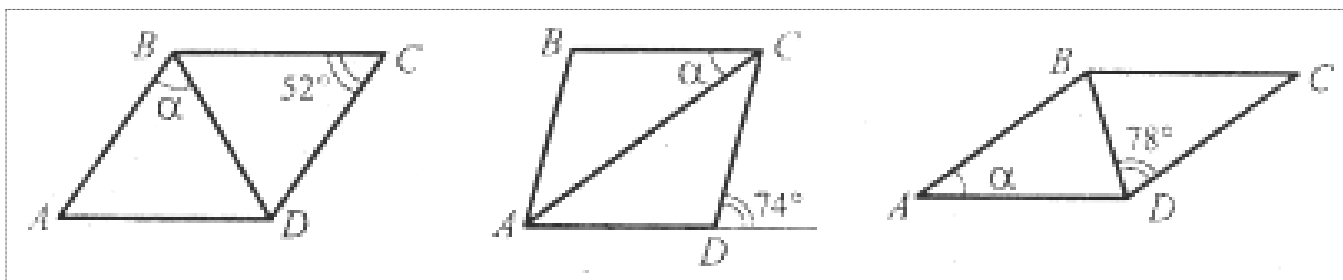
4.9. Доведіть, що в прямокутному трикутнику медіана, проведена з вершини прямого кута, дорівнює половині гіпотенузи.



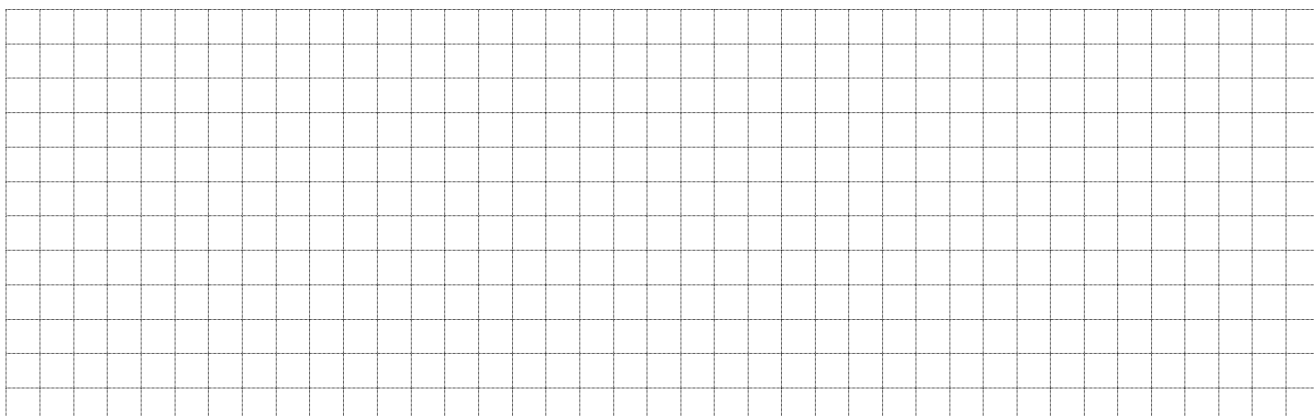
4.10. У рівнобедрений прямокутний трикутник, катет якого дорівнює **12 см**, вписано прямокутник, який має з трикутником спільний прямий кут. Знайдіть периметр прямокутника.



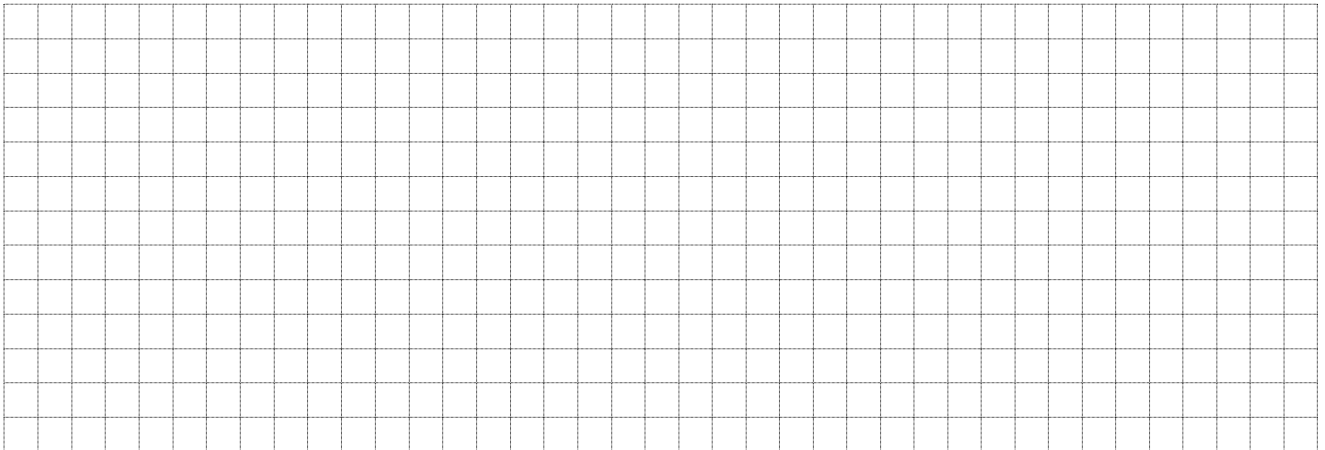
4.11. Чотирикутник **ABCD** – ромб. Знайдіть кут α .



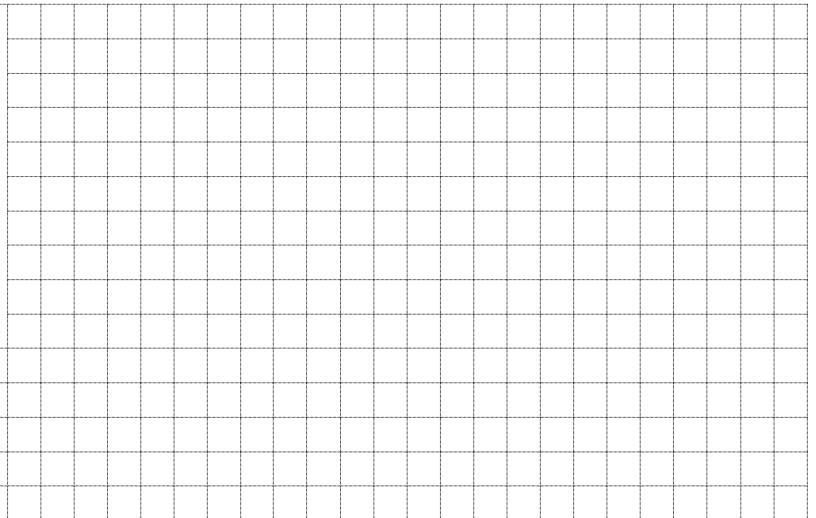
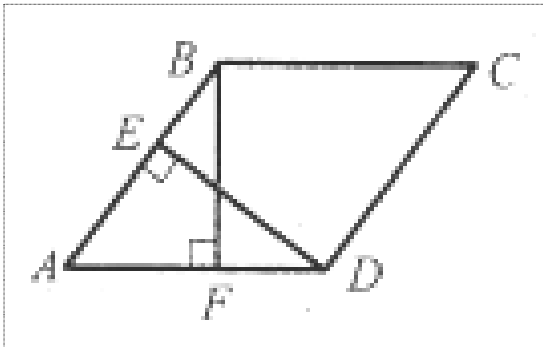
4.12. Знайдіть кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, які співвідносяться як **2:7**.



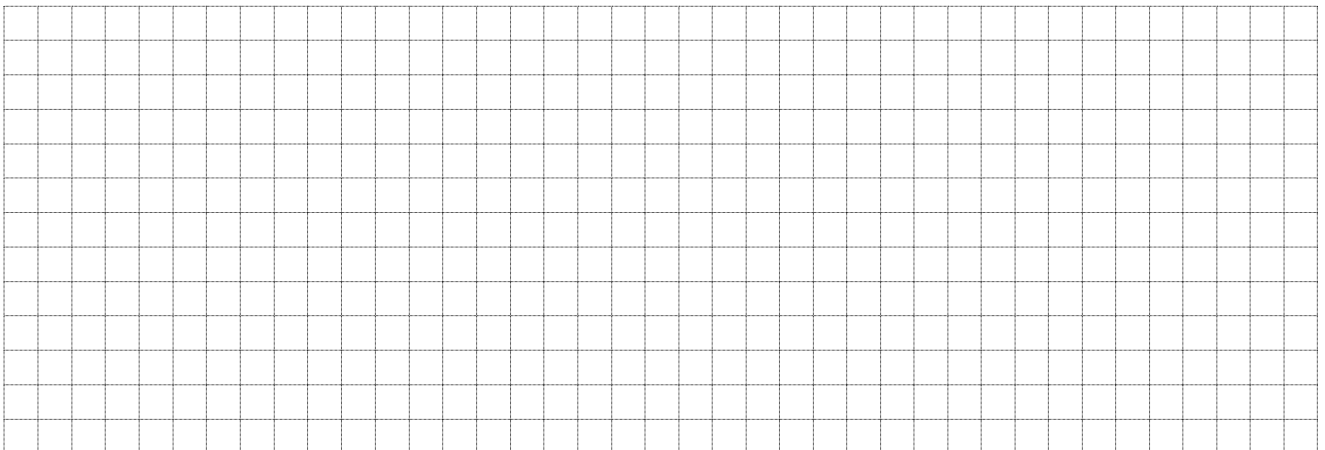
4.13. Висоти, проведені з вершини тупого кута ромба, утворюють кут 48° . Знайдіть кути, які утворюють діагоналі ромба з його сторонами.



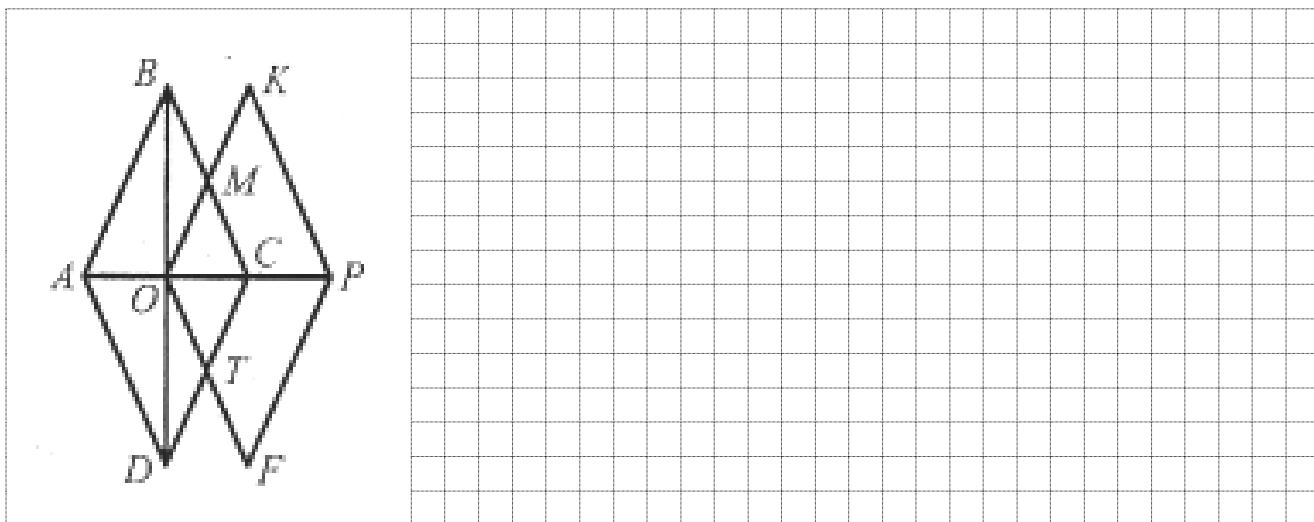
4.14. Відрізки BF і DE – висоти ромба $ABCD$. Доведіть, що $BF = DE$.



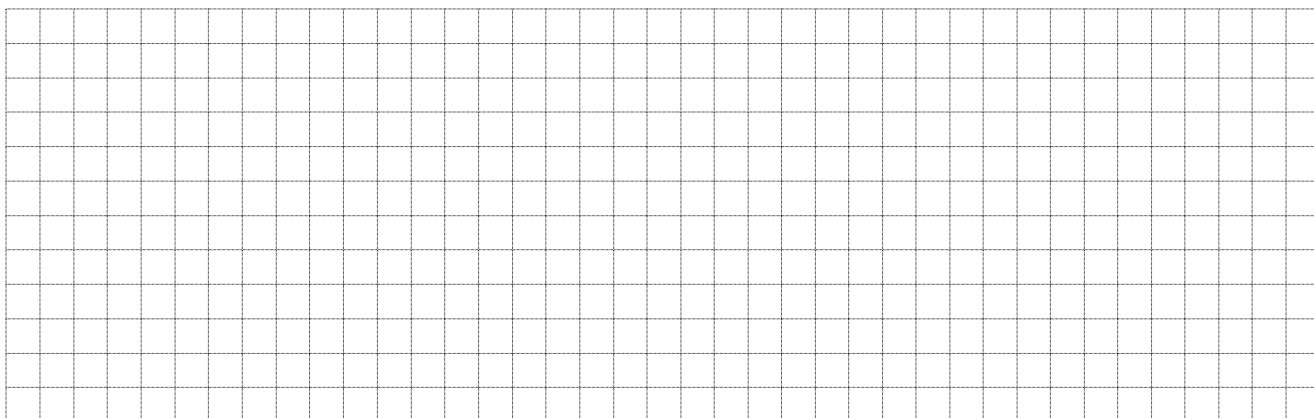
4.15. Висота, проведена з вершини тупого кута ромба, поділяє його сторону навпіл. Знайдіть: 1) кути ромба; 2) сторони ромба, якщо його менша діагональ дорівнює 16 см .



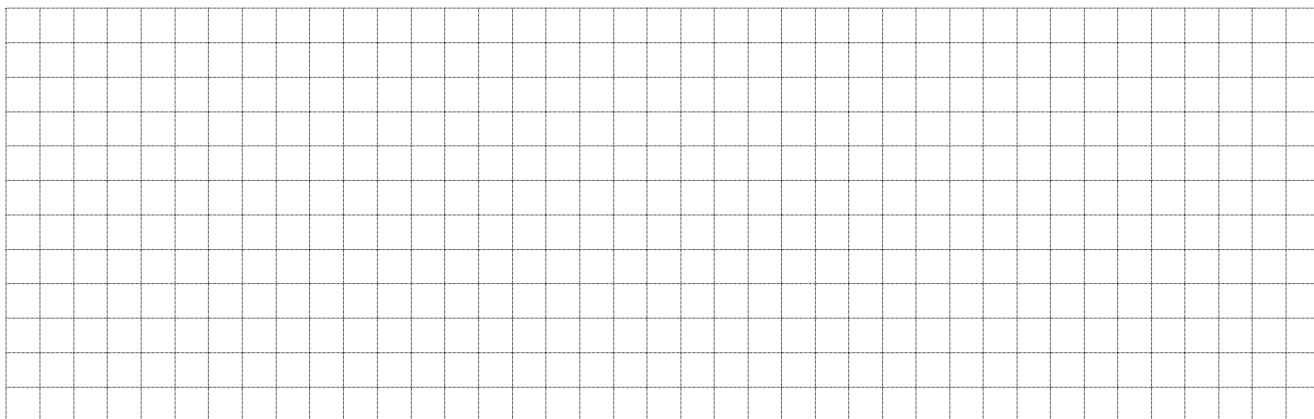
4.16. Два рівних ромби розміщено так, як показано на рисунку. Визначте вид чотирикутника **OMCT**.



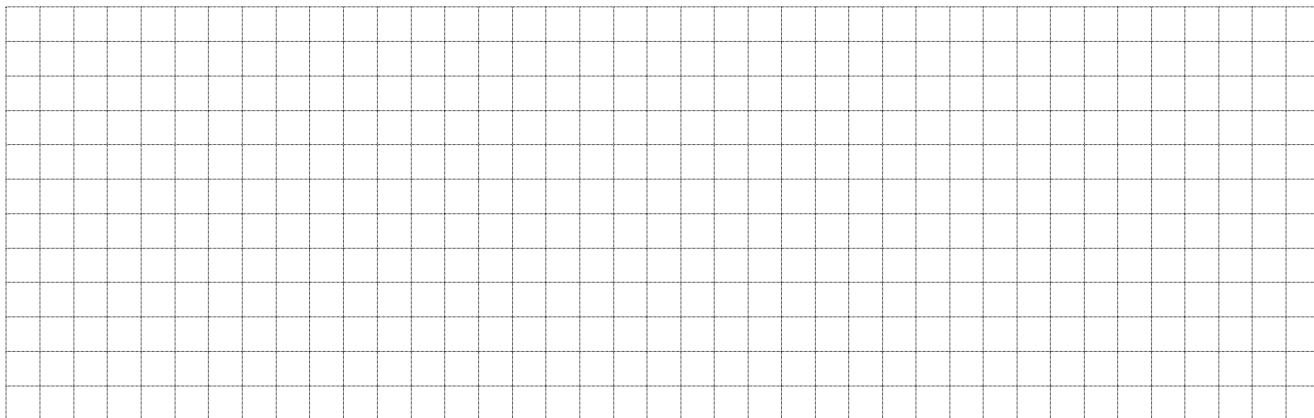
4.17. У паралелограмі **ABCD** бісектриси кутів **A** і **B** перетинають сторони **BC** і **AD** у точках **E** і **F** відповідно. Доведіть, що чотирикутник **ABEF** – ромб.



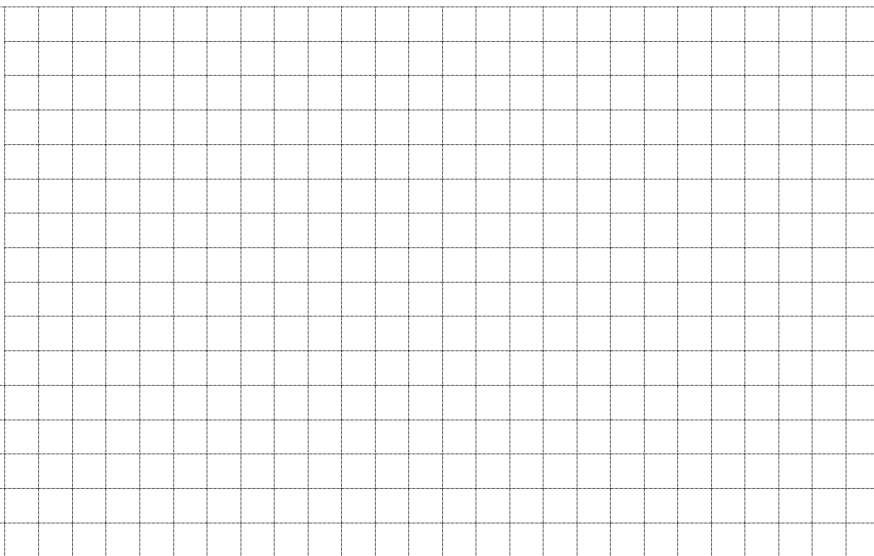
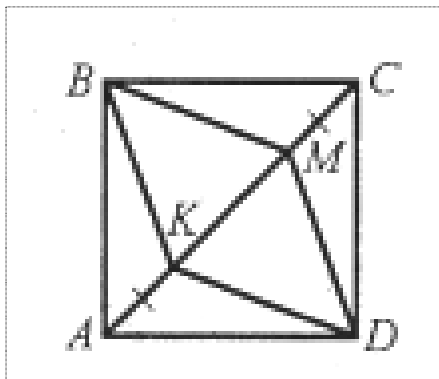
4.18. У трикутнику **ABC** через середину його бісектриси **AK** проведено пряму, перпендикулярну до неї. Ця пряма перетинає сторони **AB** і **AC** у точках **E** і **F** відповідно. Доведіть, що чотирикутник **AЕКF** – ромб.



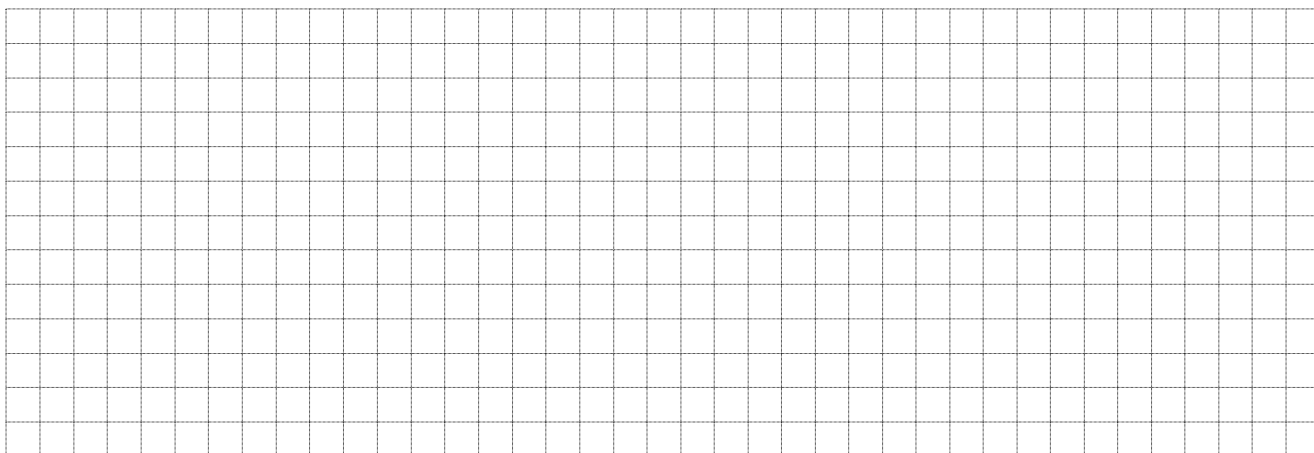
4.19. Периметр квадрата дорівнює **36 см**. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей квадрата до його сторін.



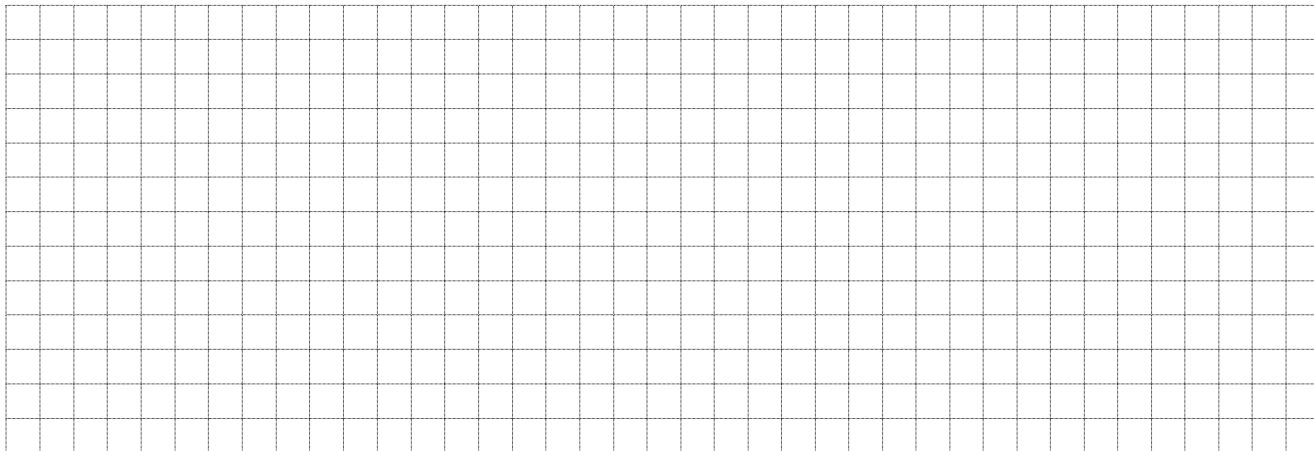
4.20. На діагоналі **AC** квадрата **ABCD** вибрано точки **K** і **M** так, що **AK = CM**. Доведіть, що чотирикутник **BMDK** – ромб.



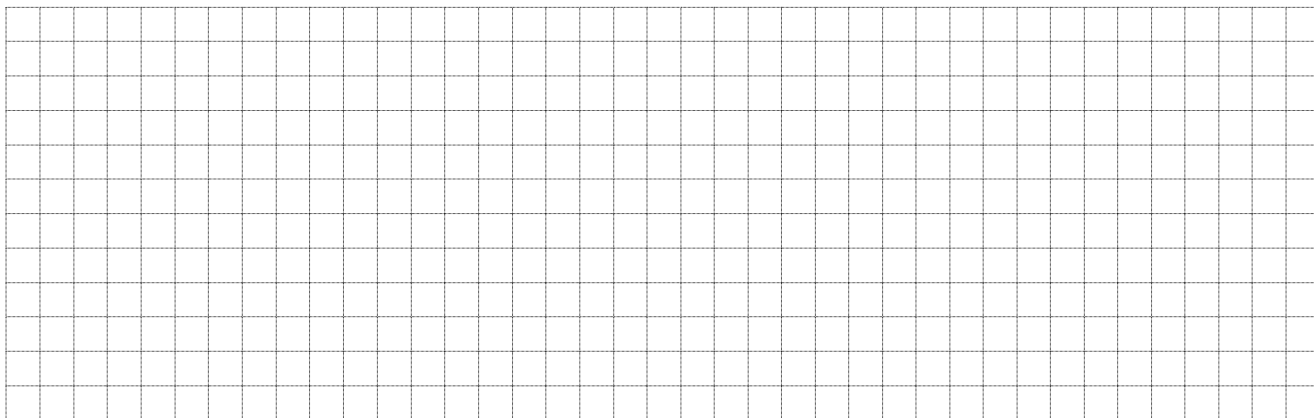
4.21. Діагональ квадрата дорівнює **4 см**. Його сторона є діагоналлю другого квадрата. Знайдіть сторону другого квадрата.



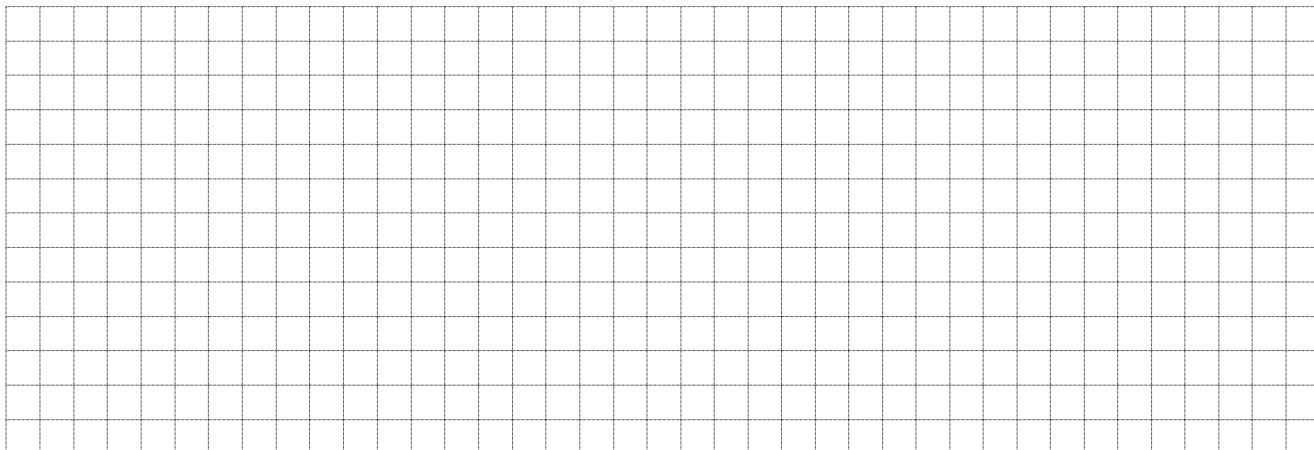
4.22. У рівнобедрений прямокутний трикутник з гіпотенузою **18 см** вписано квадрат, дві вершини якого лежать на гіпотенузі трикутника, а дві інші – на катетах. Знайдіть периметр квадрата.



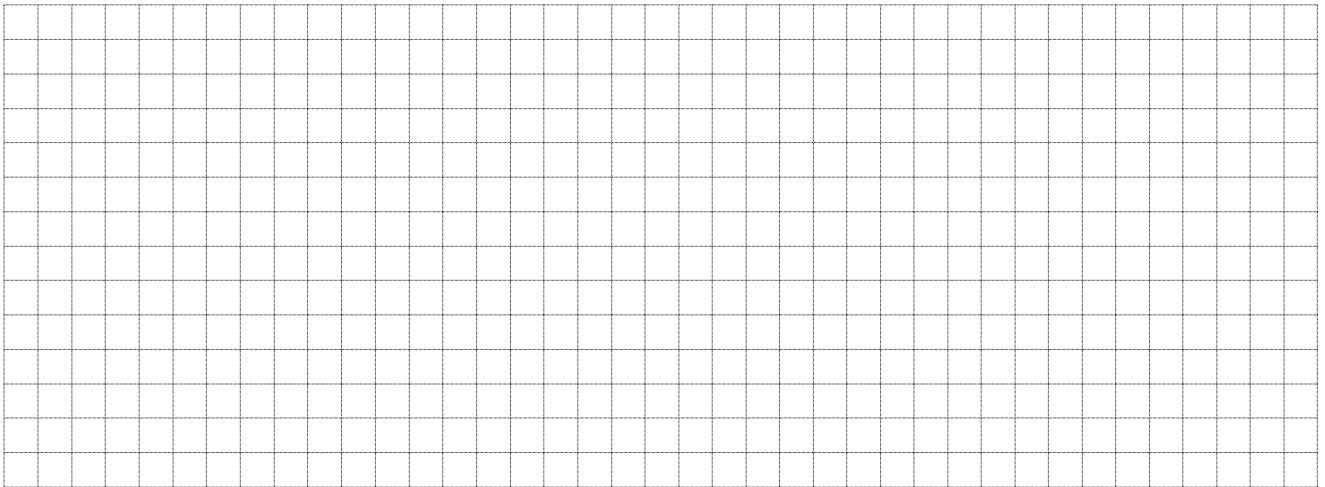
4.23. У прямокутнику **ABCD** бісектриси кутів **A** і **B** перетинають сторони **BC** і **AD** у точках **E** і **K**. Доведіть, що чотирикутник **ABEK** – квадрат.



4.24. На продовженні сторони **AD** квадрата **ABCD** за точку **D** взято точку **E** таку, що промінь **BE** поділяє кут **ABC** у співвідношенні **1:2**. Знайдіть периметр квадрата, якщо **BE = 6 см**.



4.25. Через вершини квадрата проведено прямі, паралельні його діагоналям. Визначте вид чотирикутника, утвореного цими прямими.



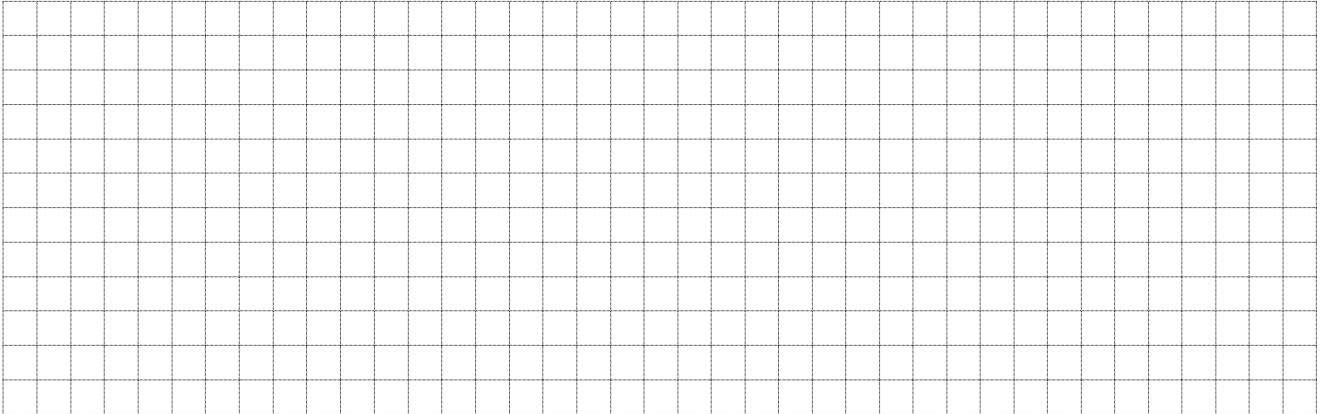
4.26. Побудуйте ромб за висотою і діагоналлю.



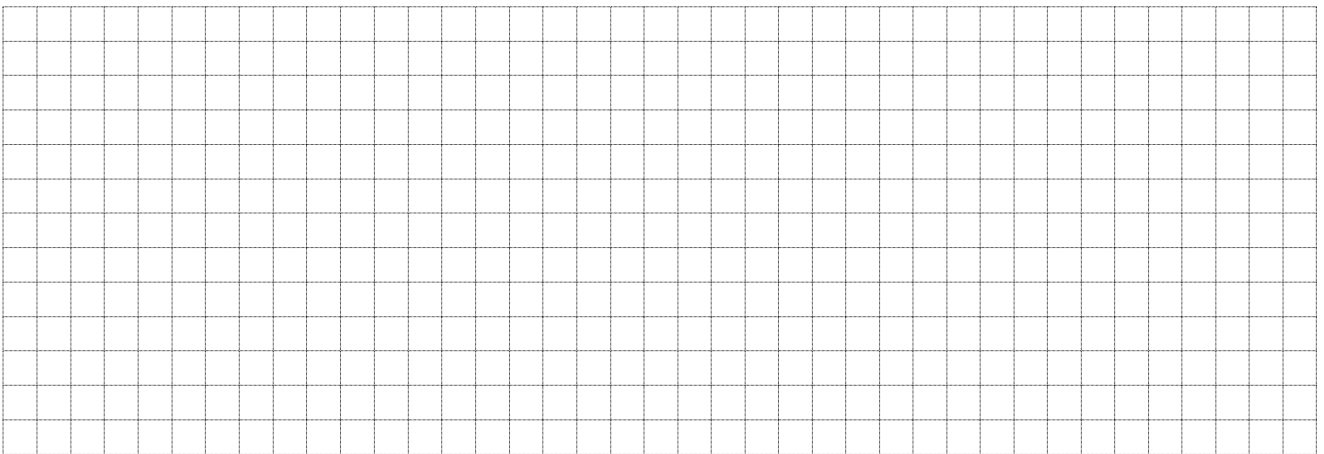
4.27. Доведіть, якщо діагоналі паралелограма рівні та перпендикулярні, то цей паралелограм є квадратом.



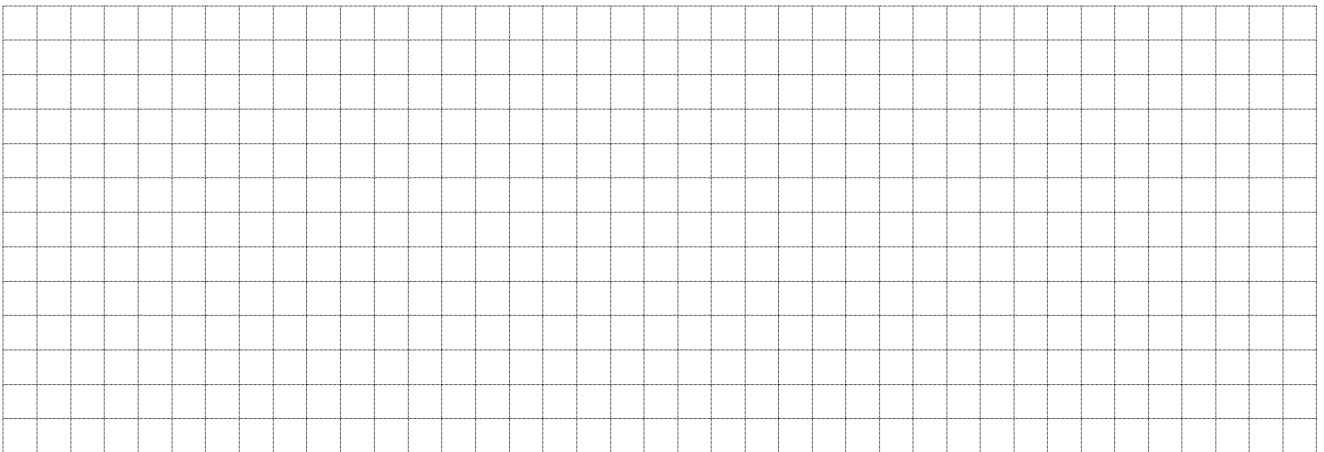
4.28. Висота ромба, проведена з вершини його тупого кута, поділяє сторону ромба навпіл. Менша діагональ дорівнює **4 см**. Знайдіть кути та периметр ромба.



4.29. Доведіть, що бісектриси кутів прямокутника, який не є квадратом, перетинаючись, утворюють квадрат.

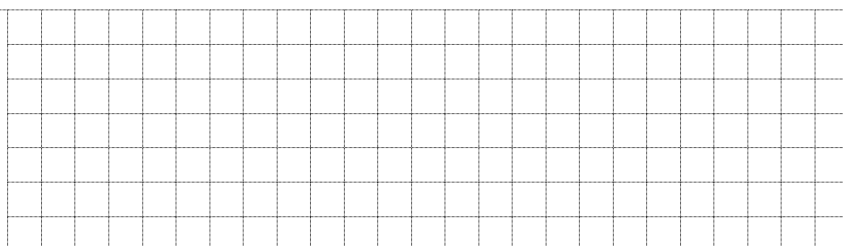
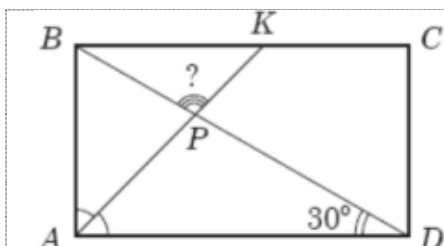


4.30. У прямокутнику **$ABCD$** **$AD = 2AB$** . На стороні **BC** позначено точку **M** так, що **$\angle AMB = \angle AMD$** . Знайдіть ці кути.



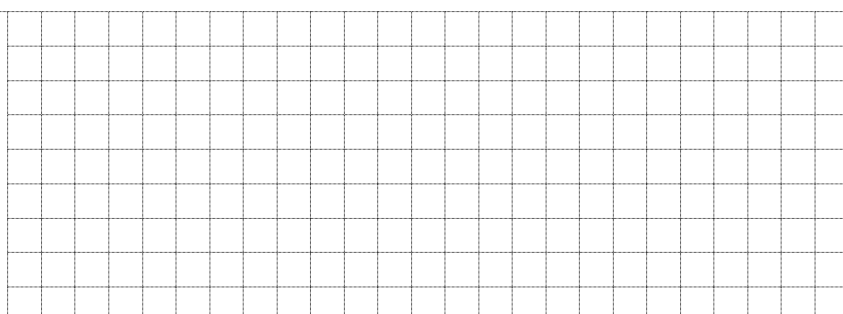
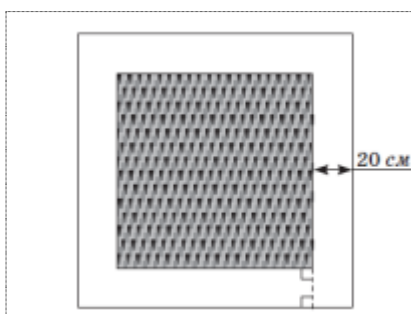
**Додаткові вправи,
які було запропоновано під час проведення ЗНО**

4.31. Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ перетинає сторону BC і діагональ BD у точках K і P відповідно (див. рисунок). Визначте градусну міру кута BPK , якщо $\angle BDA = 30^\circ$.



| А | Б | В | Г | Д |
|-------------|-------------|------------|------------|-------------|
| 105° | 115° | 75° | 95° | 125° |

4.32. Підлога кімнати має форму квадрата. На ній лежить квадратний килим, кожна сторона якого віддалена від найближчої стіни кімнати на **20 см** (див. рисунок). Визначте периметр килима, якщо периметр підлоги дорівнює **18 м**. Наявністю плінтусів на підлозі знехтуйте.



| А | Б | В | Г | Д |
|-------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 10 м | 13,6 м | 15,8 м | 16,4 м | 17,2 м |

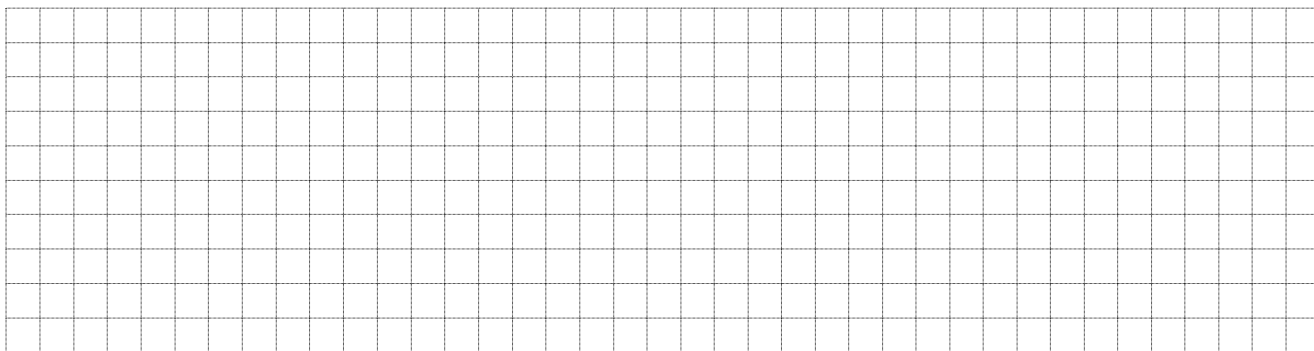
4.33. На діагоналі AC квадрата $ABCD$ задано точку, відстань від якої до сторін AB і BC дорівнює **2 см** і **6 см** відповідно. Визначте периметр квадрата $ABCD$.



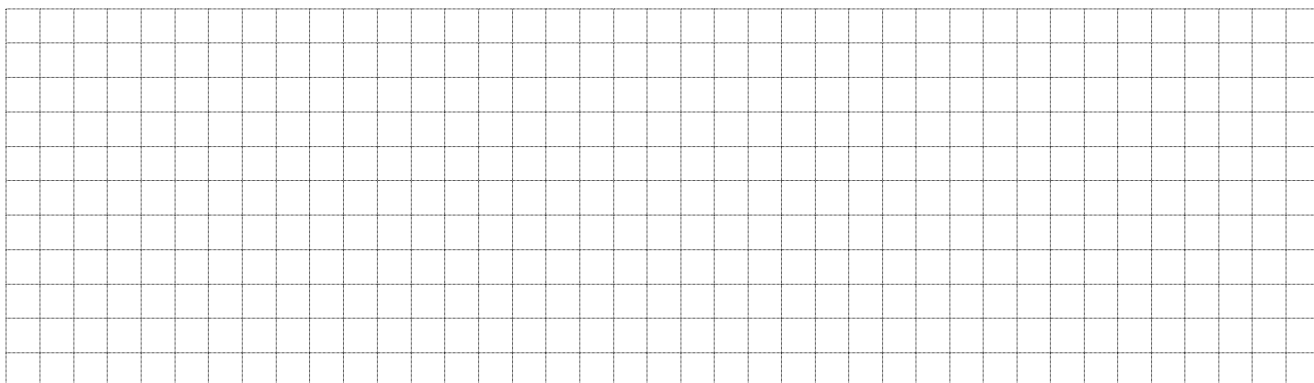
| А | Б | В | Г | Д |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 16 см | 24 см | 32 см | 48 см | 64 см |

Заняття 5
СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРИКУТНИКА.
ТРАПЕЦІЯ. СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРАПЕЦІЇ

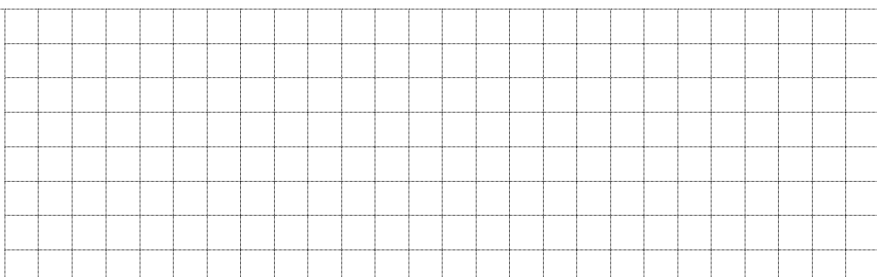
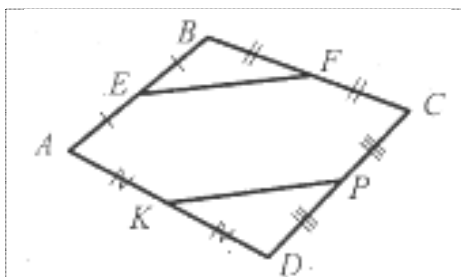
5.1. Периметр трикутника дорівнює **18 см**. Знайдіть периметр трикутника, вершини якого є серединами сторін цього трикутника.



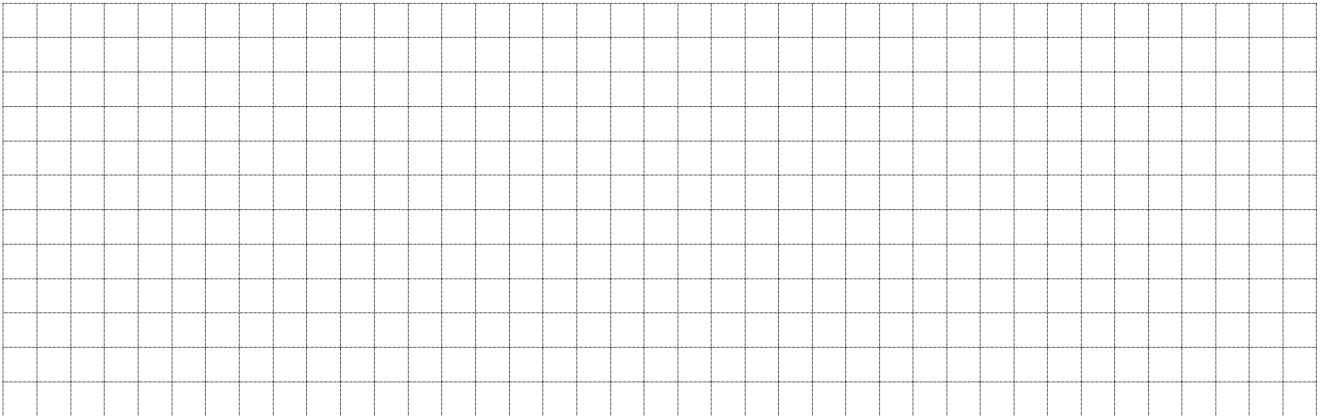
5.2. Сторони трикутника співвідносяться як **3:5:7**, а його периметр дорівнює **60 см**. Знайдіть периметр і сторони трикутника, вершини якого є серединами сторін цього трикутника.



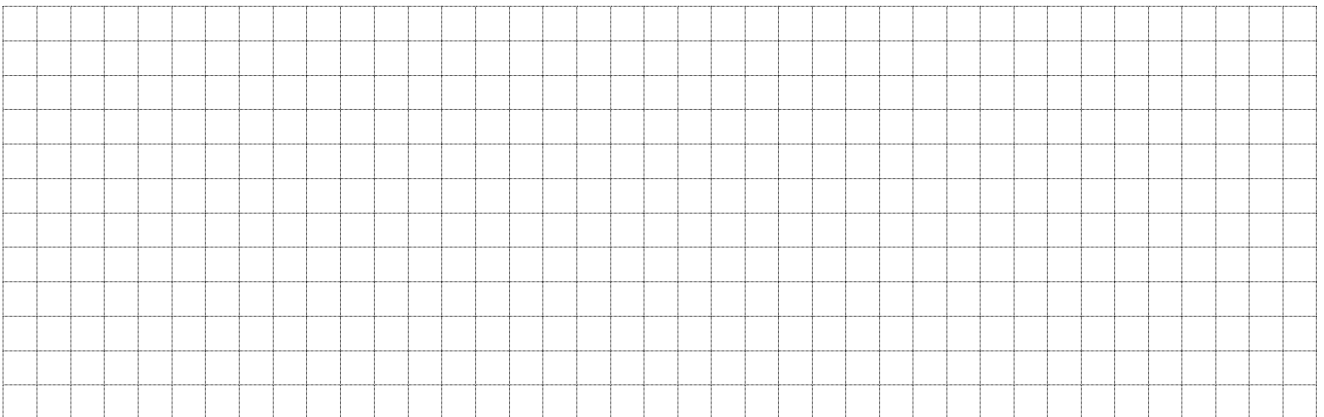
5.3. Точки **E, F, P** і **K** – середини сторін **AB, BC, CD** і **AD** чотирикутника **ABCD** відповідно. Доведіть, що **EF||KP**.



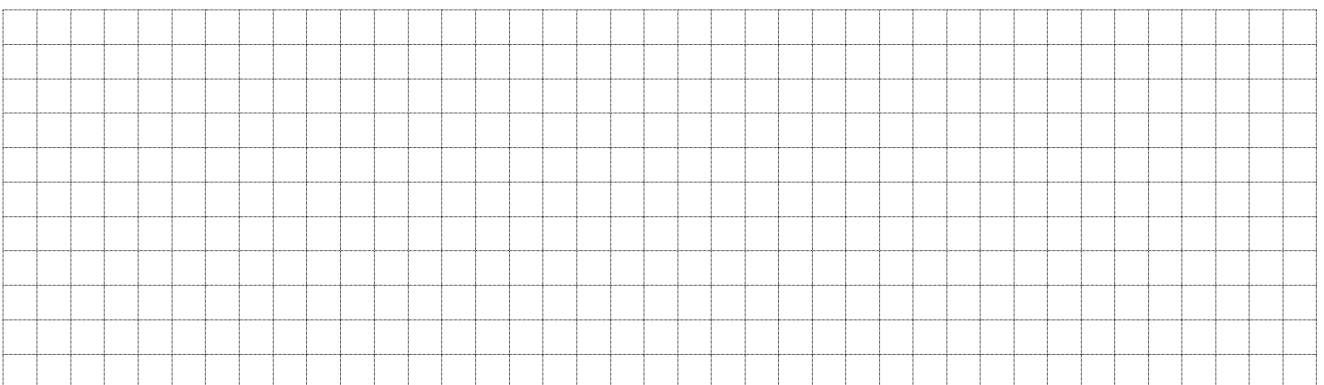
5.4. Визначте вид чотирикутника, вершини якого є серединами сторін: 1) довільного чотирикутника; 2) чотирикутника, у якого діагоналі рівні.



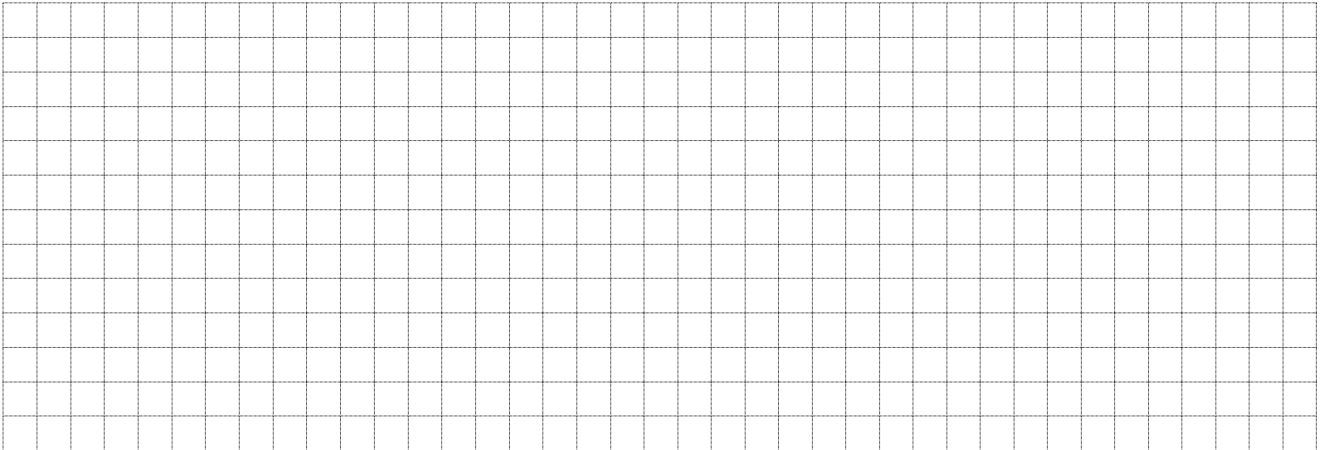
5.5. Діагоналі чотирикутника дорівнюють **2 см** і **5 см**, а кут між ними – **42°**. Знайдіть сторони і кути чотирикутника, вершини якого є серединами сторін цього чотирикутника.



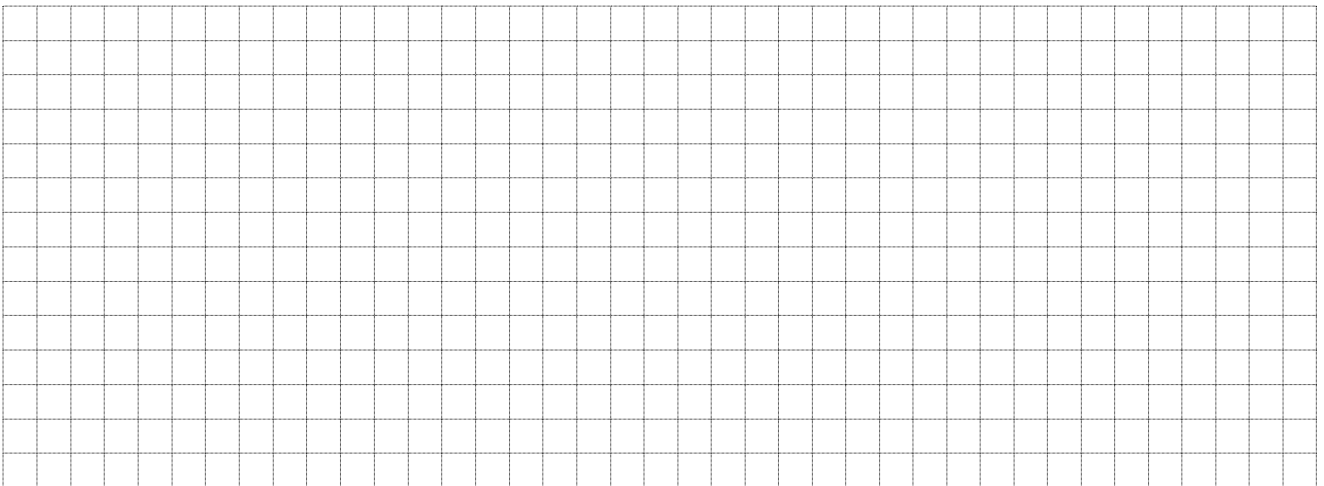
5.6. Менша сторона прямокутника дорівнює **16 см** і утворює з діагоналлю кут, який дорівнює **60°**. Середини сторін прямокутника послідовно сполучено. Визначте вид утвореного чотирикутника і знайдіть його периметр.



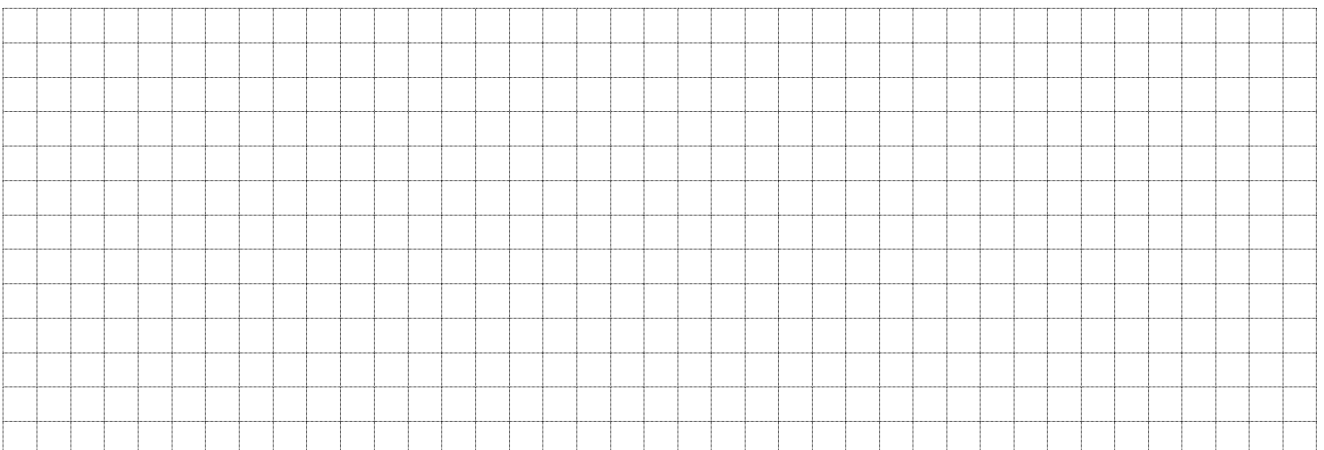
5.7. Чи існує трапеція, у якої: 1) два протилежні кути гострі; 2) два протилежні кути рівні; 3) кути, взяті послідовно, співвідносяться як **7:3:5:2**?



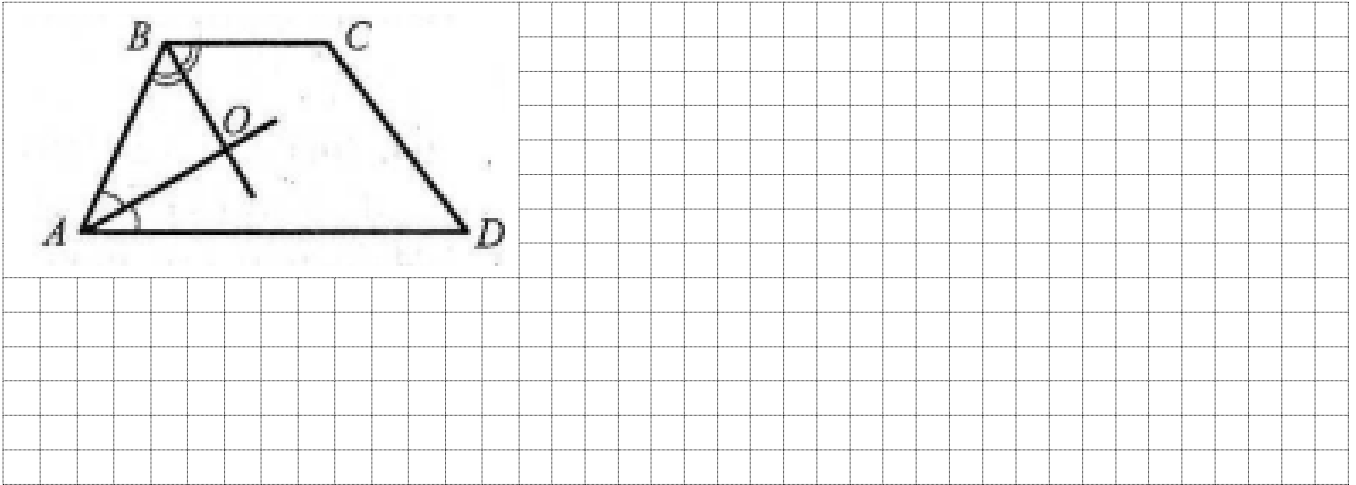
5.8. Бічна сторона рівнобічної трапеції і висота, проведені з вершини тупого кута, утворюють кут **17°**. Знайдіть кути трапеції.



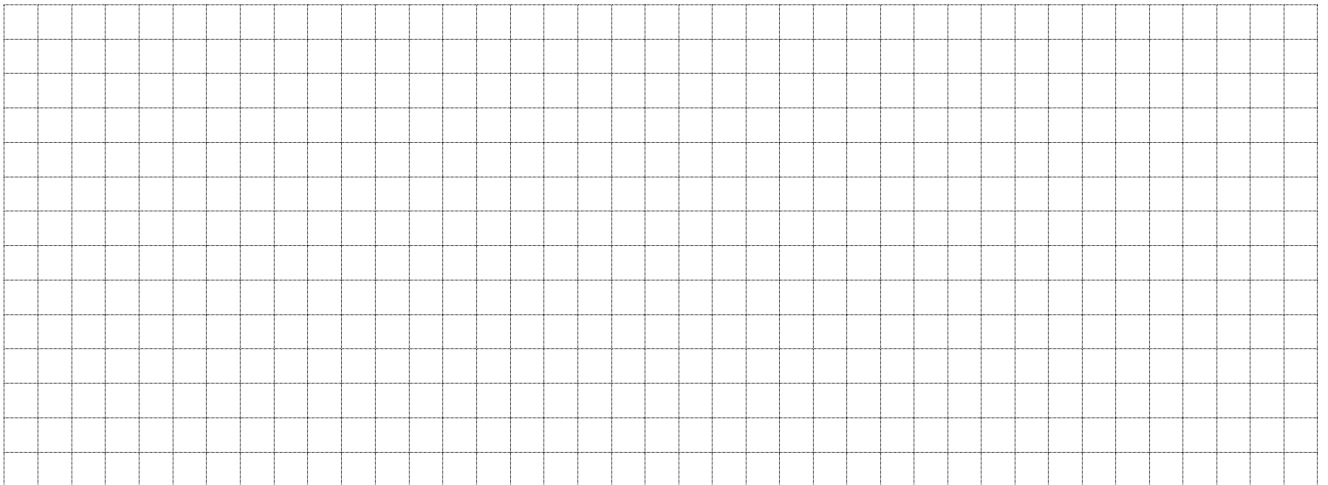
5.9. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо різниця її протилежних кутів дорівнює **86°**.



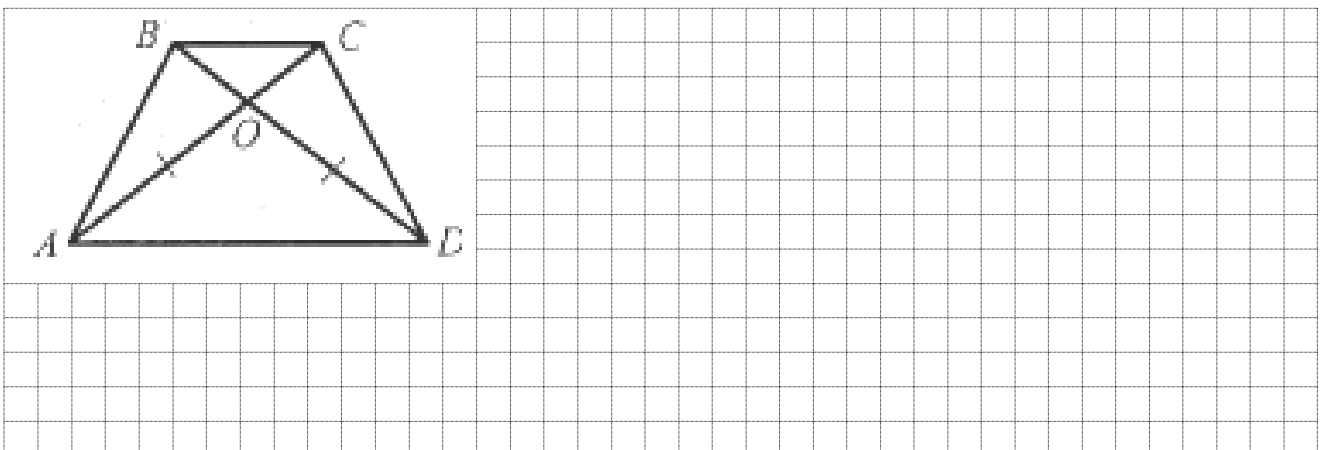
5.10. Бісектриси кутів A і B трапеції $ABCD$ перетинаються в точці O . Доведіть, що $\angle AOB = 90^\circ$.



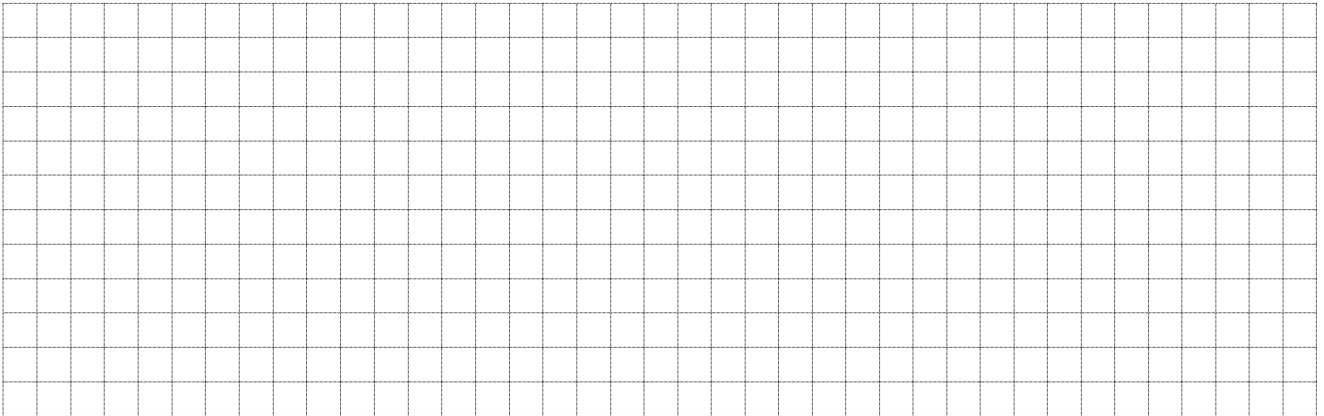
5.11. Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює бічній стороні, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін. Знайдіть кути трапеції.



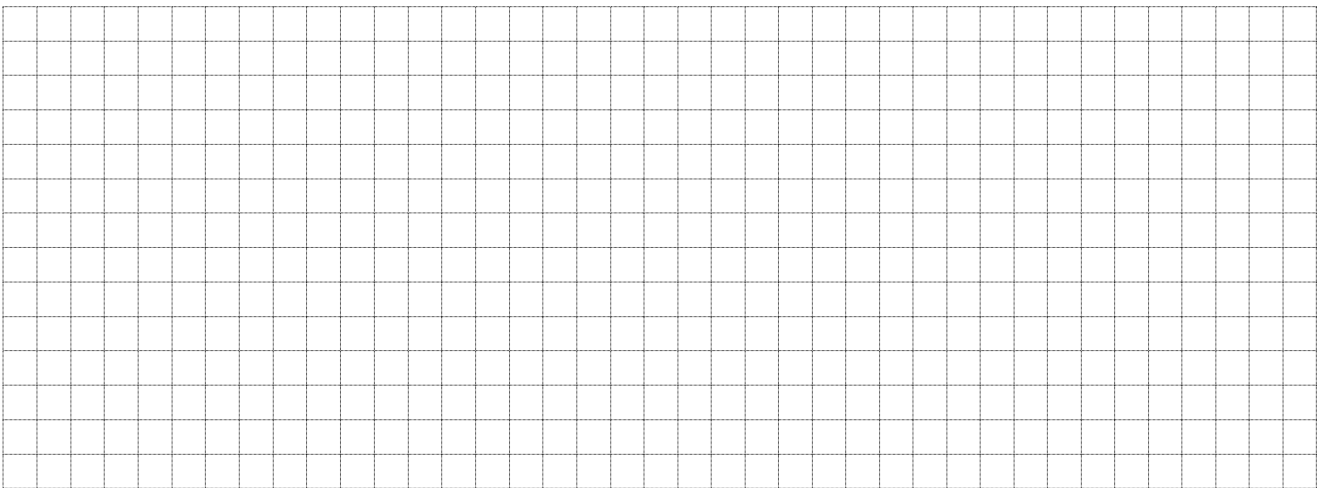
5.12. Діагоналі трапеції $ABCD$ перетинаються в точці O . Відрізки OA і OD рівні. Доведіть, що $AB = CD$.



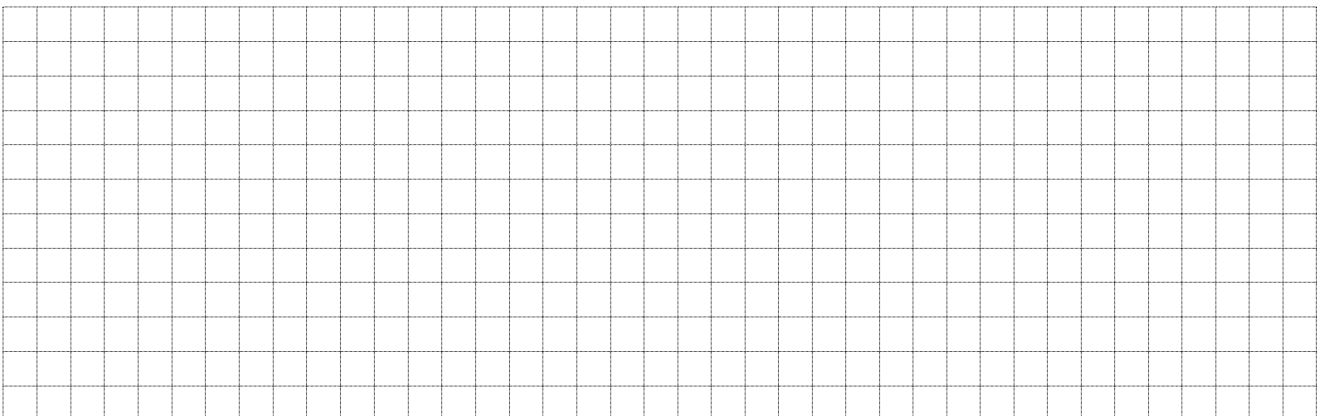
5.13. Доведіть, що висота рівнобічної трапеції, проведена з вершини тупого кута, поділяє більшу її основу на відрізки, один з яких дорівнює півсумі її основ, а другий — піврізниці.



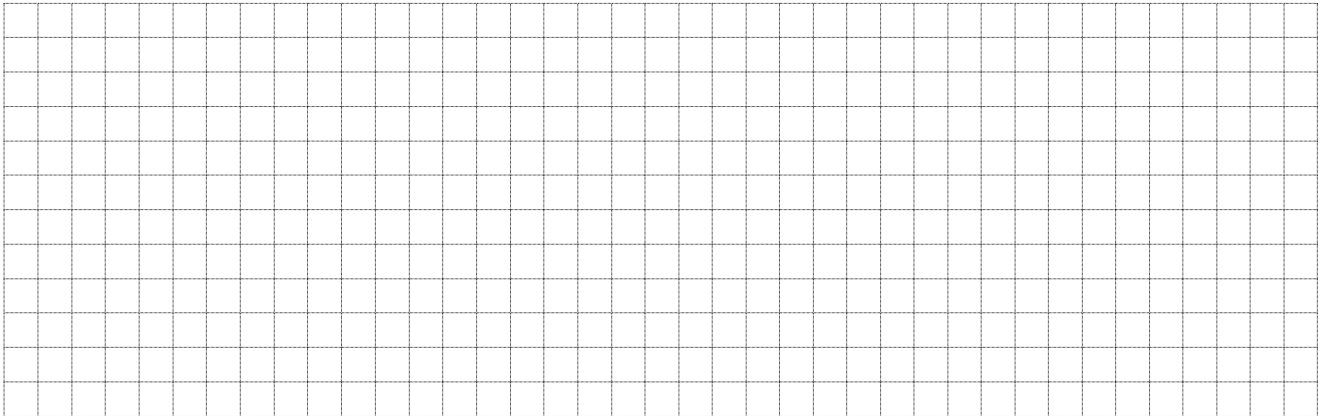
5.14. Висота рівнобічної трапеції, проведена з вершини тупого кута, поділяє більшу основу трапеції на відрізки довжиною **3 см** і **11 см**. Знайдіть основи трапеції.



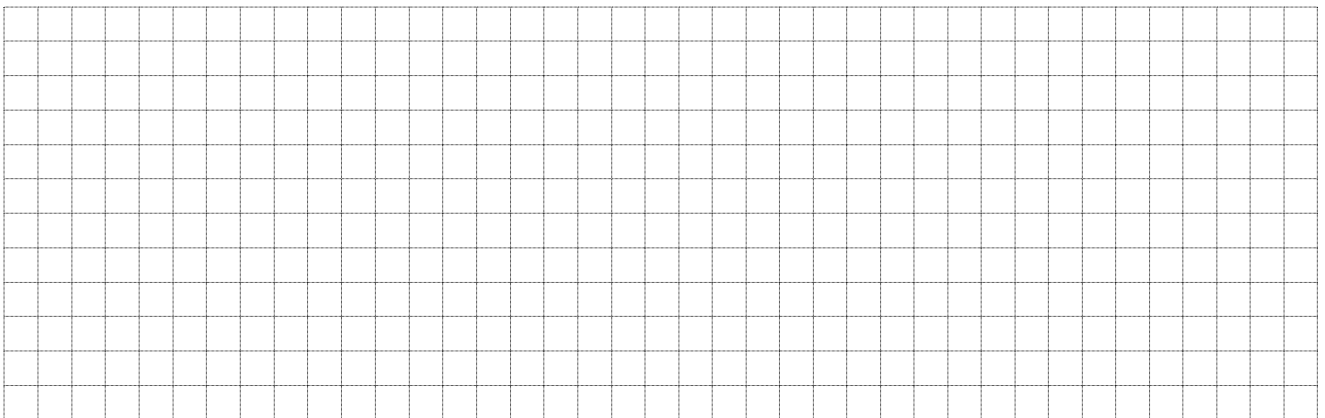
5.15. У рівнобічній трапеції гострий кут дорівнює **60°**, а бічна сторона – **16 см**. Знайдіть основи трапеції, якщо їх сума дорівнює **38 см**.



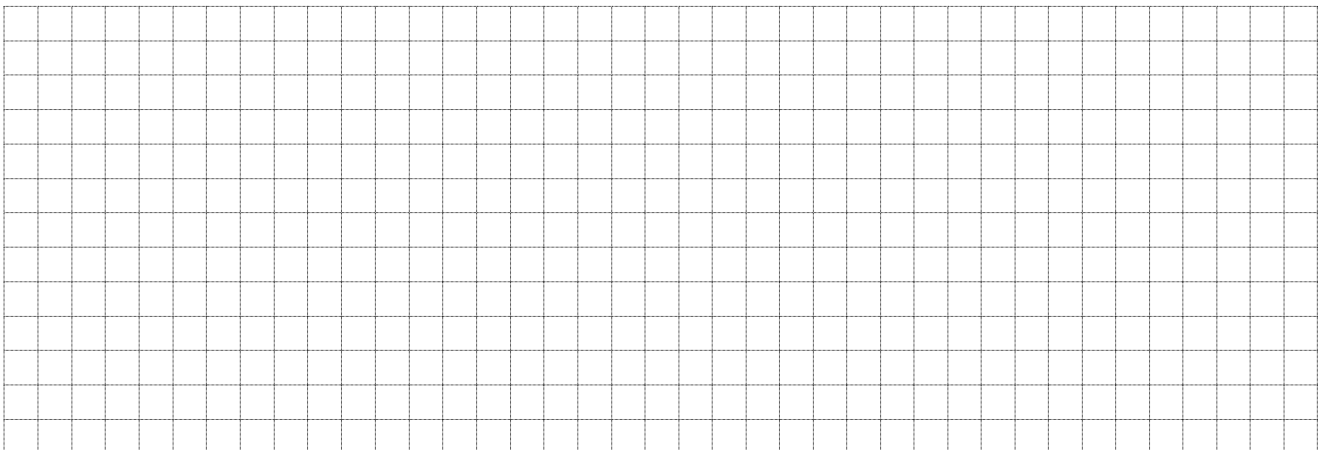
5.16. У рівнобічній трапеції бісектриса тупого кута паралельна бічній стороні. Знайдіть основи трапеції, якщо її периметр дорівнює **60 см**, а бічна сторона – **14 см**.



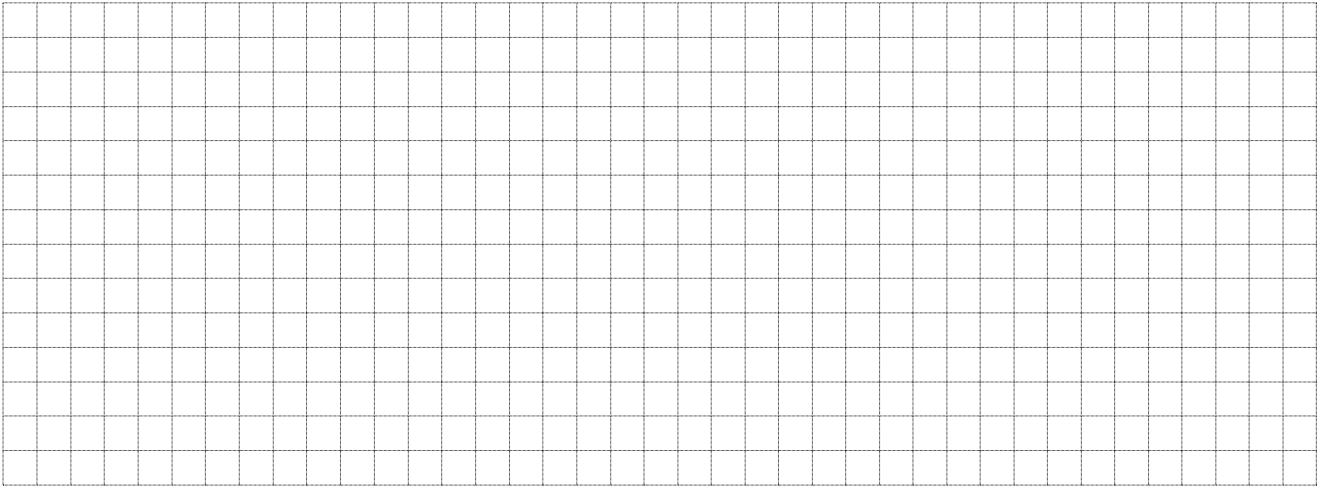
5.17. У трапеції **ABCD** ($BC \parallel AD$) через вершину **B** проведено пряму, яка перетинає основу **AD** і паралельна **CD**. Периметр отриманого трикутника дорівнює **16 см**. Знайдіть периметр трапеції, якщо її менша основа **BC** дорівнює **7 см**.



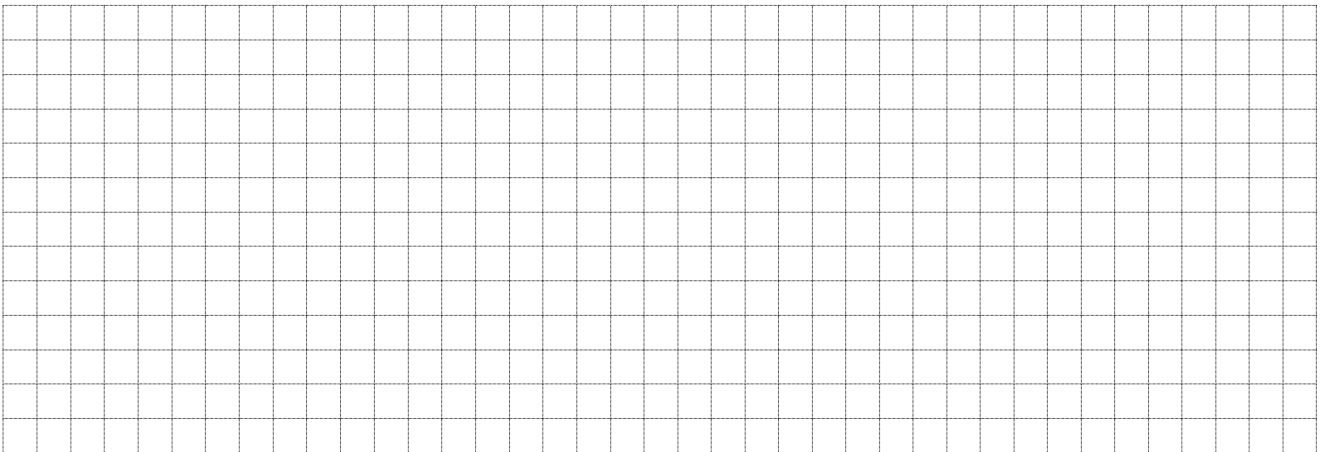
5.18. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють **10 см** і **16 см**, а її діагоналі перпендикулярні. Знайдіть висоту трапеції.



5.19. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою тупого кута, а її основи дорівнюють **8 см** і **14 см**. Знайдіть периметр трапеції.



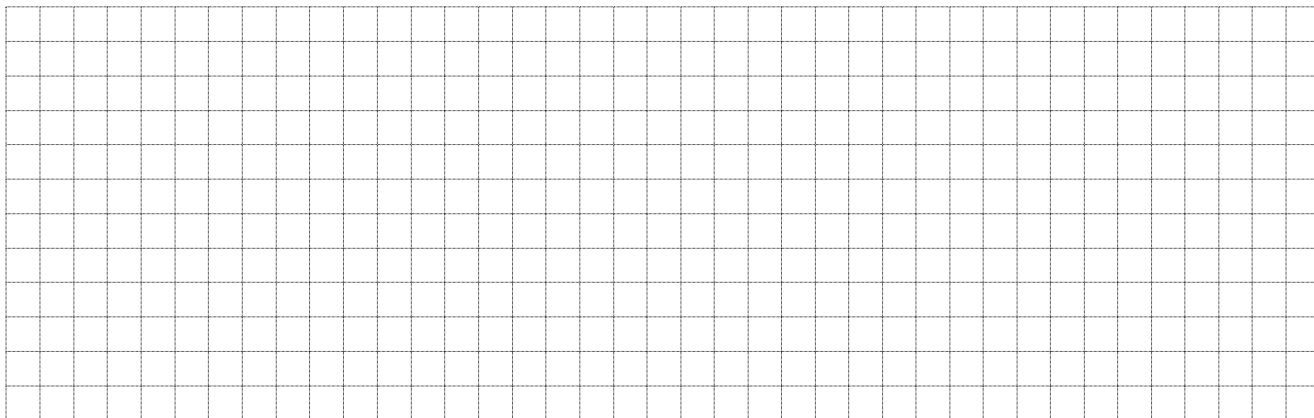
5.20. Знайдіть основу трапеції, якщо її друга основа і середня лінія відповідно дорівнюють **a** і **5a**.



5.21. Чи може середня лінія трапеції бути меншою від меншої з основ?



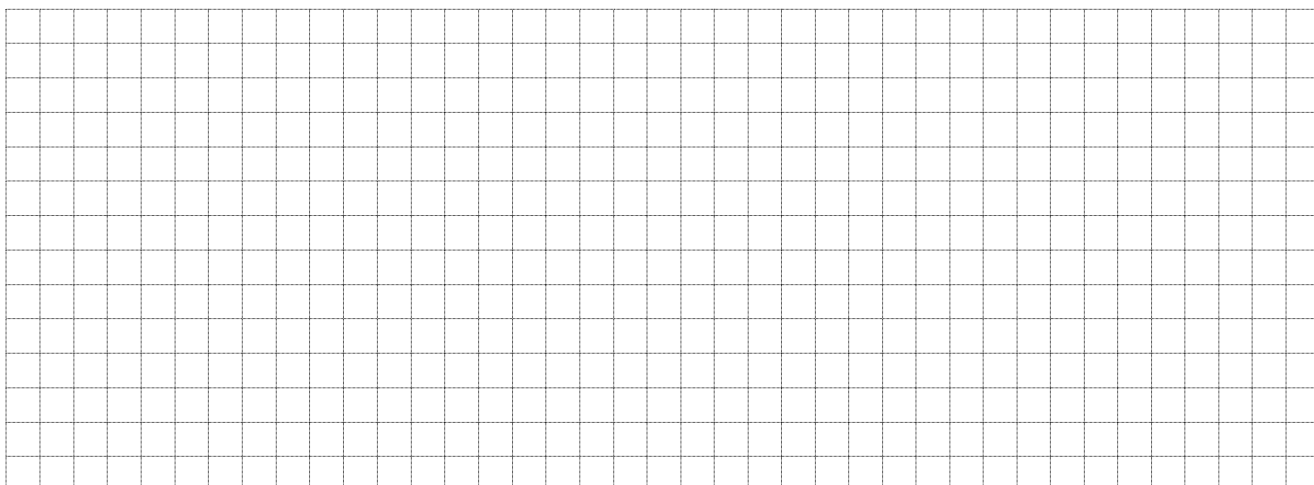
5.22. Середня лінія трапеції дорівнює **19 см**, а одна з основ менша від другої на **6 см**. Знайдіть основи трапеції.



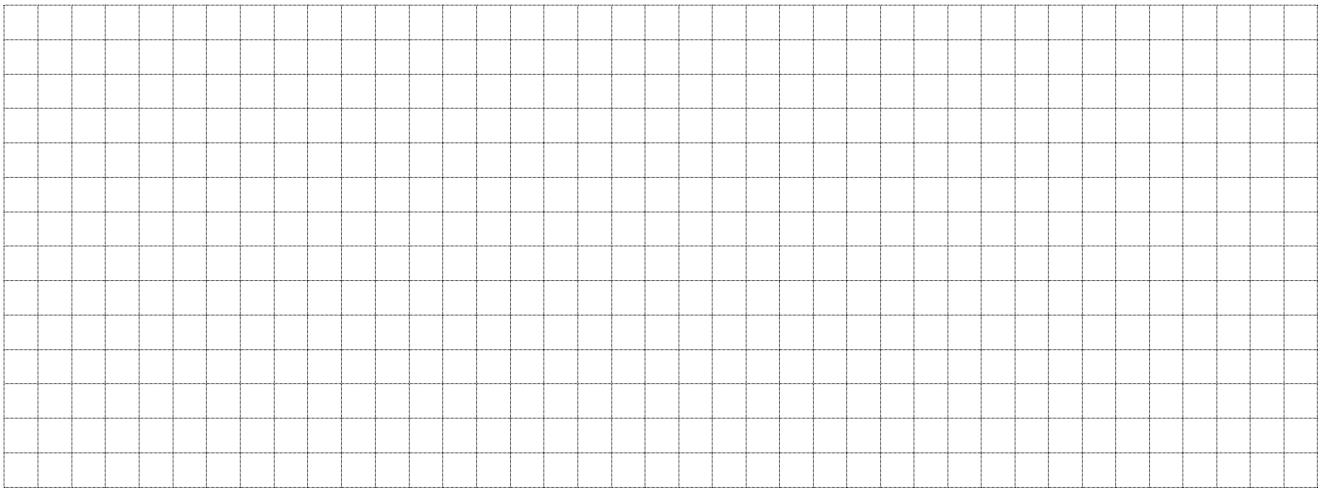
5.23. У рівнобічній трапеції діагональ поділяє гострий кут навпіл, а її основи співвідносяться як **3:5**. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо її периметр дорівнює **168 см**.



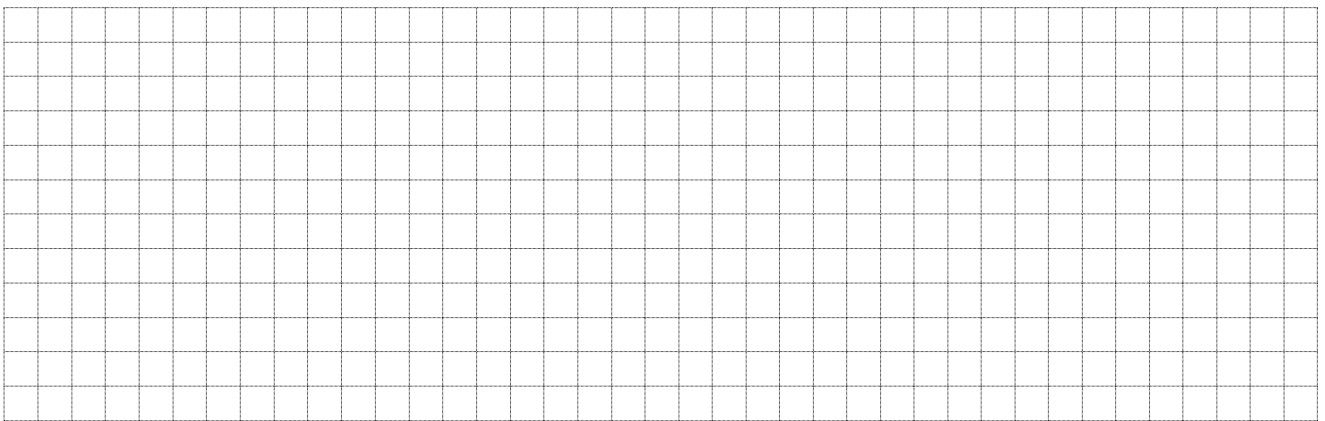
5.24. Діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні. Доведіть, що висота трапеції дорівнює її середній лінії.



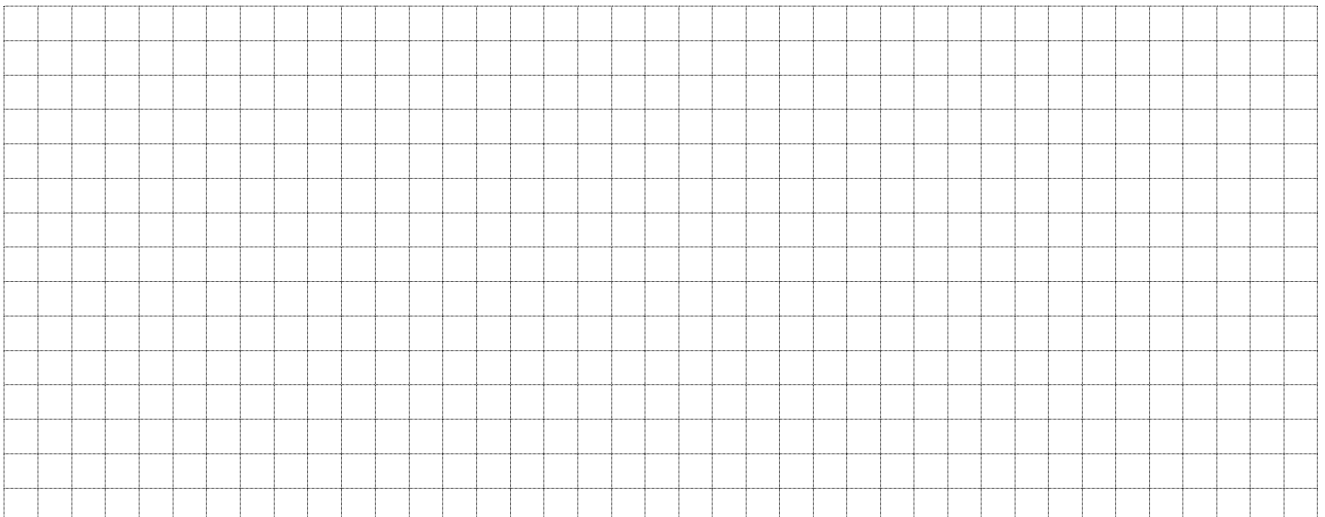
5.25. Діагональ AC трапеції $ABCD$ перпендикулярна до її основ. Довжина більшої основи AD дорівнює 14 см, $\angle BAD = 120^\circ$, $AB = 6$ см. Знайдіть середню лінію трапеції.



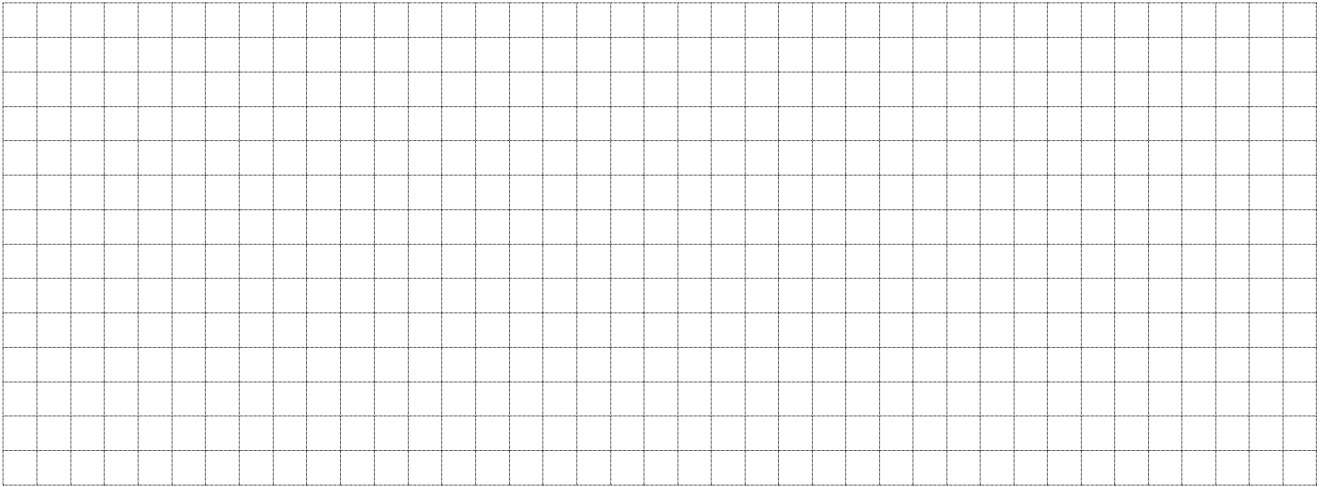
5.26. Побудуйте трикутник за трьома точками – серединами його сторін.



5.27. Побудуйте трапецію за чотирма її сторонами.



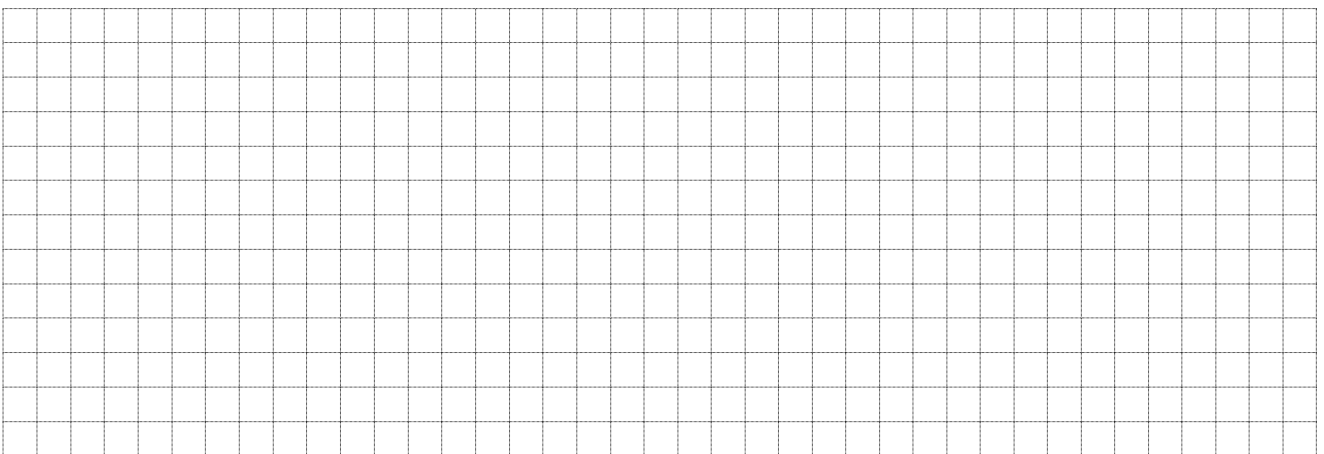
5.28. Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони, а менша основа дорівнює бічній стороні. Знайдіть кути трапеції.



5.29. За якої умови висота рівнобічної трапеції дорівнює піврізниці основ?



5.30. Побудуйте прямокутну трапецію за основами і меншою бічною стороною.



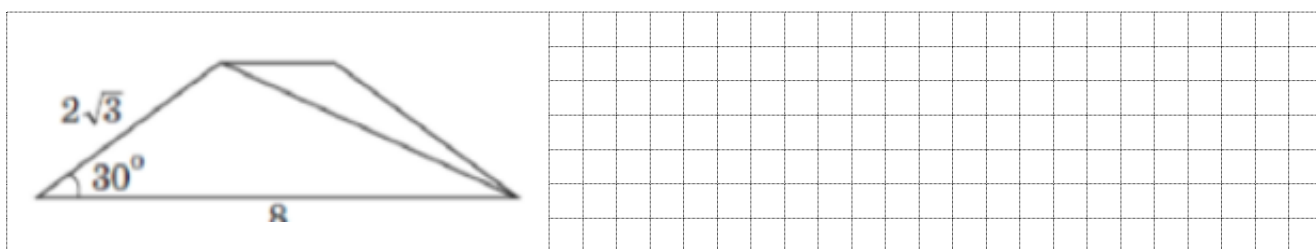
**Додаткові вправи,
які було запропоновано під час проведення ЗНО**

5.31. Нижня й верхня площадки ескалатора лежать у паралельних площинах, відстань між якими становить **12 м** (див. рисунок). Кут нахилу ескалатора **AB** до площини нижньої площадки дорівнює **30°**. Визначте довжину ескалатора **AB**.



| А | Б | В | Г | Д |
|-----------------------|------|------------------------|-----------------------|-----|
| $8\sqrt{3} \text{ м}$ | 24 м | $12\sqrt{3} \text{ м}$ | $6\sqrt{3} \text{ м}$ | 6 м |

5.32. На рисунку показано рівнобічну трапецію, бічна сторона якої дорівнює $2\sqrt{3}$, а більша основа – **8**. Визначте довжину діагоналі цієї трапеції, якщо її гострий кут дорівнює **30°**.



| А | Б | В | Г | Д |
|-------------|-------------|--------------------------|--------------------------|--------------|
| $\sqrt{28}$ | $\sqrt{52}$ | $\sqrt{76 + 16\sqrt{3}}$ | $\sqrt{76 - 16\sqrt{3}}$ | $\sqrt{124}$ |

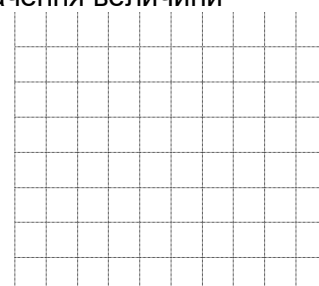
5.33. Прямокутну трапецію **ABCD** (**AD||BC**, **AD > BC**) з більшою бічною стороною **CD = 10** описано навколо кола радіусом **4**. Установіть відповідність між величиною (**1 - 4**) та її числовим значенням (**А - Д**).

Величина

- 1 довжина сторони **AB**
- 2 довжина проекції сторони **CD** на пряму **AD**
- 3 довжина основи **AD**
- 4 довжина середньої лінії трапеції **ABCD**

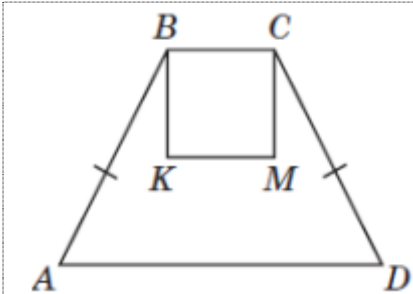
Числове значення величини

- | | |
|----------|----|
| А | 6 |
| Б | 8 |
| В | 9 |
| Г | 12 |
| Д | 18 |

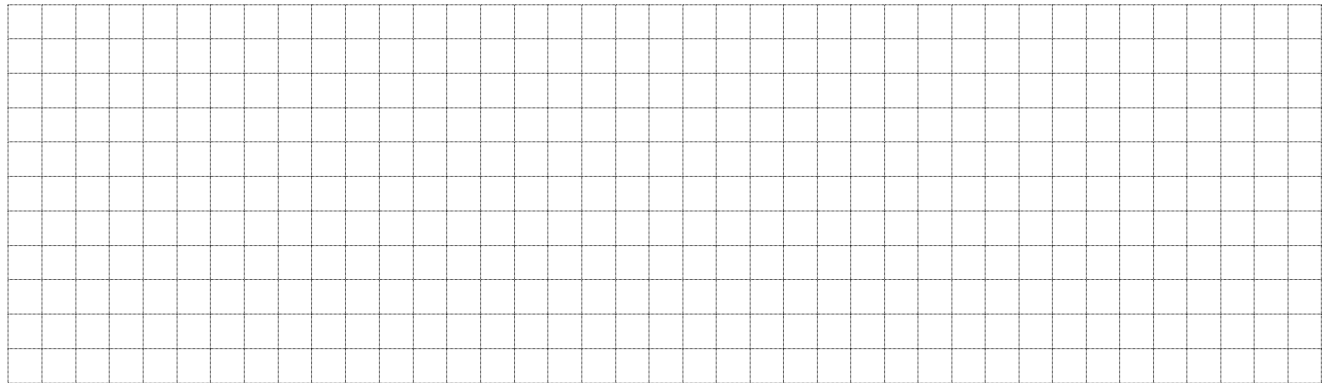


5.34. На рисунку зображено трапецію $ABCD$ і квадрат $KBCM$. Точки K і M – середини діагоналей AC і BD трапеції відповідно. Площа квадрата $KBCM$ дорівнює 18 см^2 .

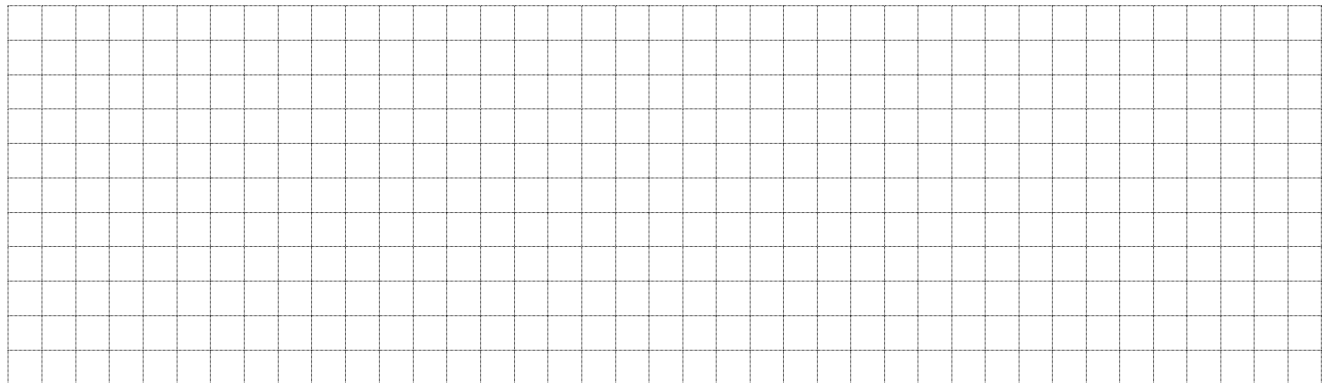
1. Визначте довжину діагоналі AC , см.
2. Обчисліть площу трапеції $ABCD$, см^2 .



5.35. У рівнобічну трапецію вписано коло. Точка дотику кола поділяє бічну сторону трапеції на відрізки довжиною 8 см і 18 см . Знайдіть периметр трапеції, см.

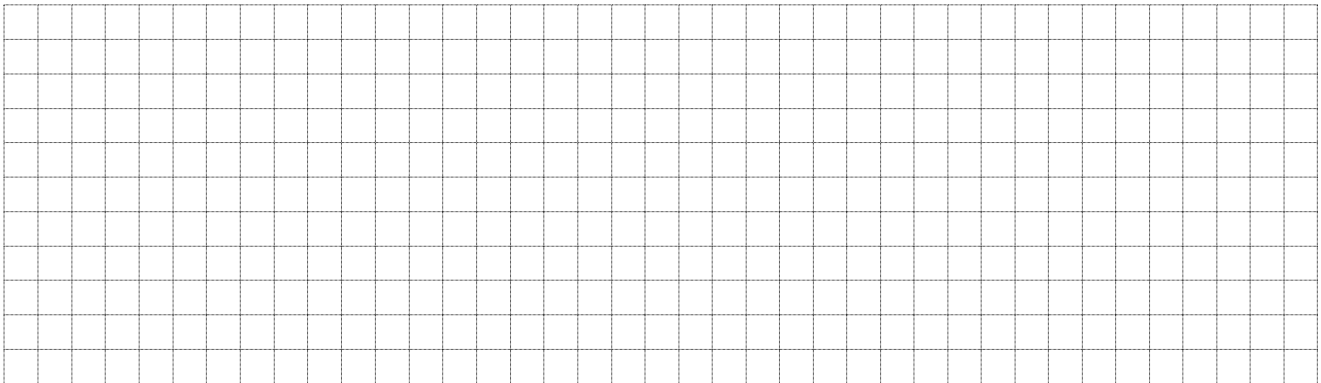


5.36. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута і поділяє середню лінію трапеції на відрізки довжиною 6 см і 12 см . Обчисліть периметр трапеції, см.

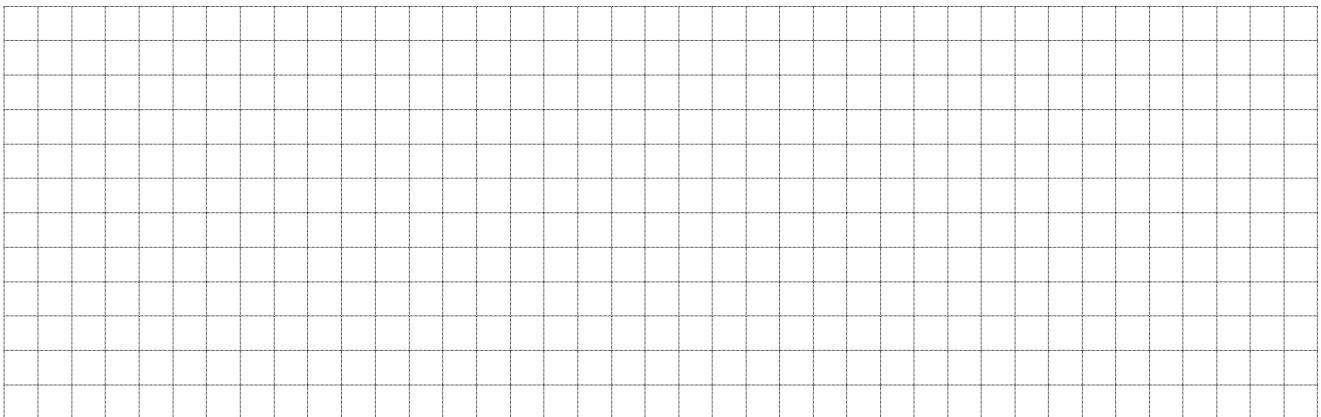


Заняття 6
ЦЕНТРАЛЬНІ ТА ВПИСАНІ КУТИ. ВПИСАНІ Й ОПИСАНІ
ЧОТИРИКУТНИКИ. ДОВЖИНА КОЛА. ПЛОЩА КРУГА

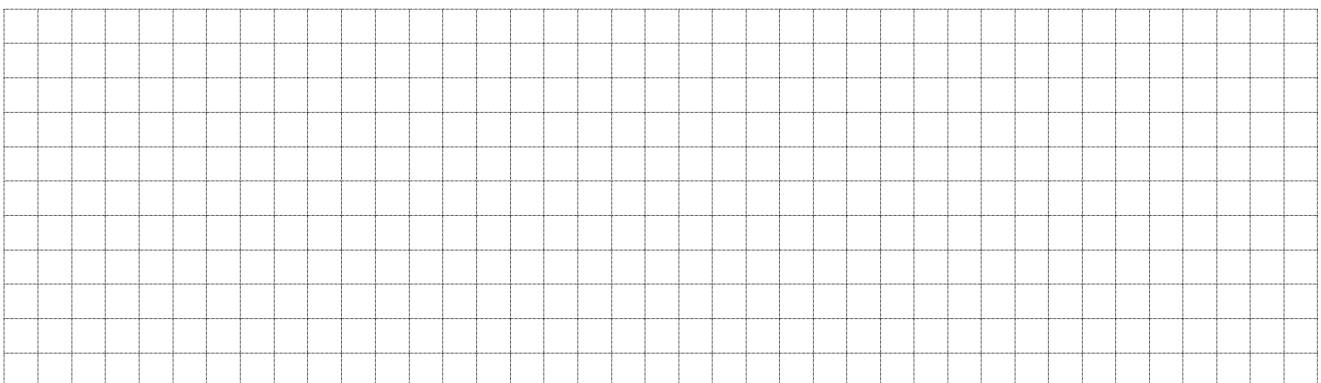
6.1. Скільки градусів містить центральний кут кола, який спирається на дугу, що становить: 1) $\frac{1}{4}$ кола; 2) $\frac{5}{6}$ кола; 3) $\frac{7}{12}$ кола.



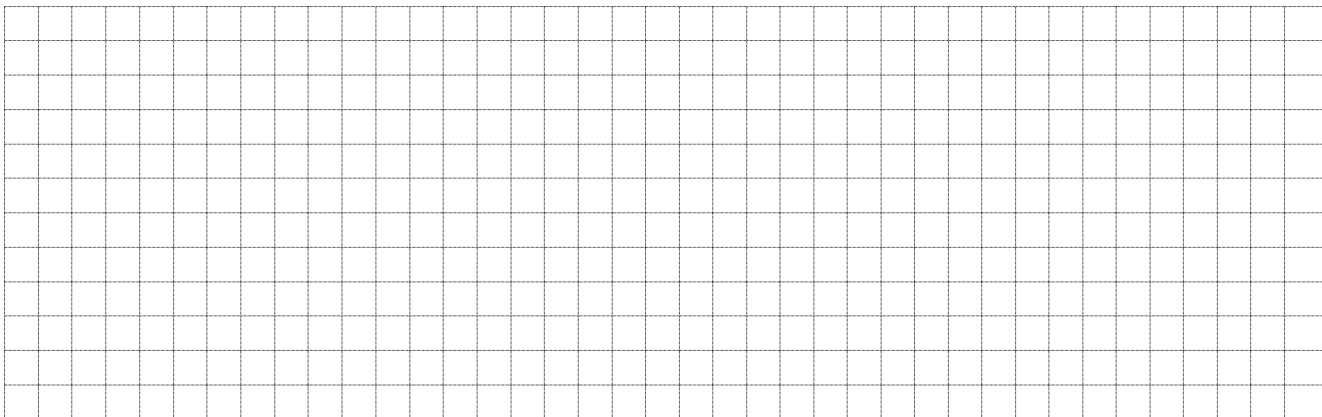
6.2. Знайдіть градусні міри двох дуг кола, на які його поділяють дві точки, якщо градусна міра однієї з дуг на 100° більша за градусну міру другої.



6.3. Знайдіть вписаний кут, якщо градусна міра дуги, на яку він спирається, дорівнює: 1) 48° ; 2) 126° ; 3) 180° ; 4) 254° .



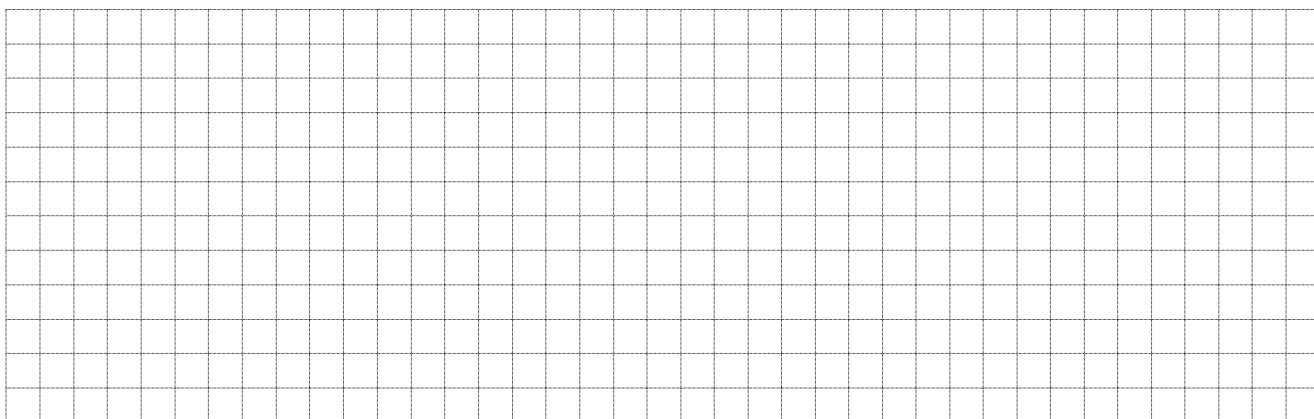
6.4. Точка **B** кола і його центр **O** лежать по різні сторони від хорди **AC**. Знайдіть: 1) кут **ABC**, якщо $\angle AOC = 124^\circ$; 2) кут **AOC**, якщо $\angle ABC = 94^\circ$.



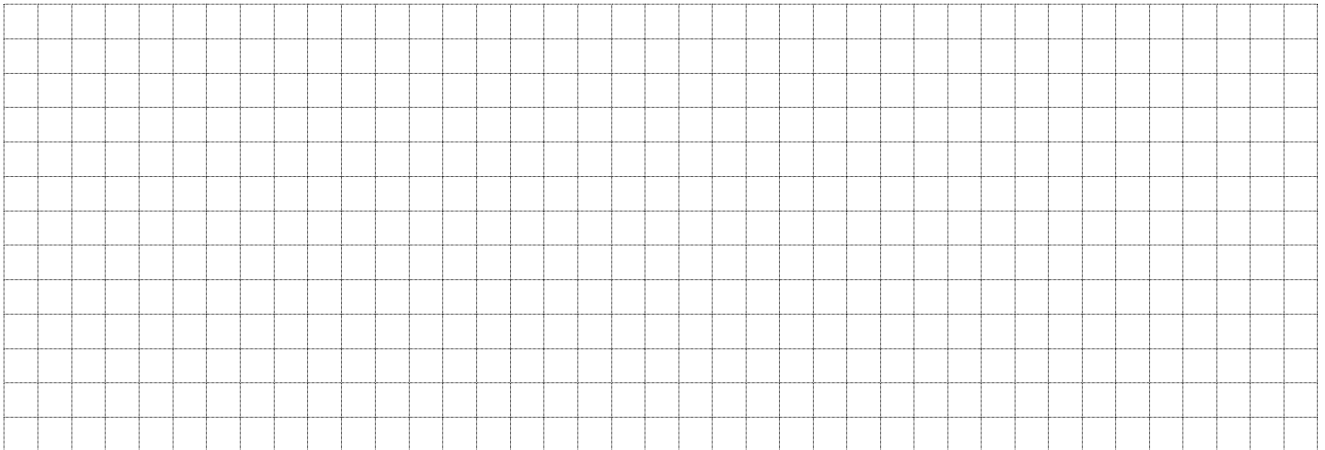
6.5. Точки **B** і **D** лежать на колі по одну сторону від хорди **AC**, $\angle ABC = 42^\circ$. Знайдіть кут **ADC**.



6.6. Точки **B** і **D** лежать на колі по різні сторони від хорди **AC**, $\angle ABC = 78^\circ$. Знайдіть кут **ADC**.



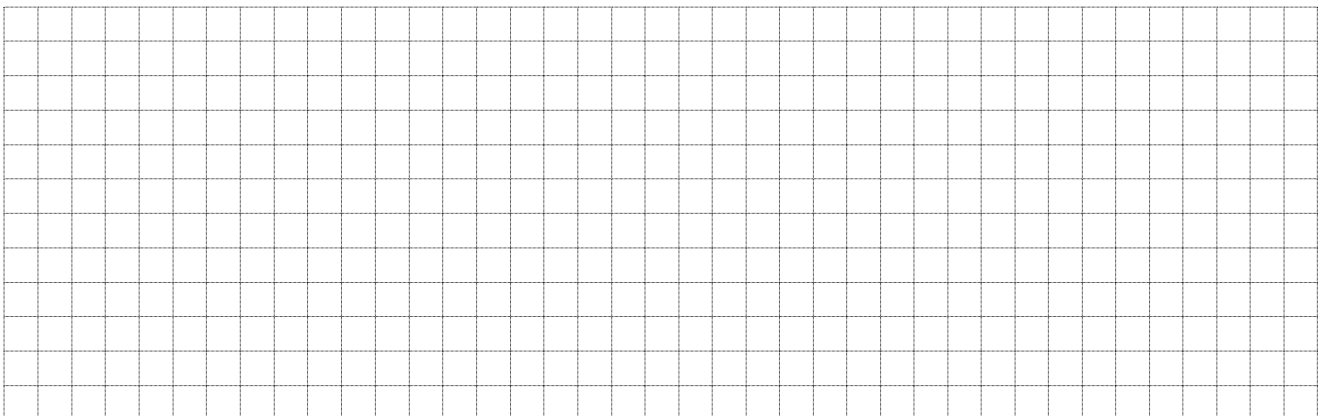
6.7. Навколо трикутника ABC описано коло з центром у точці O . Знайдіть кут BOC , якщо: 1) $\angle A = 78^\circ$; 2) $\angle A = 128^\circ$.



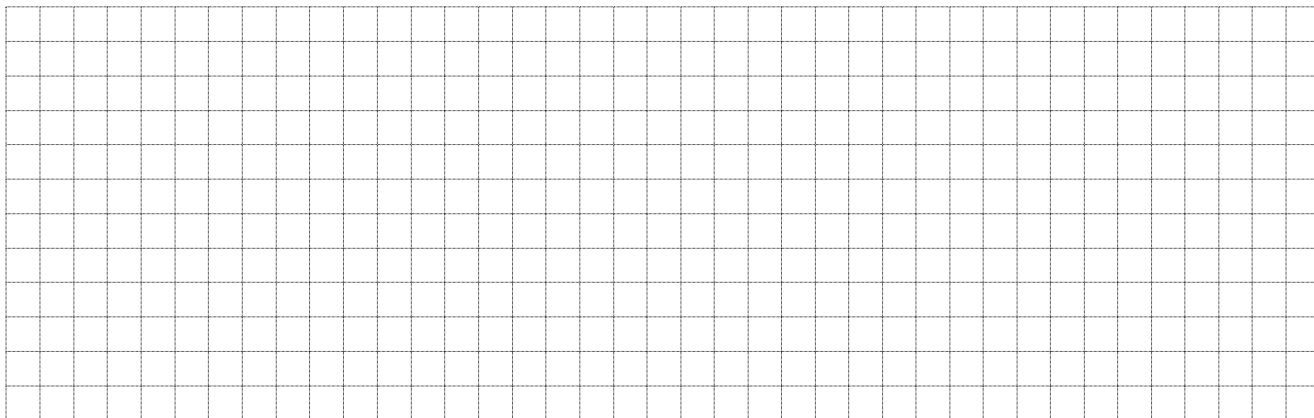
6.8. У трикутнику ABC $\angle A = 36^\circ$, $\angle B = 78^\circ$, точка O – центр описаного кола. Знайдіть $\angle AOB, \angle BOC, \angle AOC$.



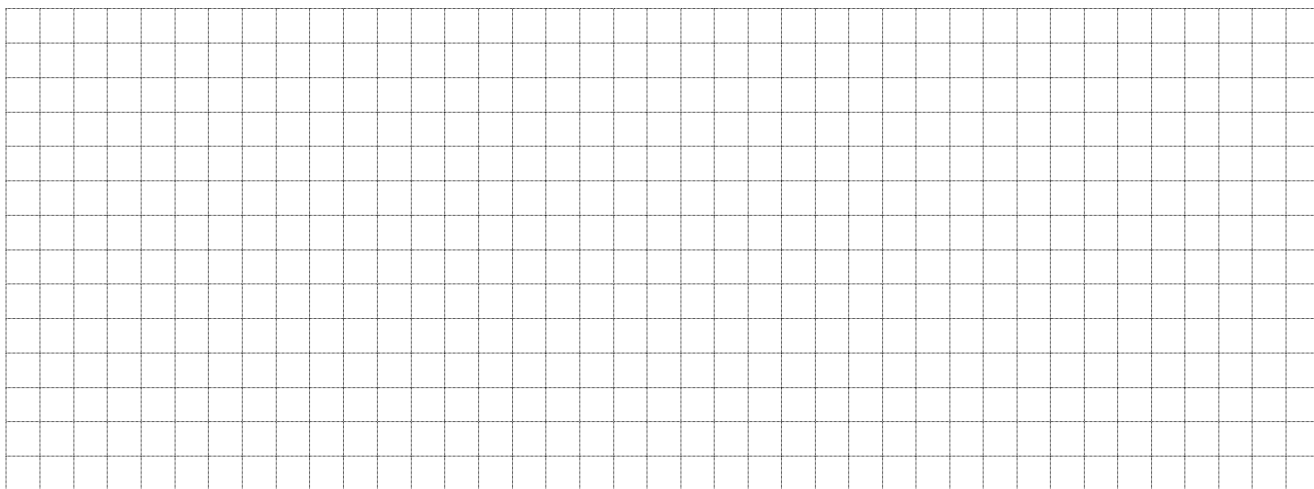
6.9. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, вписаного в коло, бічна сторона якого стягує дугу, градусна міра якої 38° .



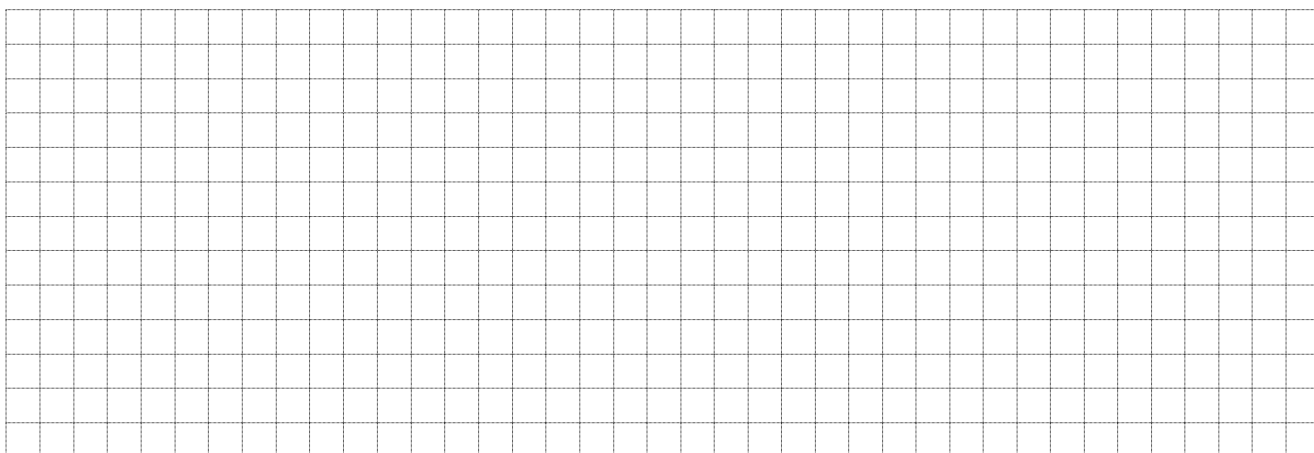
6.10. Кінці хорди поділяють коло на дві дуги, градусні міри яких співвідносяться як **5:7**. Знайдіть вписані кути, які спираються на цю хорду.



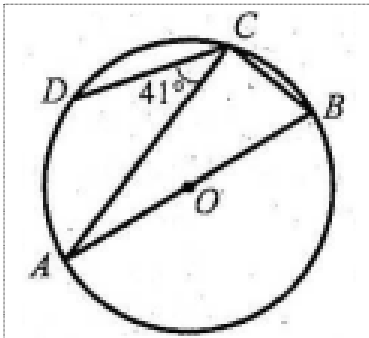
6.11. Кінці хорди ***MN*** поділяють коло на дві дуги. Градусна міра меншої дуги дорівнює **140°** , а більша поділяється точкою ***K*** у співвідношенні **5:6**, рахуючи від точки ***M***. Знайдіть $\angle NMK$.



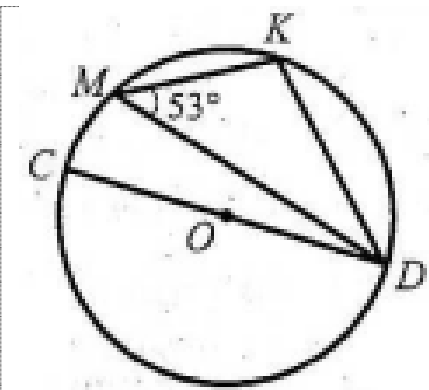
6.12. Точки ***A***, ***B*** і ***C*** поділяють коло на три дуги так, що $\cup AB : \cup BC : \cup AC = 3 : 5 : 7$. Знайдіть кути трикутника ***ABC***.



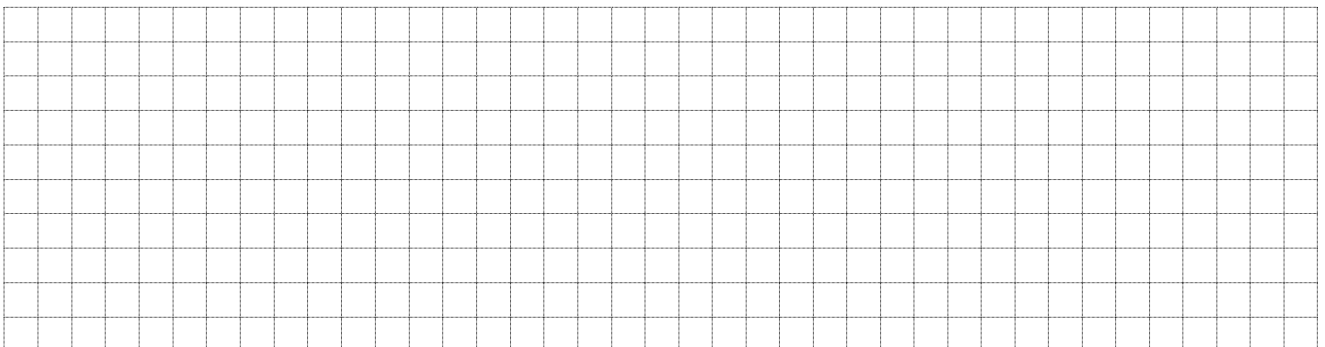
6.13. Точки C і D кола лежать по одну сторону від діаметра AB . Знайдіть кут DCB , якщо $\angle ACD = 41^\circ$.



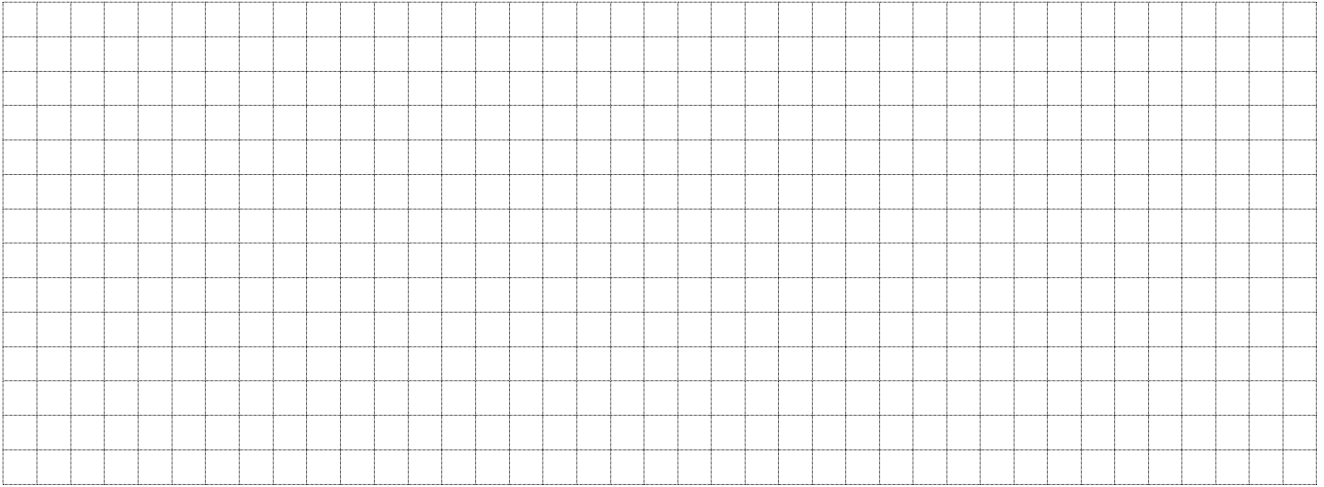
6.14. Точки M і K кола лежать по одну сторону від діаметра CD . Знайдіть кут CDK , якщо $\angle DMK = 53^\circ$.



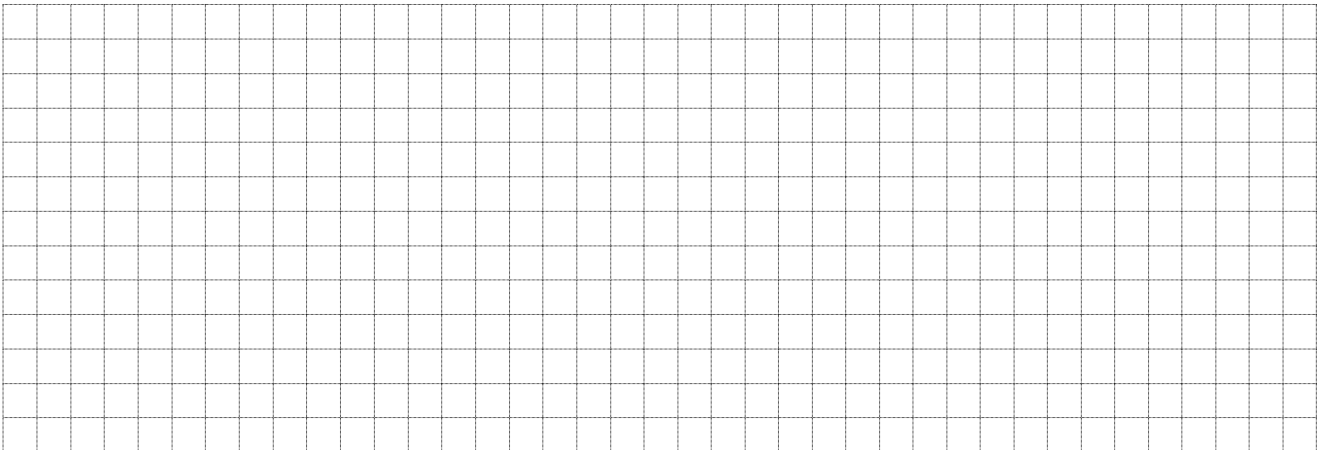
6.15. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 78° . Півколо, побудоване на бічній стороні трикутника (як на діаметрі), поділяється іншими сторонами на три дуги. Знайдіть градусні міри цих дуг.



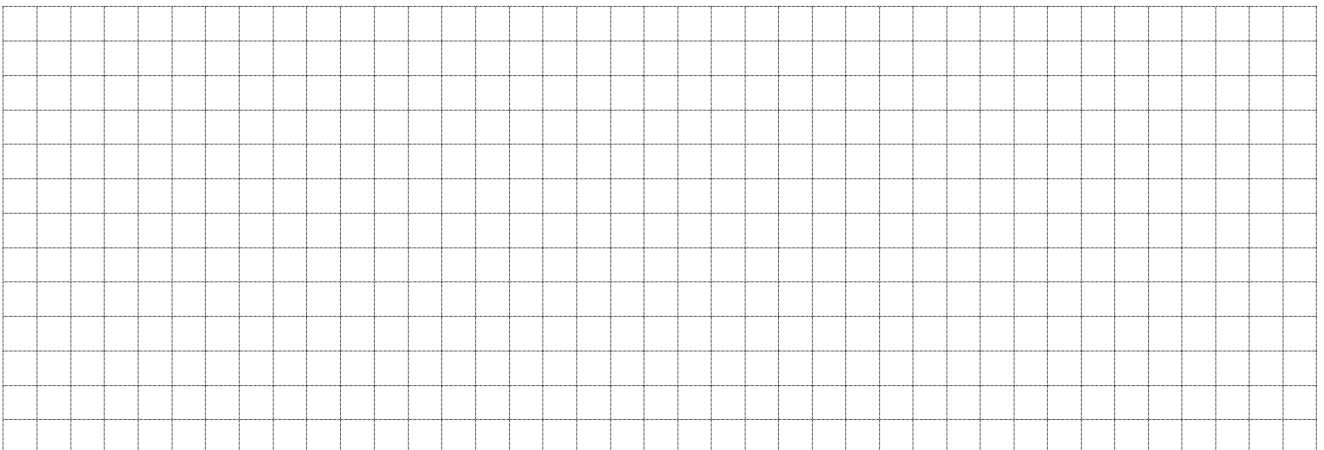
6.16. Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, якщо:
1) $\angle A = 33^\circ, \angle C = 137^\circ$; 2) $\angle B = 69^\circ, \angle D = 111^\circ$.



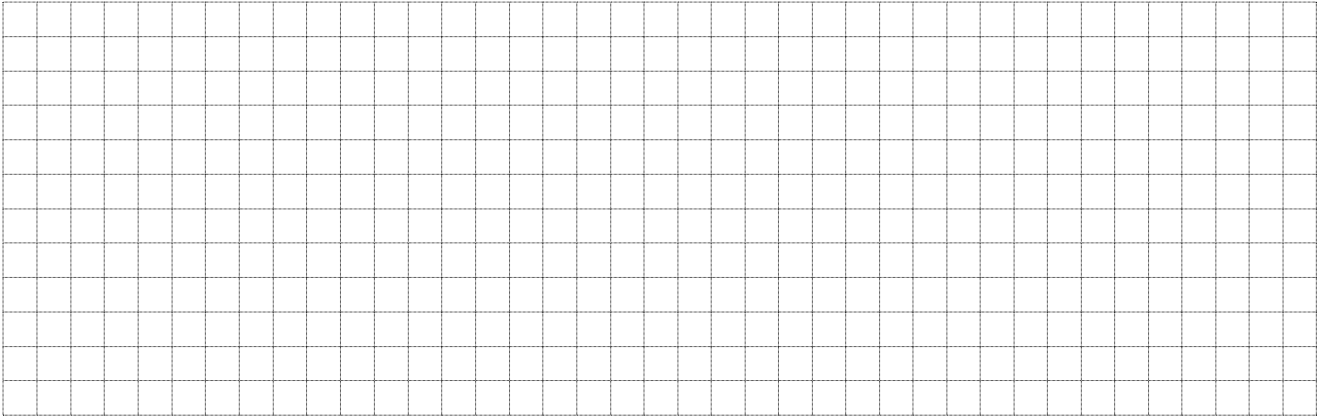
6.17. Знайдіть кути C і D чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо $\angle A = 119^\circ, \angle B = 84^\circ$.



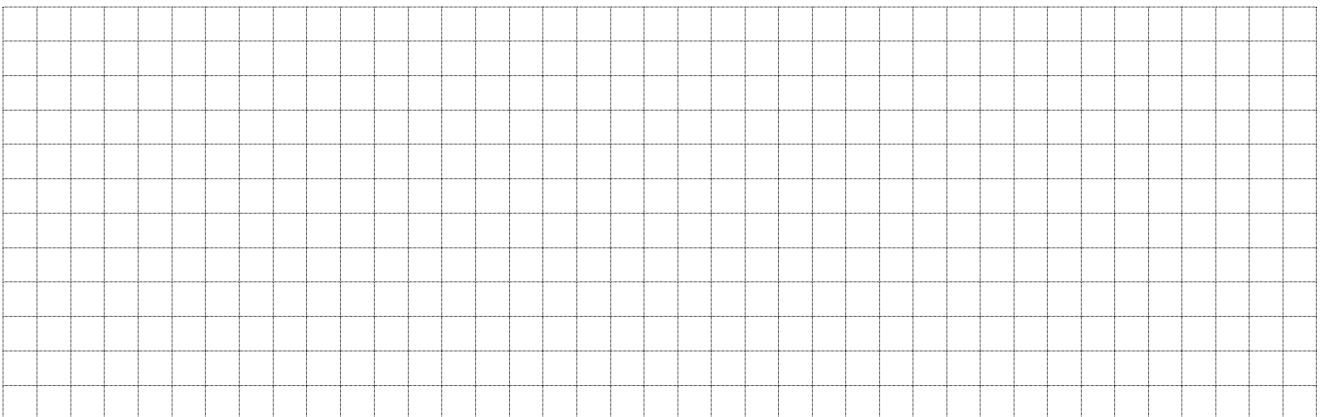
6.18. Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, кути якого A, B, C і D відповідно пропорційні числам: 1) $5, 7, 8, 4$; 2) $3, 5, 8, 6$?



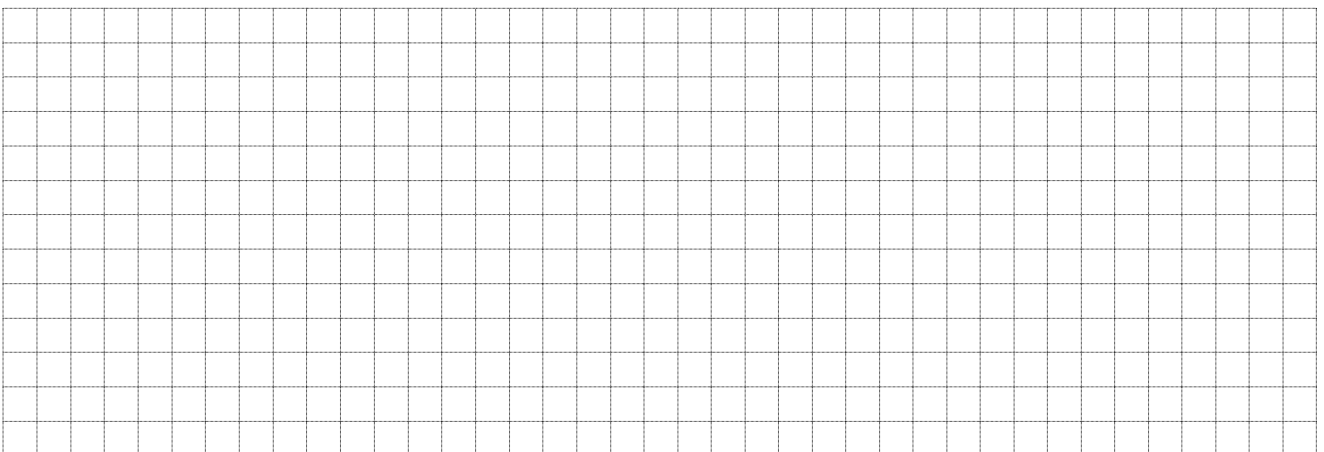
6.19. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло. Діагональ AC цього чотирикутника є діаметром кола. Знайдіть кут між діагоналями чотирикутника, який лежить проти сторони AD , якщо $\angle BAC = 23^\circ, \angle DAC = 52^\circ$.



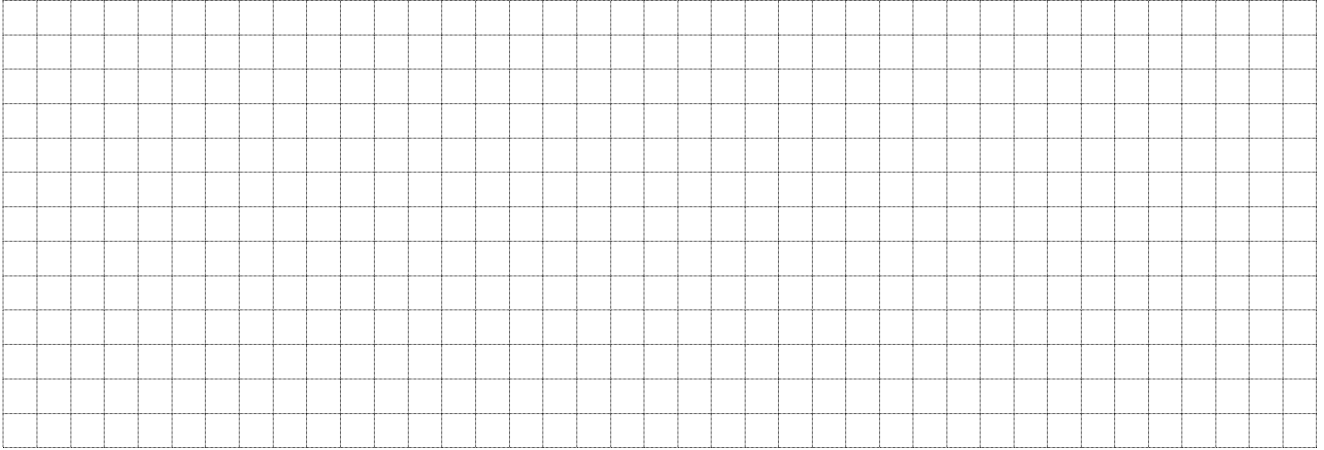
6.20. Основи трапеції, в яку можна вписати коло, дорівнюють 7 см і 9 см . Знайдіть периметр трапеції.



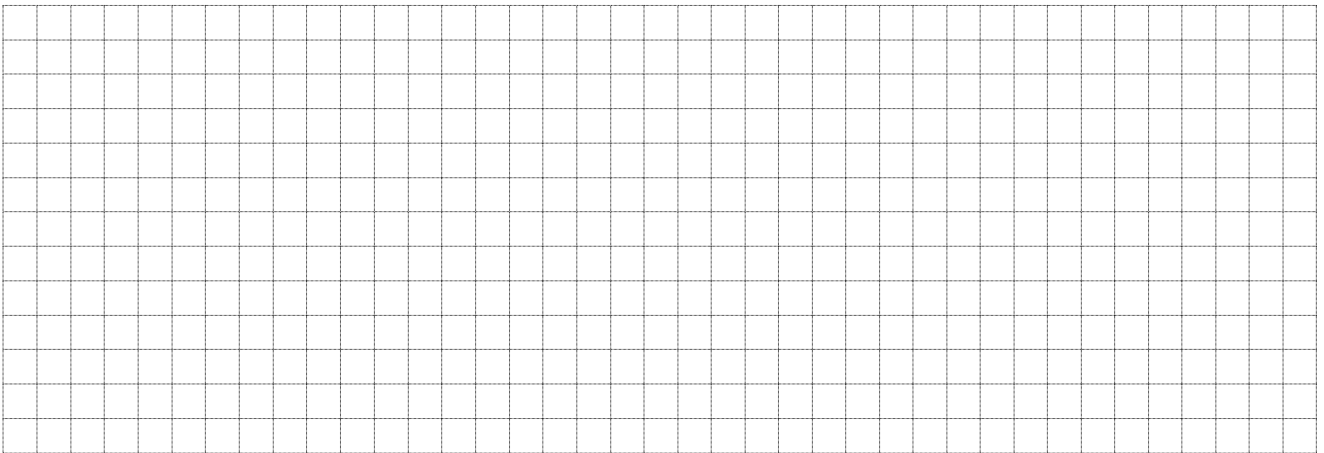
6.21. Коло, вписане в рівнобічну трапецію, поділяє точкою дотику бічну сторону на відрізки, довжина більшого з яких дорівнює 8 см . Знайдіть меншу основу трапеції, якщо її периметр дорівнює 60 см .



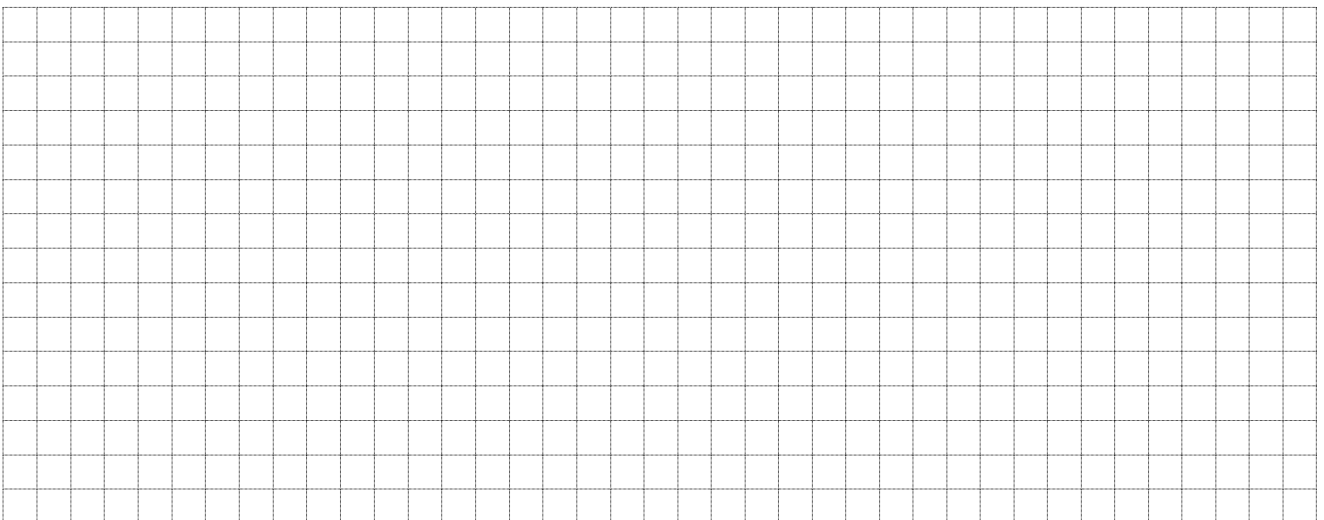
6.22. Чому дорівнює радіус кола, якщо: 1) довжина — π см; 2) площа круга — 4π см²?



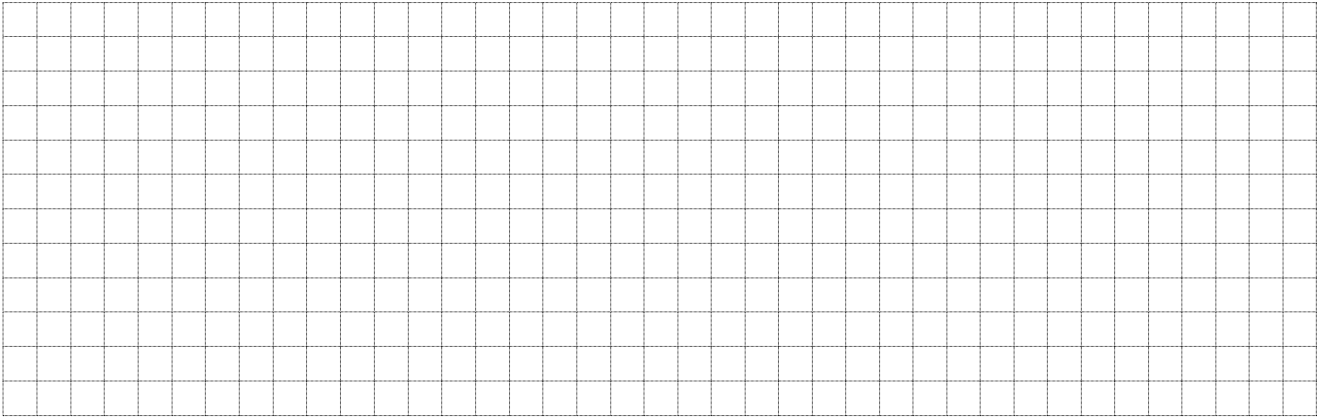
6.23. Знайдіть довжину кола та площу круга, описаних навколо правильного трикутника зі стороною **9 см**.



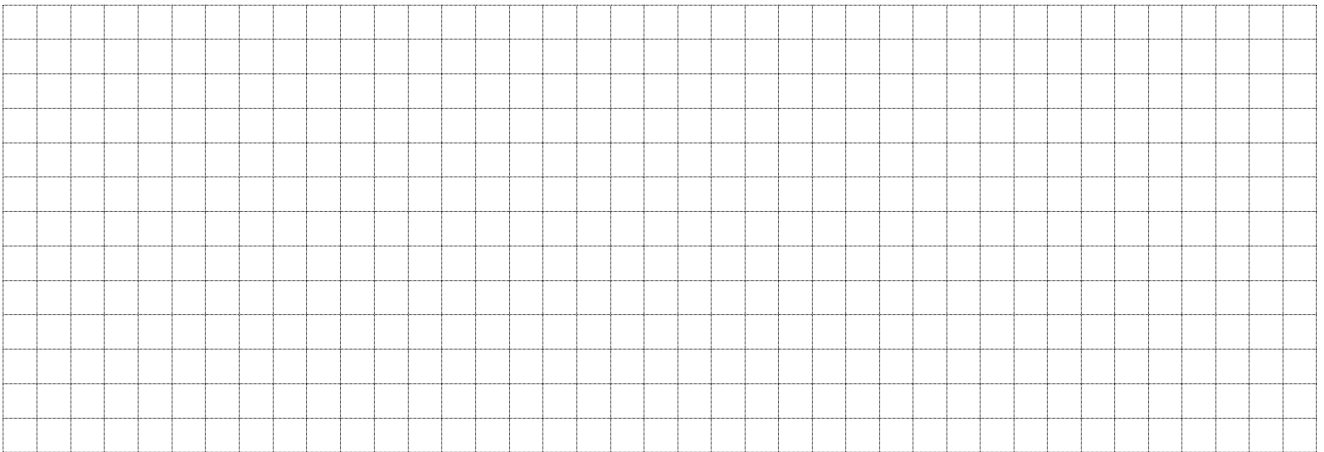
6.24. Сторони трикутника дорівнюють **13 см, 14 см і 15 см**. Знайдіть площі описаного навколо нього та вписаного в нього кругів.



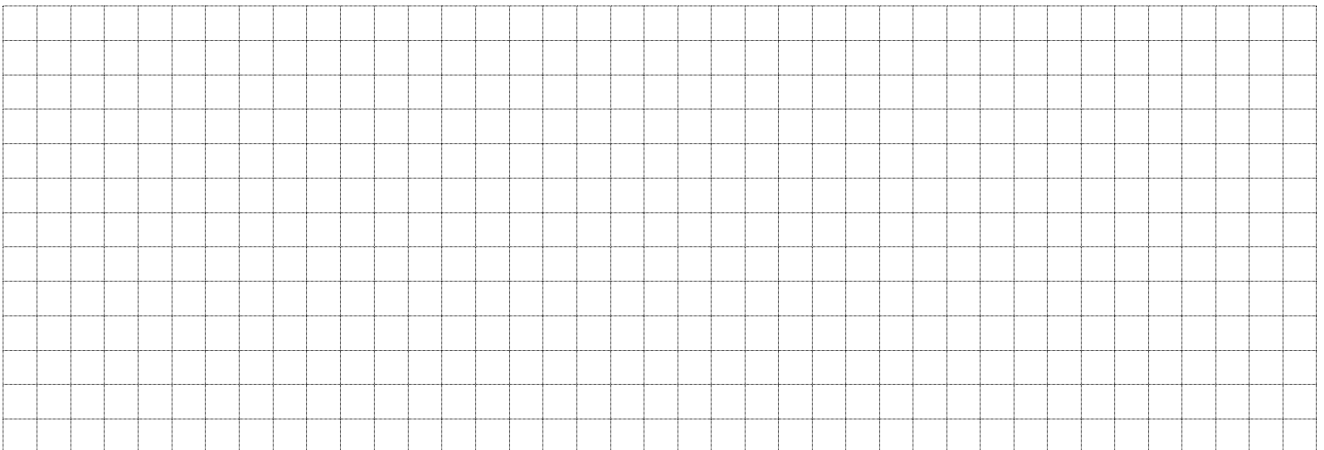
6.25. Два круги мають спільну хорду. Знайдіть відношення площ цих кругів, якщо із центра першого круга цю хорду видно під кутом 60° , а із центра другого – під кутом 120° .



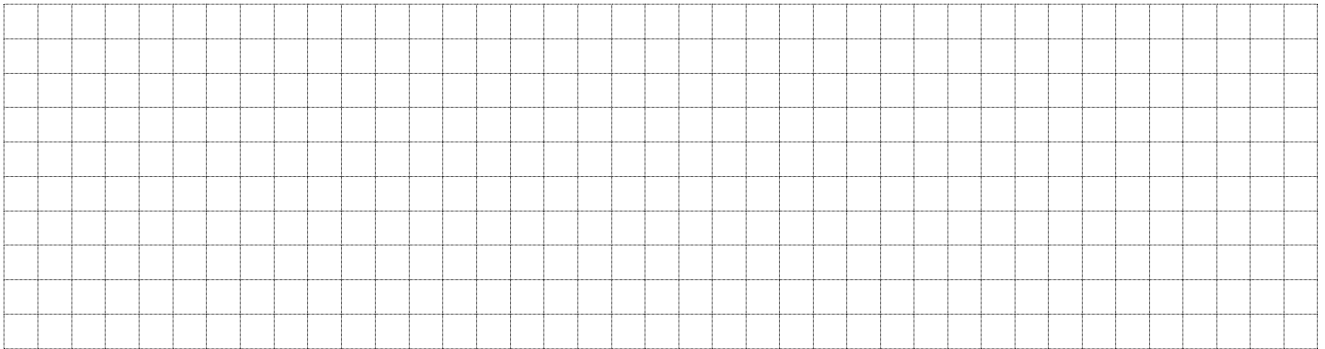
6.26. Площа круга, вписаного в рівнобічну трапецію, дорівнює 12π см², а один із кутів трапеції дорівнює 60° . Знайдіть площу трапеції.



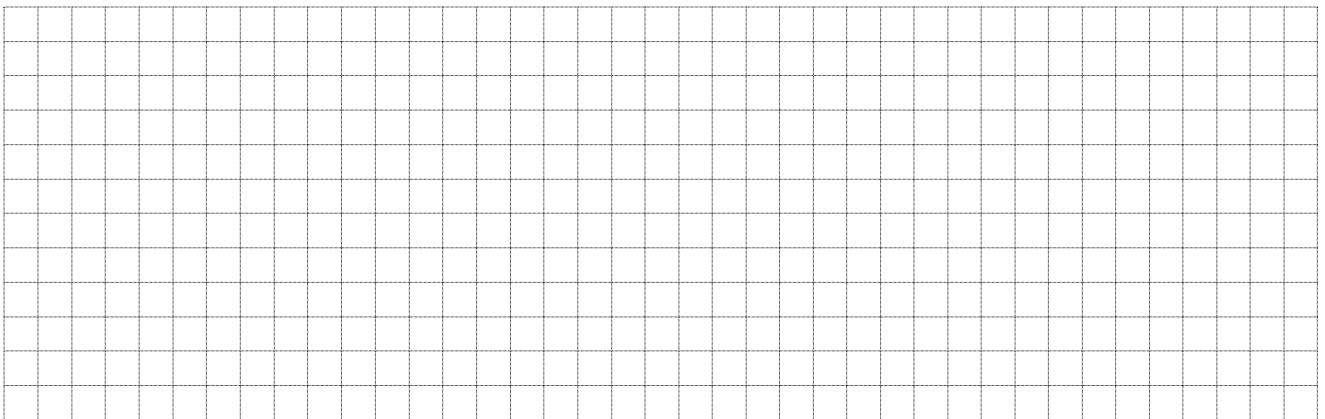
6.27. Довжина першого кола, радіус якого 10 см, дорівнює довжині дуги другого кола, градусна міра якої 150° . Знайдіть радіус другого кола.



6.28. Яку частину площі круга становить площа сектора, якщо відповідний сектору центральний кут дорівнює 300° ?



6.29. Радіус круга дорівнює 4 см . У ньому проведено хорду, яка дорівнює стороні правильного трикутника, вписаного в цей круг. Знайдіть площу більшого із сегментів, основою яких є ця хорда.

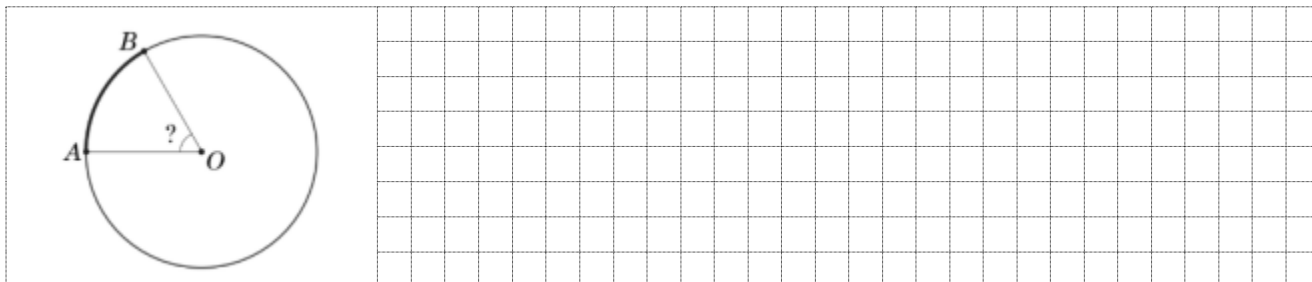


6.30. Знайдіть площу заштрихованої фігури, показаної на рисунку (довжини відрізків дано в сантиметрах).

| | | | |
|---|---|---|--|
| <p style="text-align: center;">a</p> | <p style="text-align: center;">б</p> | <p style="text-align: center;">в</p> | |
| | | | |

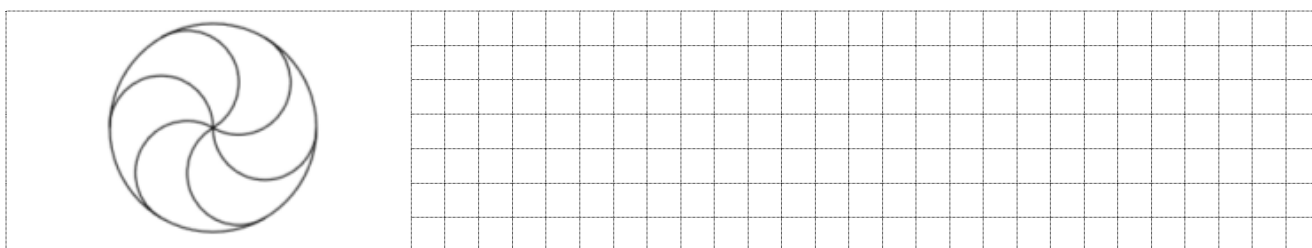
**Додаткові вправи,
які було запропоновано під час проведення ЗНО**

6.31. На колі з центром O вибрано точки A і B (див. рисунок). Визначте градусну міру кута AOB , якщо довжина дуги AB становить $\frac{1}{6}$ довжини цього кола.



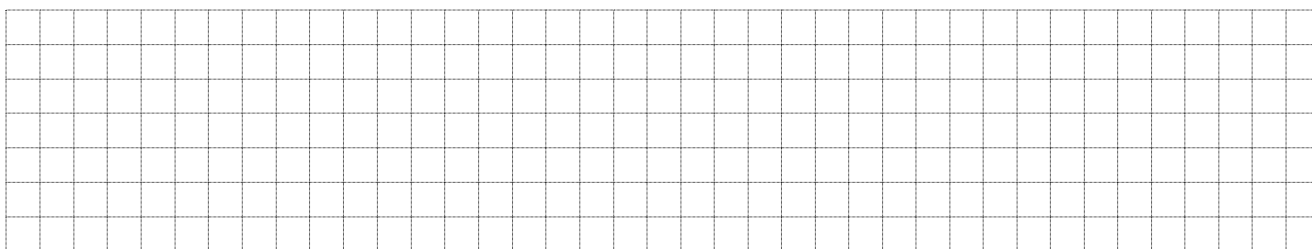
| А | Б | В | Г | Д |
|------------|------------|------------|------------|------------|
| 30° | 45° | 60° | 75° | 90° |

6.32. На рисунку зображено ескіз емблеми, що має форму кола радіусом 2 м , усередині якого розміщено 6 однакових півкіл. Один кінець кожного півкола збігається з центром кола, інший кінець лежить на колі. Для виготовлення емблеми (з усіма елементами включно) потрібен гнучкий матеріал вартістю 200 грн за 1 м довжини. Укажіть з наведених сум грошей найменшу, якої достатньо, щоб придбати цей матеріал для виготовлення емблеми. Вважайте, що на з'єднання елементів емблеми не потрібно додаткових витрат матеріалу.



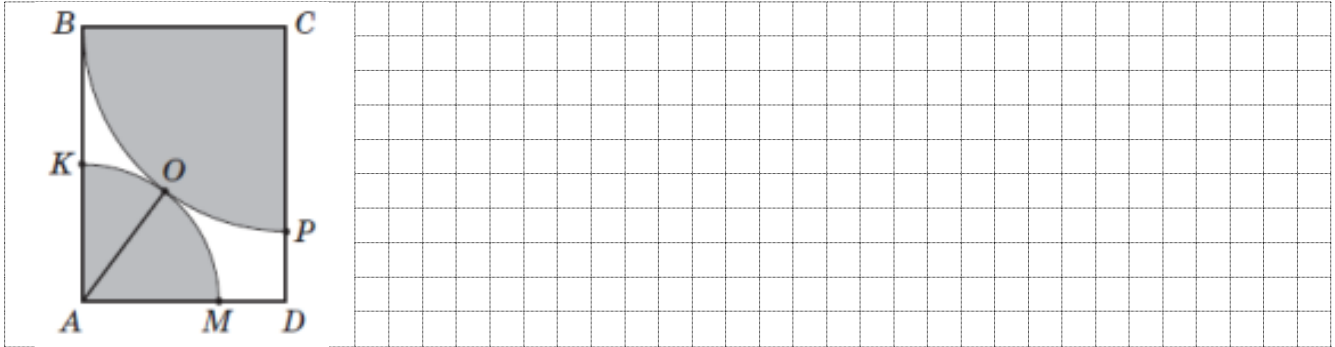
| А | Б | В | Г | Д |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 4000 грн | 5000 грн | 6000 грн | 7000 грн | 8000 грн |

6.33. Два кола, довжини яких дорівнюють $9\pi\text{ см}$ і $36\pi\text{ см}$, мають внутрішній дотик. Знайдіть відстань між центрами цих кіл.



6.34. На рисунку показано прямокутник $ABCD$ і кругові сектори KAM і BSP , що мають одну спільну точку O . Площа сектора BSP дорівнює $9\pi \text{ см}^2$, $AO = 4 \text{ см}$.

1. Визначте радіус сектора BSP , см .
2. Обчисліть площу прямокутника $ABCD$, см^2 .



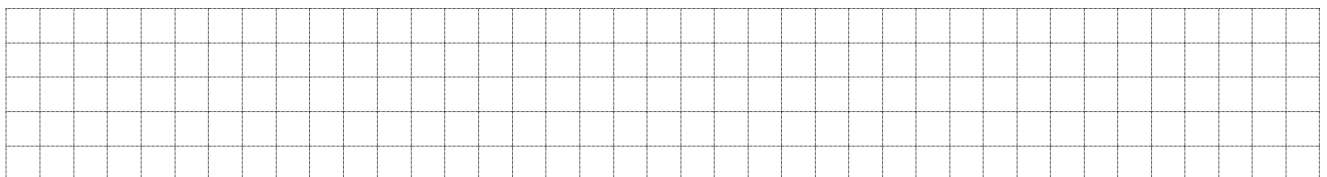
6.35. На кожному з рисунків показано коло з центром у точці O та хорду AB . $\angle ACB$ і $\angle ADB$ – вписані кути, які спираються на хорду AB . Установіть відповідність між вписаним кутом $\angle ACB$, зображеним на рисунках, та його градусною мірою (А - Д).

Зображення вписаного кута

Градусна міра вписаного кута

| | |
|---|-------------|
| А | 100° |
| Б | 90° |
| В | 80° |
| Г | 60° |
| Д | 50° |

6.36. Точки A і B належать колу радіусом 10 см і поділяють його на дві дуги, довжини яких співвідносяться як $3:2$. Знайдіть довжину більшої дуги кола.

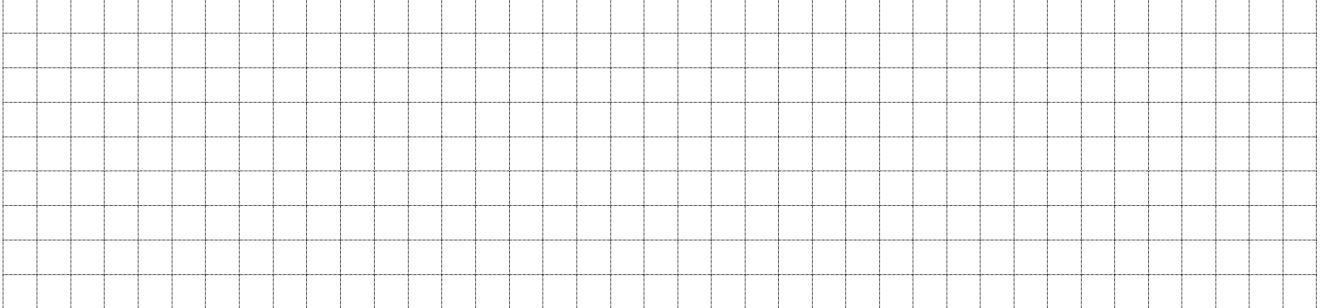


| | | | | |
|--------------------|--------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| $20\pi \text{ см}$ | $12\pi \text{ см}$ | $8\pi \text{ см}$ | $6\pi \text{ см}$ | $4\pi \text{ см}$ |

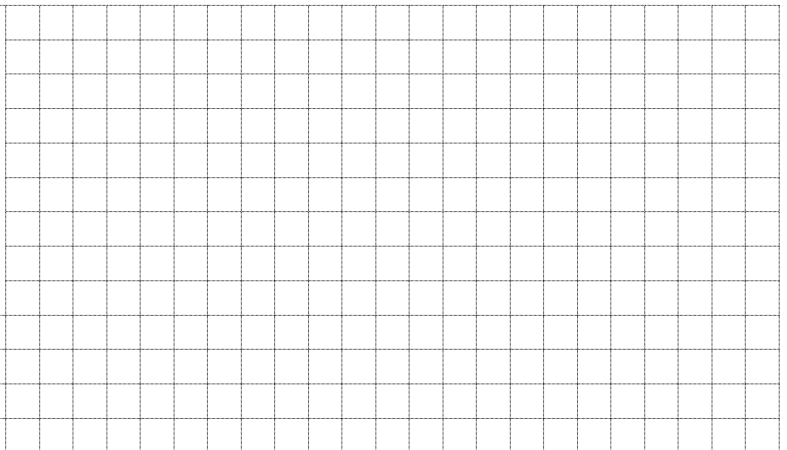
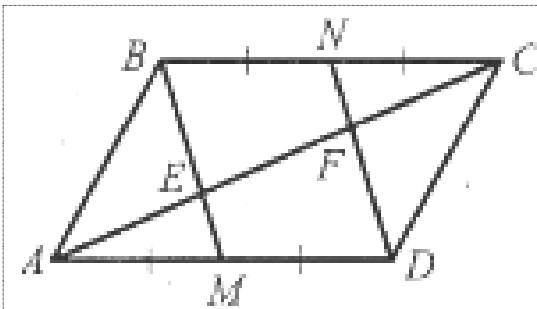
Заняття 7

ТЕОРЕМА ФАЛЕСА. ТЕОРЕМА ПРО ПРОПОРЦІЙНІ ВІДРІЗКИ. ПОДІБНІ ТРИКУТНИКИ. ОЗНАКИ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

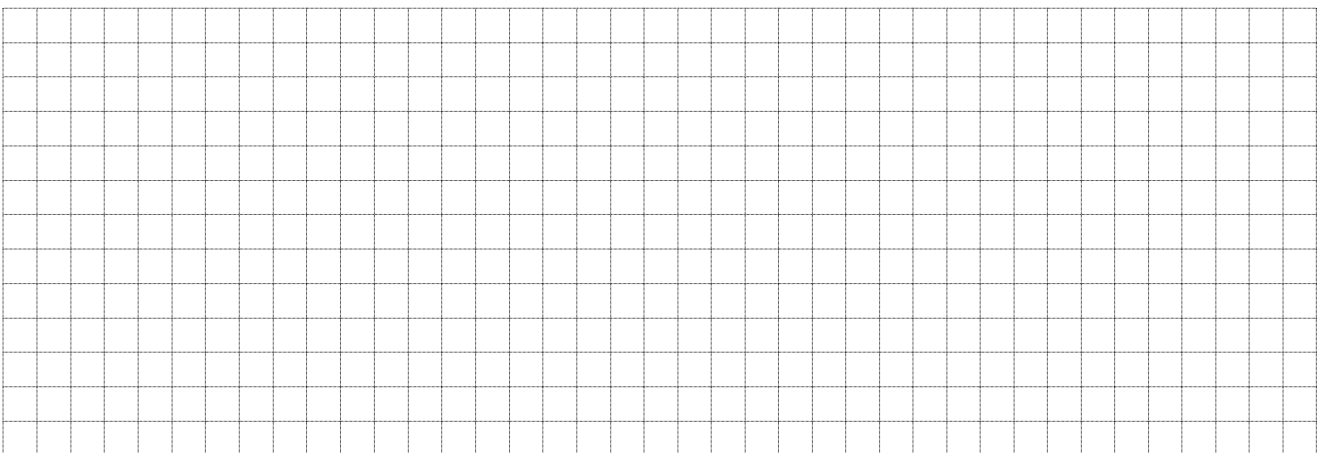
7.1. Поділіть відрізок на сім рівних частин.



7.2. Точки M і N – середини сторін AD і BC паралелограма $ABCD$. Відрізки BM і DN перетинають діагональ AC у точках E і F . Доведіть, що точки E і F поділяють відрізок AC на три рівні частини.



7.3. Точка M – середина катета AC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC , гіпотенуза якого дорівнює 12 см. Знайдіть відстань від точки M до прямої AB .



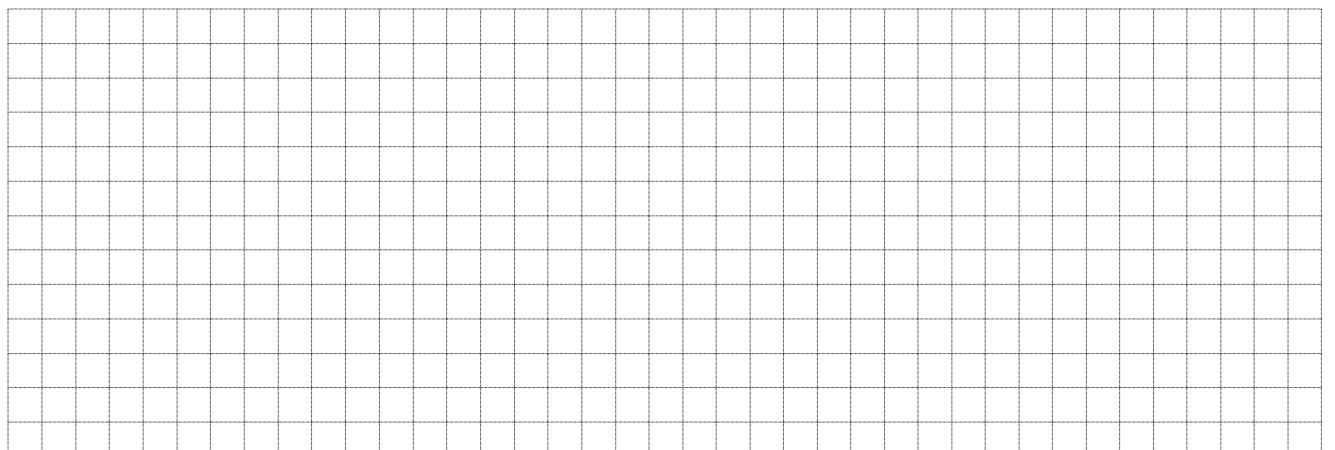
7.4. У трапеції $ABCD$ відрізок EF паралельний стороні CD , а точка E – середина AB . Доведіть, що $EF = \frac{1}{2}CD$.



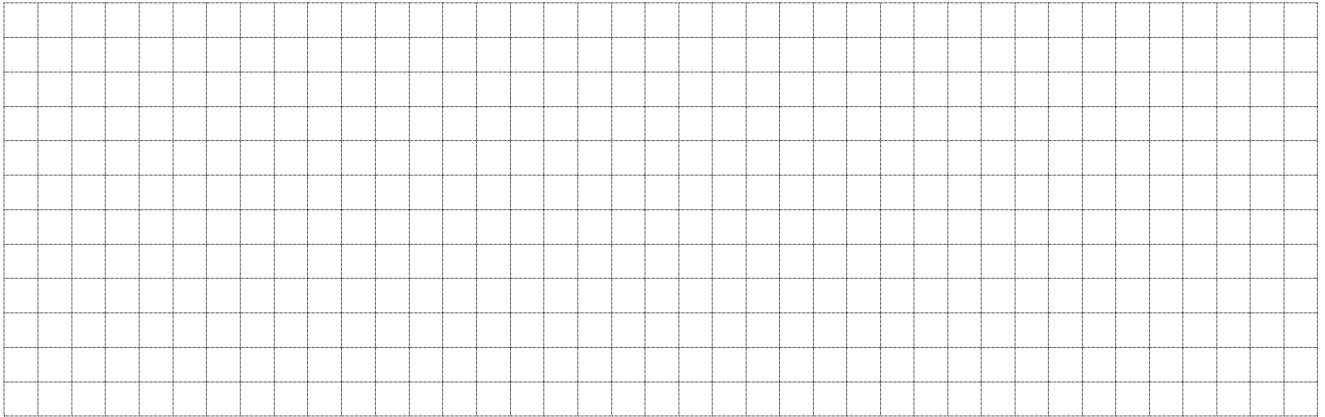
7.5. Основи трапеції дорівнюють 10 см і 6 см . Її бічну сторону поділено на 4 рівні частини і через точки поділу проведено прямі, паралельні основам. Знайдіть довжини відрізків прямих, які містяться між сторонами трапеції.



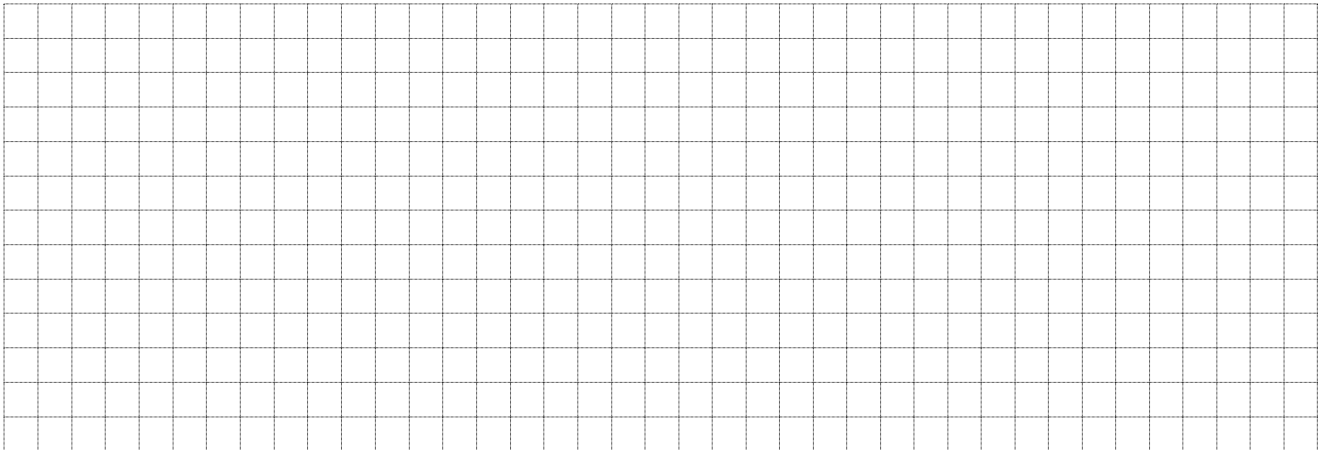
7.6. Сторона AB трикутника ABC дорівнює 12 см . Сторону BC поділено на 3 рівні частини і через точки поділу проведено прямі, паралельні стороні AB . Знайдіть довжини відрізків прямих, які містяться між сторонами трикутника.



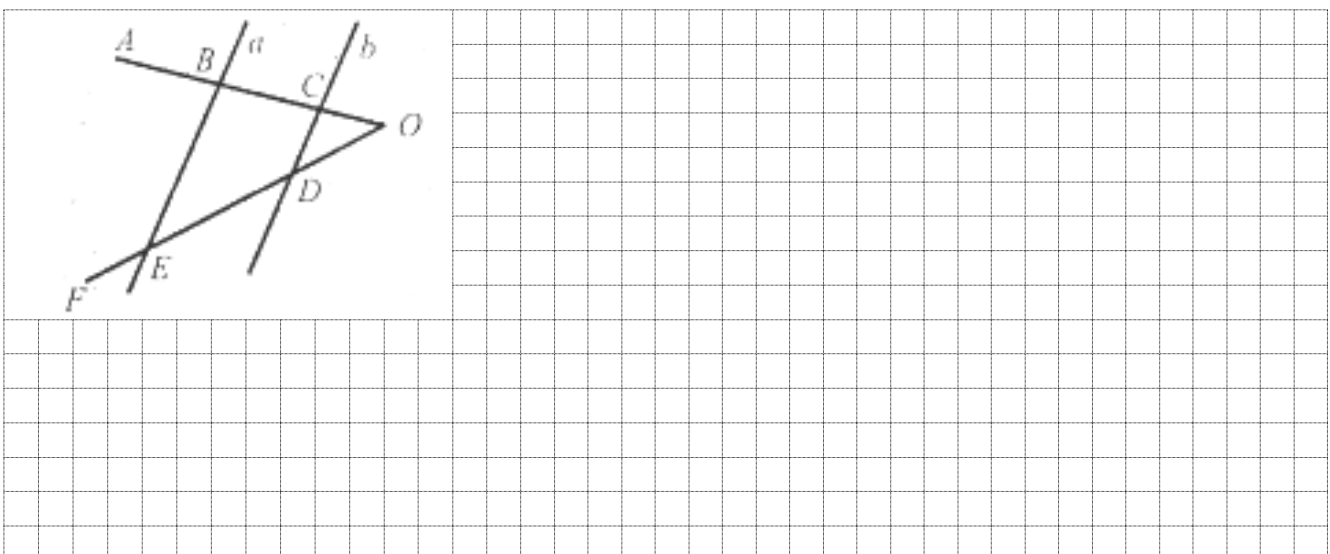
7.7. Діагональ трапеції поділяє її середню лінію на відрізки довжиною **8 см** і **15 см**. Знайдіть основи трапеції.



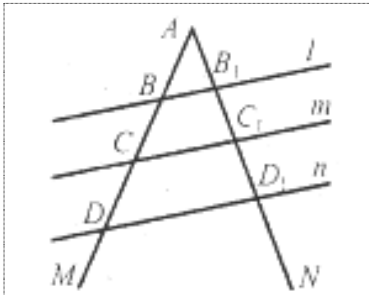
7.8. Основи трапеції дорівнюють **8 см** і **12 см**. Знайдіть довжину відрізка її середньої лінії, який міститься між діагоналями трапеції.



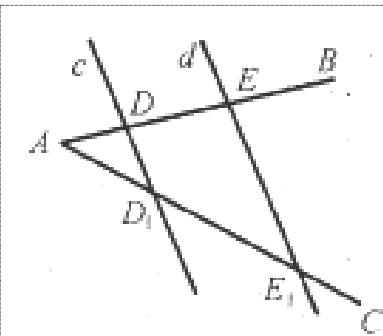
7.9. Паралельні прямі **a** і **b** перетинають сторони кута **AOF**. Знайдіть довжину відрізка **OD**, якщо **OC = 4 см**, **BC = 6 см**, **DE = 9 см**.



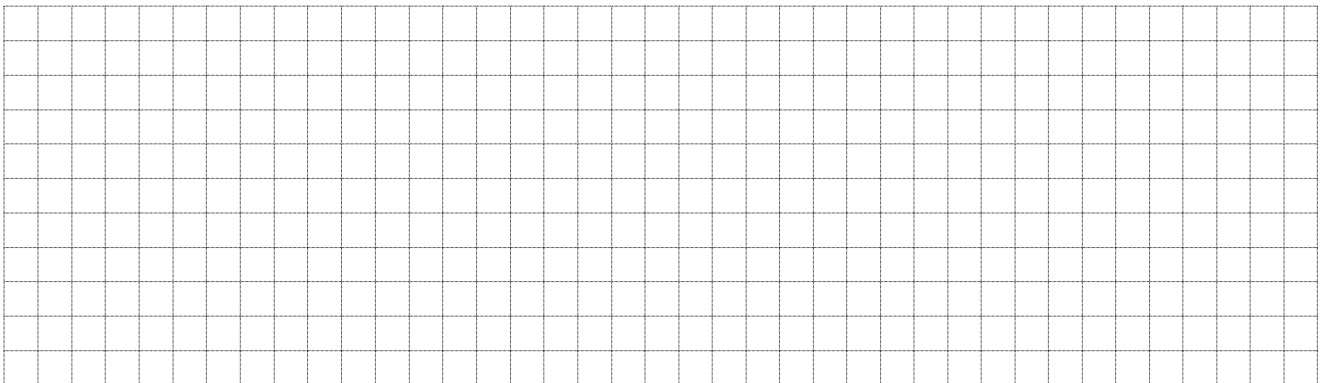
7.10. Паралельні прямі l, m і n перетинають сторони кута MAN . Знайдіть довжини відрізків AB_1 і BD , якщо $AB = 4$ см, $CD = 8$ см, $B_1C_1 = 5$ см, $C_1D_1 = 6$ см.



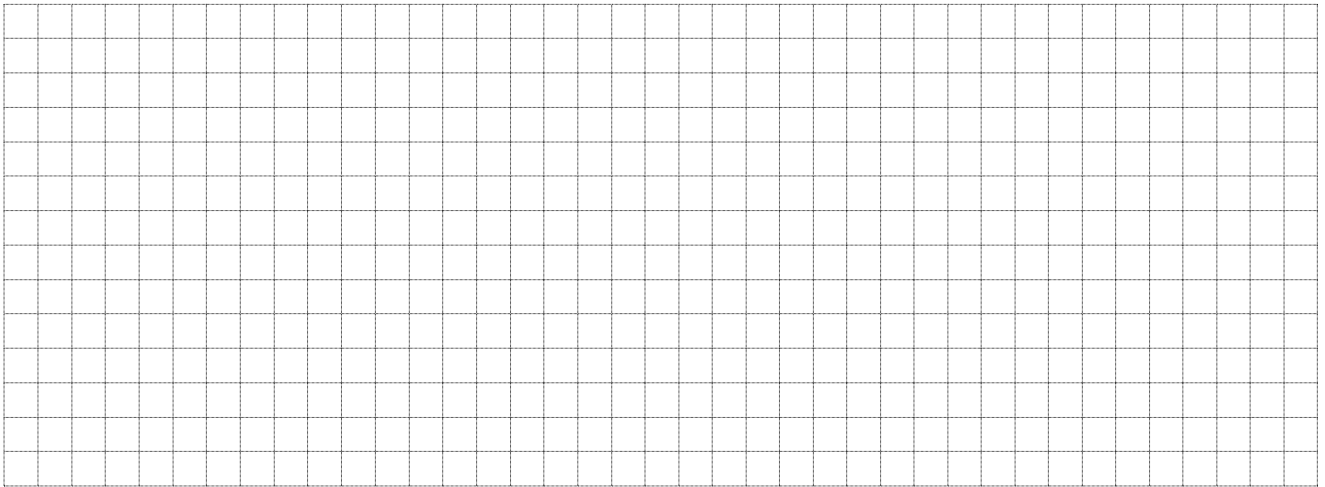
7.11. Паралельні прямі c і d перетинають сторони кута BAC . Знайдіть довжину відрізка DE , якщо $AD = 4$ см, $D_1E_1 = 16$ см і $DE = AD_1$.



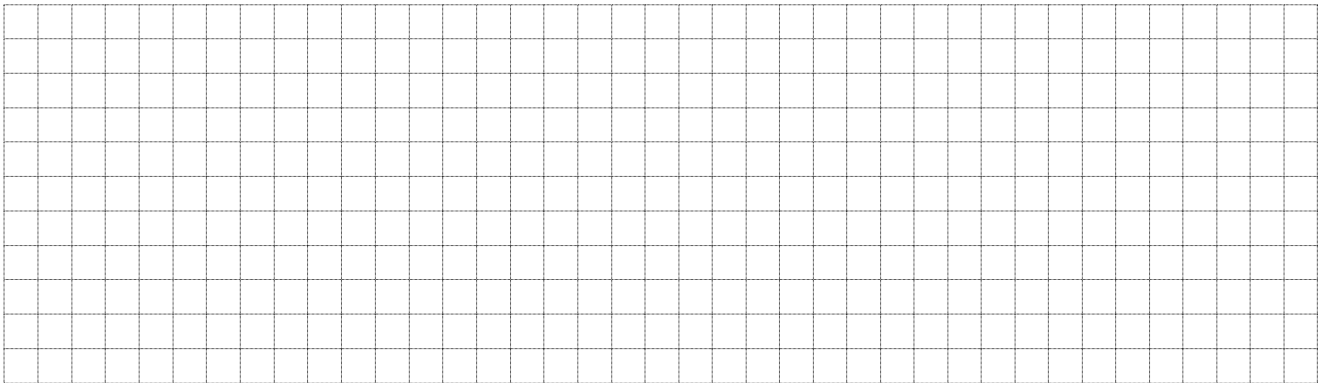
7.12. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) точка M перетину медіан віддалена від основи на 4 см. Знайдіть відстань від точки M до вершини B .



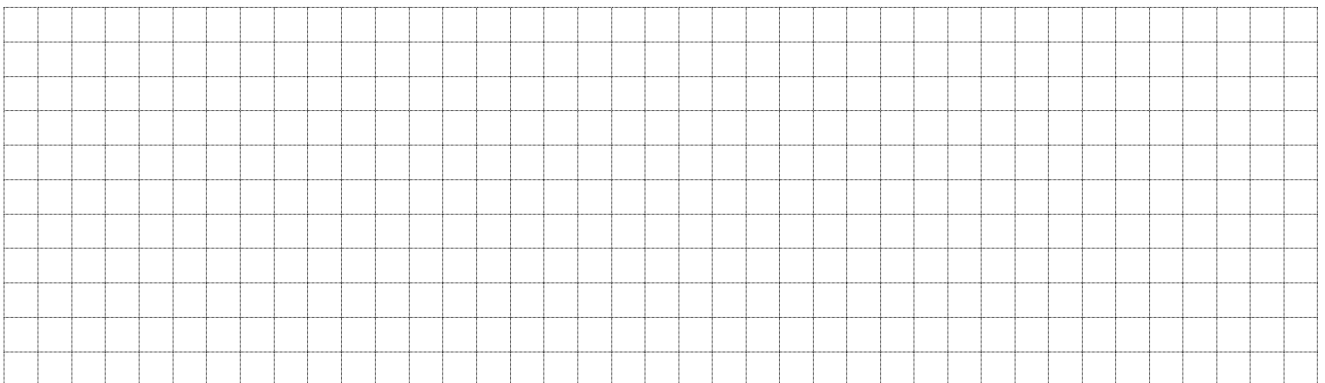
7.13. Сторони трикутника співвідносяться як **7:6:3**. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, якщо в нього: 1) периметр дорівнює **8 см**; 2) менша сторона дорівнює **6 см**; 3) більша сторона дорівнює **28 см**; 4) різниця більшої і меншої сторін дорівнює **20 см**.



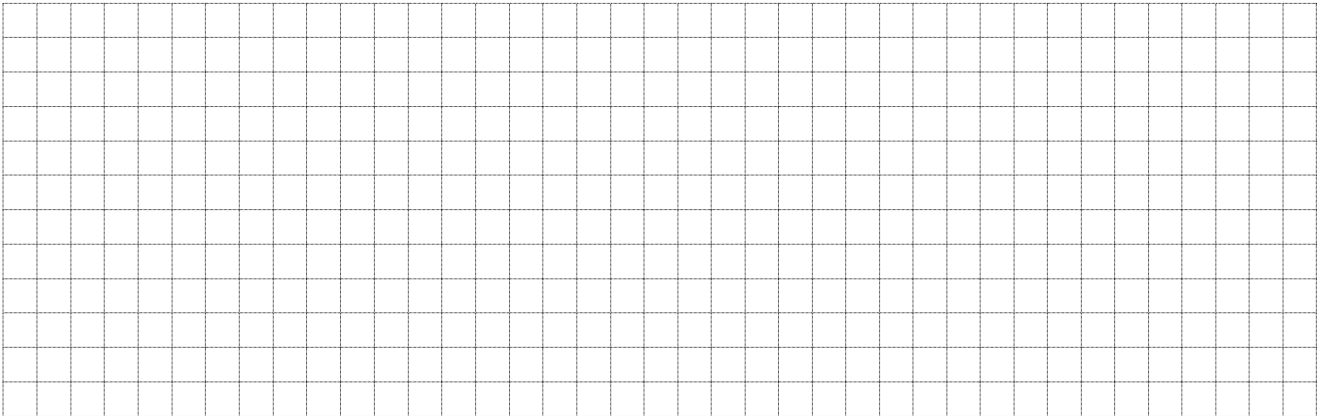
7.14. Периметри подібних трикутників співвідносяться як **7:5**, а сума їх менших сторін дорівнює **36 см**. Знайдіть сторони обох трикутників, якщо сторони одного з них співвідносяться як **3:7:8**.



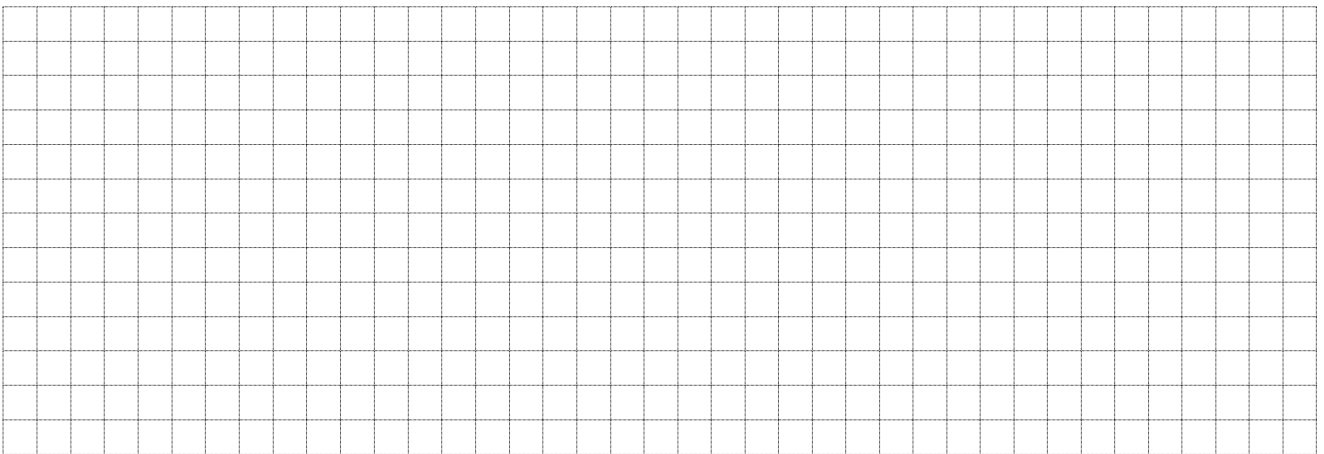
7.15. Продовження бічних сторін **AB** і **CD** трапеції **ABCD** перетинаються в точці **E**. Більша основа **AD** трапеції дорівнює **12 см**, **AE = 15 см**, **BE = 5 см**. Знайдіть меншу основу трапеції.



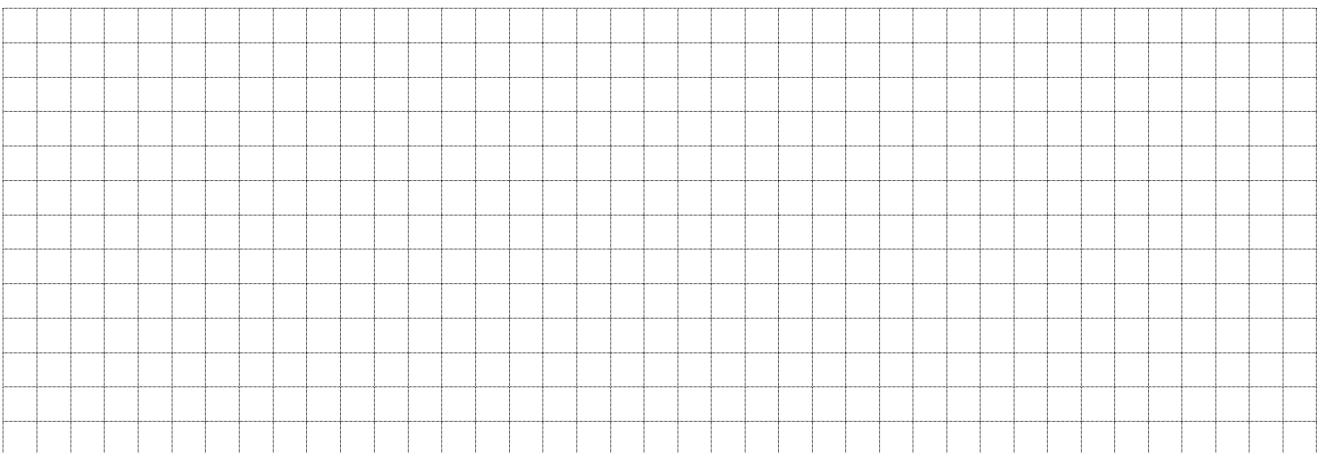
7.16. У трикутник ABC вписано ромб $AKPE$ так, що кут A в них спільний, а вершина P належить стороні BC . Знайдіть сторону ромба, якщо $AB = 6$ см, $AC = 3$ см.



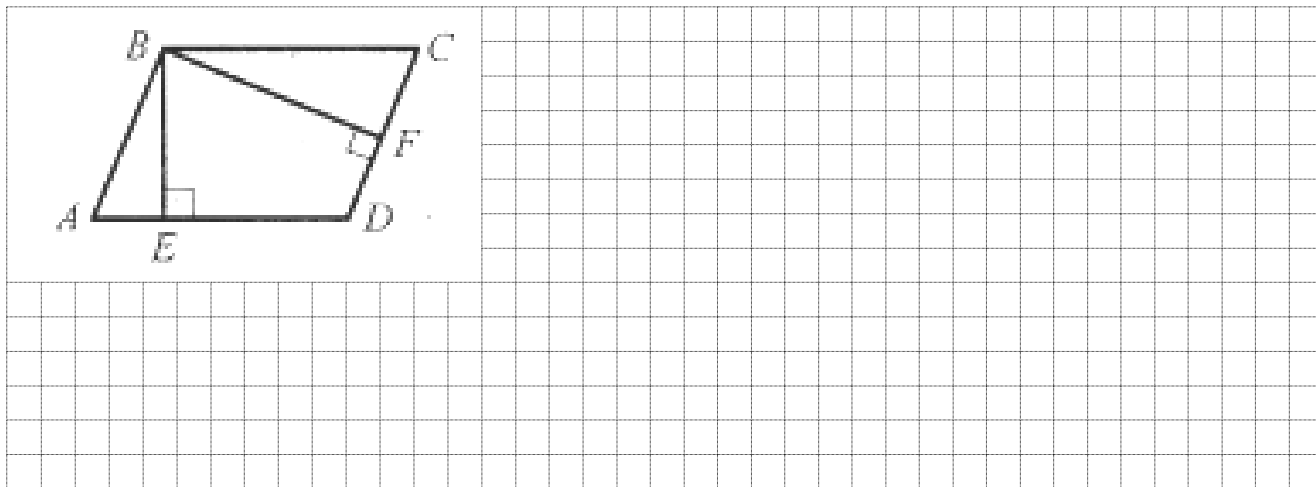
7.17. Доведіть, що рівнобедрені трикутники подібні, якщо їх кути при вершині є рівними.



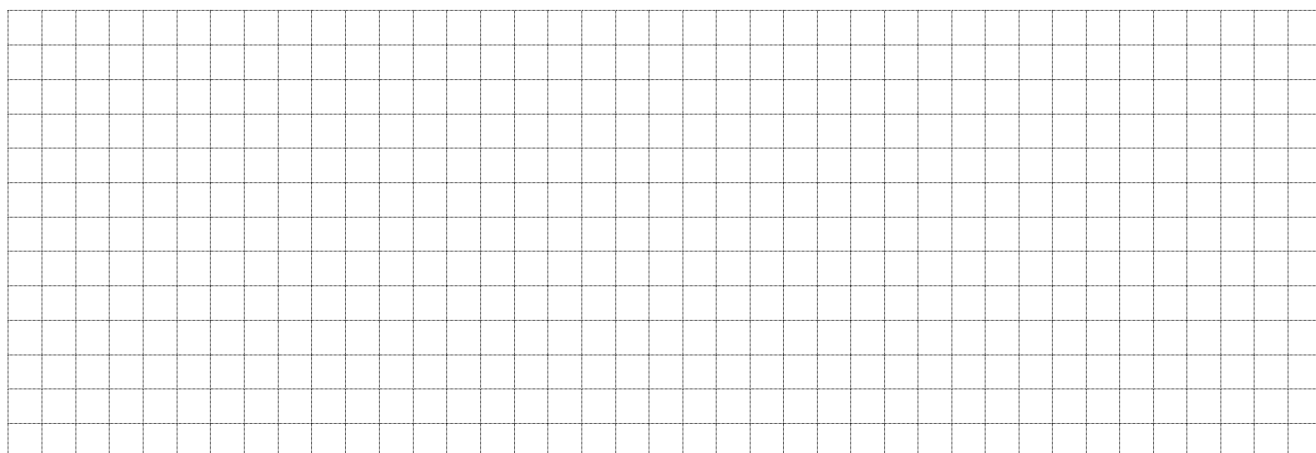
7.18. Кути одного трикутника співвідносяться як $3:5:7$, а в другому трикутнику один з кутів на 24° більший за другий і на 24° менший від третього кута. Чи подібні ці трикутники?



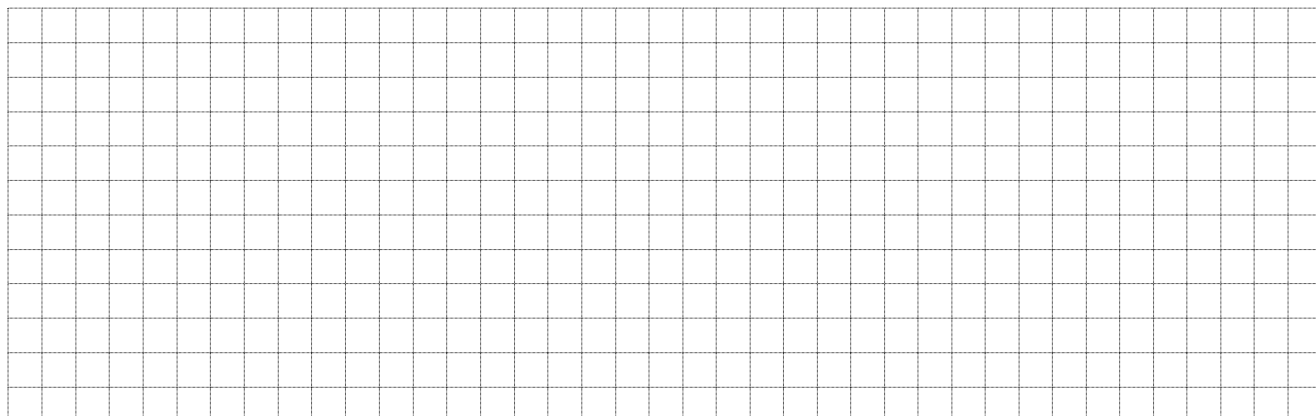
7.19. У паралелограмі $ABCD$ проведено висоти BE і BF . Доведіть подібність трикутників ABE і CBF .



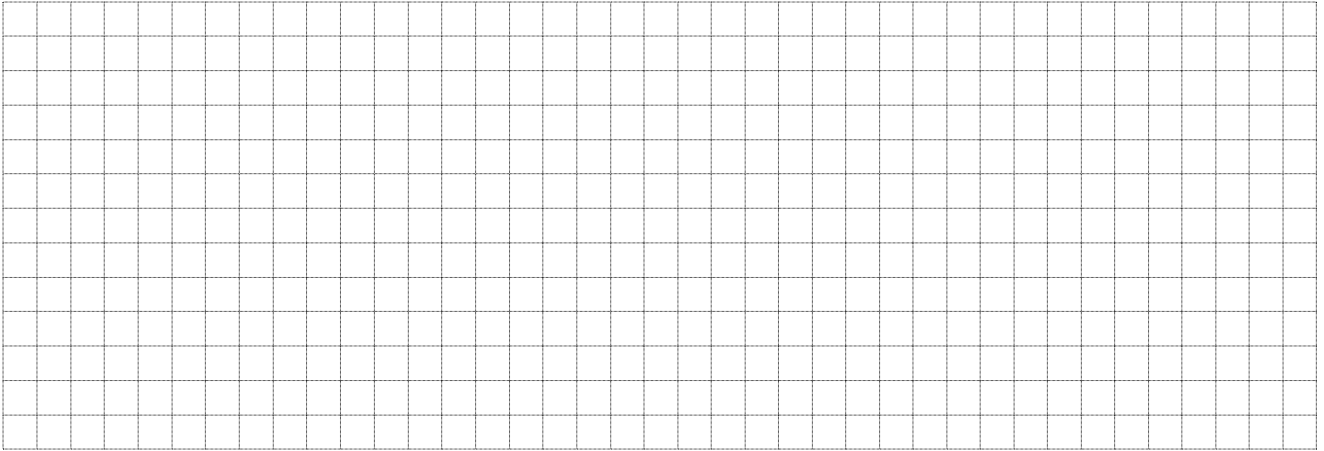
7.20. Периметр паралелограма дорівнює 70 см, а його висоти – 3 см і 4 см. Знайдіть сторони паралелограма.



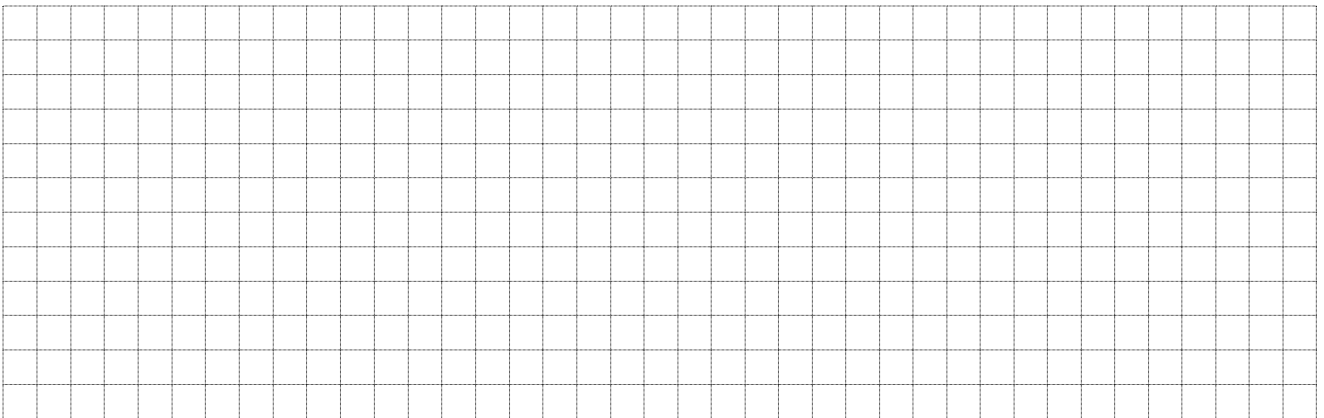
7.21. Одна з діагоналей трапеції дорівнює 28 см і поділяє другу діагональ на відрізки довжиною 5 см і 9 см. Знайдіть більшу основу трапеції і відрізки, на які точка перетину діагоналей поділяє першу діагональ, якщо менша основа дорівнює 6 см.



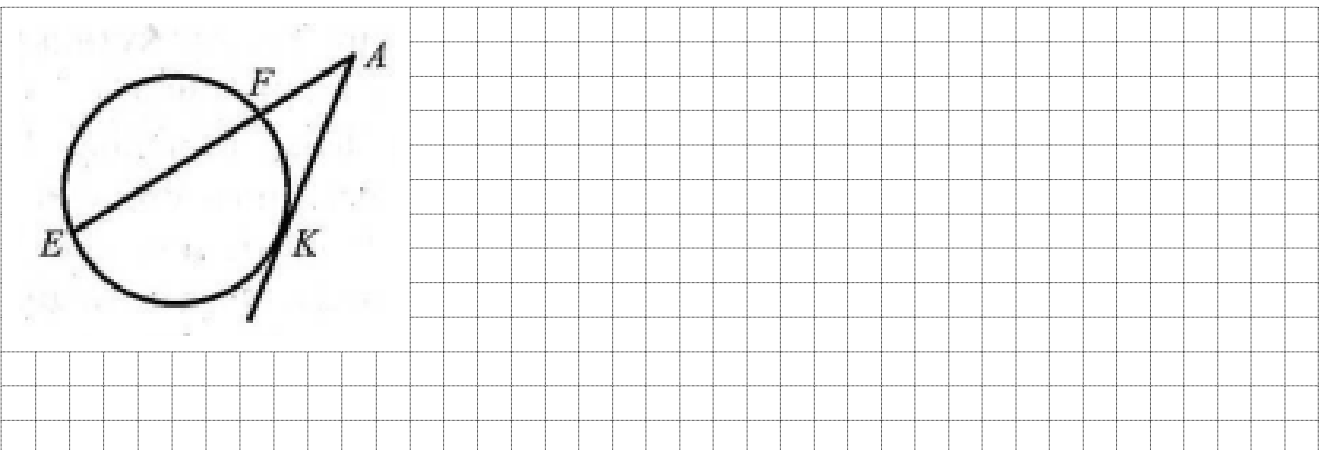
7.22. На стороні AC трикутника ABC позначено точку D так, що $\angle ABD = \angle BCA$. Знайдіть відрізки, на які точка D поділяє сторону AC , якщо $AB = 3$ см, $AC = 6$ см.



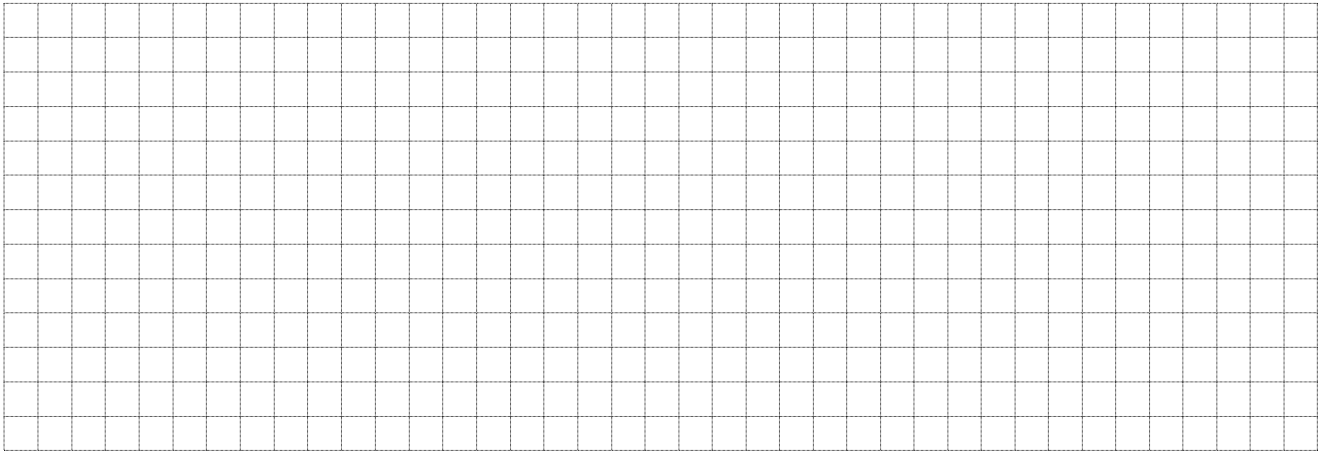
7.23. Хорди MK і PF кола перетинаються в точці E . Знайдіть довжину відрізка EF , якщо $ME = 4$ см, $EK = 3$ см, $PE = 2$ см.



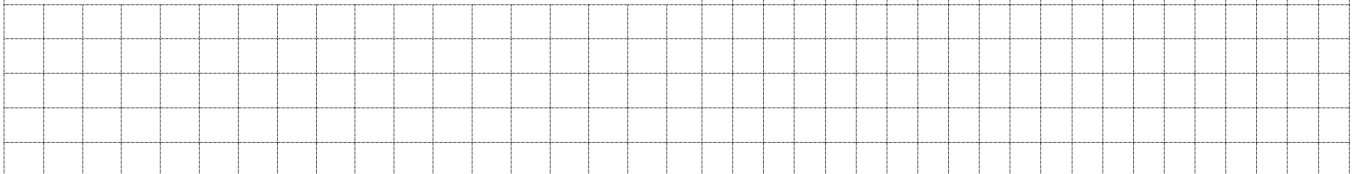
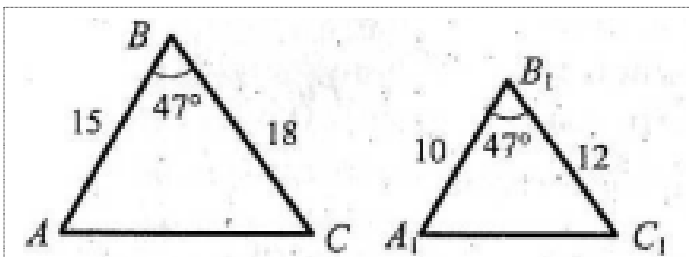
7.24. Через точку A проведено до кола дотичну AK (K – точка дотику) і січну, яка перетинає коло в точках E і F . Знайдіть AF , якщо $AK = 4$ см, $AE = 8$ см.



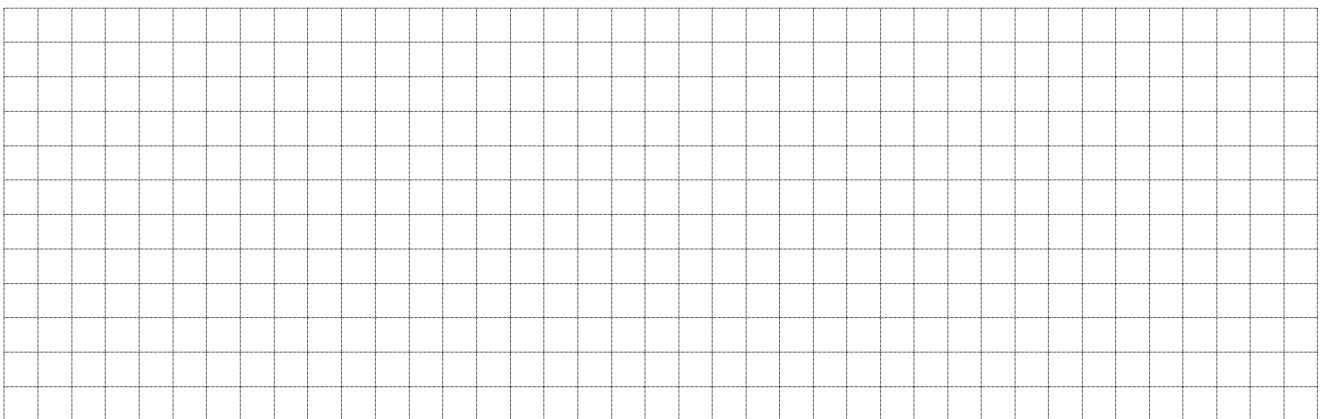
7.25. У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) O – точка перетину діагоналей, $AO:OC = 5:2$, а середня лінія трапеції дорівнює 7 см. Знайдіть основи трапеції.



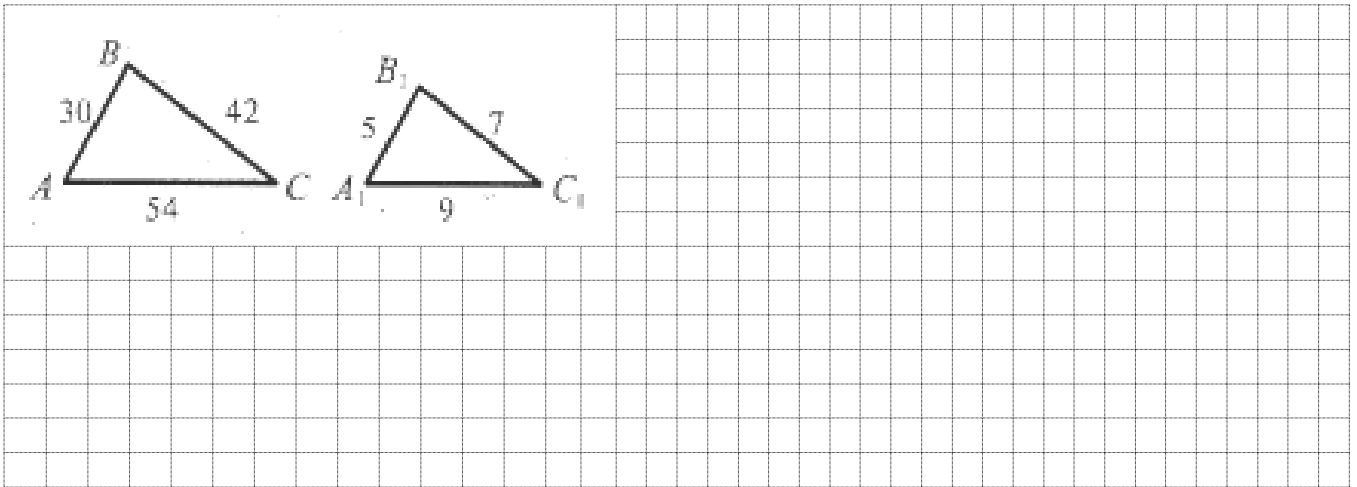
7.26. Доведіть подібність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ (довжини сторін дано в сантиметрах).



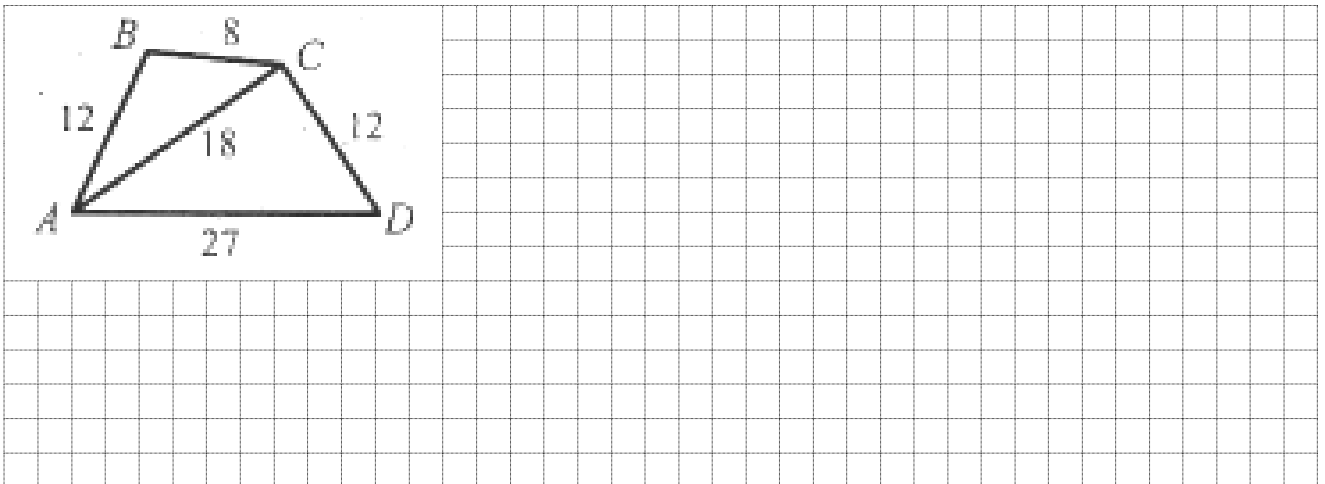
7.27. У трикутнику ABC $AB = 16$ см, $AC = 20$ см. На стороні AB відклали відрізок $AD = 12$ см, а на стороні AC – відрізок $AE = 15$ см. Чи подібні трикутники ABC і ADE ?



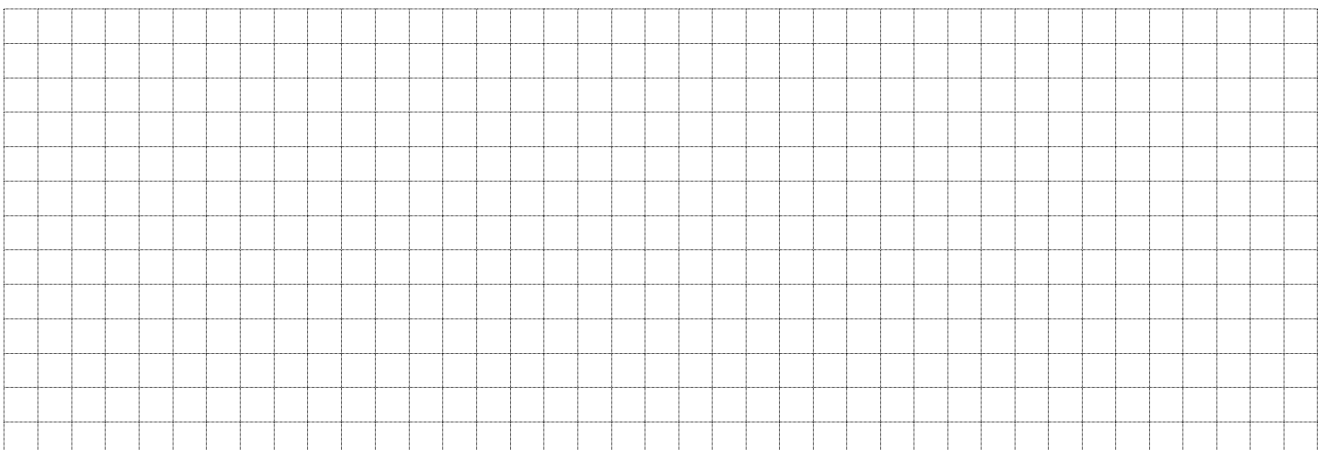
7.28. Доведіть, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, зображені на рисунку, подібні.



7.29. Чи подібні трикутники ABC і ADC (див. рисунок)?

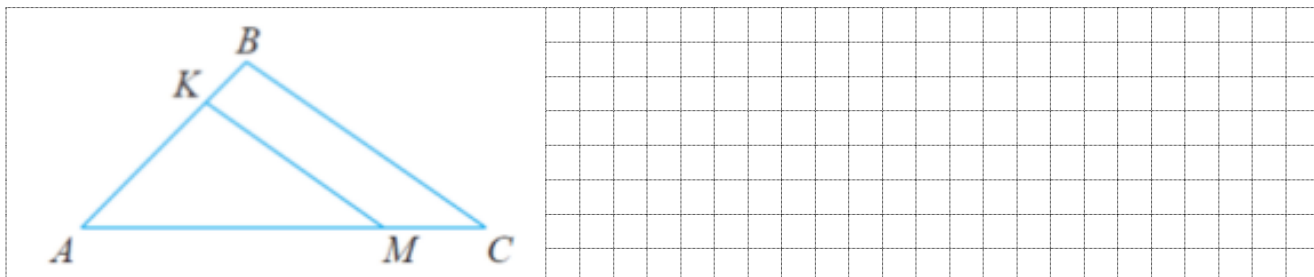


7.30. Сторони одного трикутника співвідносяться як $5:7:9$, а сторони другого трикутника дорівнюють 25 см , 35 см і 45 см . Чи подібні ці трикутники?



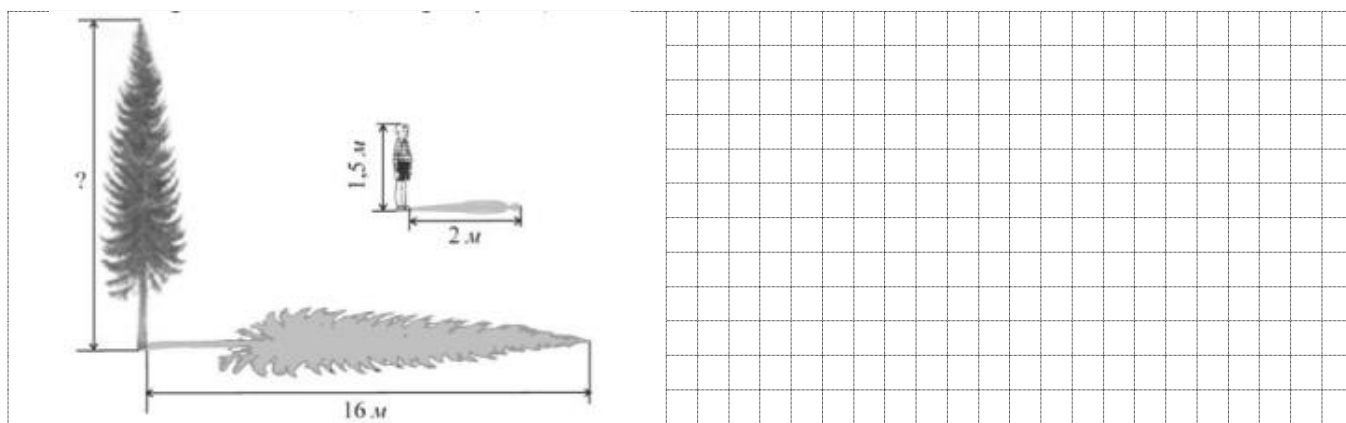
**Додаткові вправи,
які було запропоновано під час проведення ЗНО**

7.31. На сторонах AB і AC трикутника ABC задано точки K і M відповідно, $KM \parallel BC$ (див. рисунок). Визначте довжину відрізка KM , якщо $AK = 6$ см, $KB = 2$ см, $BC = 10$ см.



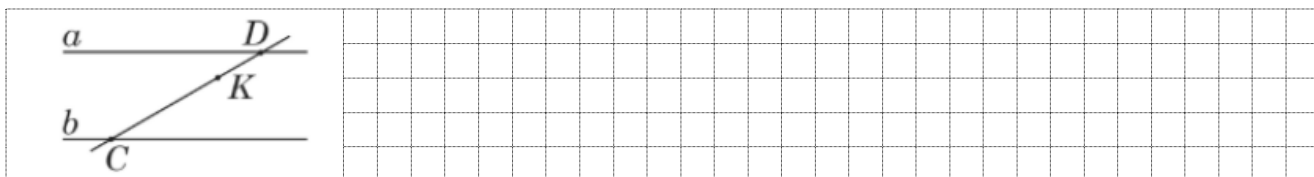
| А | Б | В | Г | Д |
|------|------|--------|------|--------|
| 6 см | 7 см | 7,5 см | 8 см | 8,5 см |

7.32. У сонячний день довжина тіні від дерева становить 16 м. У той самий час тінь від хлопчика, який має зріст $1,5$ м, дорівнює 2 м (рисунок). Визначте висоту дерева.



| А | Б | В | Г | Д |
|------|--------|------|------|--------|
| 12 м | 12,5 м | 13 м | 14 м | 15,5 м |

7.33. На рисунку зображено паралельні прямі a і b та січну CD . Знайдіть відстань між прямими a і b , якщо $CK = 5$ см, $KD = 2$ см, а відстань від точки K до прямої a дорівнює 1 см.

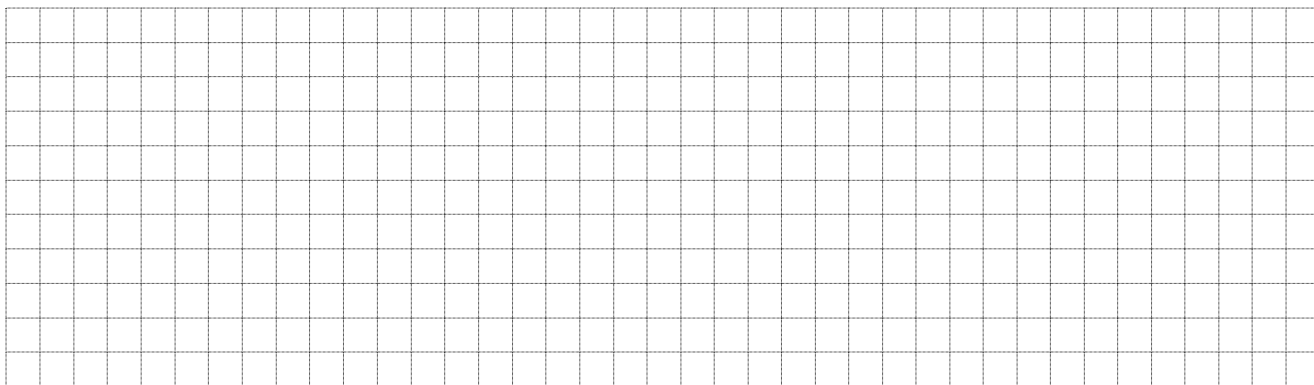


| А | Б | В | Г | Д |
|--------|------|--------|------|--------|
| 2,5 см | 3 см | 3,5 см | 4 см | 4,5 см |

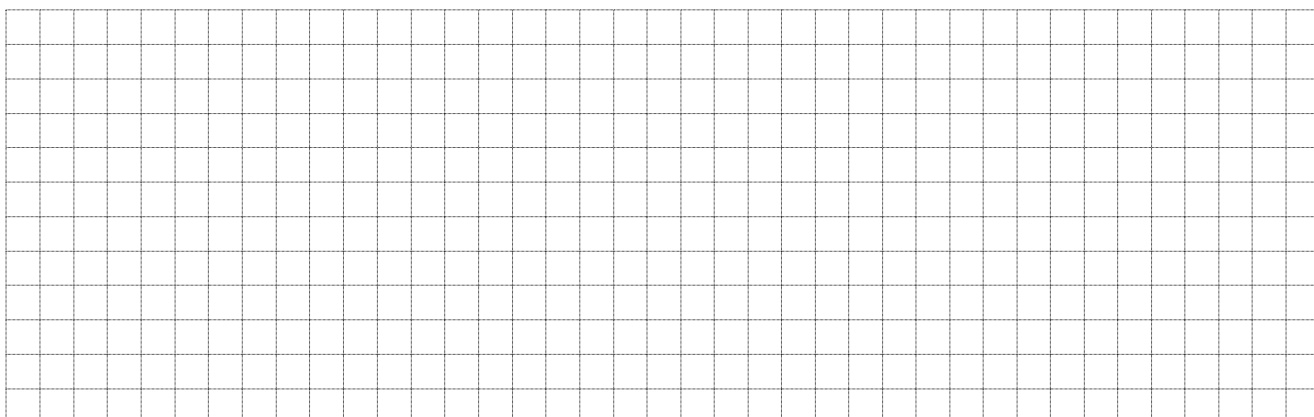
Заняття 8

МЕТРИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ В ПРЯМОКУТНОМУ ТРИКУТНИКУ. ТЕОРЕМА ПІФАГОРА. РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

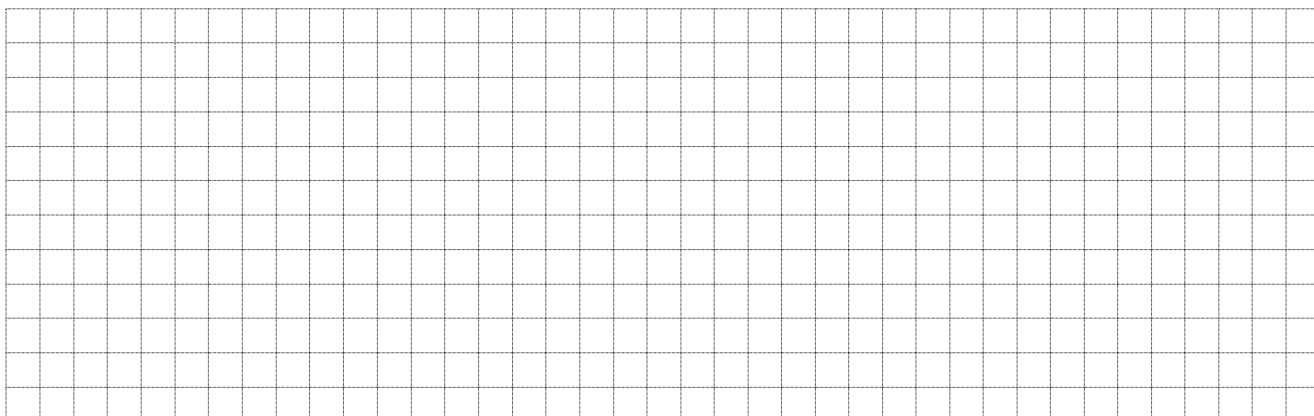
8.1. Знайдіть висоту прямокутного трикутника, проведenu з вершини прямого кута, якщо вона поділяє гіпотенузу на відрізки довжиною **4 см** і **16 см**.



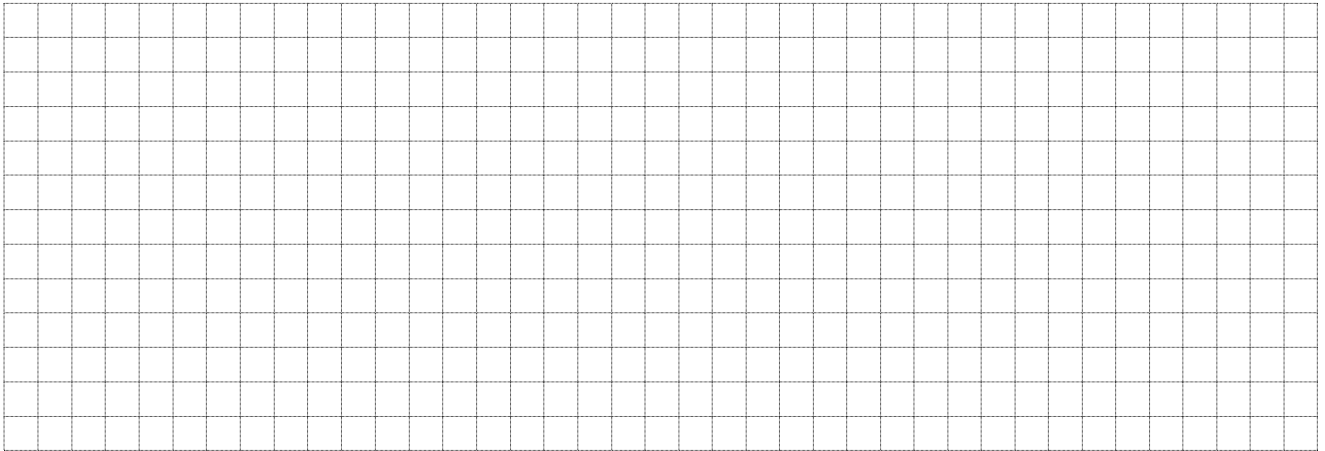
8.2. Катет прямокутного трикутника дорівнює **8 см**, а його проєкція на гіпотенузу – **4 см**. Знайдіть гіпотенузу.



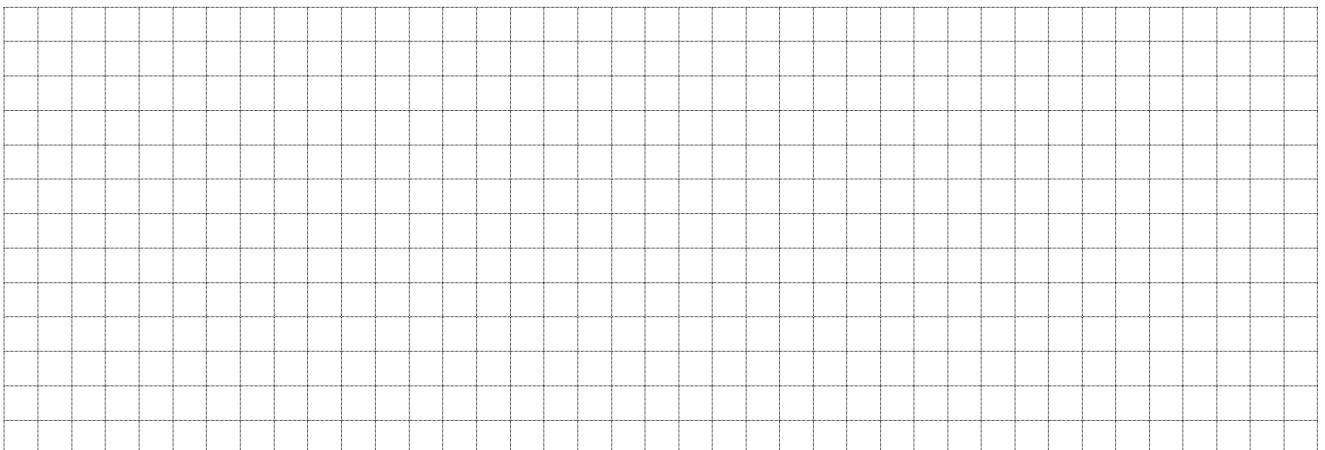
8.3. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, поділяє її на відрізки довжиною **18 см** і **32 см**. Знайдіть катети трикутника.



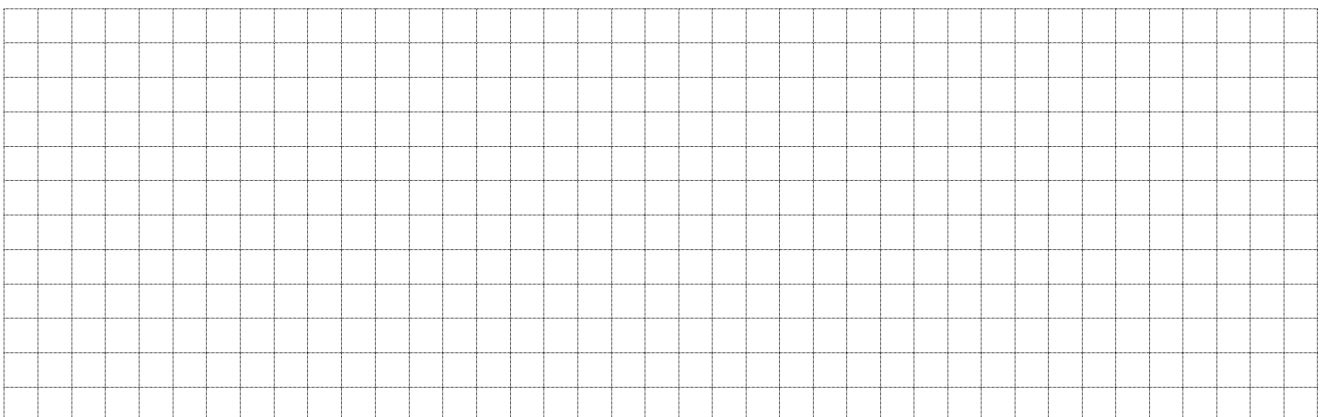
8.4. Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює **4 см**, а проєкція другого катета на гіпотенузу – **6 см**. Знайдіть другий катет і гіпотенузу.



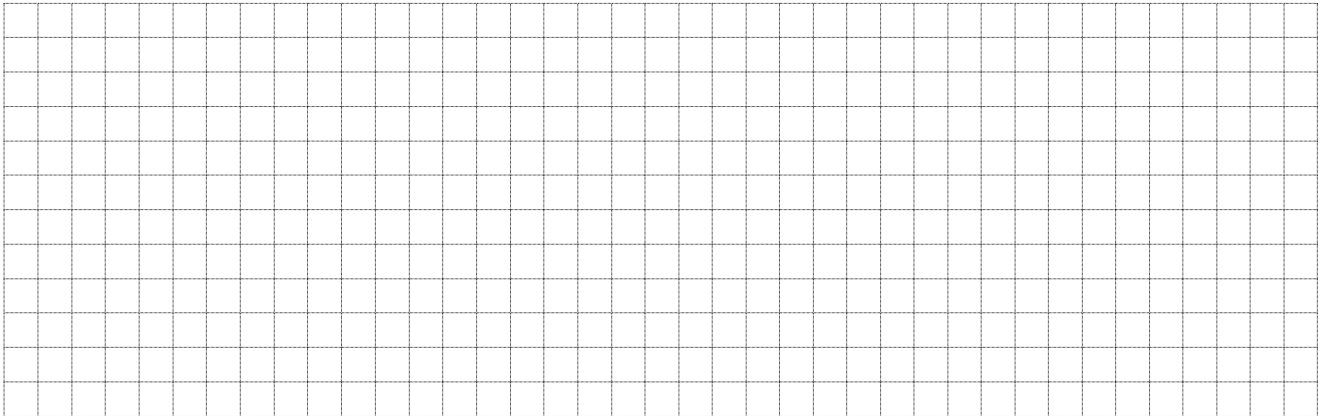
8.5. Знайдіть висоту і бічну сторону рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють **5 см** і **13 см**, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін.



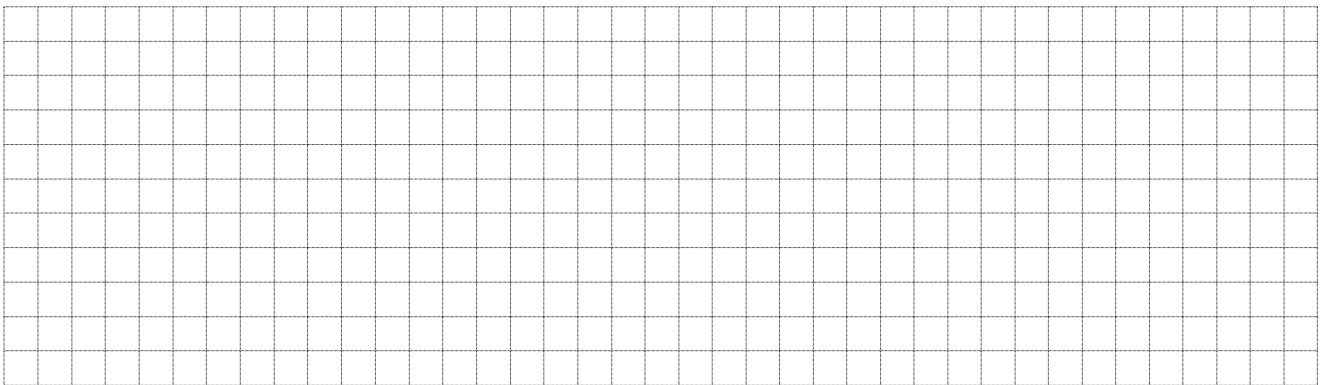
8.6. Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони і дорівнює **$3\sqrt{5}$ см**, а проєкція бічної сторони на більшу основу дорівнює **4 см**. Знайдіть основи трапеції та її бічну сторону.



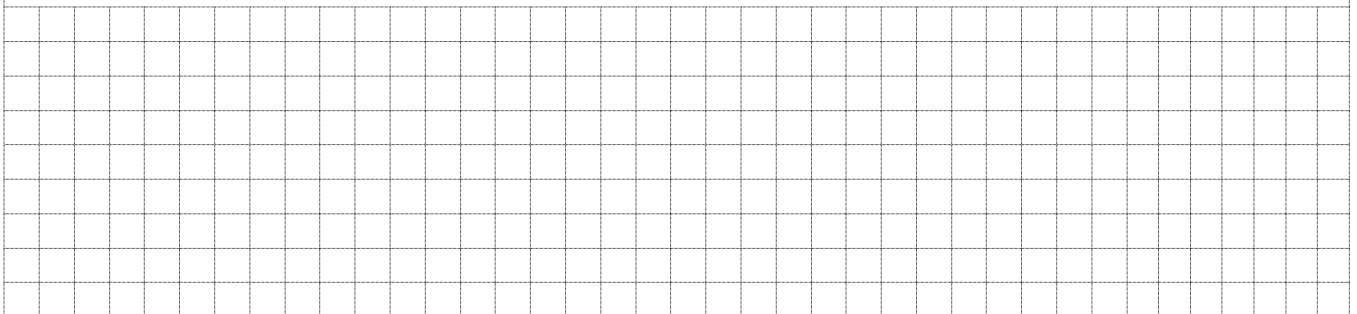
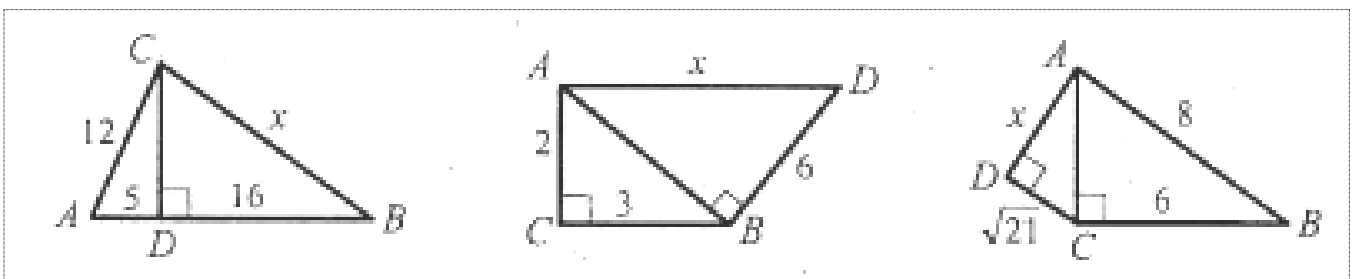
8.7. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба до його сторони, поділяє її на відрізки довжиною **3 см** і **12 см**. Знайдіть діагоналі ромба.



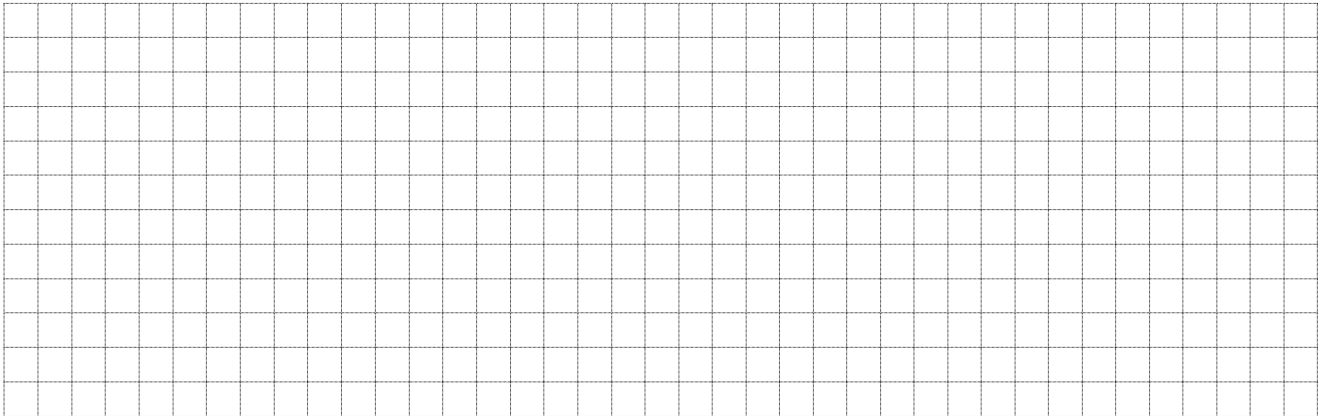
8.8. Сторона ромба дорівнює **13 см**, а одна з його діагоналей – **10 см**. Знайдіть другу діагональ ромба.



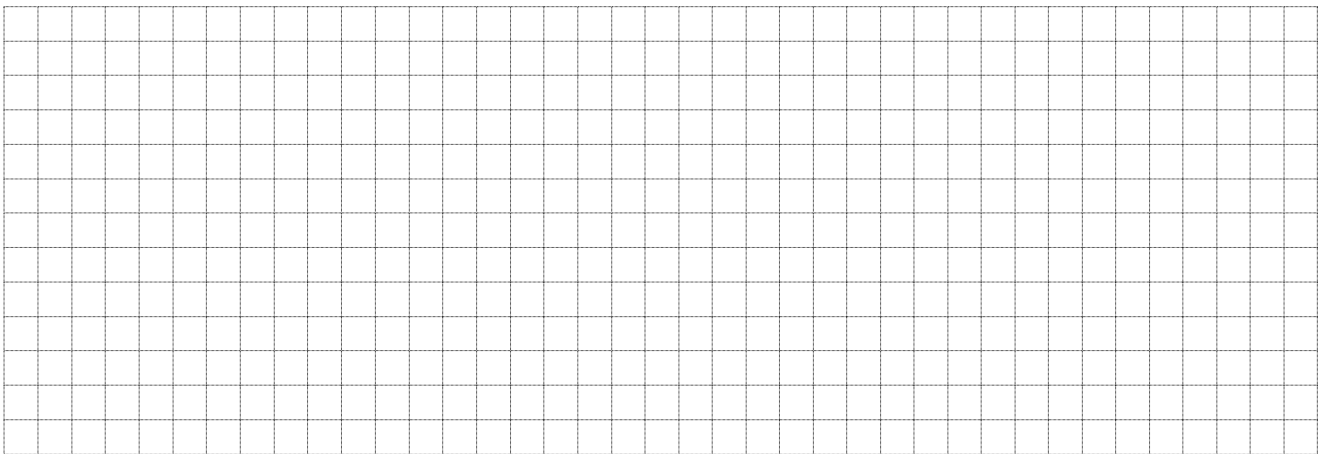
8.9. Знайдіть довжину невідомого відрізка **x** (довжини відрізків дано в сантиметрах).



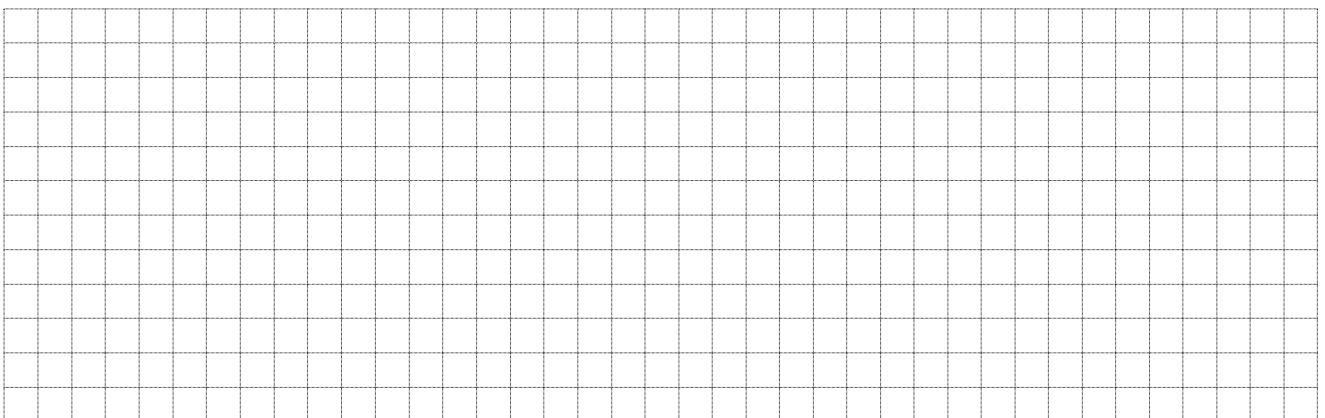
8.10. Різниця між гіпотенузою і катетом прямокутного трикутника дорівнює **2 см**, а довжина другого катета – **6 см**. Знайдіть невідомі сторони трикутника.



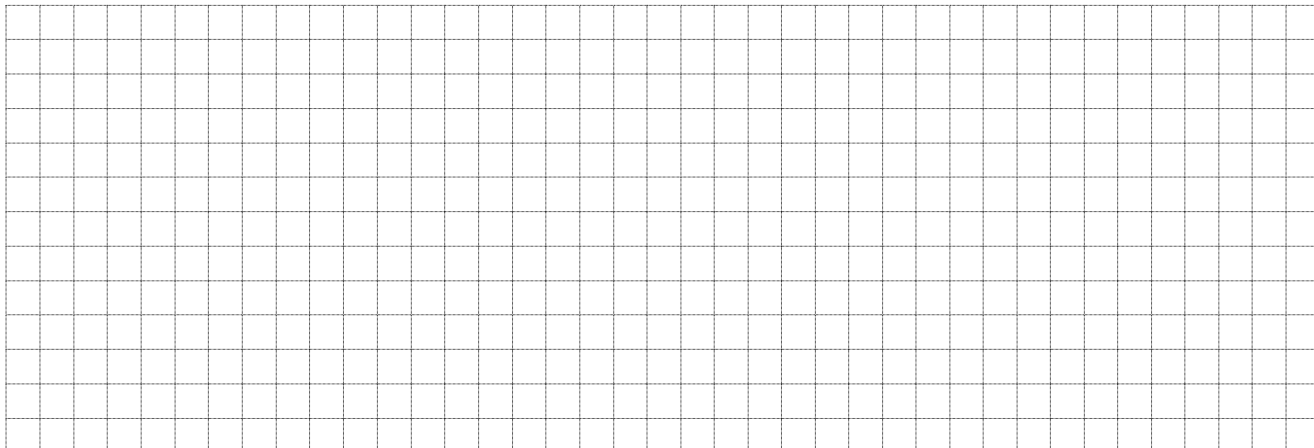
8.11. Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює **13 см**. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр становить **60 см**.



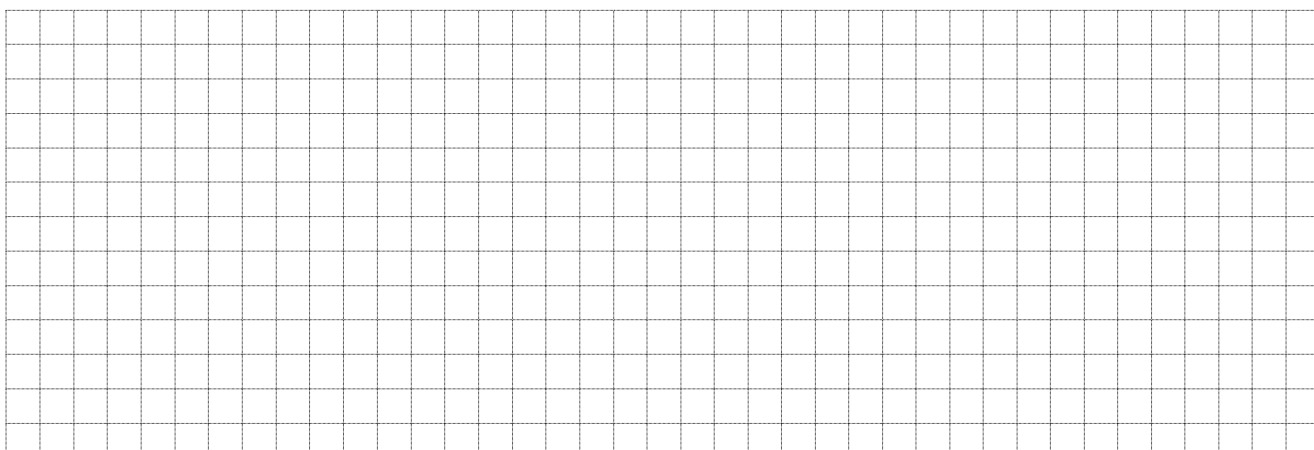
8.12. З точки до прямої проведено дві похилі. Довжина однієї з них дорівнює **25 см**, а довжина її проєкції на цю пряму – **15 см**. Знайдіть довжину другої похилої, якщо вона утворює з прямою кут **30°**.



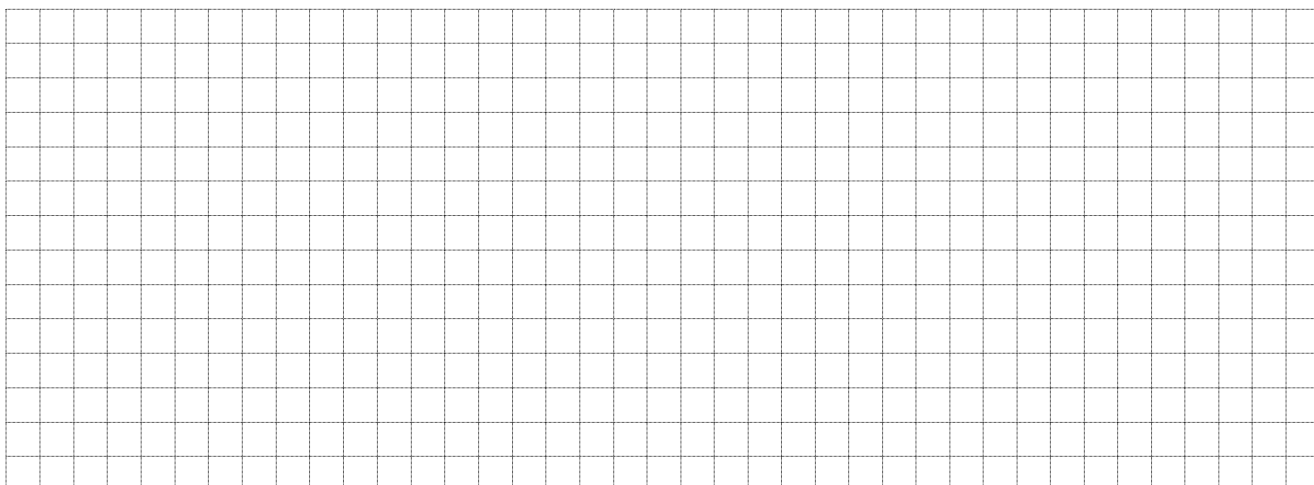
8.13. З точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких дорівнюють **10 см** і **6 см**, а довжини їх проєкцій на цю пряму співвідносяться як **5:2**. Знайдіть відстань від точки до цієї прямої.



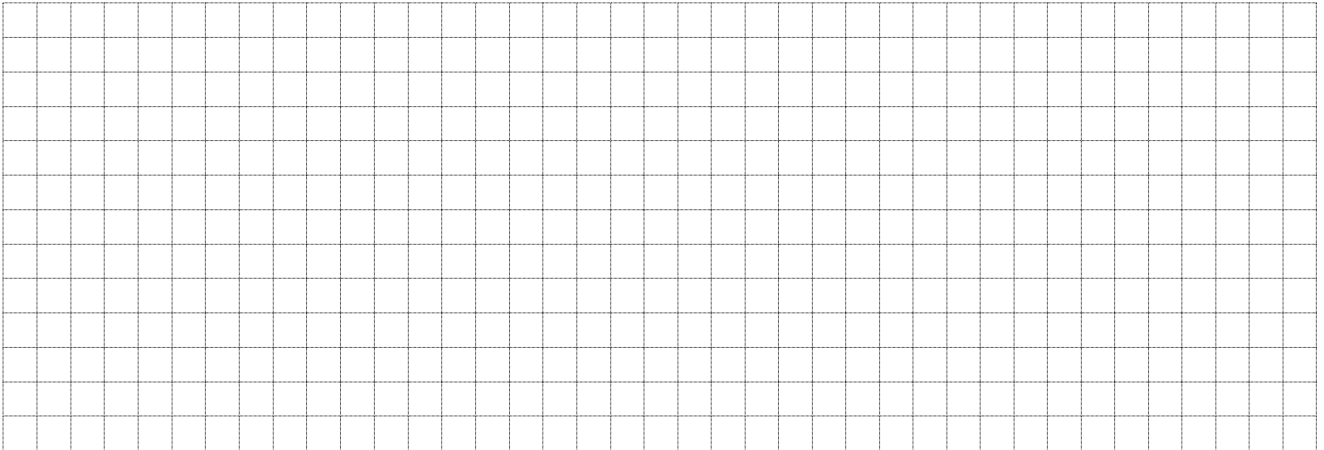
8.14. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює **17 см**, а медіана, проведена до одного з катетів, – **15 см**. Знайдіть катети трикутника.



8.15. Висота рівностороннього трикутника на **4 см** менша від його сторони. Знайдіть сторону трикутника.



8.16. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника поділяє гіпотенузу на відрізки довжиною **15 см** і **20 см**. Знайдіть катети трикутника.



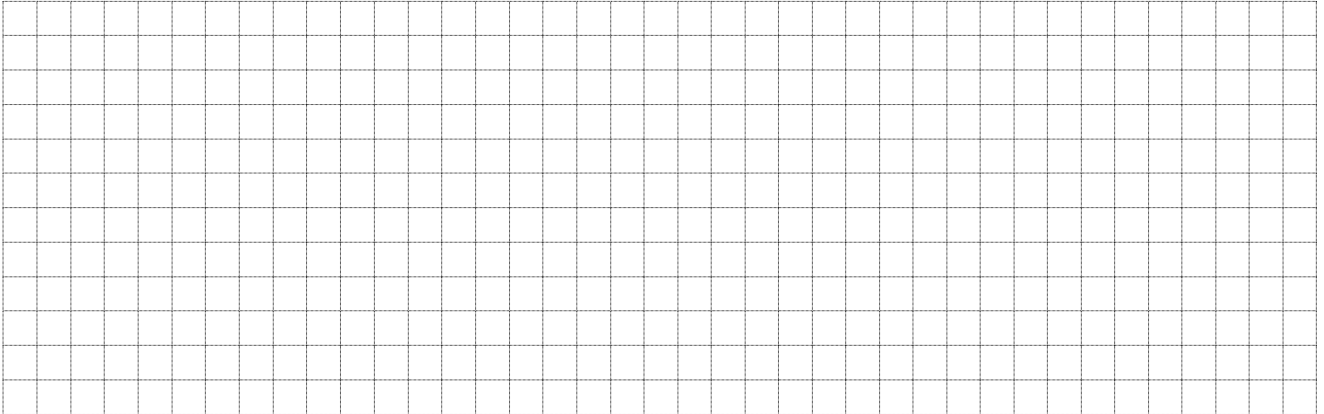
8.17. Знайдіть бічну сторону рівнобедреного трикутника, якщо його основа дорівнює **24 см**, а медіана, проведена до бічної сторони, – **30 см**.



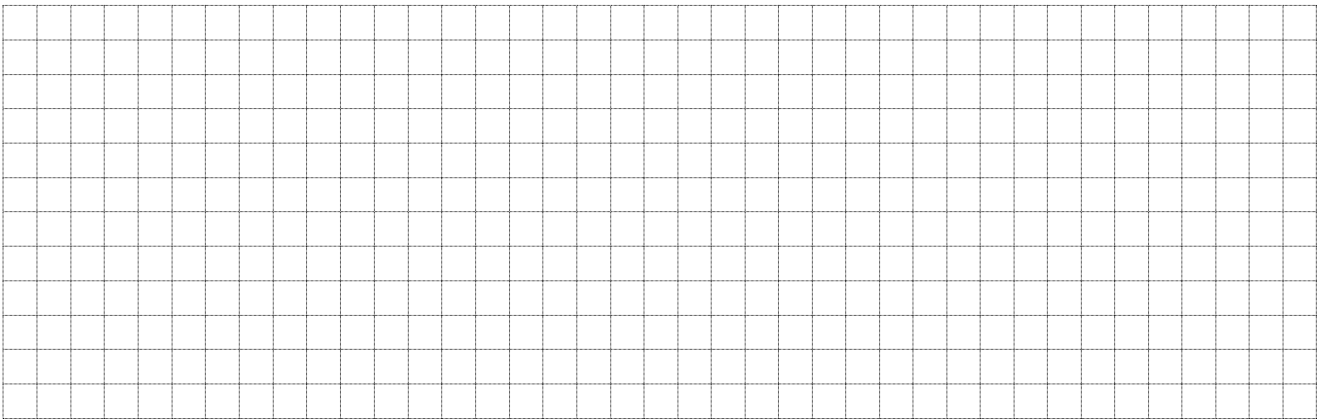
8.18. У рівнобічній трапеції діагональ дорівнює **17 см**, а висота трапеції – **8 см**. Знайдіть середню лінію трапеції.



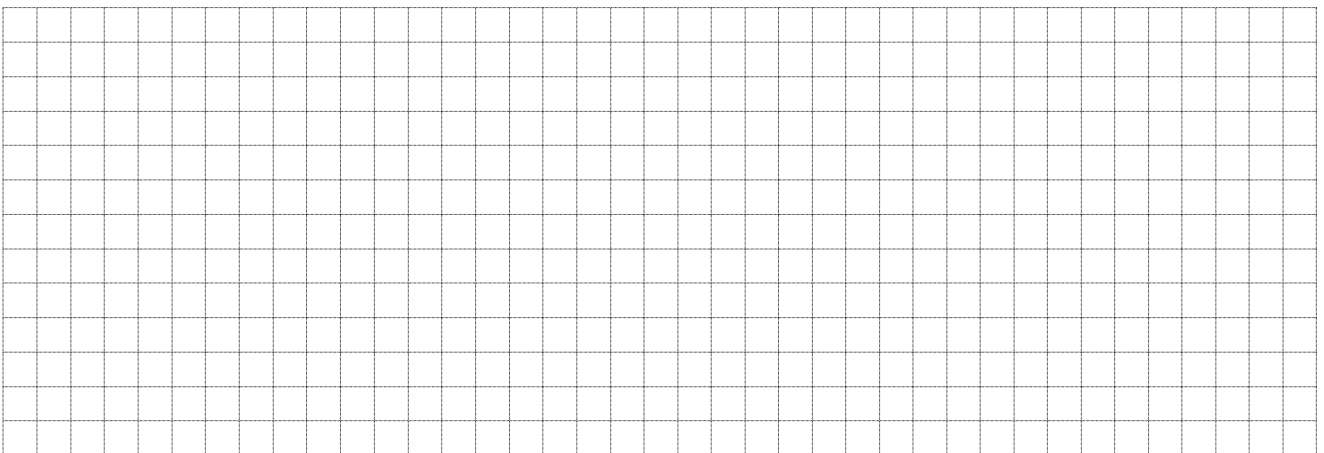
8.19. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює **6 см**, а бічна сторона – **5 см**. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута при основі трикутника.



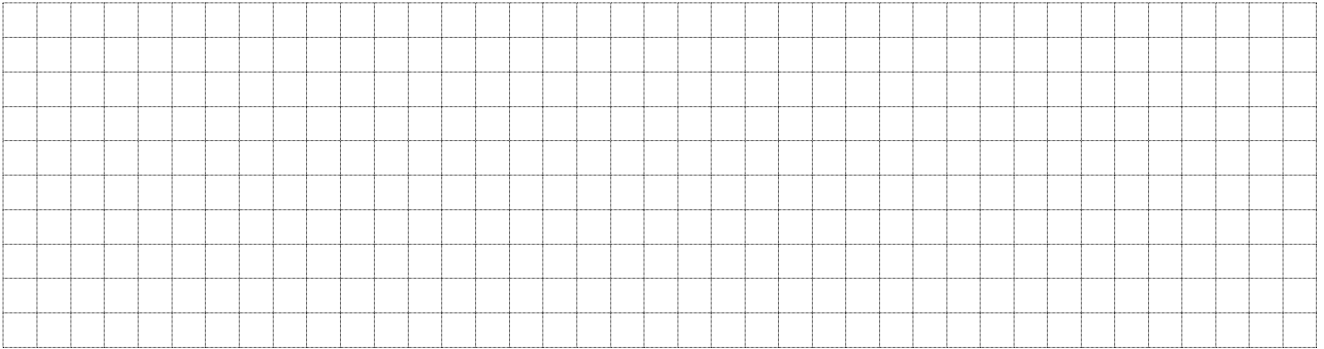
8.20. Побудуйте кут: 1) косинус якого дорівнює $\frac{1}{3}$; 2) тангенс якого дорівнює $\frac{4}{7}$; 3) синус якого дорівнює $0,3$.



8.21. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють **3 см** і **8 см**. Знайдіть: 1) тангенс гострого кута, який лежить проти меншого катета; 2) синус гострого кута, який прилягає до більшого катета; 3) косинус гострого кута, який лежить проти більшого катета.

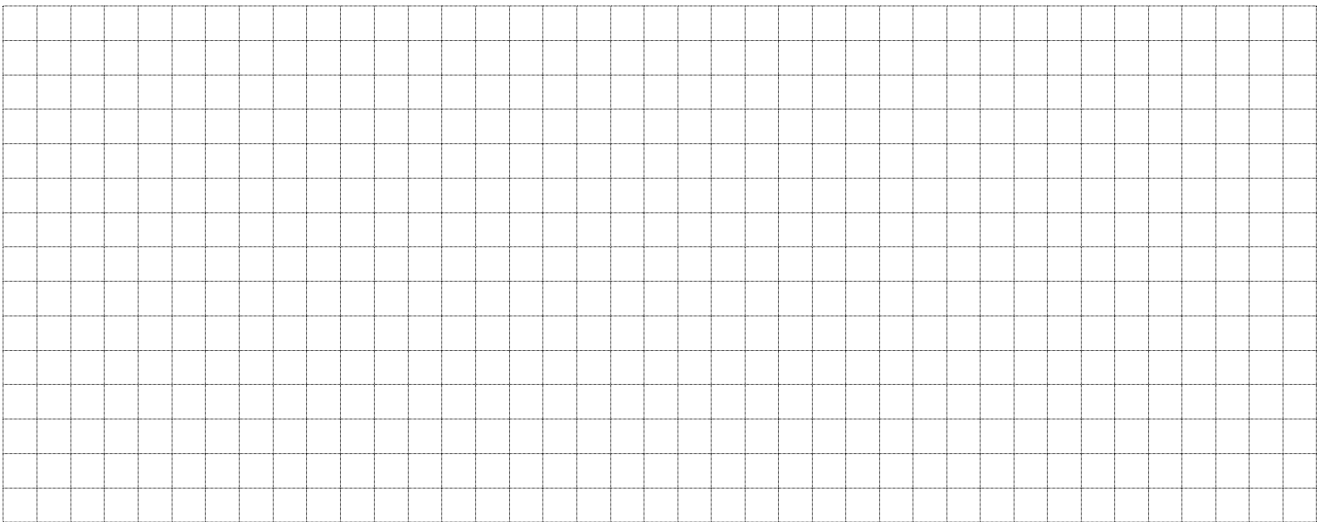


8.22. У рівнобічній трапеції $ABCD$ $AB = CD = 4$ см, $BC = 6$ см і $AD = 10$ см. Знайдіть кути трапеції.

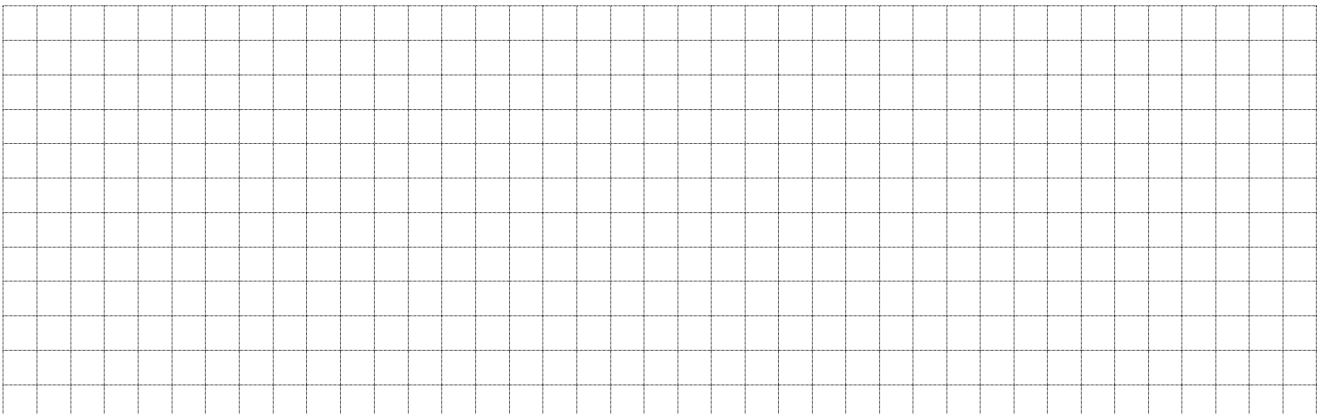


8.23. Розв'яжіть прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$) за відомими елементами:

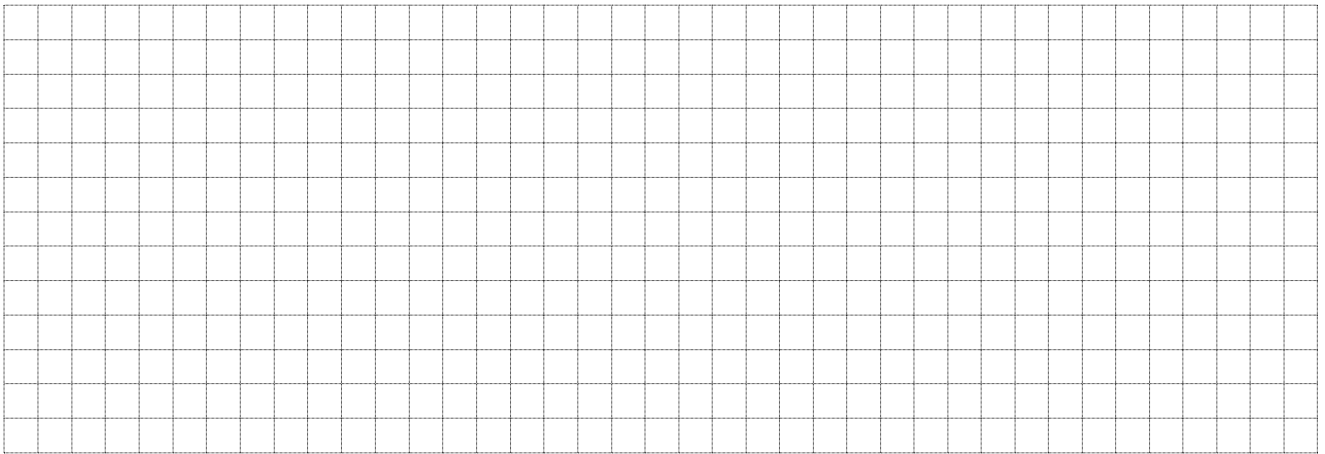
- 1) $AB = 10$ см, $\angle A = 47^\circ$; 2) $AC = 9$ см, $\angle A = 43^\circ$; 3) $BC = 7$ см, $\angle A = 37^\circ$;
4) $AB = 8$ см, $AC = 5$ см; 5) $BC = 5$ см, $AC = 8$ см.



8.24. У рівнобедреному трикутнику ABC $AB = BC = 6$ см, $\angle A = 58^\circ$. Знайдіть сторону AC і висоту BD трикутника.

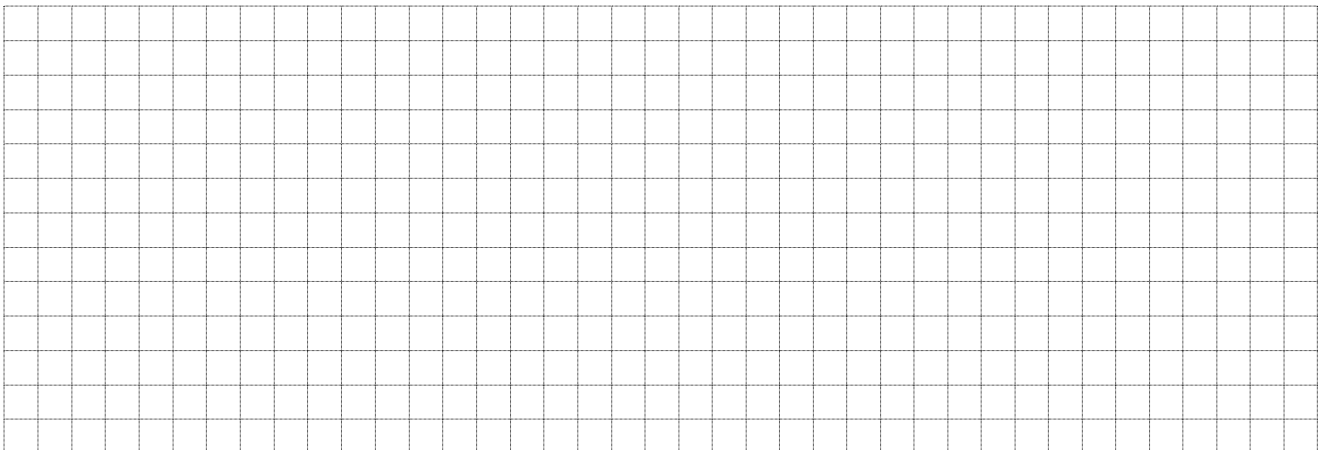


8.25. З точки, що знаходиться на відстані **12 см** від прямої, проведено до неї дві похилі, які утворюють з прямою кути **45°** і **60°**. Знайдіть довжини похилих і їх проєкцій на пряму.

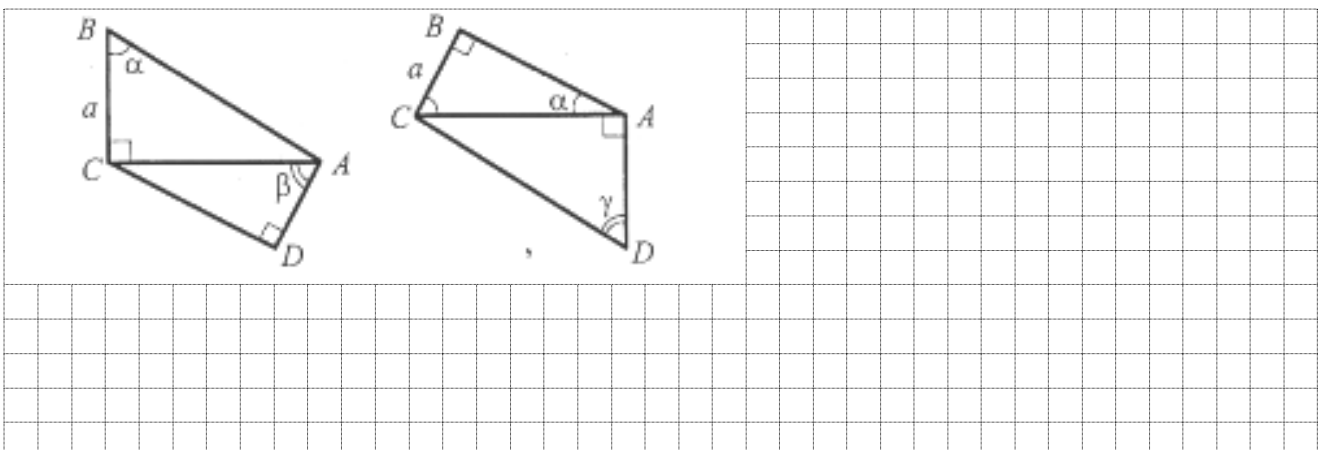


8.26. Знайдіть невідомі сторони прямокутного трикутника **ABC** ($\angle C = 90^\circ$), якщо:

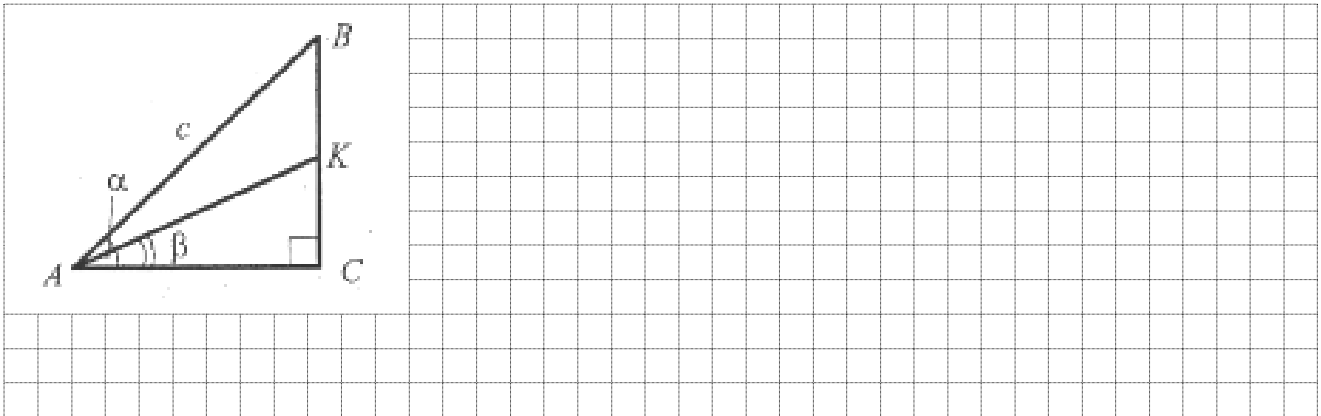
- 1) $AB = c, \angle A = \alpha$; 2) $AC = b, \angle B = \beta$; 3) $BC = a, \angle B = \beta$.



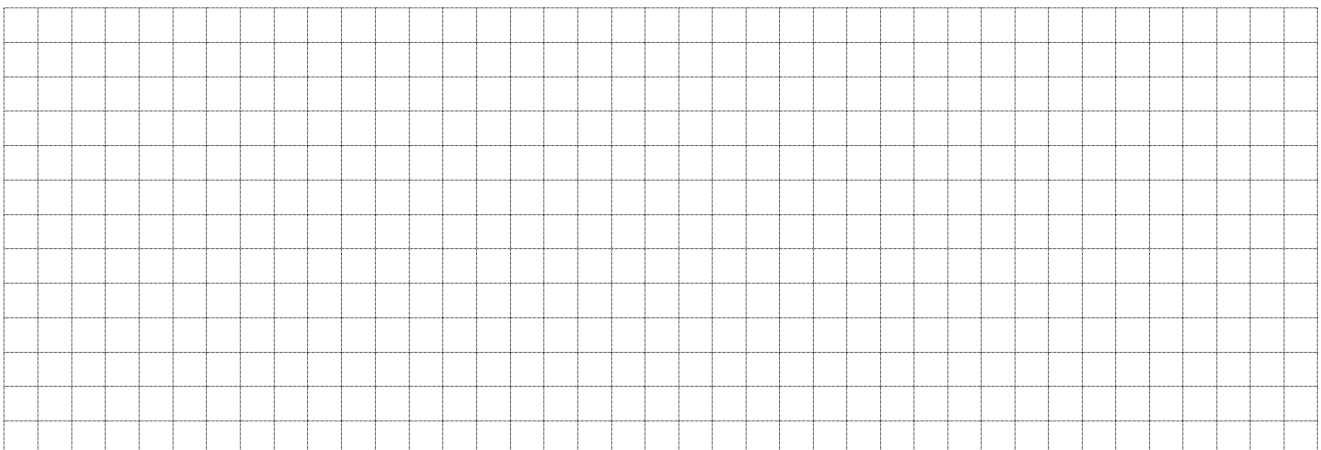
8.27. За рисунком знайдіть відрізки **AD** і **CD**.



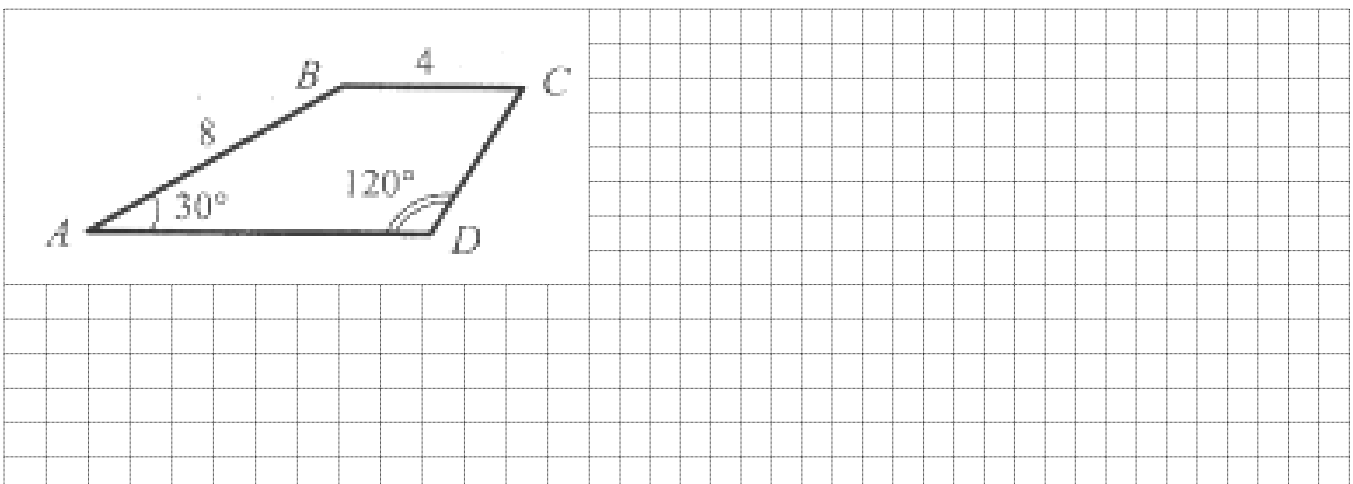
8.28. У прямокутному трикутнику ABC $AB = c$, $\angle BAA = \alpha$, $\angle KAC = \beta$. Знайдіть відрізок BK .



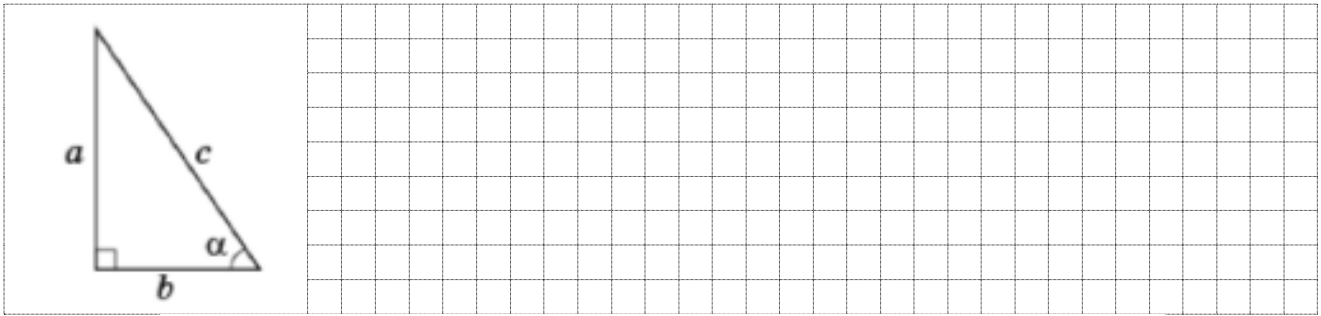
8.29. У рівнобічній трапеції $ABCD$ основа $BC = 4$ см, висота $CE = 2\sqrt{3}$ см, а бічна сторона утворює з основою AD кут 60° . Знайдіть основу AD трапеції.



8.30. У трапеції $ABCD$ $AB = 4$ см, $\angle A = 30^\circ$, $\angle D = 120^\circ$. Знайдіть основу AD трапеції.

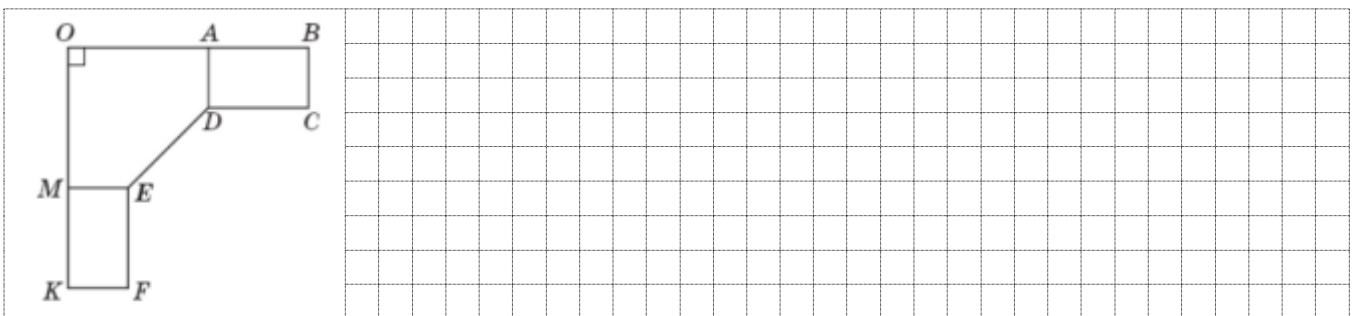


8.34. На рисунку зображено прямокутний трикутник з катетами a і b , гіпотенузою c і гострим кутом α . Укажіть правильну рівність.



| А | Б | В | Г | Д |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| $\cos \alpha = \frac{a}{b}$ | $\cos \alpha = \frac{c}{b}$ | $\cos \alpha = \frac{a}{c}$ | $\cos \alpha = \frac{c}{a}$ | $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ |

8.35. На креслені шафи (вид зверху) зображено рівні прямокутники $ABCD$ і $KMEF$ та п'ятикутник $EMOAD$ (див. рисунок). Визначте довжину відрізка ED , якщо $OK = OB = 1,2$ м, $KM = AB = 0,5$ м, $KF = 0,3$ м. Укажіть відповідь, найближчу до точної.



| А | Б | В | Г | Д |
|-------|--------|--------|-------|-------|
| 0,5 м | 0,55 м | 0,65 м | 0,6 м | 0,7 м |

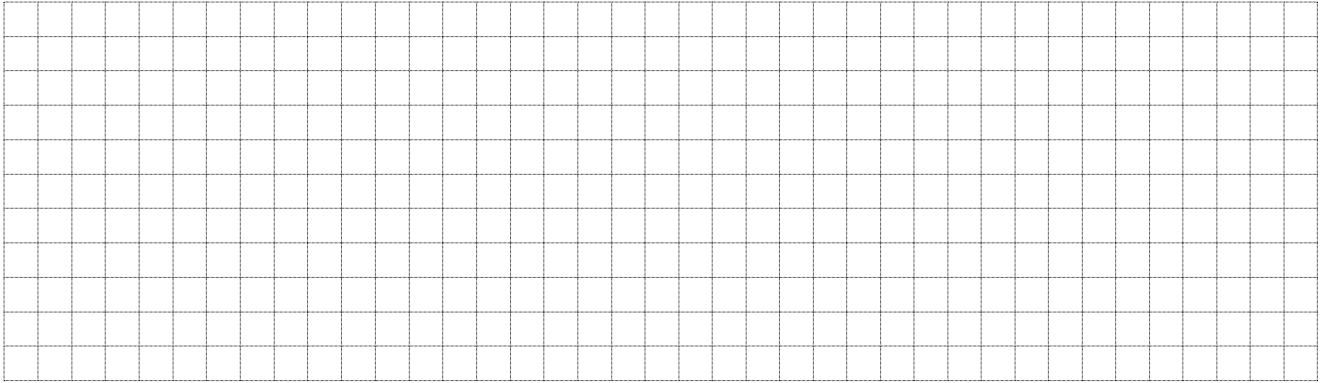
8.36. Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо радіус кола, описаного навколо нього, дорівнює 5 см, а один із катетів – 6 см.



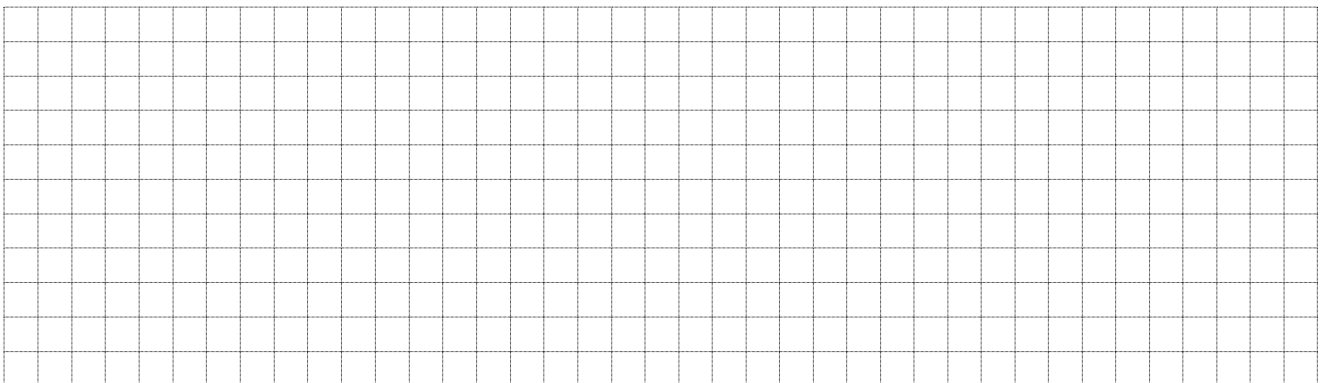
| А | Б | В | Г | Д |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 15 см^2 | 24 см^2 | 30 см^2 | 48 см^2 | 60 см^2 |

Заняття 9
**МНОГОКУТНИКИ. ПЛОЩА ПРЯМОКУТНИКА,
ПАРАЛЕЛОГРАМА, ТРИКУТНИКА І ТРАПЕЦІЇ**

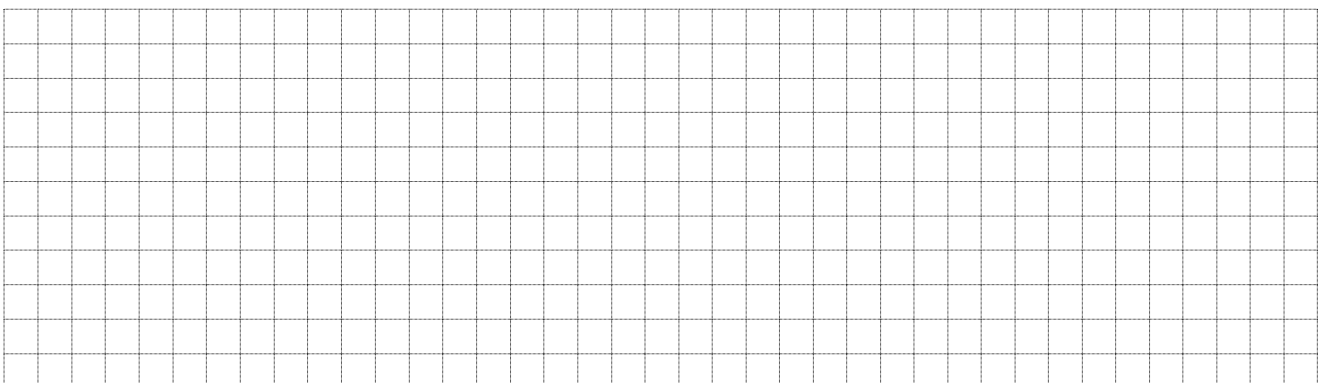
9.1. Як зміниться сума кутів опуклого багатокутника, якщо кількість його сторін збільшиться на три? Чи може один з кутів опуклого п'ятикутника бути більшим за суму чотирьох інших?



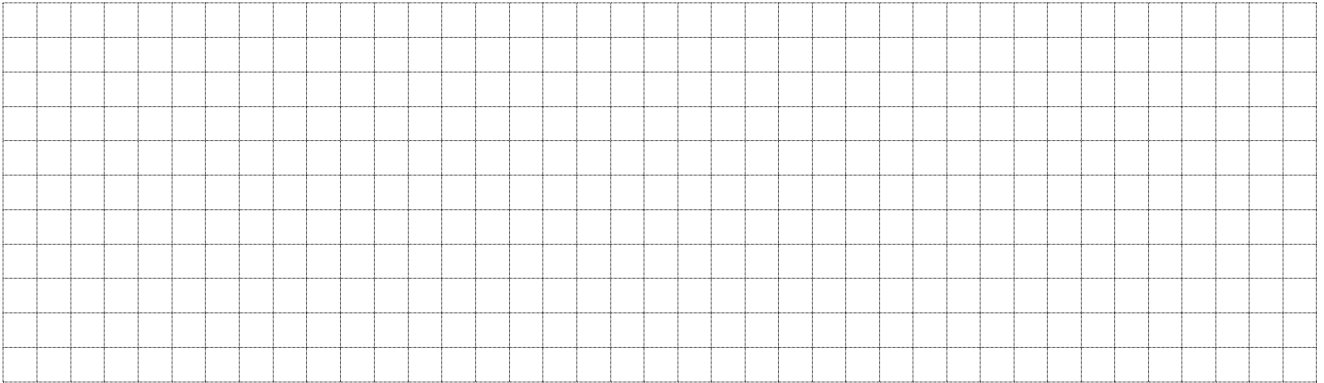
9.2. Один з кутів опуклого чотирикутника дорівнює 60° , другий і третій співвідносяться як **7:3**, а четвертий дорівнює півсумі другого і третього. Знайдіть невідомі кути чотирикутника.



9.3. В опуклому багатокутнику сума кутів дорівнює 1620° . Знайдіть кількість його сторін і діагоналей.



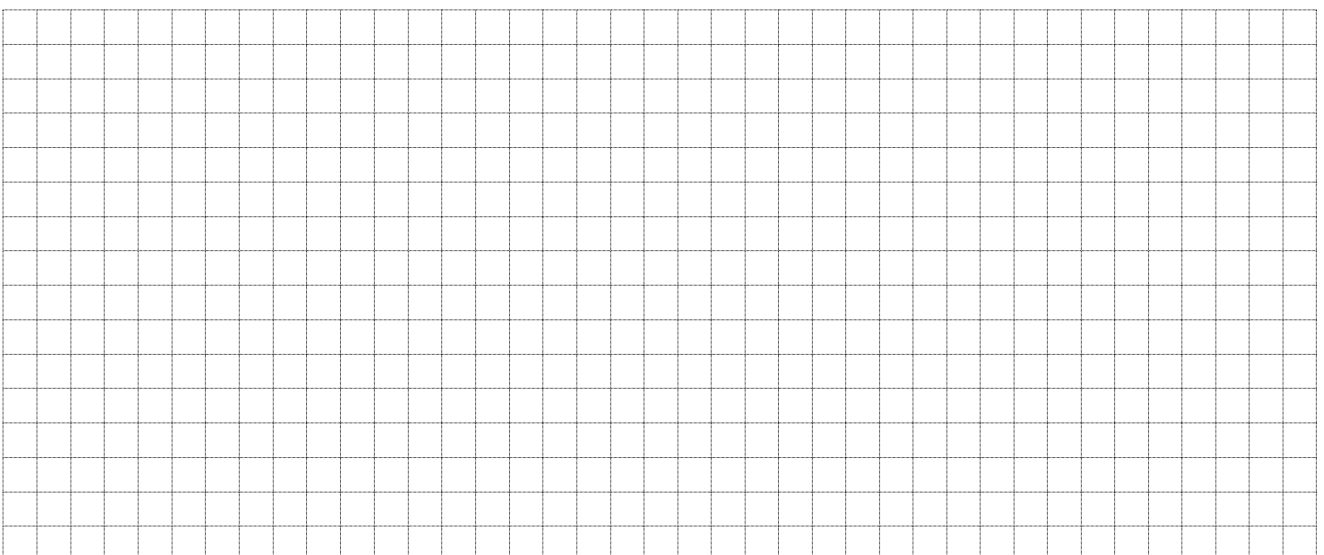
9.7. Знайдіть сторони прямокутника, якщо вони співвідносяться як **4:7**, а площа прямокутника дорівнює **112 см²**.



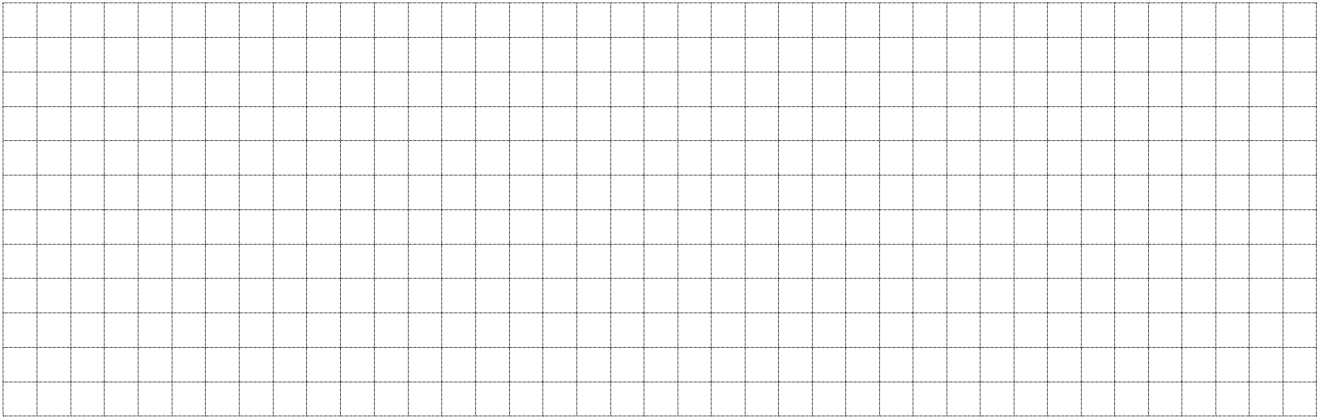
9.8. Квадрат і прямокутник рівновеликі. Сторона квадрата дорівнює **8 см**, а одна із сторін прямокутника – **16 см**. Знайдіть другу сторону прямокутника.



9.9. Як зміниться площа прямокутника, якщо: 1) одну з його сторін збільшити в **3** рази; 2) одну з його сторін зменшити в **5** разів; 3) обидві сторони збільшити в **7** разів; 4) одну сторону збільшити в **4** рази, а другу – в **6** разів; 5) одну сторону збільшити в **8** разів, а другу зменшити в **2** рази?



9.10. Площа паралелограма дорівнює 48 см^2 . Знайдіть відстань між сторонами паралелограма, довжини яких 6 см .



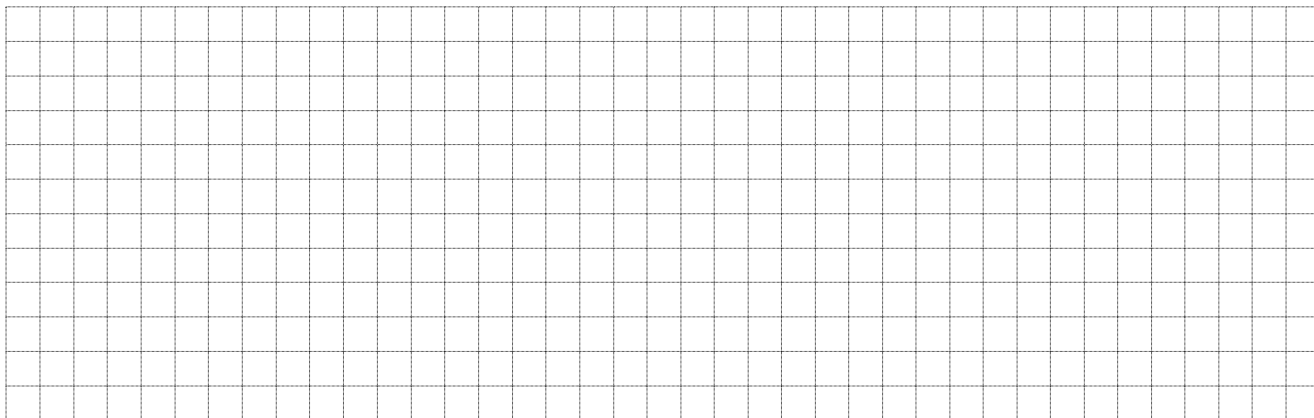
9.11. Одна із сторін паралелограма дорівнює 4 см , а висота, проведена до другої сторони, – 8 см . Знайдіть невідомі сторони і висоту паралелограма, якщо його площа дорівнює 96 см^2 .



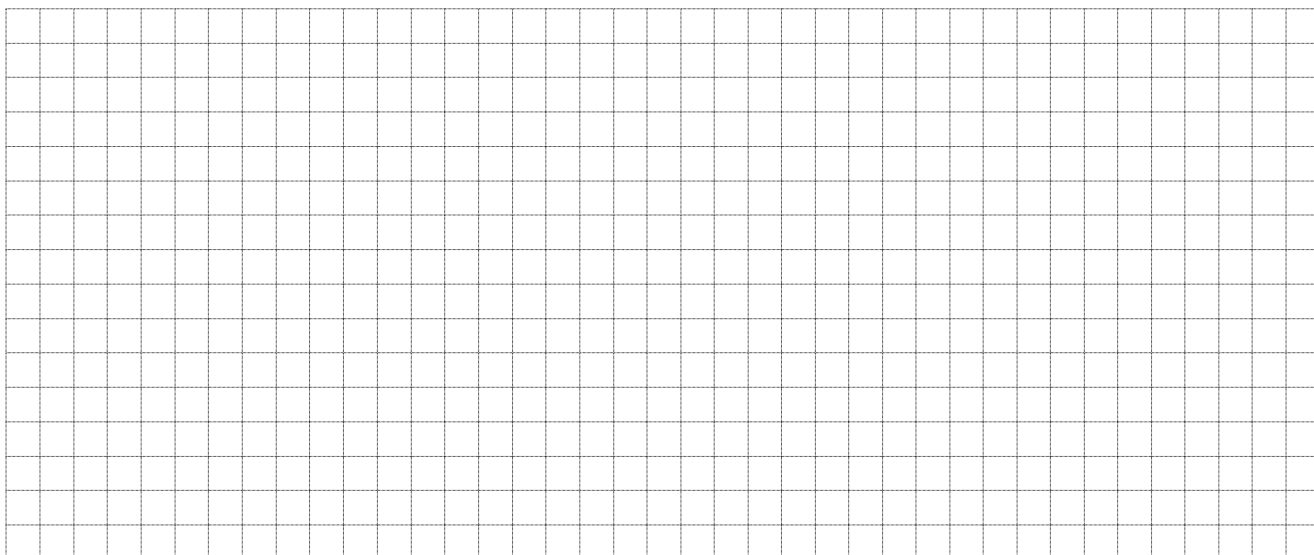
9.12. Знайдіть площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 9 см і 15 см , а одна з діагоналей перпендикулярна до його сторони.



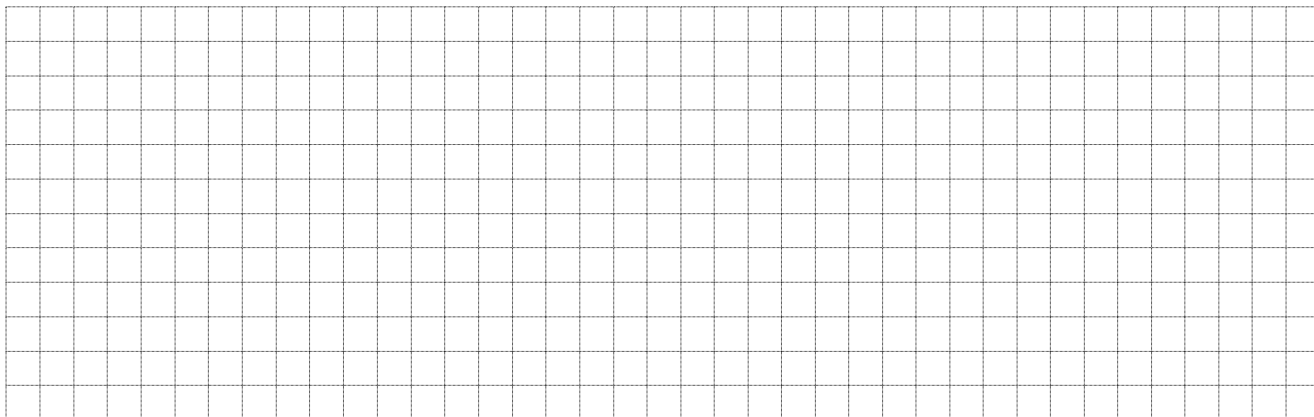
9.13. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює **6 см**, а бічна сторона – **5 см**.



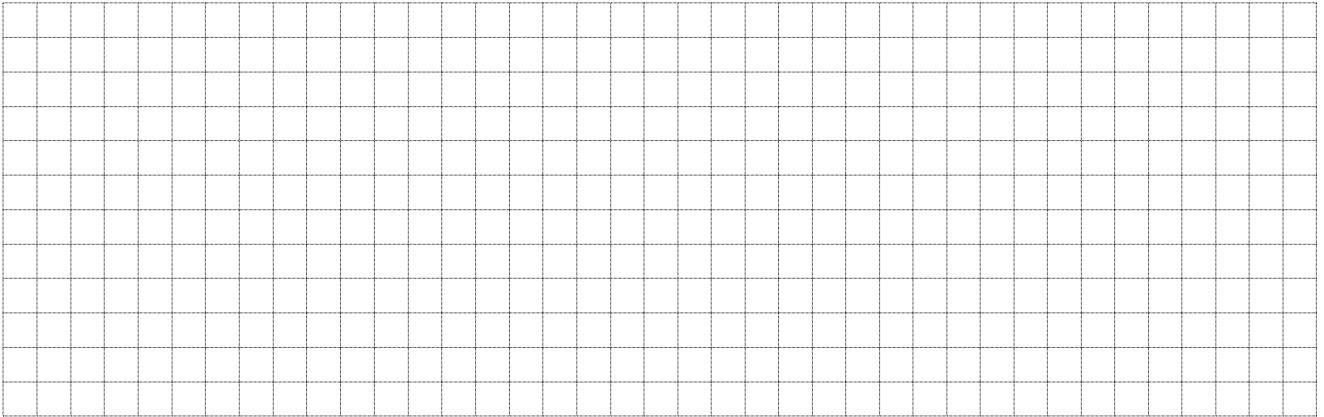
9.14. Доведіть, що: 1) більшій стороні трикутника відповідає менша висота; 2) медіана трикутника розбиває його на два рівновеликих трикутники.



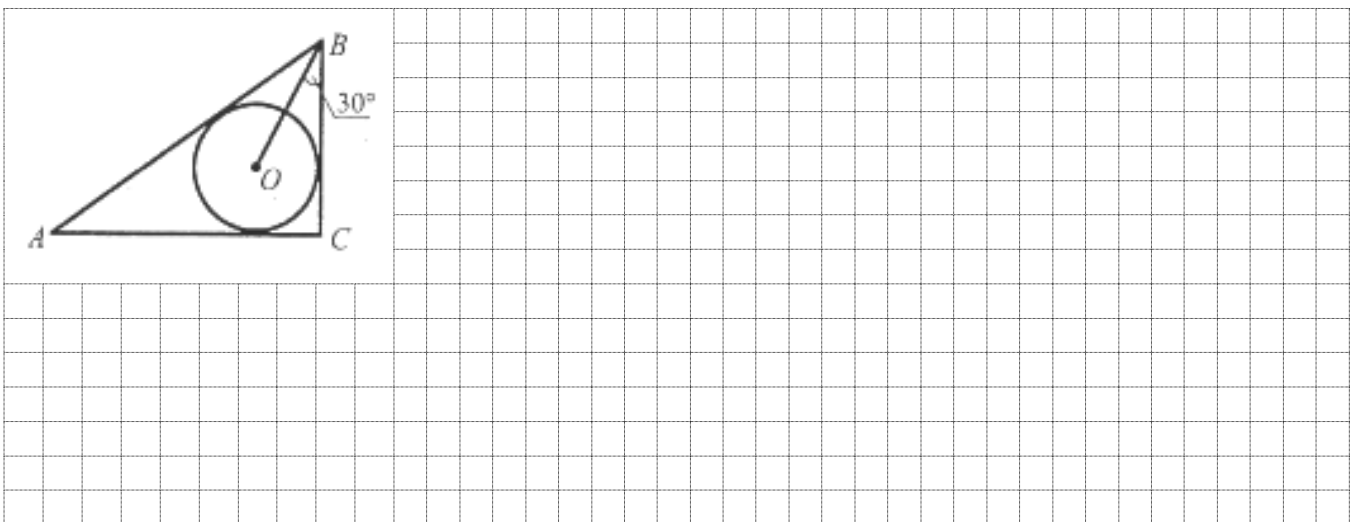
9.15. Знайдіть площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює **26 см**, а різниця катетів – **14 см**.



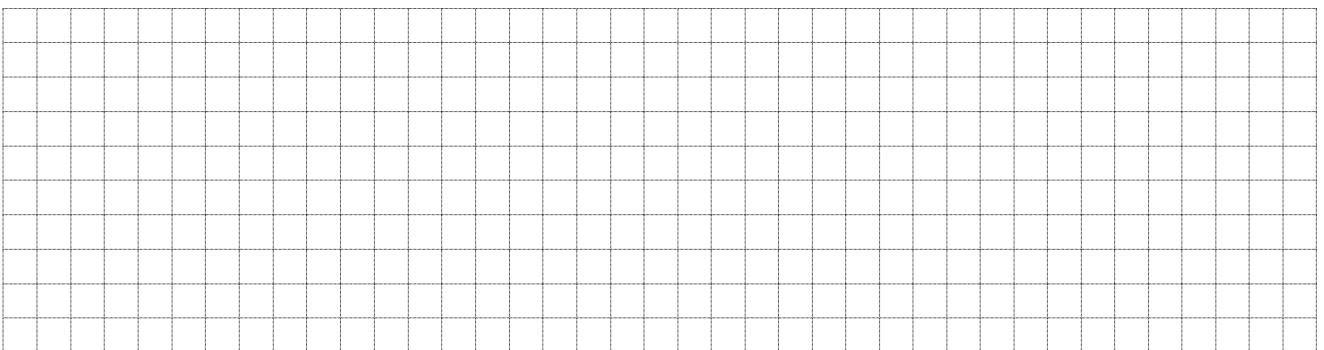
9.16. Знайдіть площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює **26 см**, а радіус вписаного кола – **4 см**.



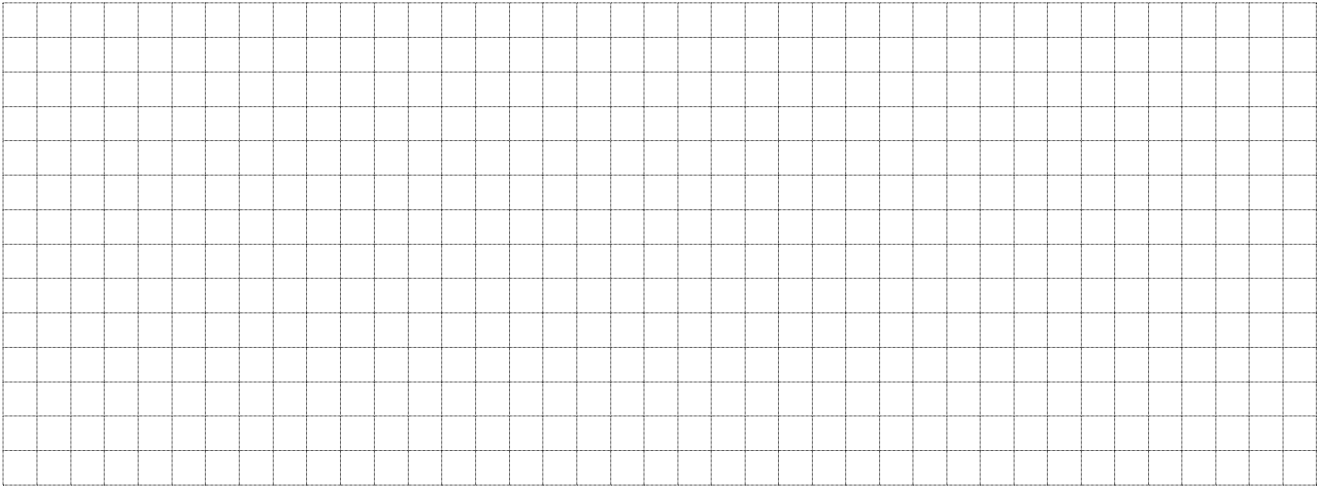
9.17. У прямокутний трикутник **ABC** $\angle C = 90^\circ$ вписано коло з центром **O** і радіусом $\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу трикутника, якщо $\angle OBC = 30^\circ$.



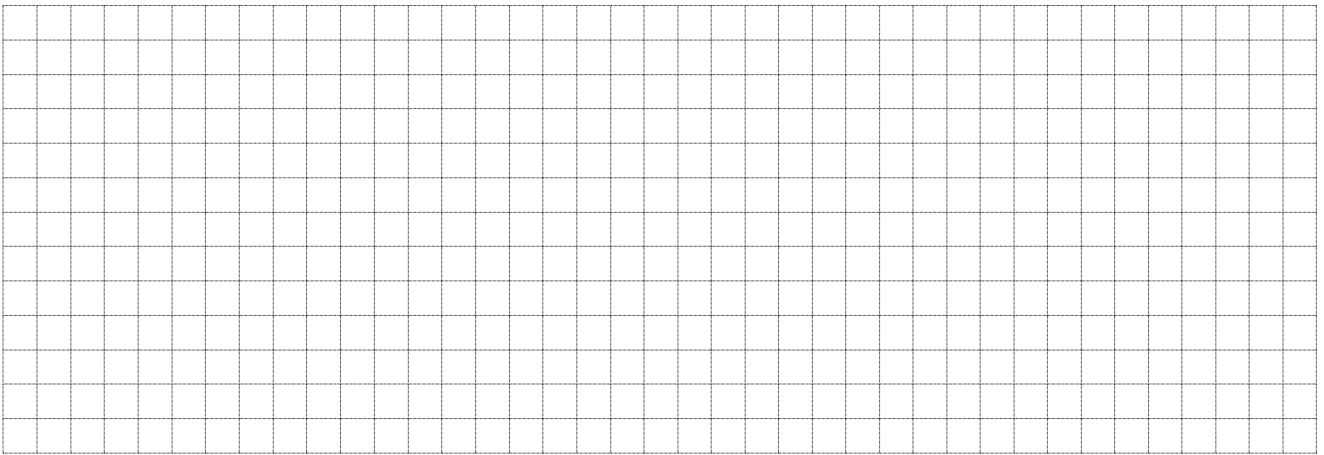
9.18. У трикутнику **ABC** $AB = 14$ см, $BC = 8$ см, відрізок **BK** – бісектриса трикутника. Знайдіть співвідношення площ трикутників **ABK** і **CBK**.



9.19. Знайдіть площу ромба, якщо його сторона дорівнює **15 см**, а сума діагоналей – **42 см**.



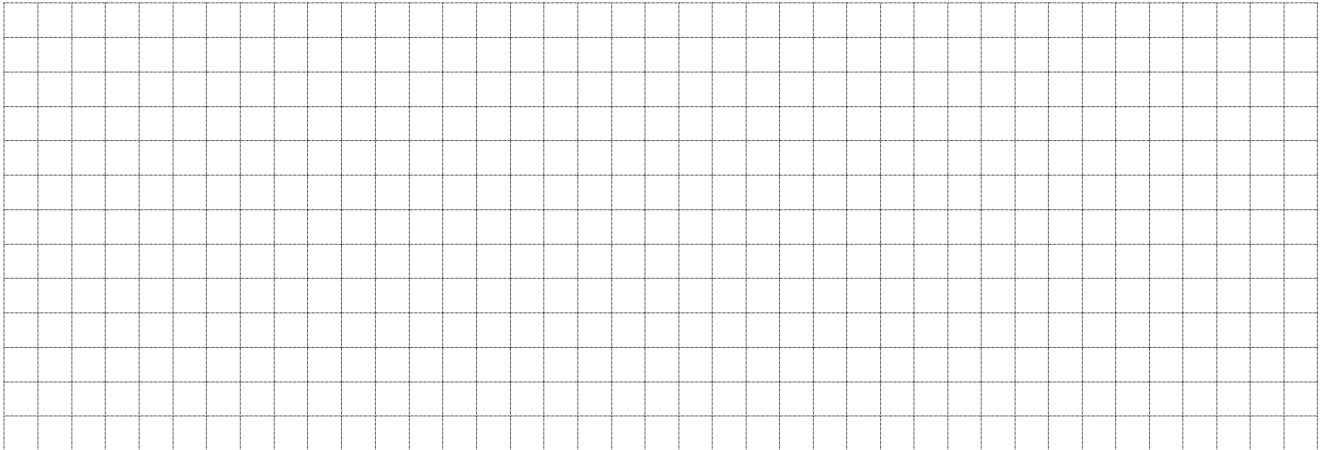
9.20. Знайдіть площу ромба, діагоналі якого дорівнюють **8 см** і **5 см**.



9.21. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба до його сторін, поділяє її на відрізки довжиною **4 см** і **9 см**. Знайдіть площу ромба.



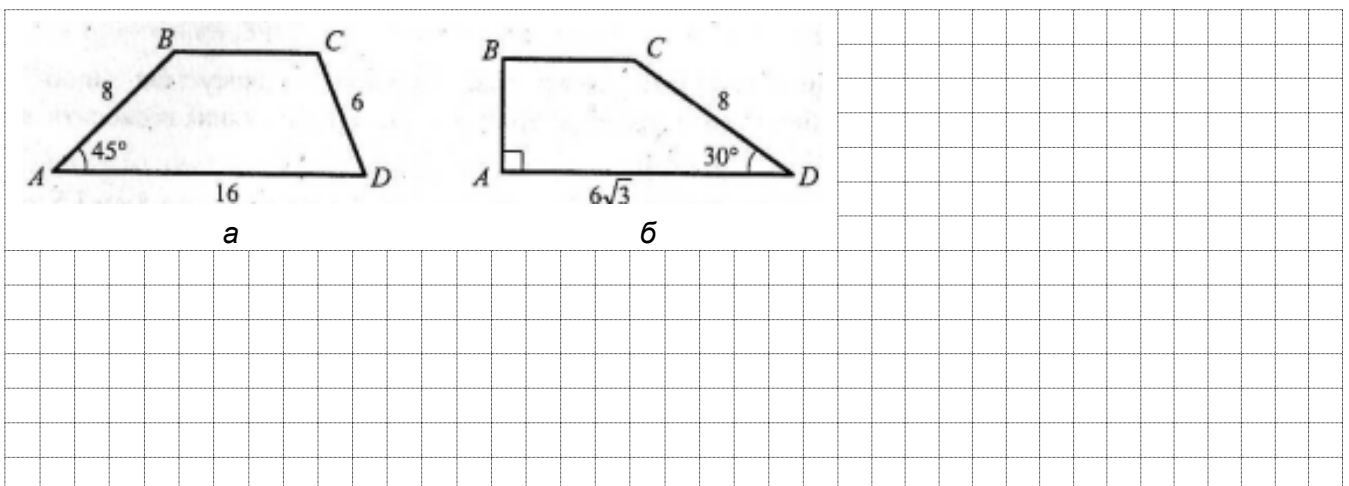
9.22. Площа трапеції дорівнює 24 см^2 , а її висота – 4 см . Знайдіть основи трапеції, якщо вони співвідносяться як $1:5$.



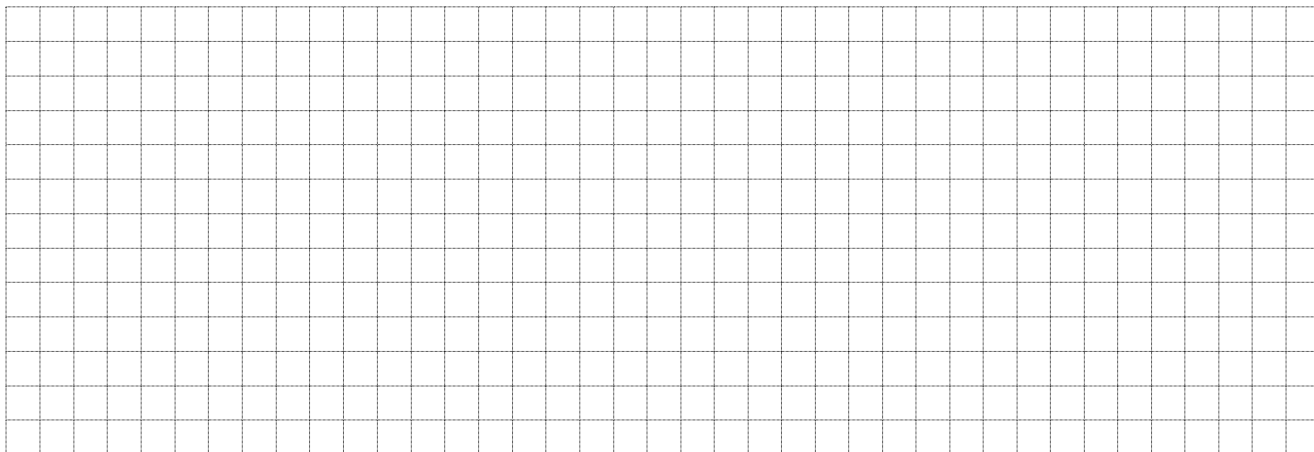
9.23. Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють 6 см і 12 см , а бічна сторона довжиною 8 см утворює з меншою основою кут 120° .



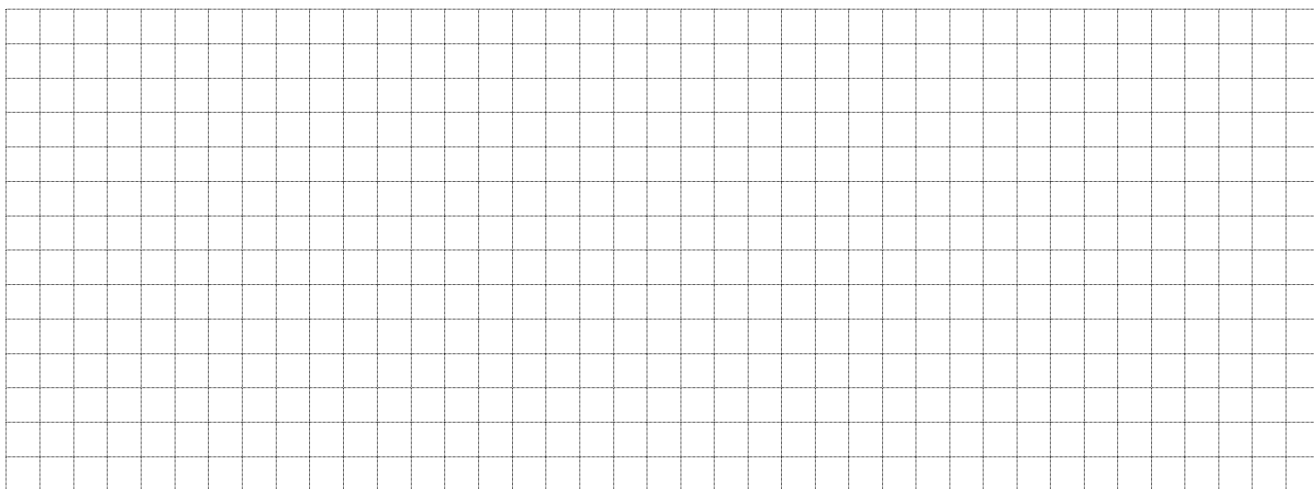
9.24. Знайдіть площу трапеції $ABCD$, зображеної на рисунку (довжини відрізків дано в сантиметрах).



9.25. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють **9 см** і **27 см**, а діагональ – **45 см**. Знайдіть площу трапеції.



9.26. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, більша основа якої дорівнює **9 см**, бічна сторона — **8 см**, а тупий кут – **135°**.



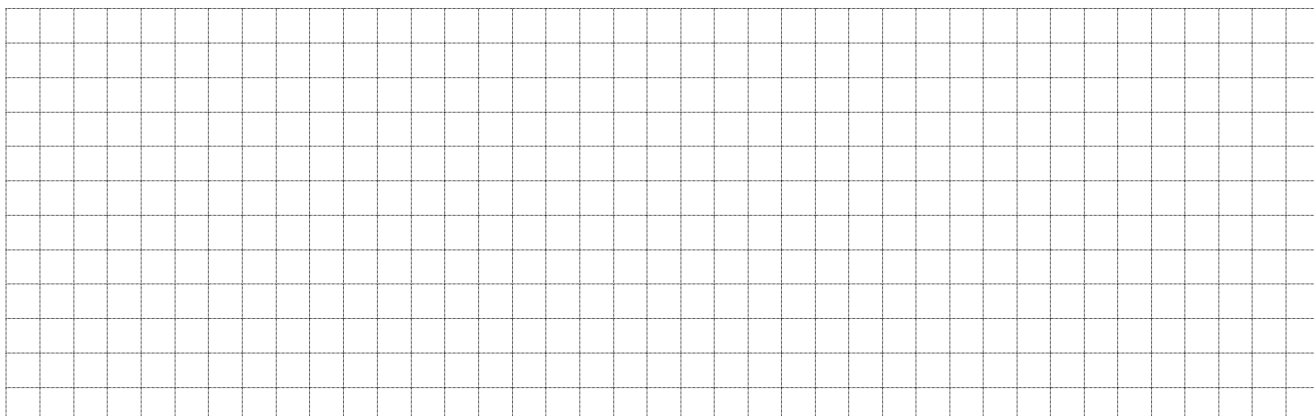
9.27. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, діагоналі якої перпендикулярні, а основи дорівнюють **14 см** і **18 см**.



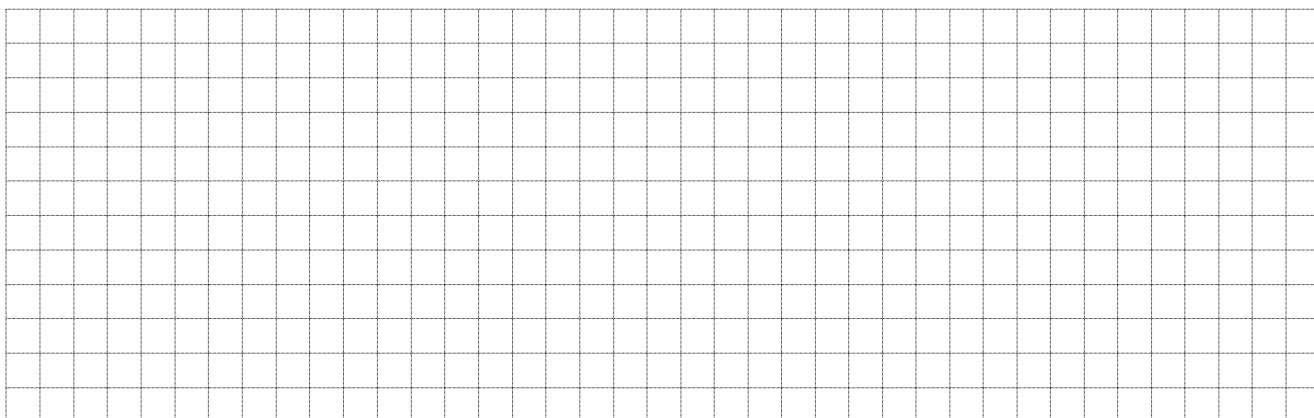
9.28. Знайдіть площу прямокутної трапеції, більша основа якої дорівнює **14 см**, більша бічна сторона – **12 см**, а гострий кут — **60°**.



9.29. Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють **6 см** і **8 см**, а кути при більшій основі – **30°** і **45°**.

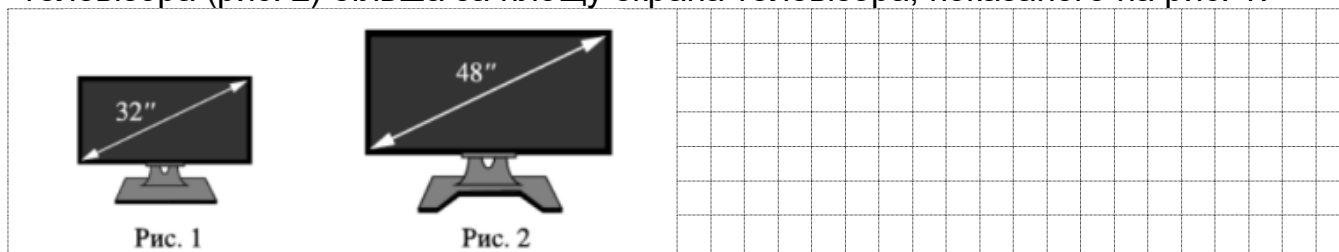


9.30. Бічні сторони трапеції дорівнюють **20 см** і **13 см**, а різниця основ – **21 см**. Знайдіть площу трапеції, якщо відомо, що в неї можна вписати коло.



**Додаткові вправи,
які було запропоновано під час проведення ЗНО**

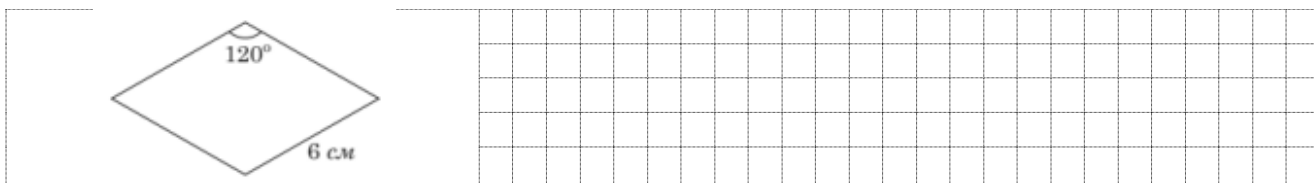
9.31. Екрани телевізорів (рис. 1, 2) мають форму прямокутників, відповідні сторони яких пропорційні. Діагоналі екранів цих телевізорів дорівнюють відповідно **32 дюйми** і **48 дюймів**. Визначте, у скільки разів площа екрана телевізора (рис. 2) більша за площу екрана телевізора, показаного на рис. 1.



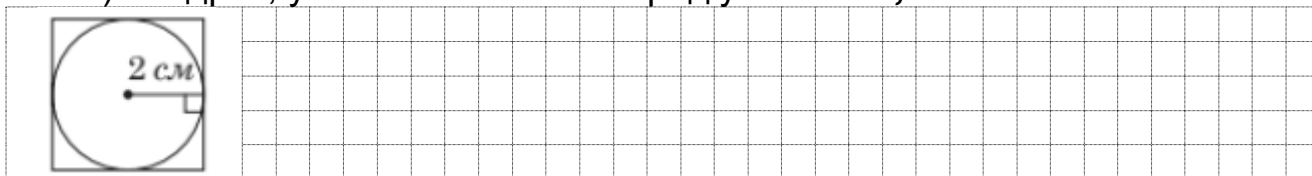
| А | Б | В | Г | Д |
|------------|-------------|-------------|----------|------------|
| у 1,5 раза | у 2,25 раза | у 2,56 раза | у 4 раза | у 16 разів |

9.32. Установіть відповідність між геометричною фігурою (1 - 4) та її площею (А - Д):

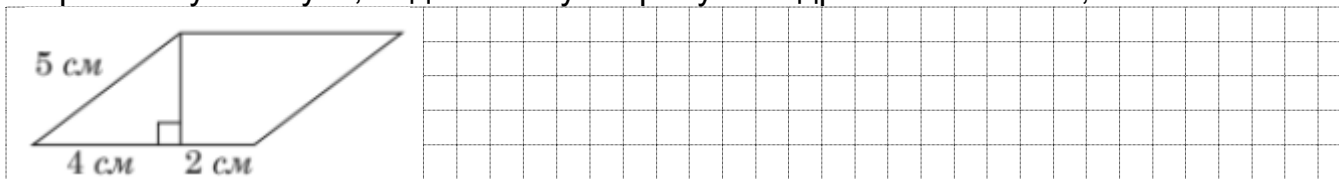
1) ромб зі стороною **6 см** і тупим кутом **120°**;



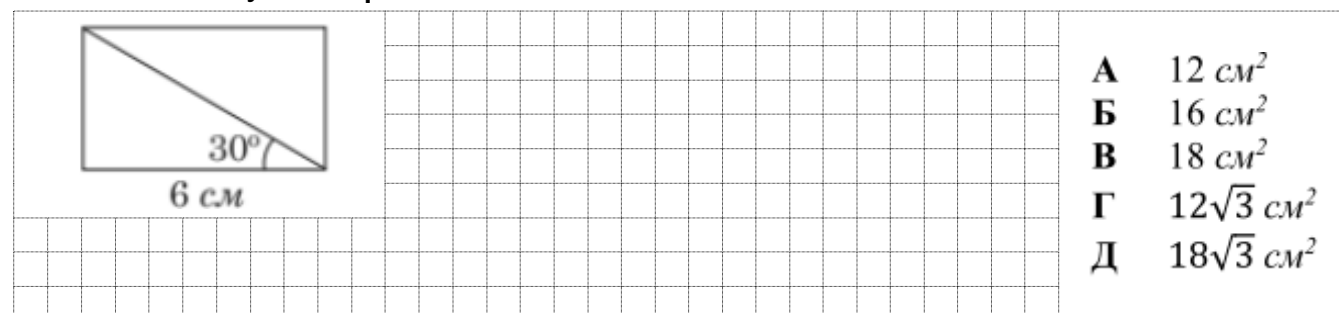
2) квадрат, у який вписано коло радіусом **2 см**;



3) паралелограм, одна сторона якого дорівнює **5 см**, а висота, проведена з вершини тупого кута, поділяє іншу сторону на відрізки **4 см** і **2 см**;



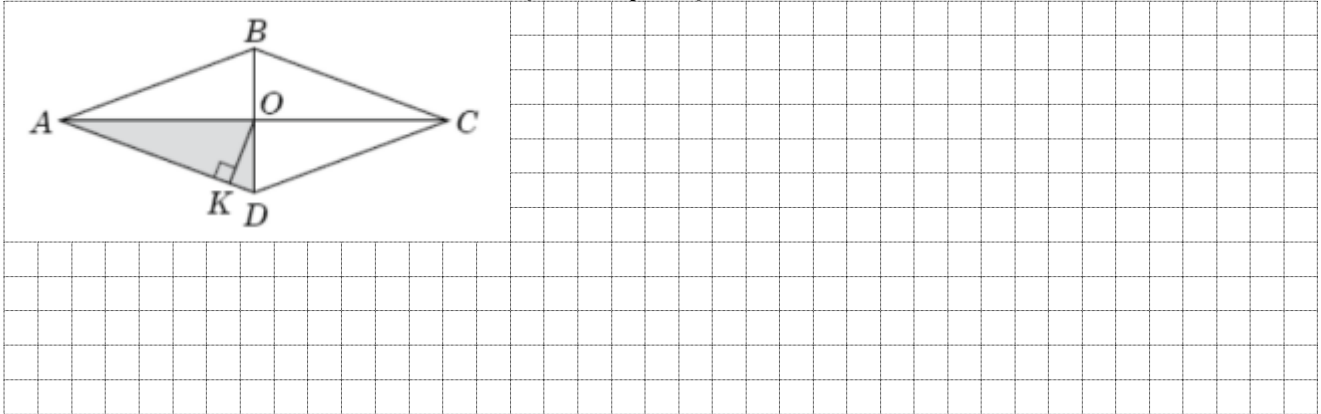
4) прямокутник, більша сторона якого дорівнює **6 см** й утворює з діагоналлю кут **30°**.



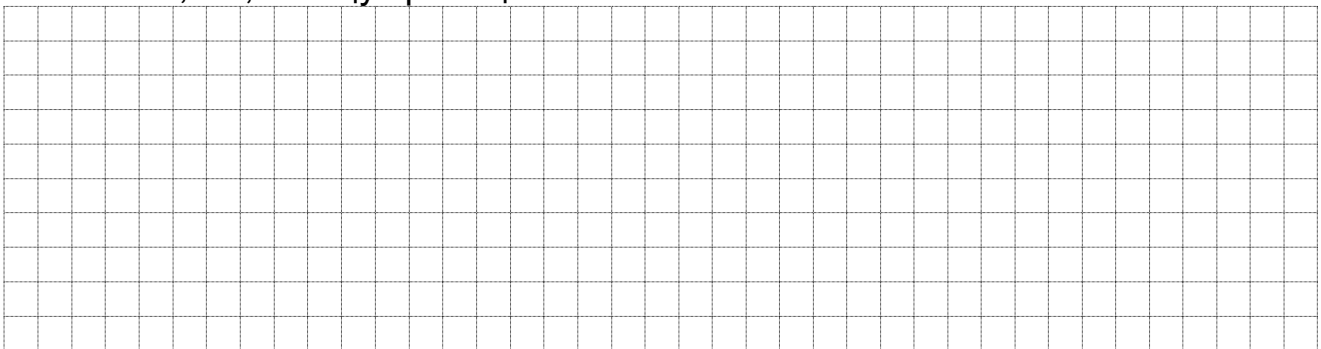
- А 12 см^2
- Б 16 см^2
- В 18 см^2
- Г $12\sqrt{3} \text{ см}^2$
- Д $18\sqrt{3} \text{ см}^2$

9.33. На рисунку зображено ромб $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O . Із цієї точки до сторони AD проведено перпендикуляр OK довжиною 3 см . Площа трикутника AOD дорівнює 15 см^2 .

1. Визначте довжину сторони ромба $ABCD$, см.
2. Обчисліть тангенс гострого кута ромба $ABCD$.

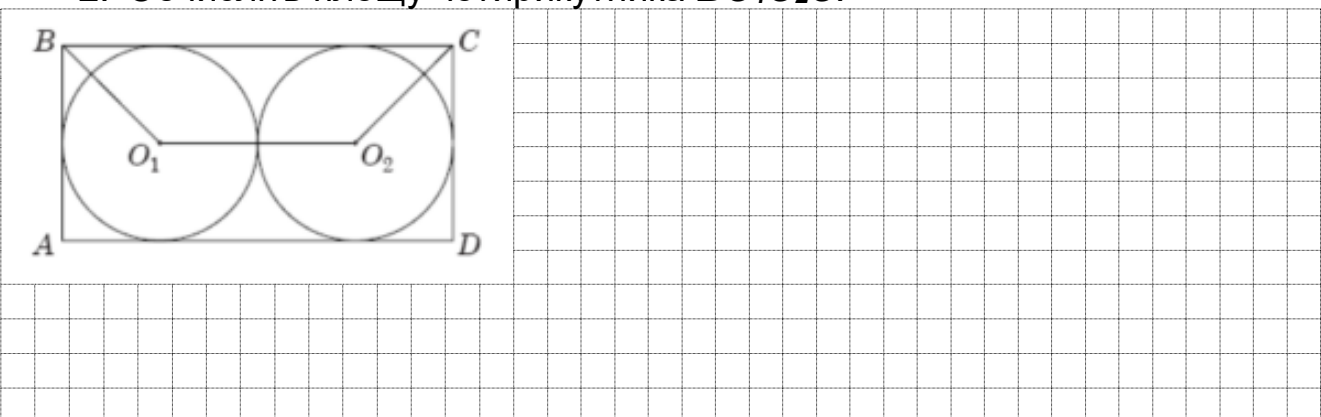


9.34. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута і поділяє середню лінію трапеції на відрізки довжиною 13 см і 23 см . Обчисліть, см, площу трапеції.



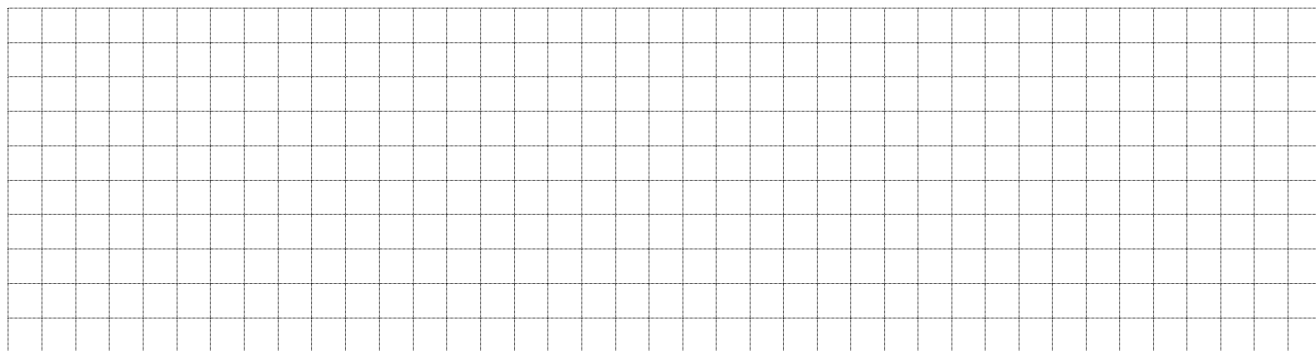
9.35. У прямокутник $ABCD$ вписано два кола з центрами O_1 та O_2 , кожне з яких дотикається до трьох сторін прямокутника й одне до одного (див. рисунок). Сума довжин уписаних кіл дорівнює 16π .

1. Визначте довжину відрізка O_1O_2 .
2. Обчисліть площу чотирикутника BO_1O_2C .

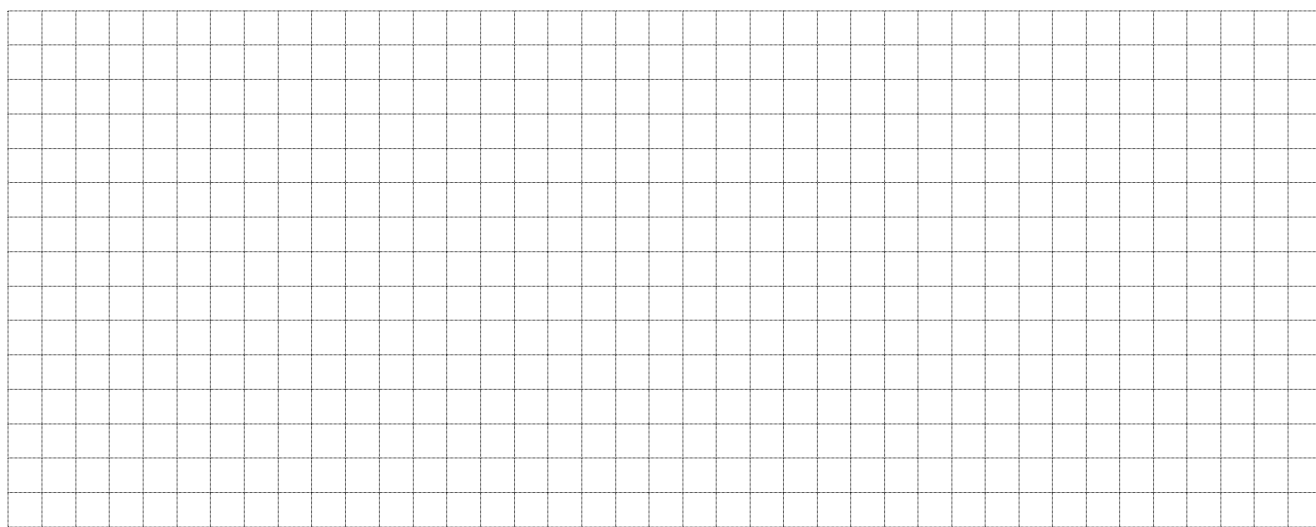


Заняття 10
ТЕОРЕМА КОСИНУСІВ. ТЕОРЕМА СИНУСІВ.
РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРИКУТНИКІВ. ПЛОЩА ТРИКУТНИКІВ

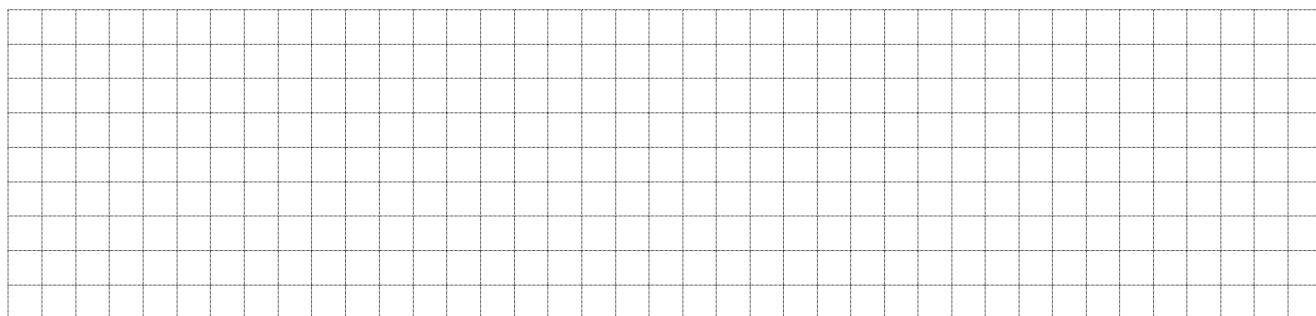
10.1. Знайдіть косинус більшого кута трикутника, сторони якого дорівнюють **5 см, 8 см і 11 см**.



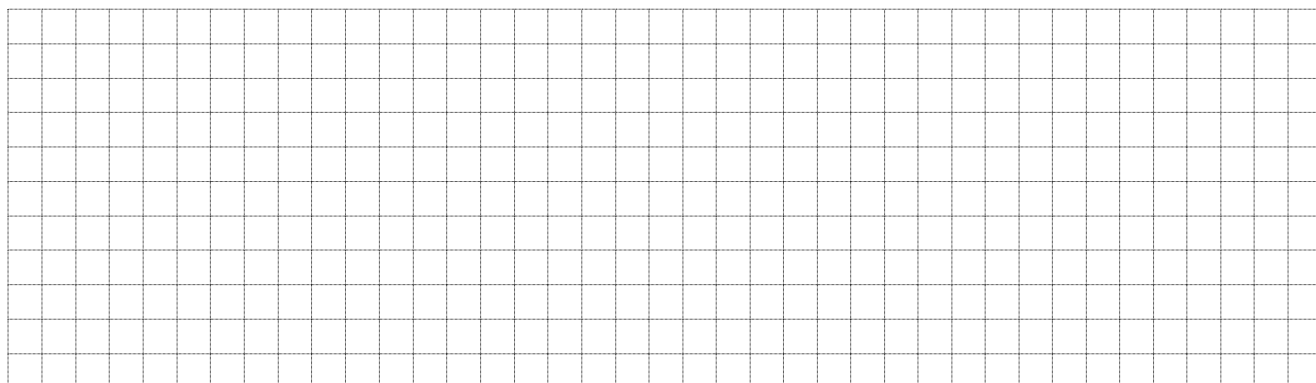
10.2. Визначте, гострокутним, прямокутним чи тупокутним є трикутник, сторони якого дорівнюють: 1) **3 см, 4 см і 6 см**; 2) **5 см, 6 см і 7 см**; 3) **16 см, 30 см і 34 см**.



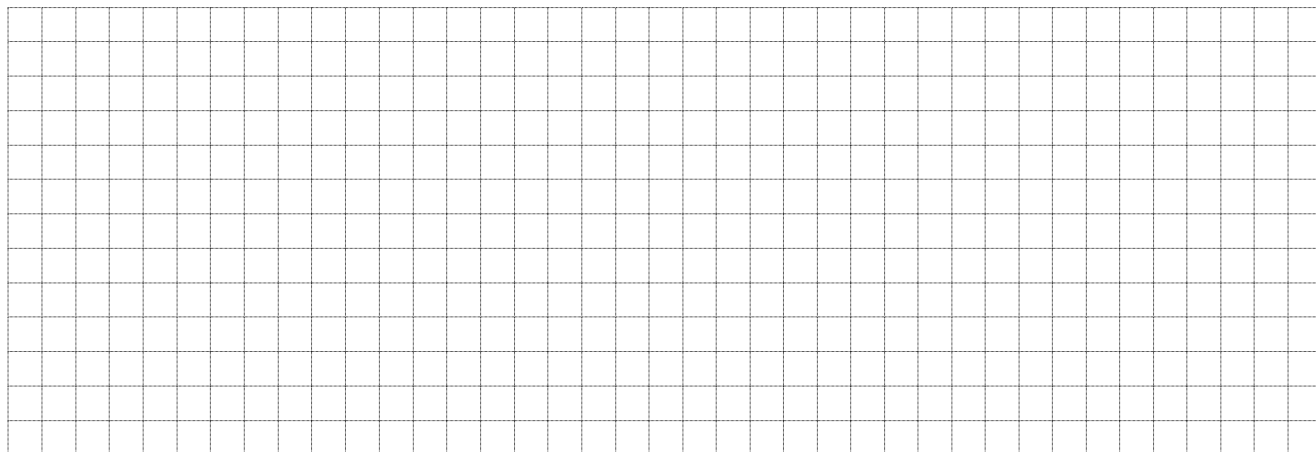
10.3. Сторони паралелограма дорівнюють **8 см і 10 см**, а один із кутів дорівнює **60°**. Знайдіть діагоналі паралелограма.



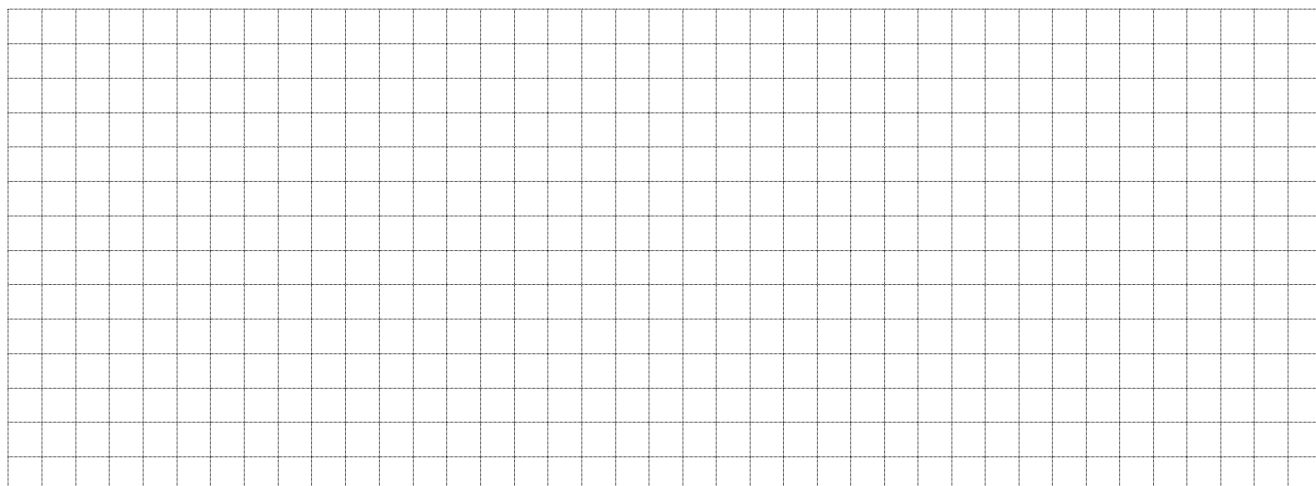
10.4. Центр кола, вписаного в трикутник ABC , віддалений на 2 см і на 5 см від вершин B і C відповідно. Знайдіть сторону BC , якщо $\angle A = 60^\circ$.



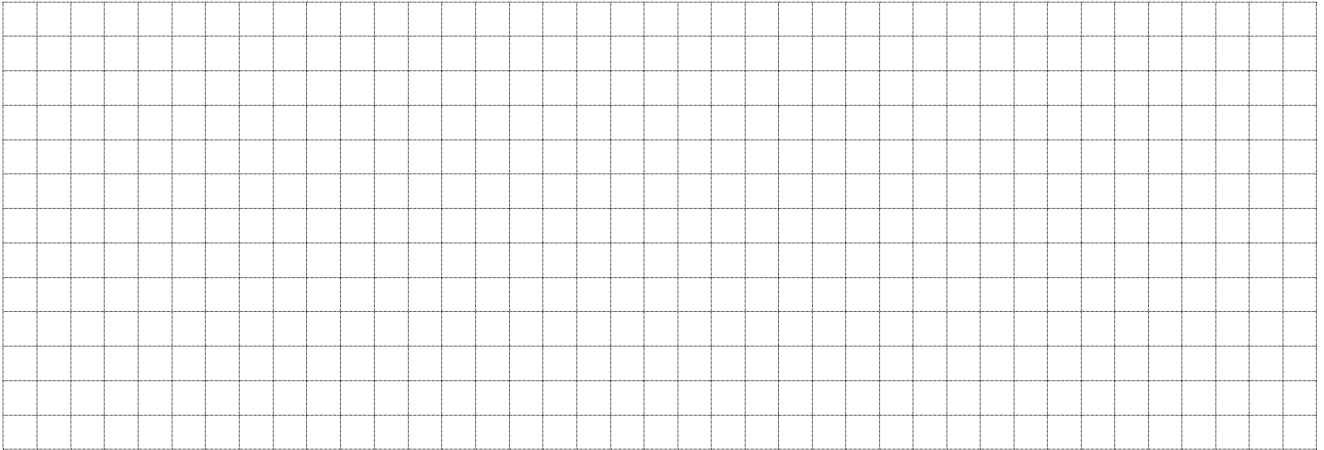
10.5. На сторонах AB і AC трикутника ABC позначено відповідно такі точки D і E , що $AD = 3\text{ см}$, $EC = 6\text{ см}$. Знайдіть відрізок DE , якщо $AB = 8\text{ см}$, $BC = 12\text{ см}$, $AC = 10\text{ см}$.



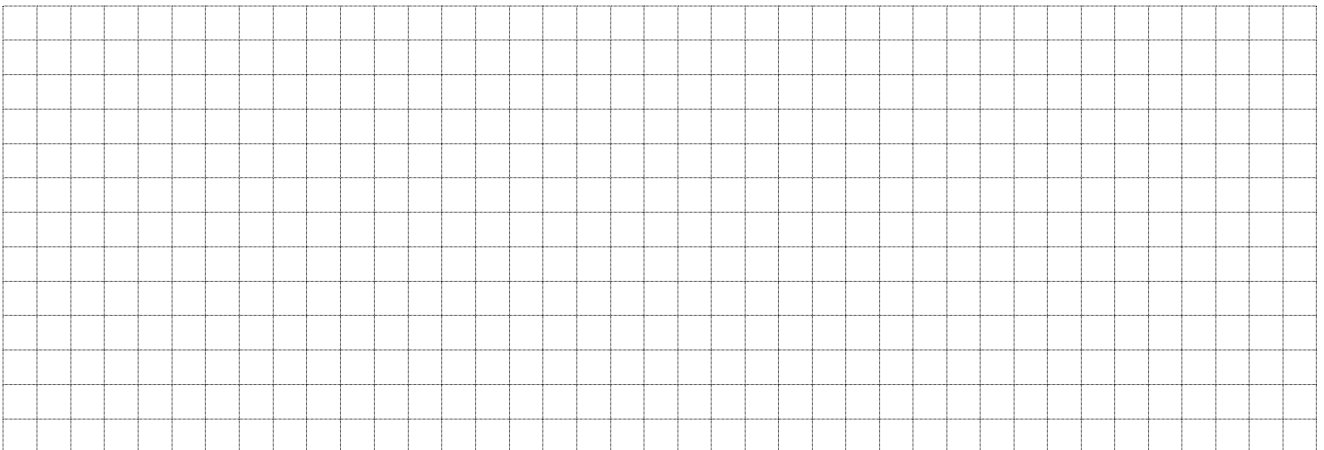
10.6. Дві сторони трикутника співвідносяться як $3:5$, а кут між ними становить 120° . Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 45 см .



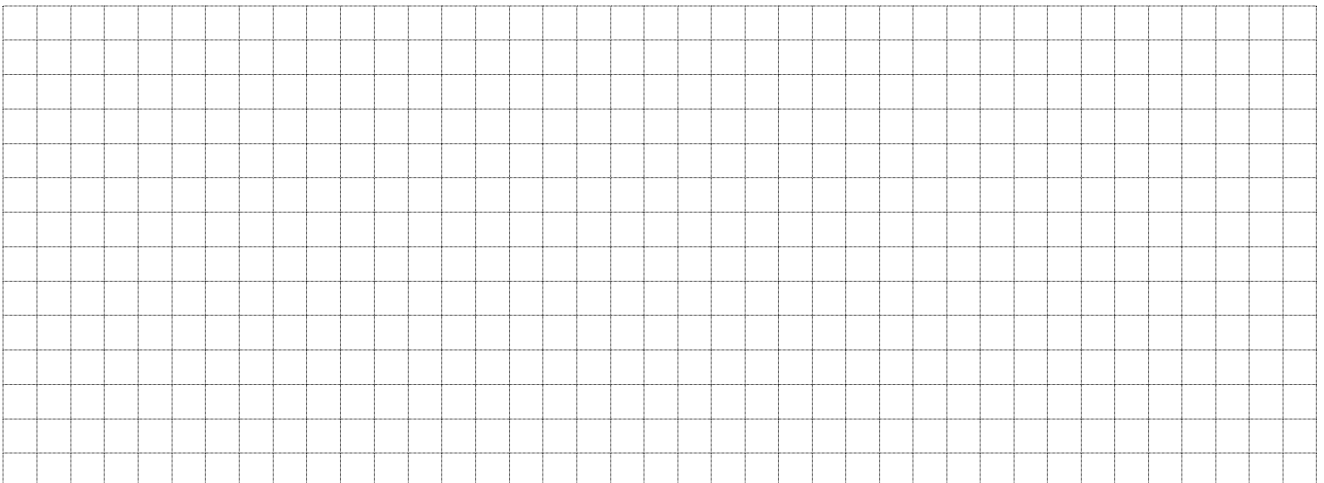
10.7. Дві сторони трикутника дорівнюють **5 см** і **7 см**, а кут, протилежний більшій із них, – **120°**. Знайдіть третю сторону трикутника.



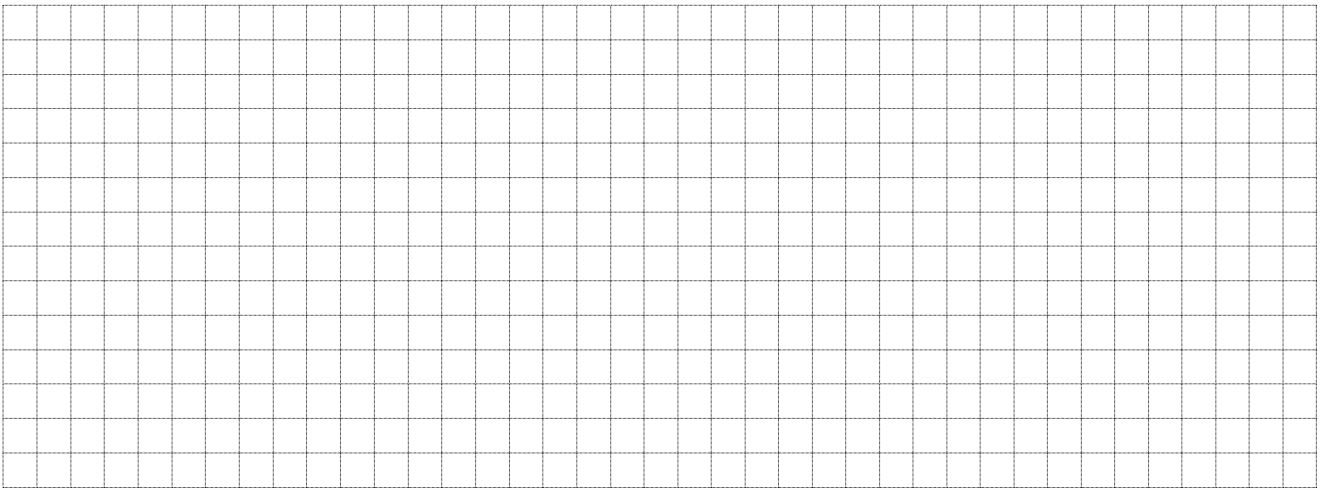
10.8. У чотирикутнику **ABCD** відомо, що **AB = BC = 10 см**, **CD = 9 см**, **AD = 21 см**. Знайдіть діагональ **BD**, якщо навколо чотирикутника **ABCD** можна описати коло.



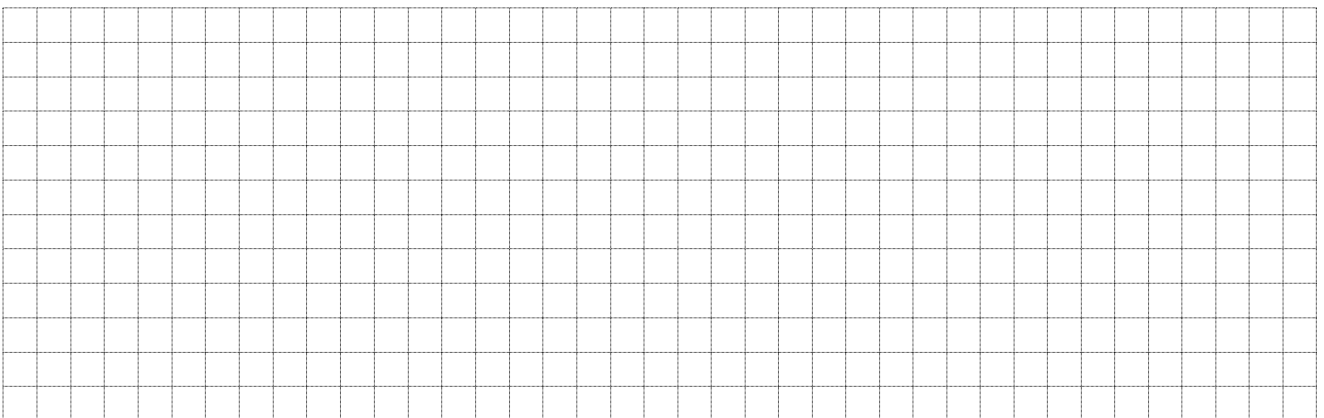
10.9. Одна із сторін паралелограма на **5 см** більша за другу, а його діагоналі дорівнюють **17 см** і **19 см**. Знайдіть сторони паралелограма.



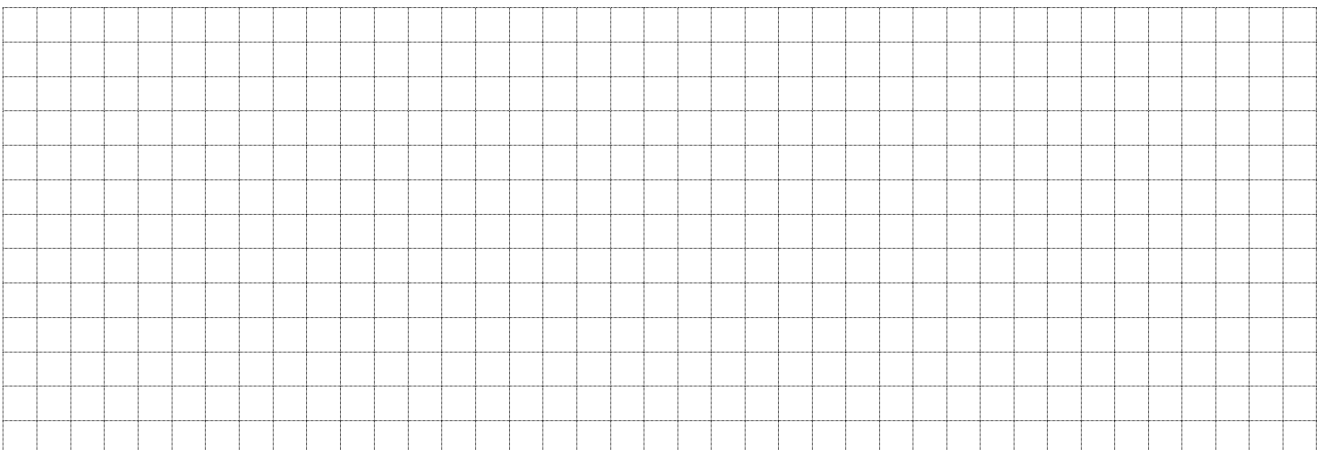
10.10. У трикутнику ABC відомо, що $AB = 3\sqrt{2}$ см, $\angle A = 15^\circ$, $\angle C = 135^\circ$. Знайдіть сторону AC .



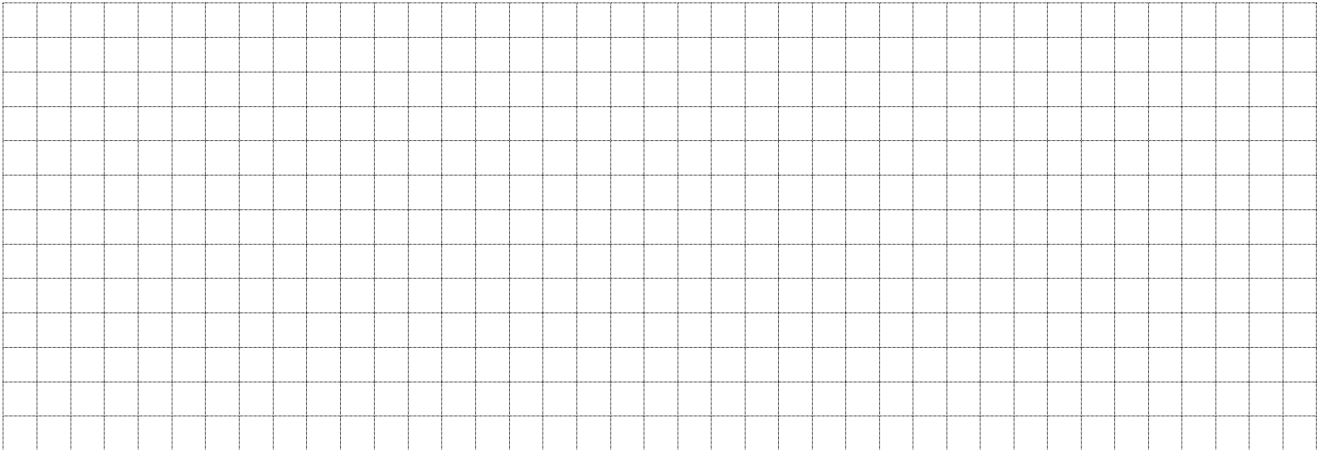
10.11. У трикутнику ABC відомо, що $AB = 13$ см, $BC = 8$ см. Чи може $\sin A$ дорівнювати $2/3$?



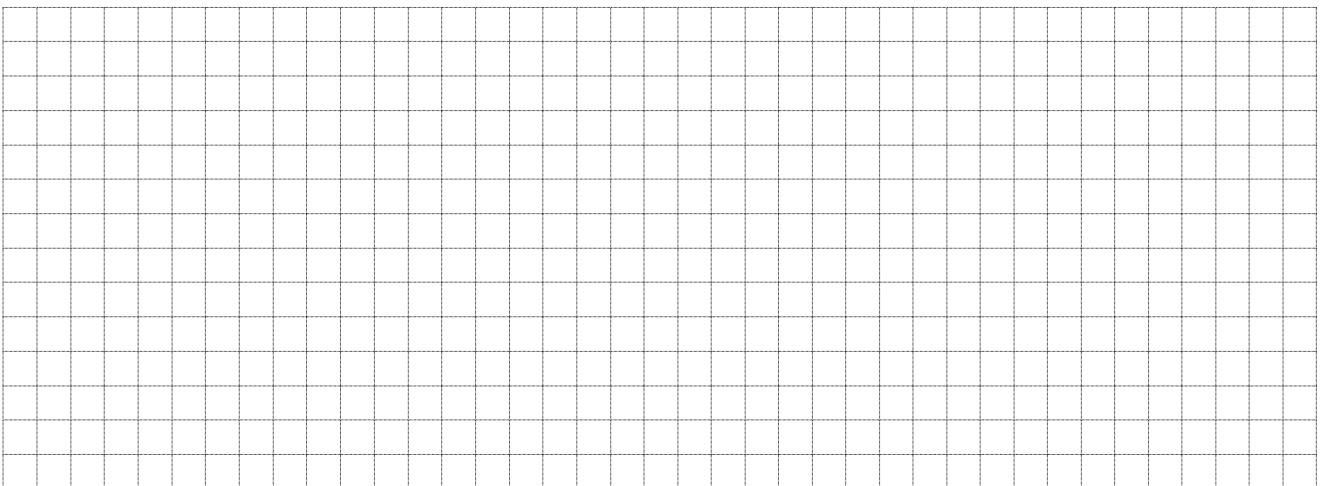
10.12. Сторона трикутника дорівнює 16 см, а радіус кола, описаного навколо трикутника, – $8\sqrt{2}$ см. Чому дорівнює кут трикутника, протилежний цій стороні?



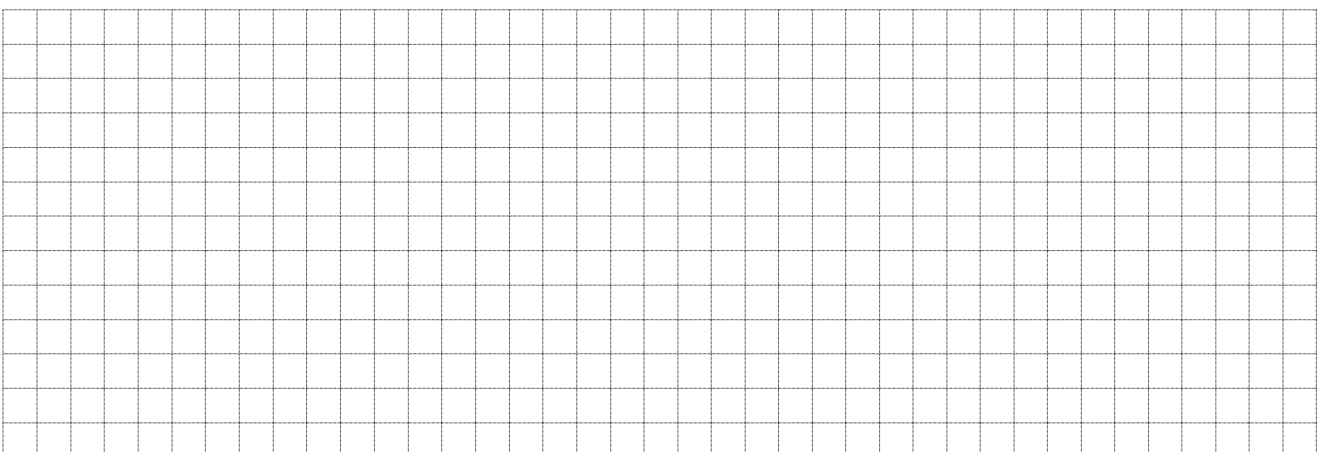
10.13. Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника з основою **12 см** і бічною стороною **10 см**.



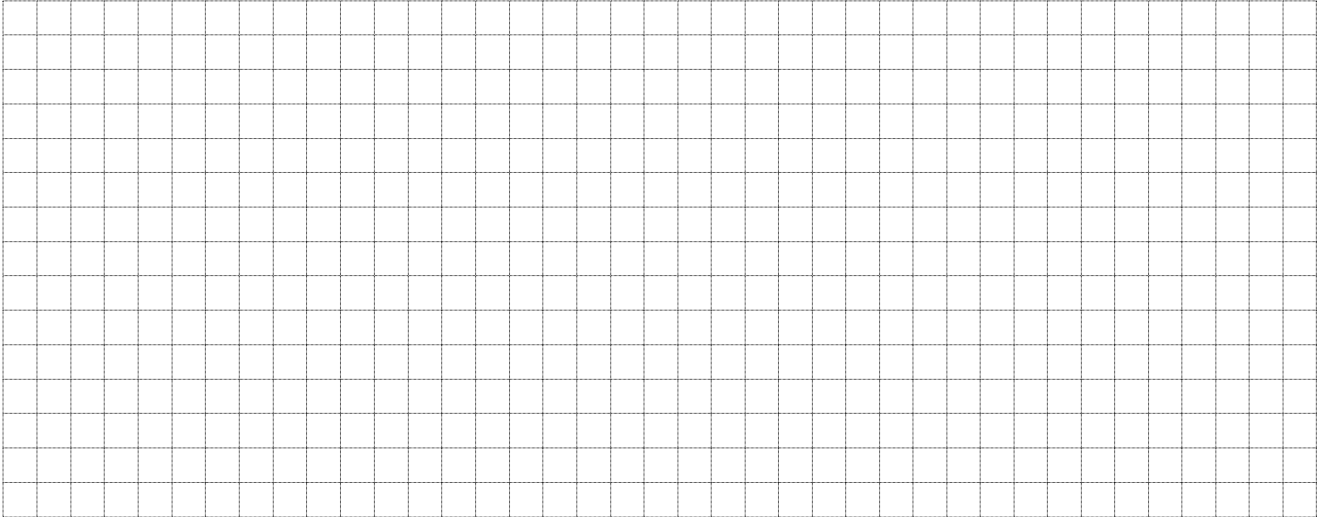
10.14. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють **5 см** і **21 см**, а бічна сторона – **17 см**. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції.



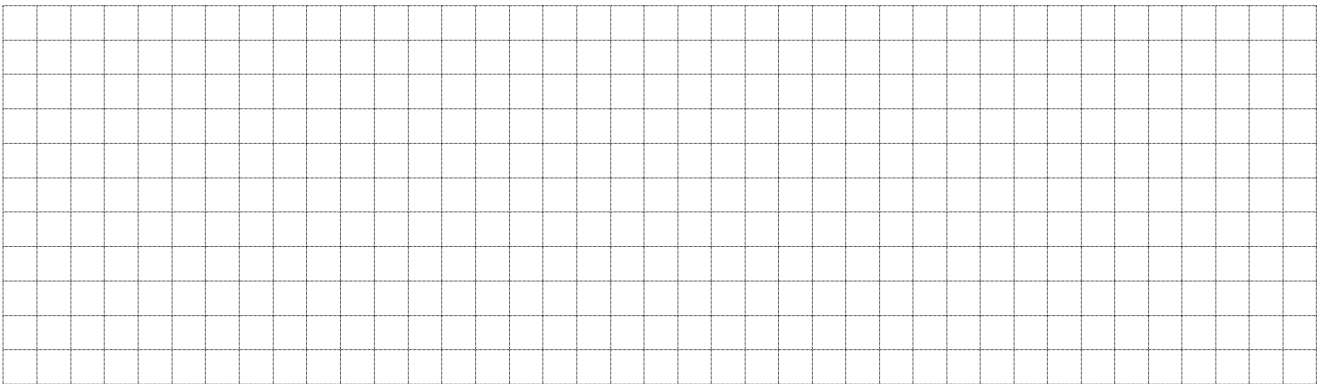
10.15. Діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції, якщо її бічна сторона дорівнює **$5\sqrt{2}$ см**.



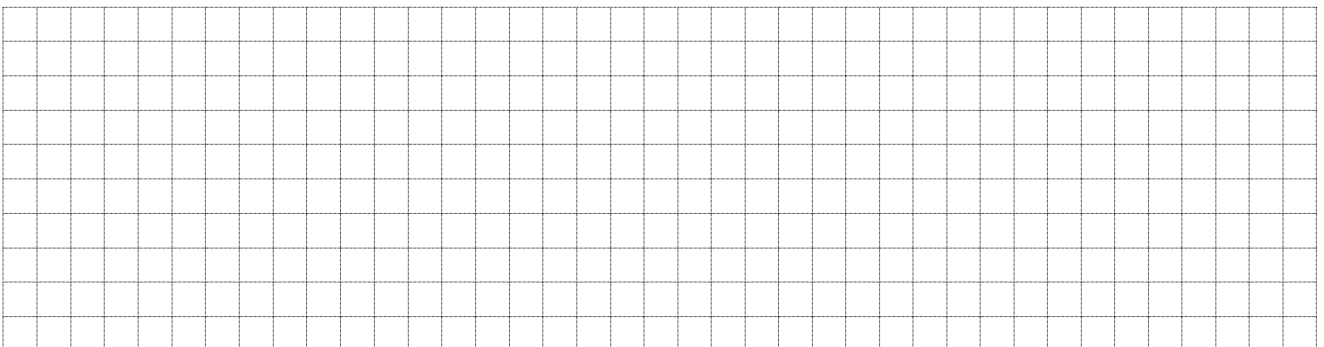
10.16. У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC = 6$ см, $\angle B = 40^\circ$. Знайдіть: 1) сторону AC ; 2) висоту AD ; 3) медіану AM ; 4) бісектрису BK ; 5) радіус описаного кола трикутника ABC ; 6) радіус вписаного кола трикутника ABC .



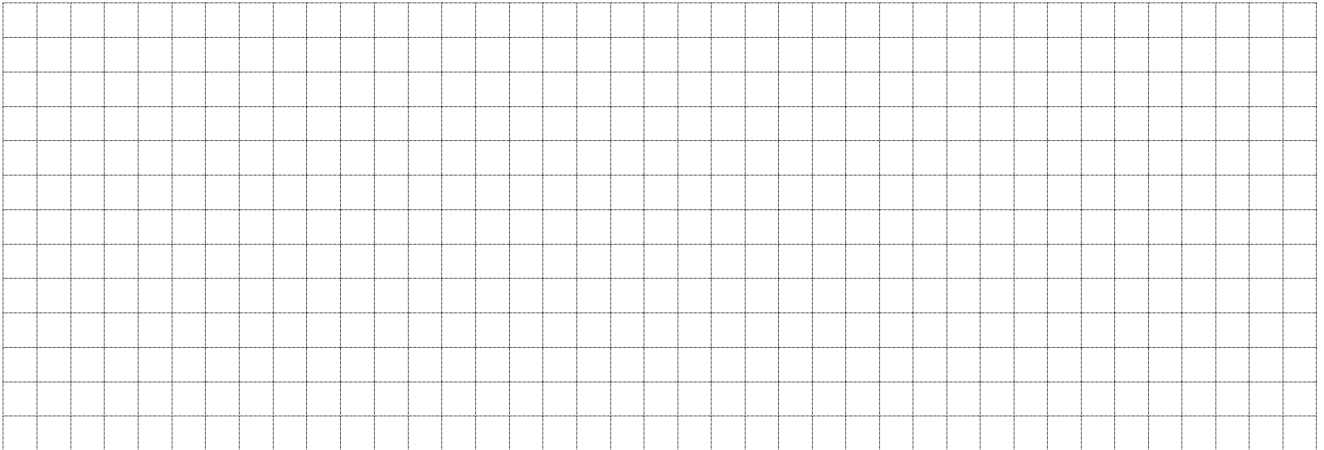
10.17. Діагональ рівнобічної трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) дорівнює 4 см, $\angle CDB = 36^\circ$, $\angle BDA = 48^\circ$. Знайдіть: 1) сторони трапеції; 2) радіус кола, описаного навколо трикутника BCD .



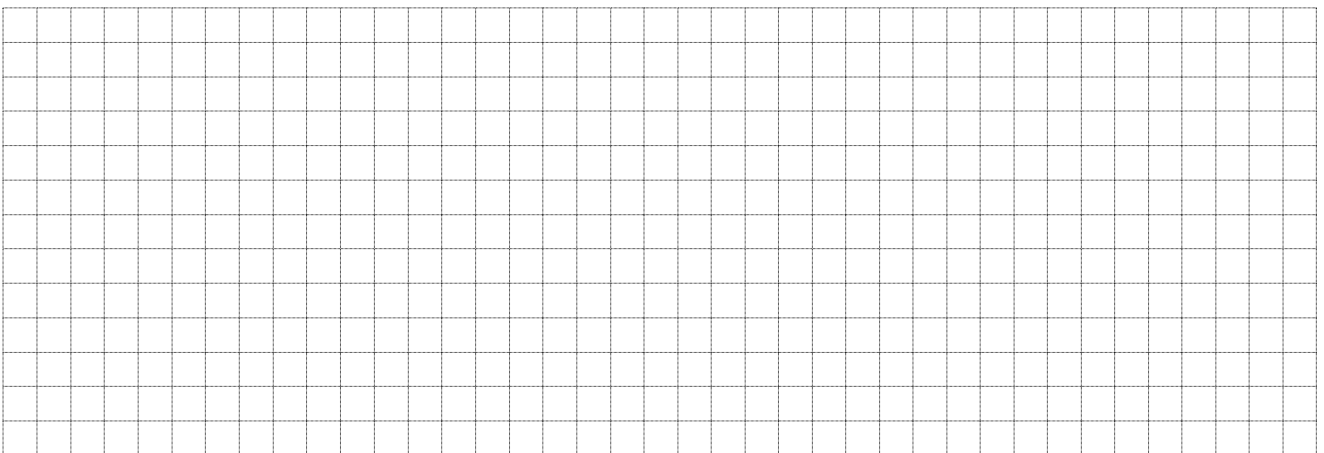
10.18. Більша сторона трикутника дорівнює 6 см, а вершини трикутника поділяють описане навколо нього коло на три дуги, градусні міри яких співвідносяться як $1:4:7$. Знайдіть невідомі сторони трикутника.



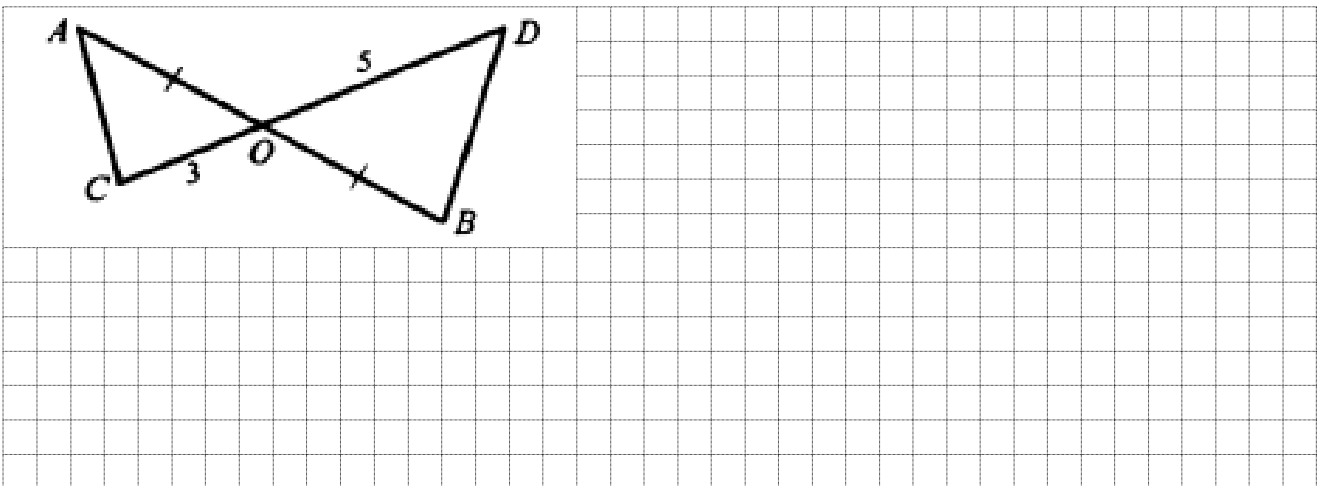
10.19. Дві сторони трикутника дорівнюють 4 см і 8 см . Чи може його площа дорівнювати: 1) 12 см^2 ; 2) 18 см^2 ?



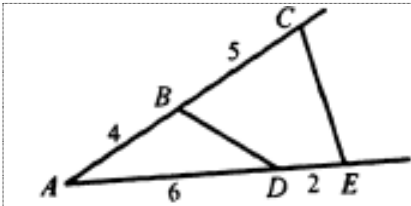
10.20. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 60° , а його площа – $150\sqrt{3}\text{ см}^2$. Знайдіть бічну сторону трикутника.



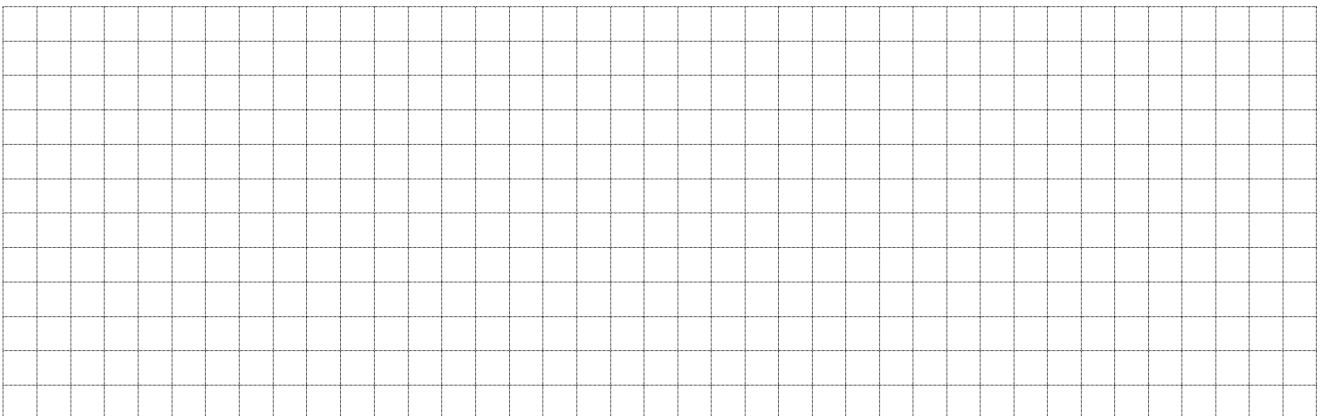
10.21. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O , $AO = OB$, $CO = 3\text{ см}$, $OD = 5\text{ см}$. Знайдіть співвідношення площ трикутників AOC і DOB .



10.22. На сторонах кута A відкладено відрізки $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $AD = 6$ см. Знайдіть відношення площ трикутника ABD і чотирикутника $BCED$.



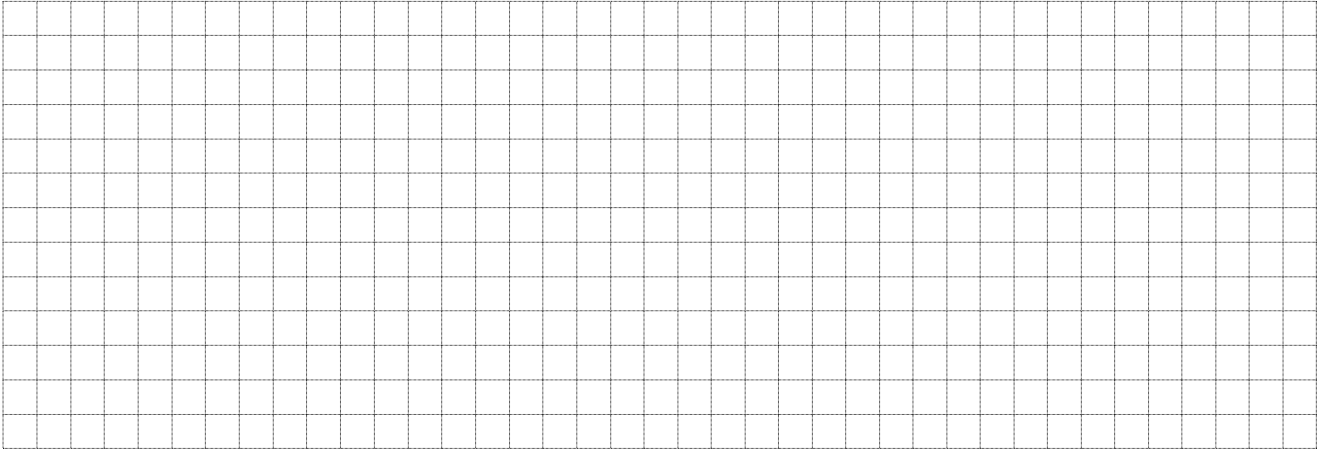
10.23. Три кола, радіуси яких дорівнюють 12 см, 14 см і 16 см, попарно мають зовнішній дотик. Знайдіть площу трикутника, вершинами якого є центри цих кіл.



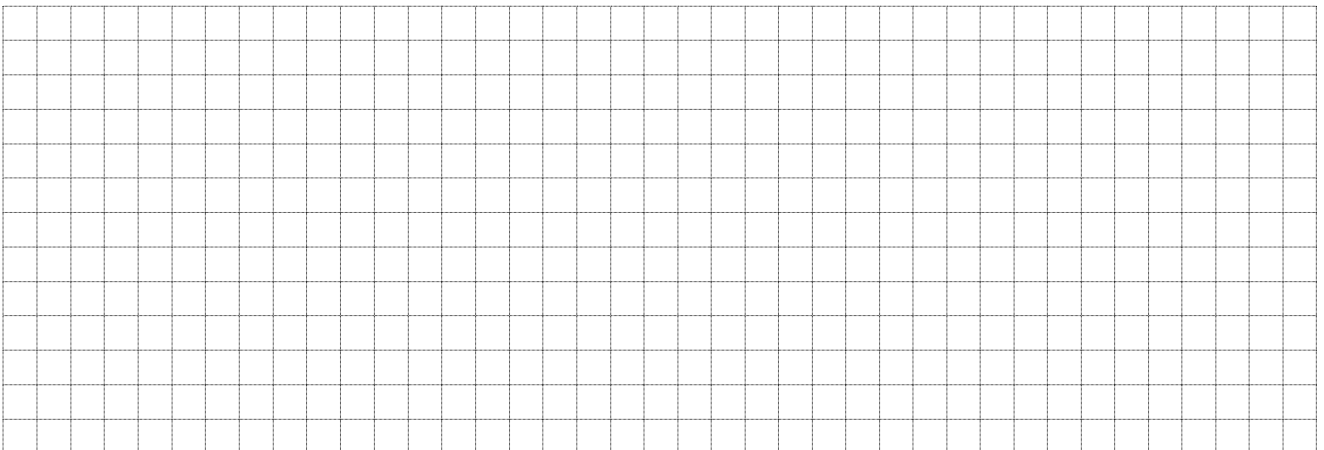
10.24. Сторони трикутника дорівнюють 9 см, 10 см і 17 см. Знайдіть найменшу висоту трикутника і радіуси його вписаного та описаного кіл.



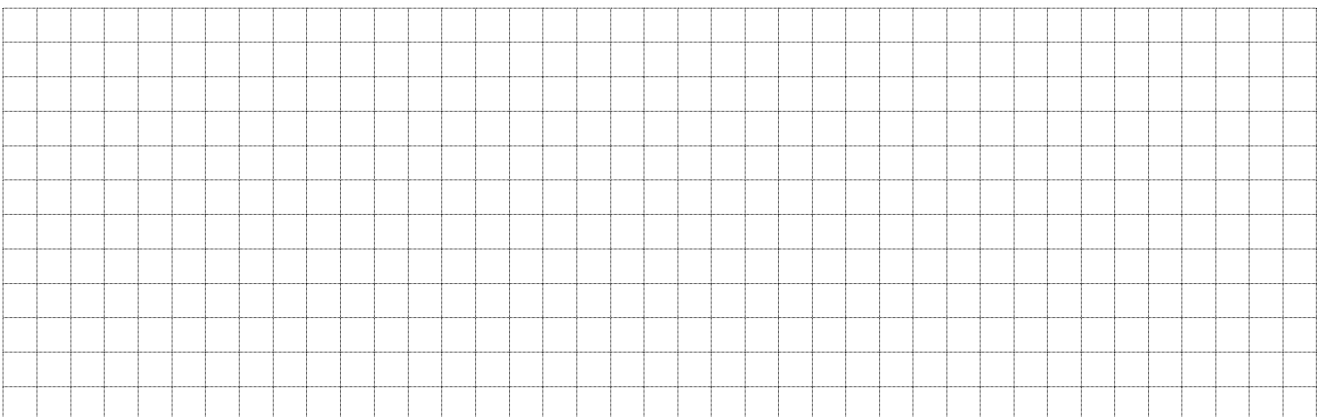
10.25. У трикутник зі сторонами **26 см**, **15 см** і **37 см** вписано коло, центр якого сполучено з вершинами трикутника. Знайдіть площі трьох утворених трикутників.



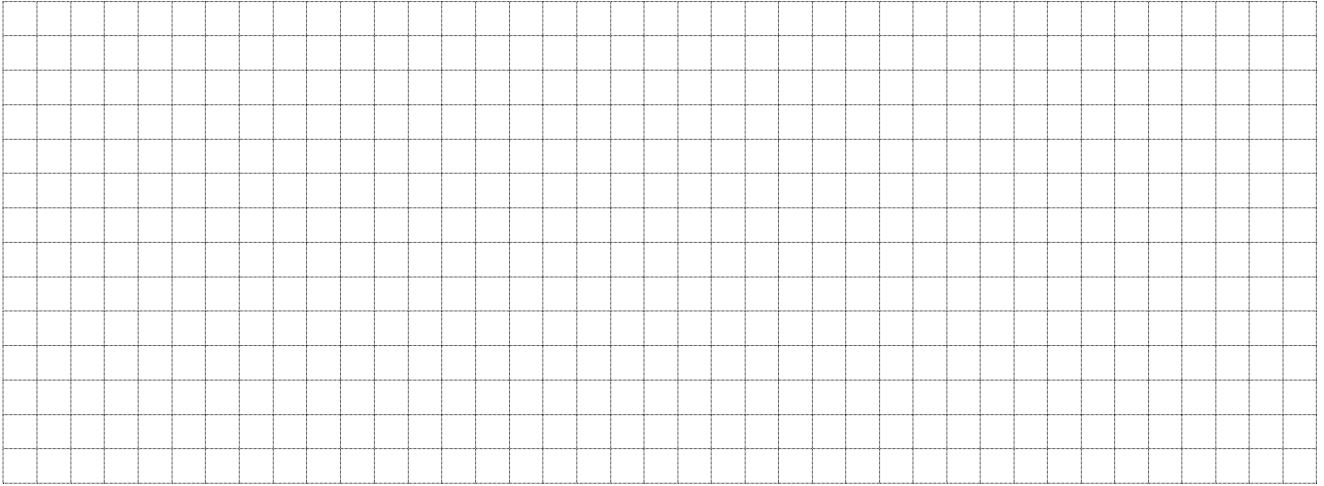
10.26. Бісектриса трикутника поділяє його сторону на відрізки довжиною **5 см** і **6 см**. Менша з двох інших сторін дорівнює **15 см**. Знайдіть площу трикутника.



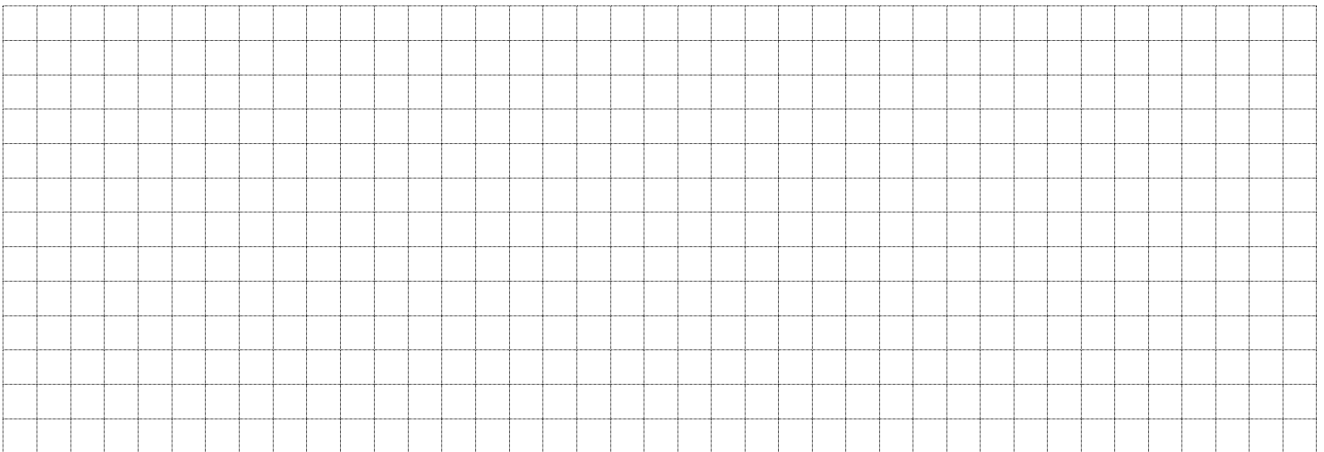
10.27. Кути ромба співвідносяться як **1:3**, а його сторона дорівнює **8 см**. Знайдіть площу ромба.



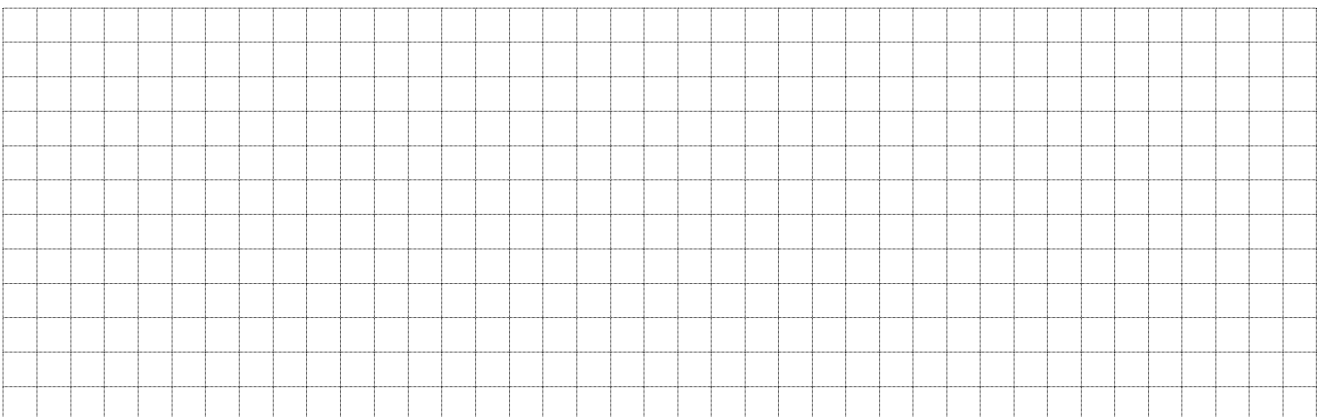
10.28. Площа прямокутника дорівнює $16\sqrt{3}\text{ см}^2$, а кут між його діагоналями – 60° . Знайдіть сторони прямокутника.



10.29. Діагоналі чотирикутника дорівнюють 4 см і 8 см , а кут між ними – 30° . Знайдіть площу чотирикутника.

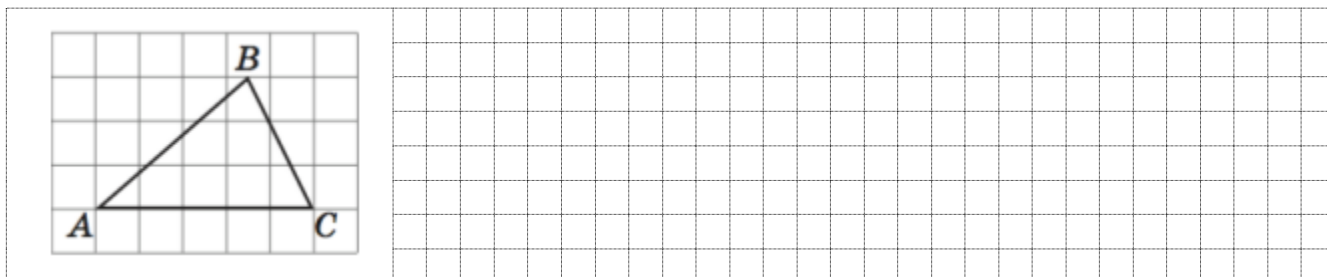


10.30. Діагоналі чотирикутника дорівнюють 5 см і 8 см , а його площа – $10\sqrt{3}\text{ см}^2$. Знайдіть кут між діагоналями чотирикутника.



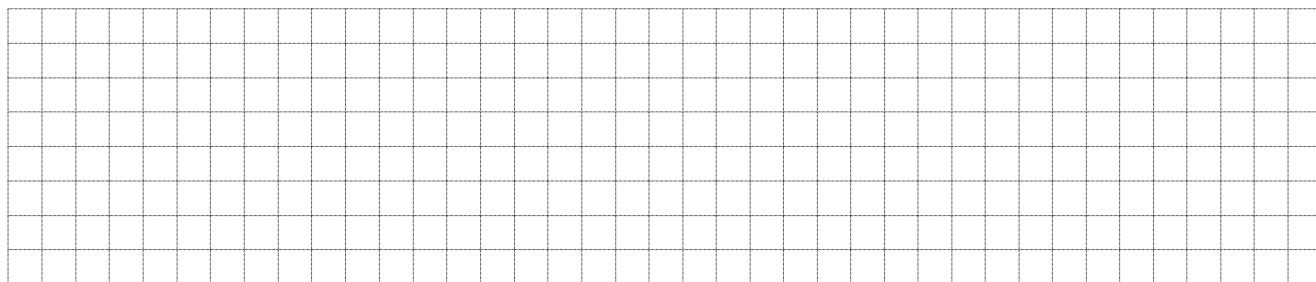
**Додаткові вправи,
які було запропоновано під час проведення ЗНО**

10.31. На папері в клітинку зображено трикутник **ABC** (див. рисунок). Вважайте, що кожна клітинка – квадрат зі стороною довжиною **1 см**. Знайдіть площу трикутника **ABC**.



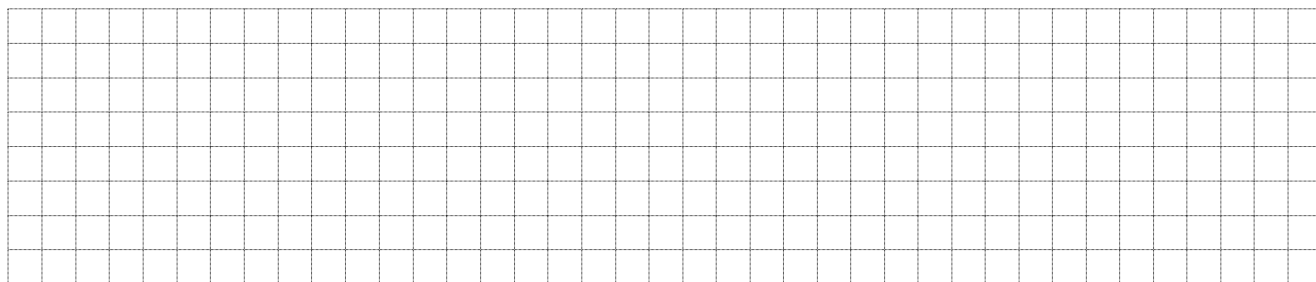
| А | Б | В | Г | Д |
|-------------------------|---------------------------|-------------------------|---------------------------|-------------------------|
| 6 см² | 6,5 см² | 7 см² | 7,5 см² | 6 см² |

10.32. У трикутнику **ABC** **BC = 8 см**, $\angle BAC = 45^\circ$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо цього трикутника.



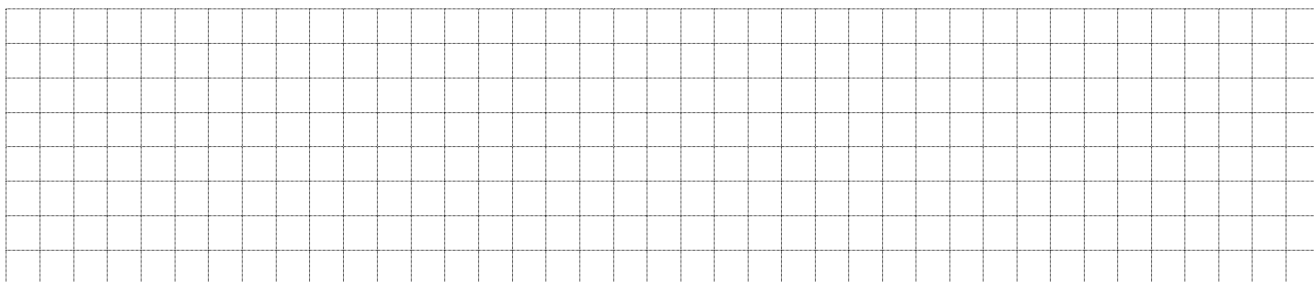
| А | Б | В | Г | Д |
|----------------|------|----------------|-------|-------|
| $8\sqrt{2}$ см | 8 см | $8\sqrt{3}$ см | 12 см | 16 см |

10.33. Знайдіть довжину сторони **BC** трикутника **ABC**, якщо $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, **AB = 3 см**.



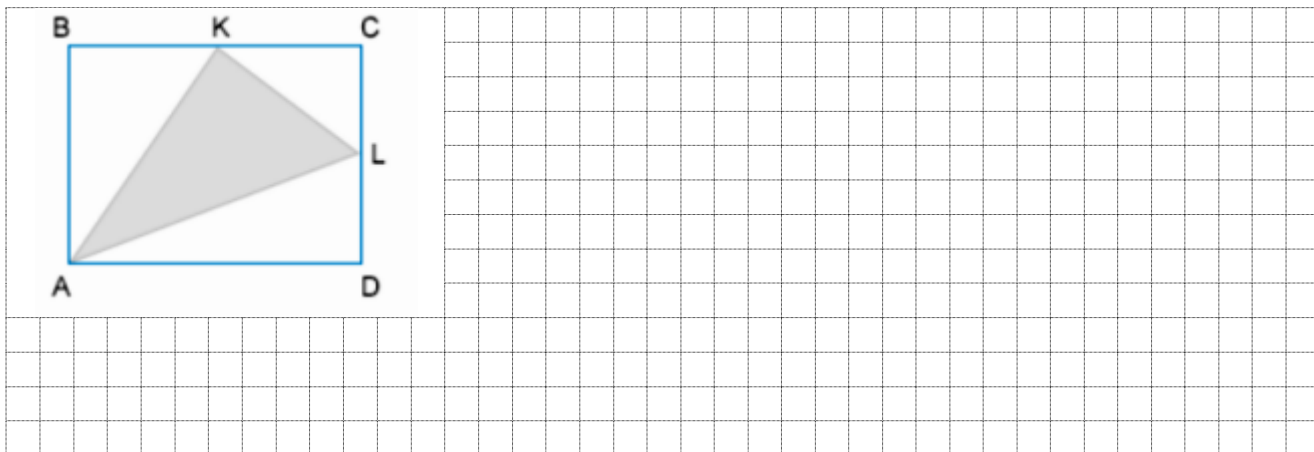
| А | Б | В | Г | Д |
|----------------|------|----------------|-------|-------|
| $8\sqrt{2}$ см | 8 см | $8\sqrt{3}$ см | 12 см | 16 см |

10.34. Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо радіус кола, описаного навколо нього, дорівнює 5 см , а один із катетів – 6 см .

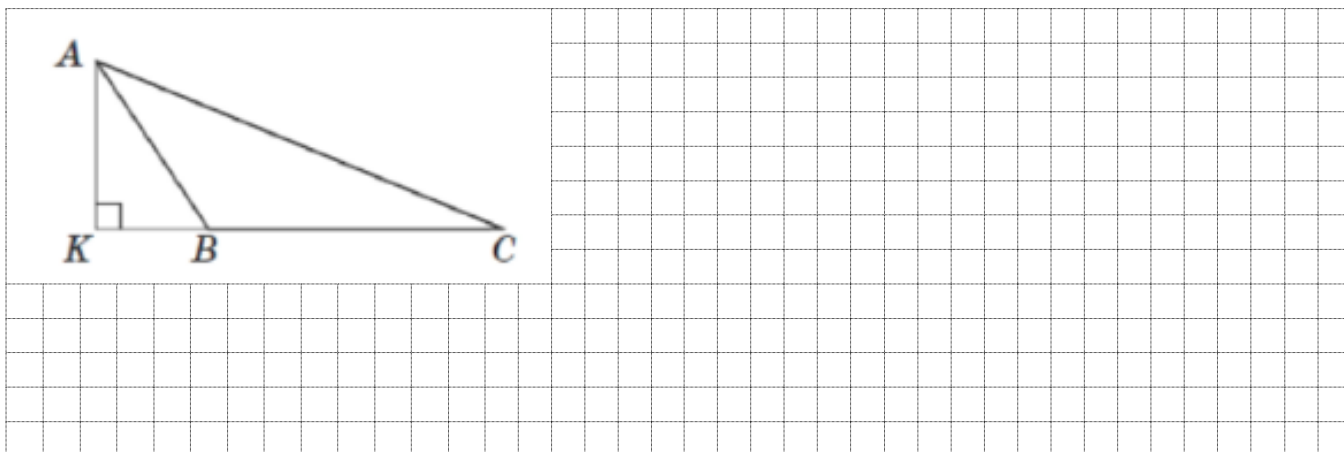


| | | | | |
|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| А | Б | В | Г | Д |
| 15 см^2 | 24 см^2 | 30 см^2 | 48 см^2 | 60 см^2 |

10.35. У прямокутнику $ABCD$ сторони $AB = 6\text{ см}$, $BC = 8\text{ см}$, K і L – середини сторін BC і CD відповідно (див. рисунок). Знайдіть площу трикутника AKL , см^2 .



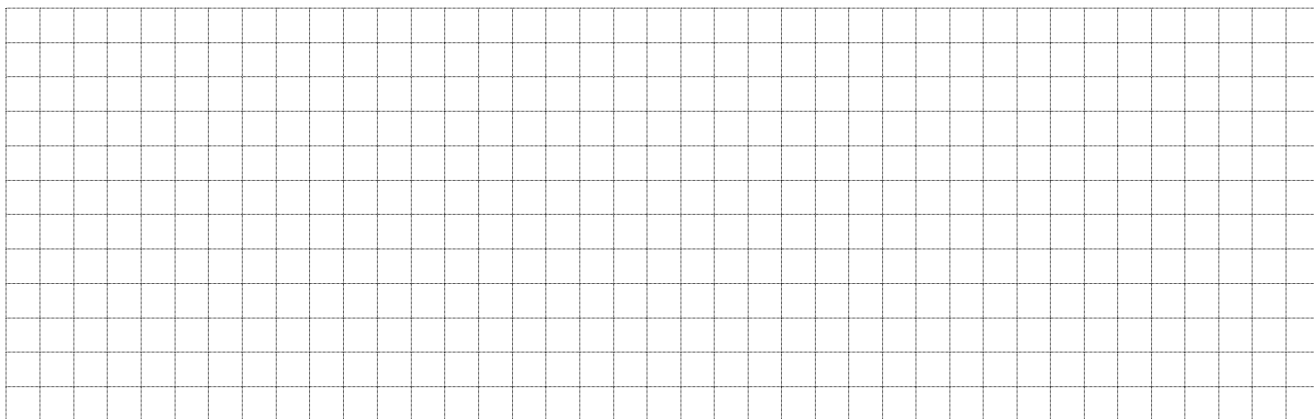
10.36. У трикутнику ABC основа висоти AK лежить на продовженні сторони BC (див. рисунок), $AK = 6$, $KB = 2\sqrt{3}$. Радіус описаного навколо трикутника ABC кола дорівнює $15\sqrt{3}$. Визначте довжину AC .



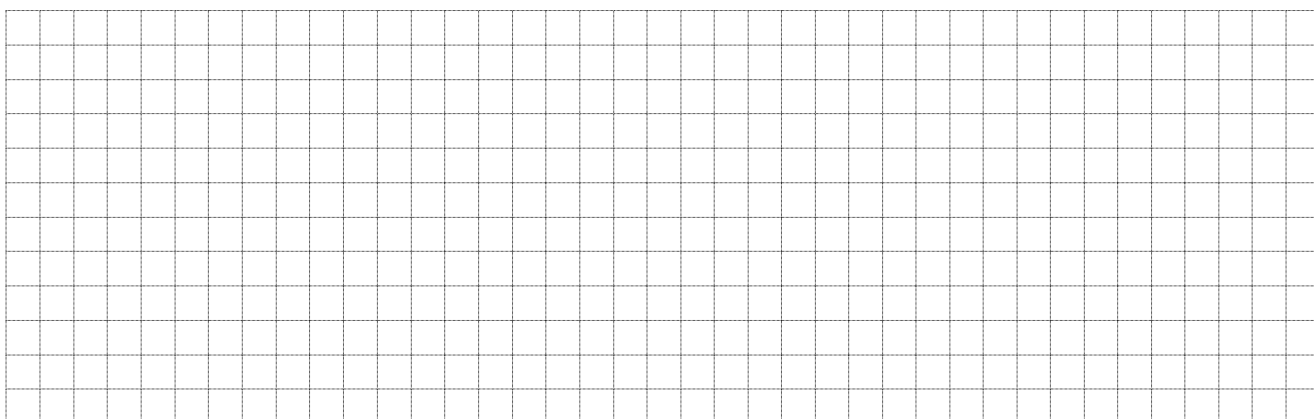
Заняття 11

ВІДСТАНЬ МІЖ ДВОМА ТОЧКАМИ ІЗ ЗАДАНИМИ КООРДИНАТАМИ. РІВНЯННЯ КОЛА. РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ. КУТОВИЙ КОЕФІЦІЄНТ ПРЯМОЇ

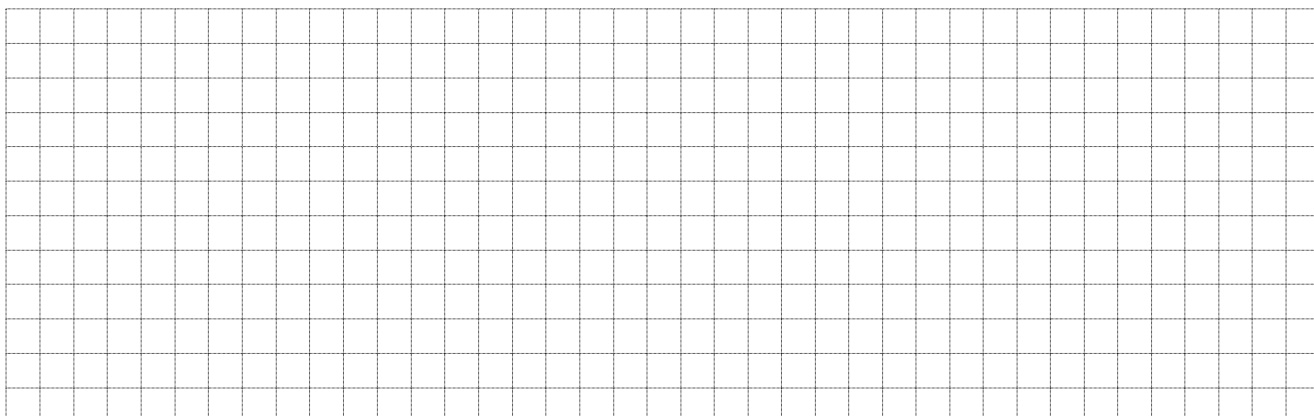
11.1. Доведіть, що точки $A(-2;-3)$, $B(2;1)$ і $C(7;6)$ лежать на одній прямій. Яка з точок лежить між двома іншими?



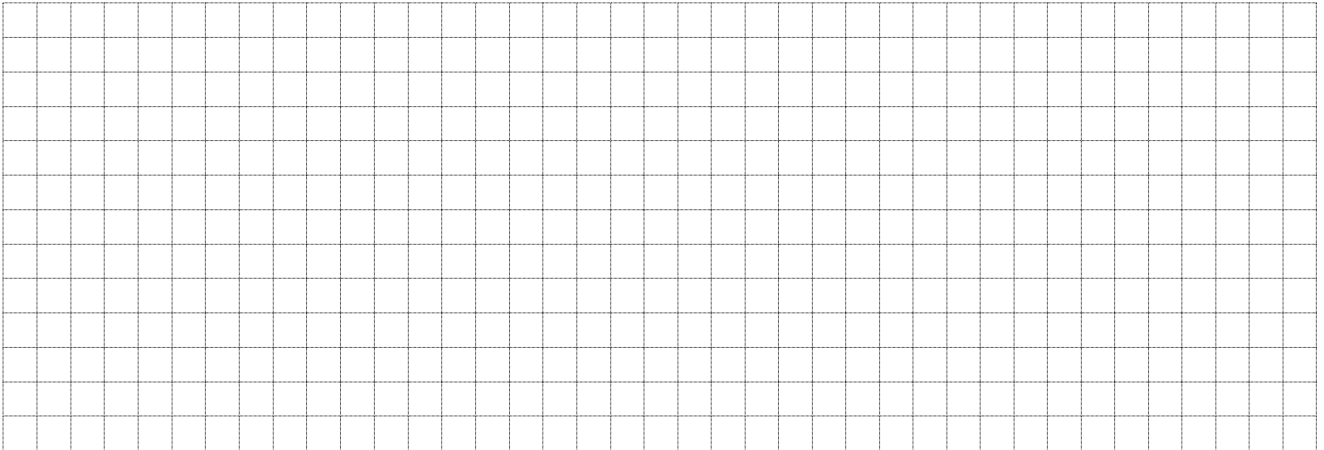
11.2. Вершинами трикутника є точки $A(-2;1)$, $B(-1;5)$ і $C(-6;2)$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.



11.3. Точка C – середина відрізка AB . Знайдіть координати точки B , якщо $A(-3;8)$, $C(-5;4)$.



11.4. На осі абсцис знайдіть точку, рівновіддалену від точок $A(3;-2)$ і $B(1;2)$.



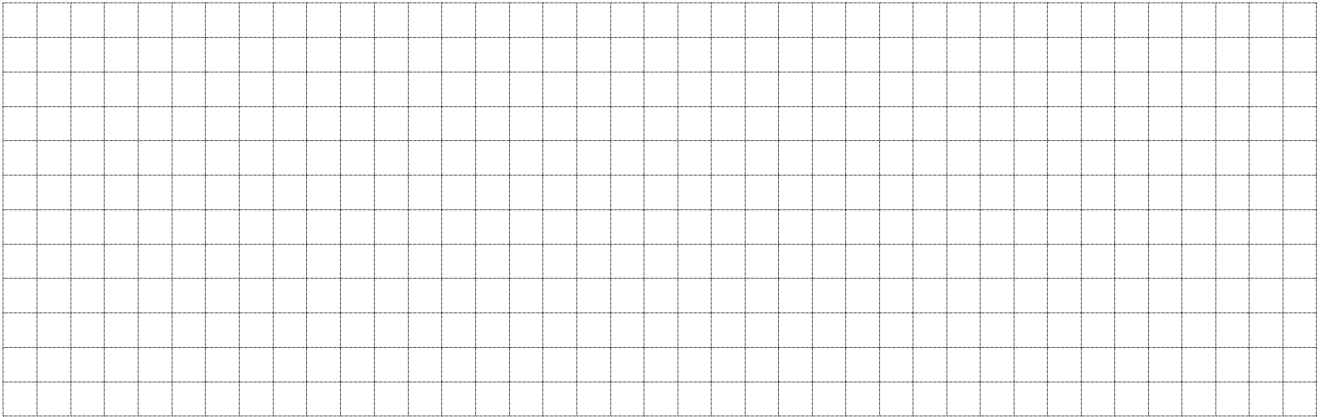
11.5. Чотирикутник $ABCD$ – паралелограм, $A(-3;-2)$, $B(5;3)$, $C(3;-5)$. Знайдіть координати вершини D .



11.6. Знайдіть довжину відрізка, кінці якого лежать на осях координат, а серединою є точка $M(-4;3)$.



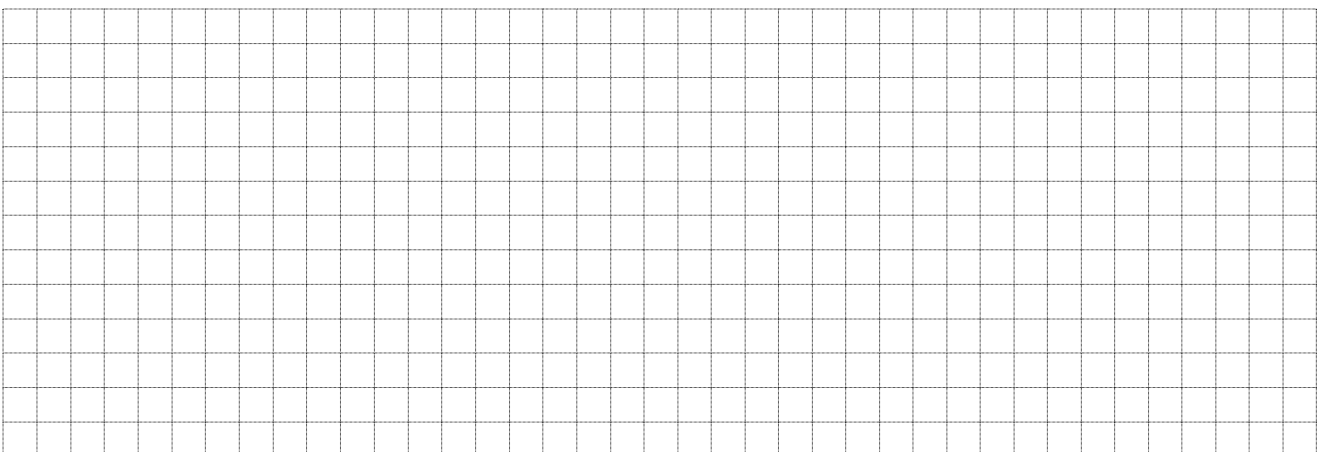
11.7. Знайдіть координати вершини **A** рівностороннього трикутника **ABC**, якщо відомо координати вершин **B(-2;0)** і **C(4;0)**.



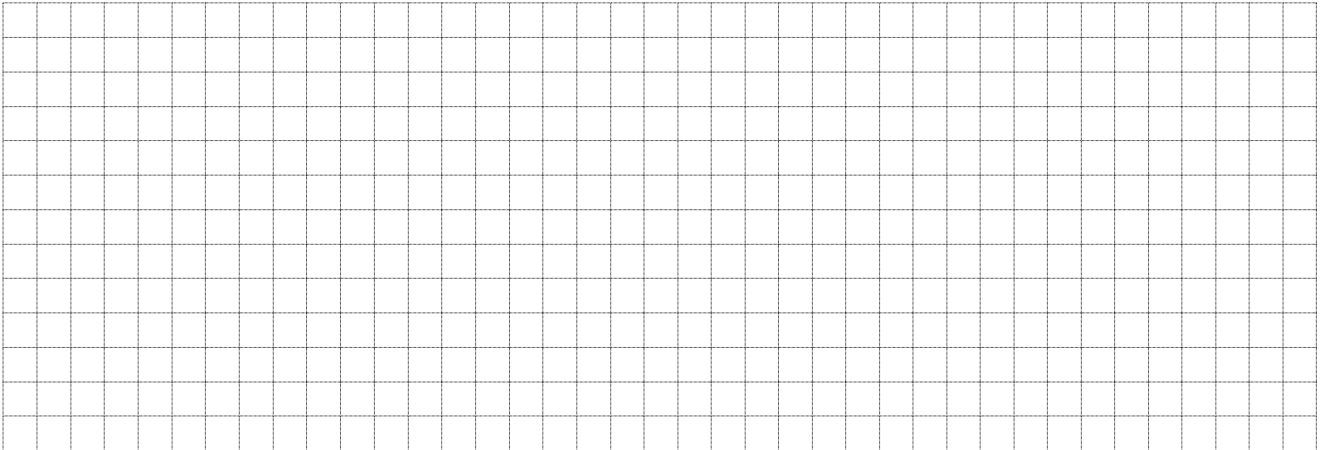
11.8. Знайдіть за рівнянням кола координати його центра та радіус:
1) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$; 2) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$; 3) $x^2 + (y + 5)^2 = 25$;
4) $(x - 2)^2 + y^2 = 14$.



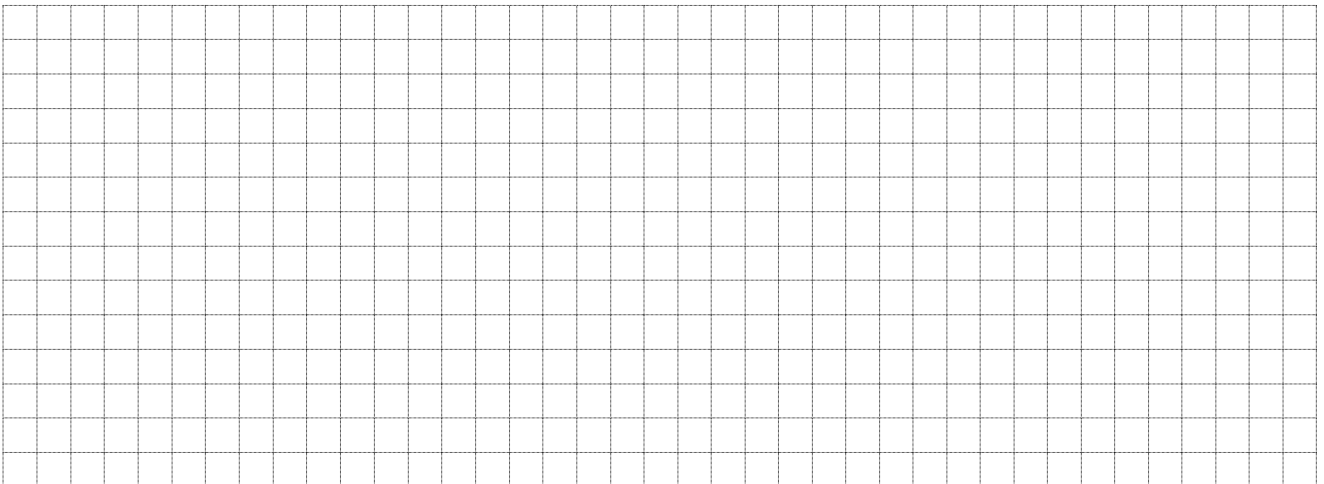
11.9. Складіть рівняння кола, якщо відомо координати його центра **K** і радіус **R**: 1) $K(2;5)$, $R = 2$; 2) $K(-4;0)$, $R = 1$; 3) $K(0;5)$, $R = \sqrt{3}$.



11.10. Складіть рівняння кола із центром в точці $P(3;-1)$, яке проходить через точку $M(-2;-4)$.



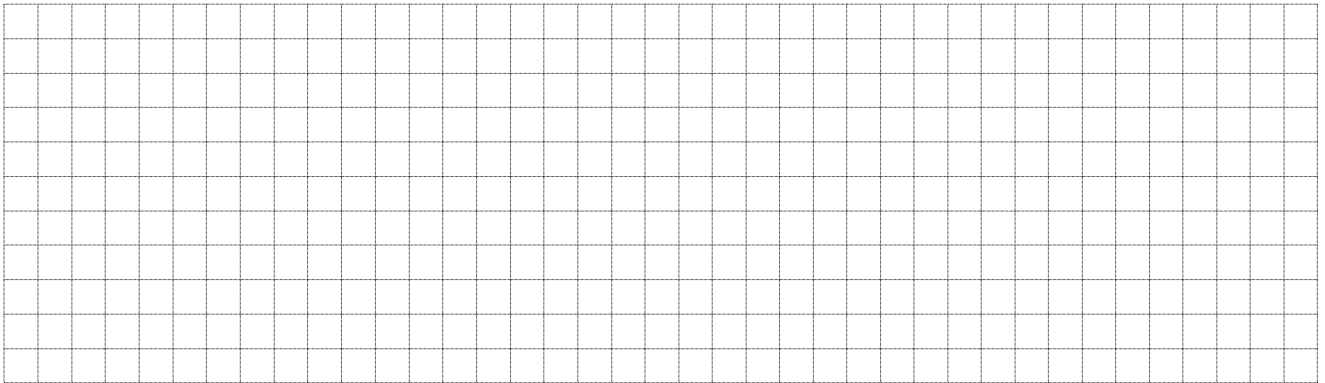
11.11. Складіть рівняння кола, діаметром якого є відрізок AB , якщо $A(3;-6)$, $B(-1;4)$.



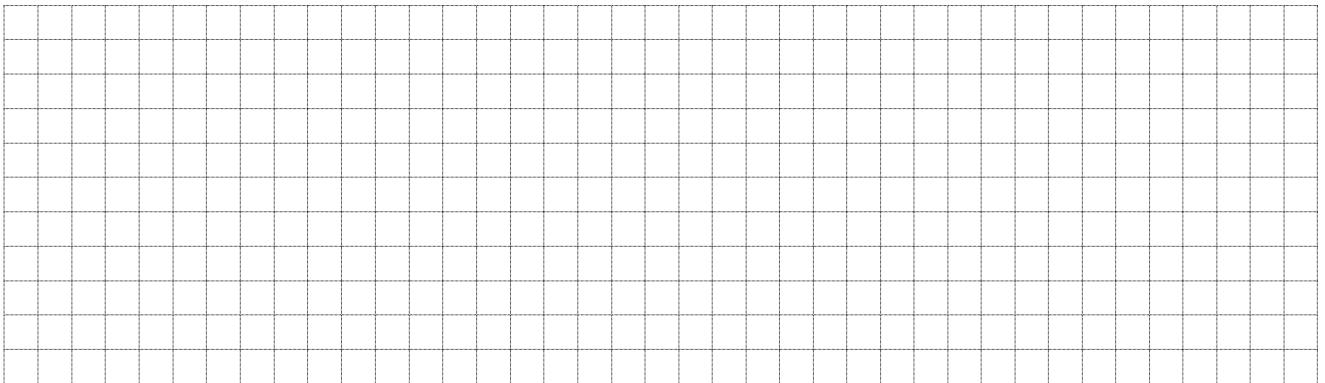
11.12. Складіть рівняння кола, що дотикається до осі ординат і центр якого знаходиться в точці $A(-5;8)$.



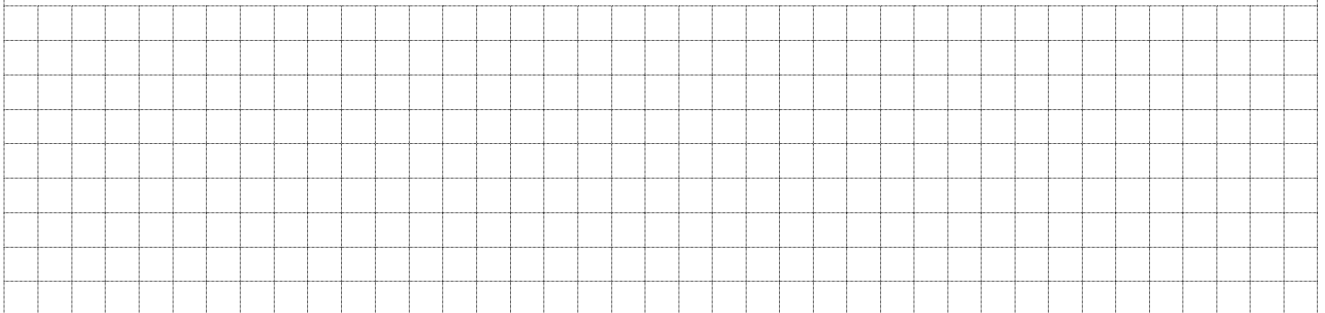
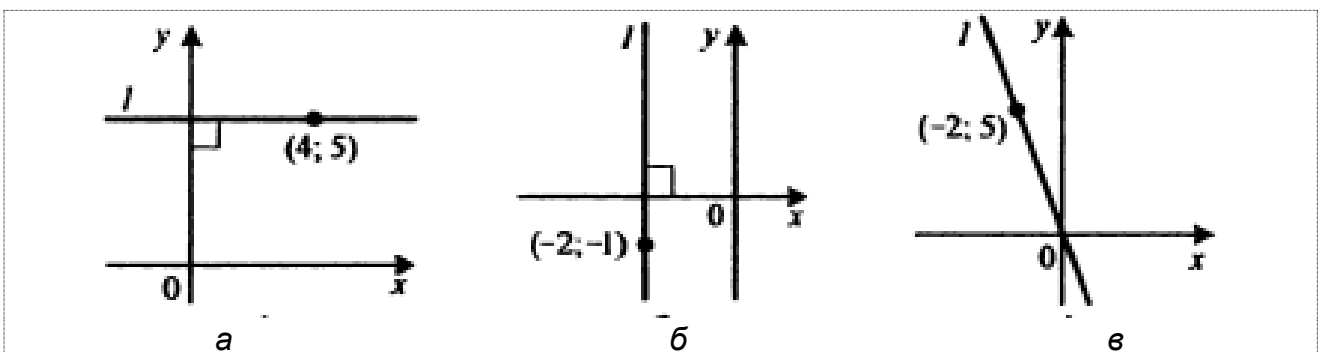
11.13. Знайдіть координати точок перетину прямої $3x + 7y = 21$ з осями координат. Чи належить цій прямій точка: 1) $K(-7;6)$; 2) $P(2;3)$?



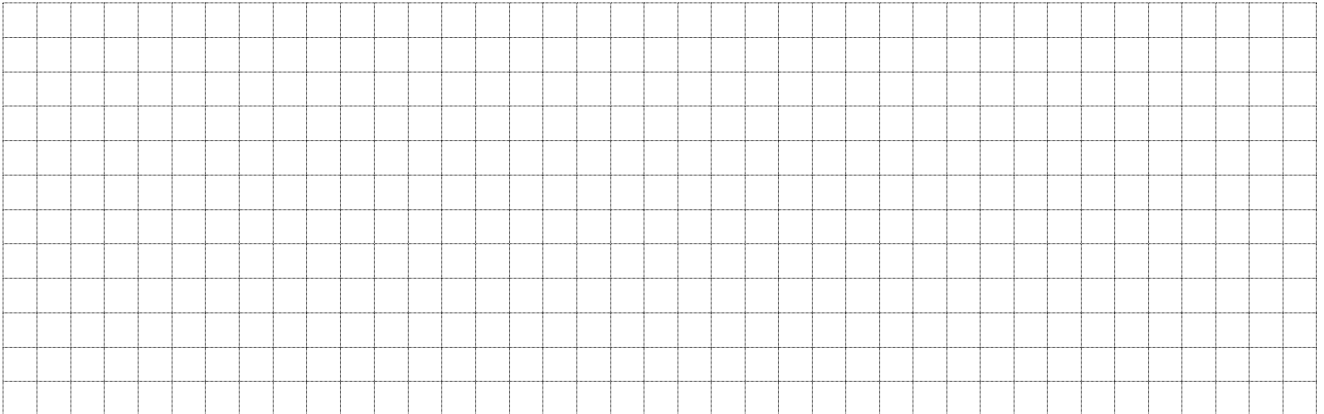
11.14. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(5;-7)$ і паралельна: 1) осі абсцис; 2) осі ординат. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки M і $P(-1;4)$.



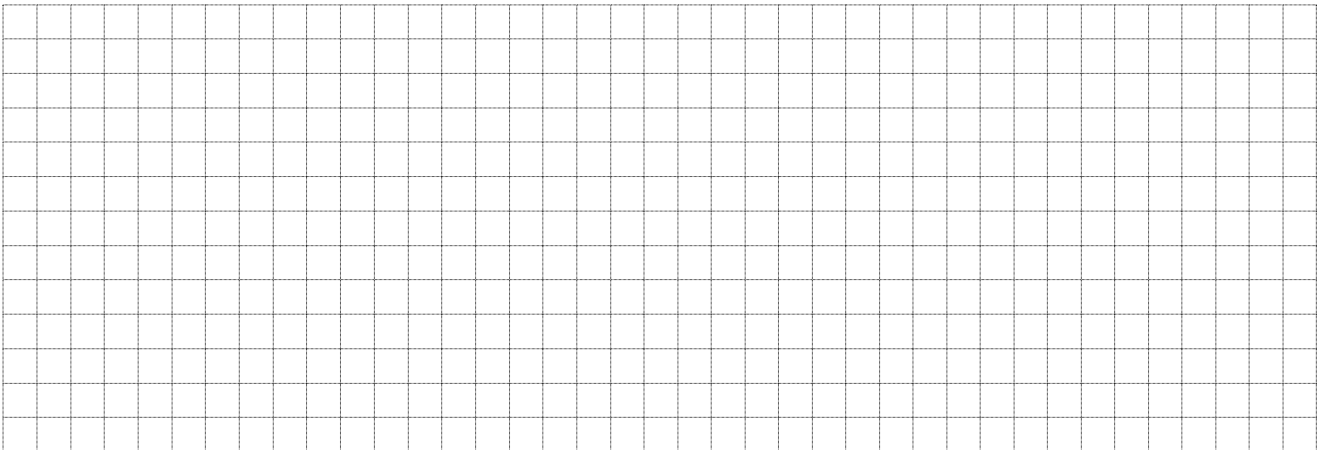
11.15. Запишіть рівняння прямої, зображеної на рисунку.



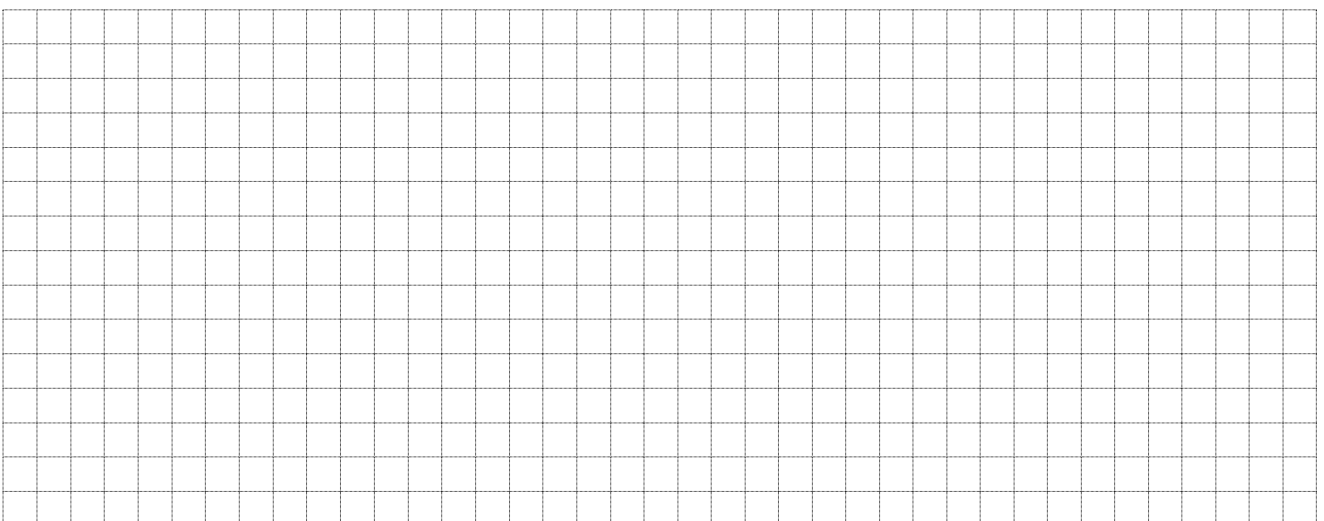
11.16. Знайдіть координати перетину прямих $9x + 5y = 1$ і $2x + 3y = 8$.



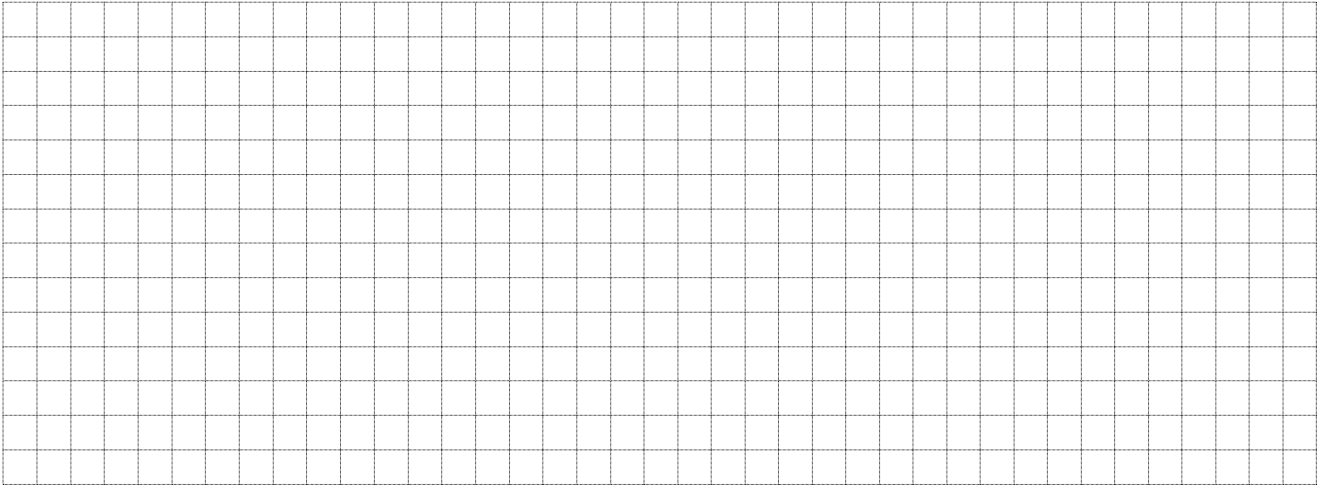
11.17. Точки $A(-4;1)$, $B(3;4)$ і $C(-1;-6)$ – вершини трикутника ABC . Складіть рівняння прямої, яка містить медіану AM трикутника ABC .



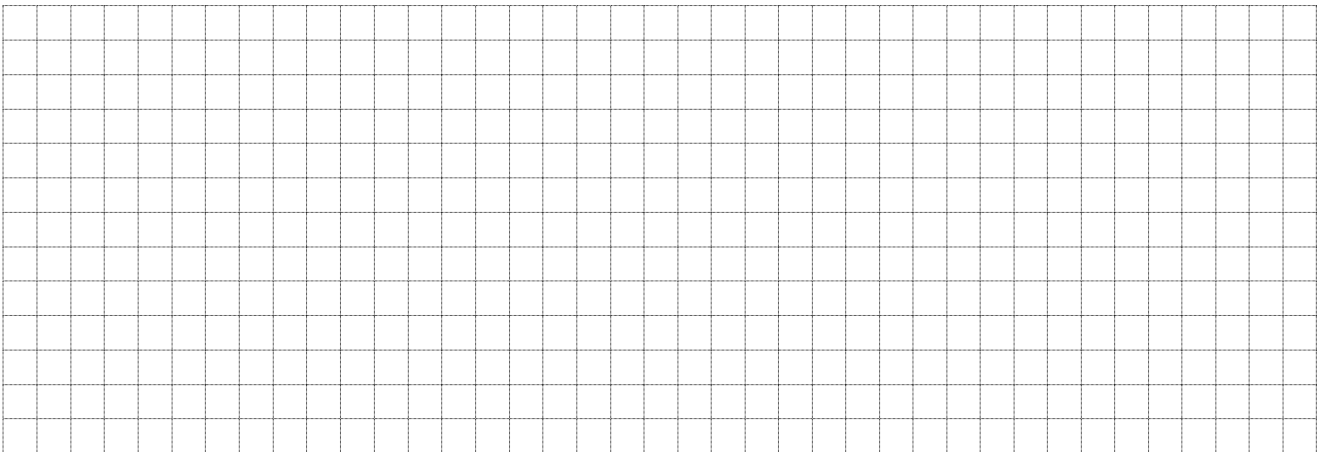
11.18. При якому значенні α точки $K(5;-4)$, $P(-1; \alpha)$ і $F(3;-9)$ лежать на одній прямій?



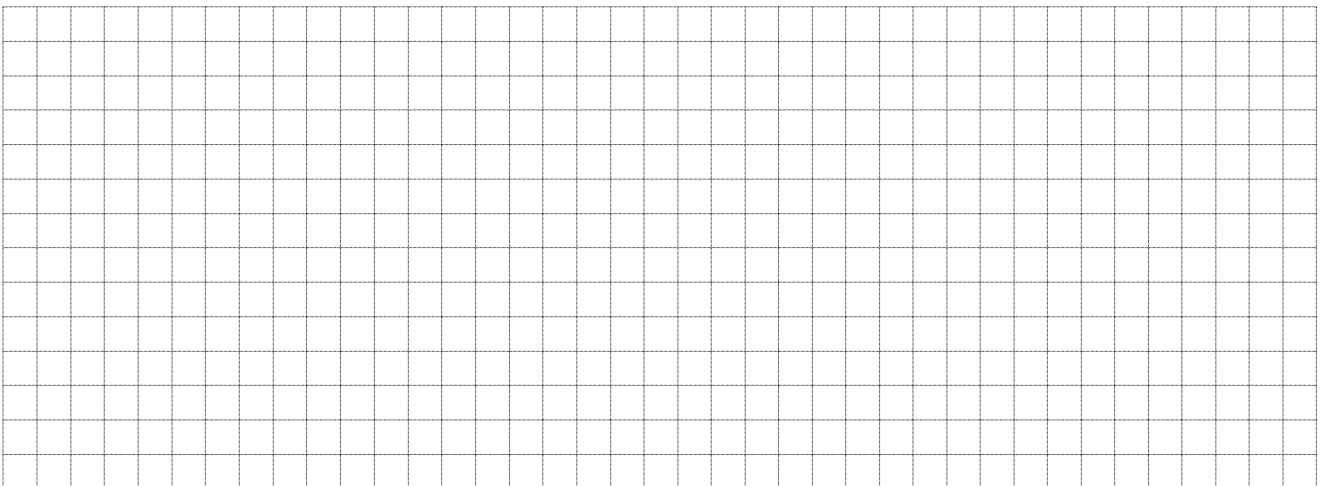
11.19. Доведіть, що коло $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 17$ і пряма $x - y = 8$ перетинаються, і знайдіть координати точок їх перетину.



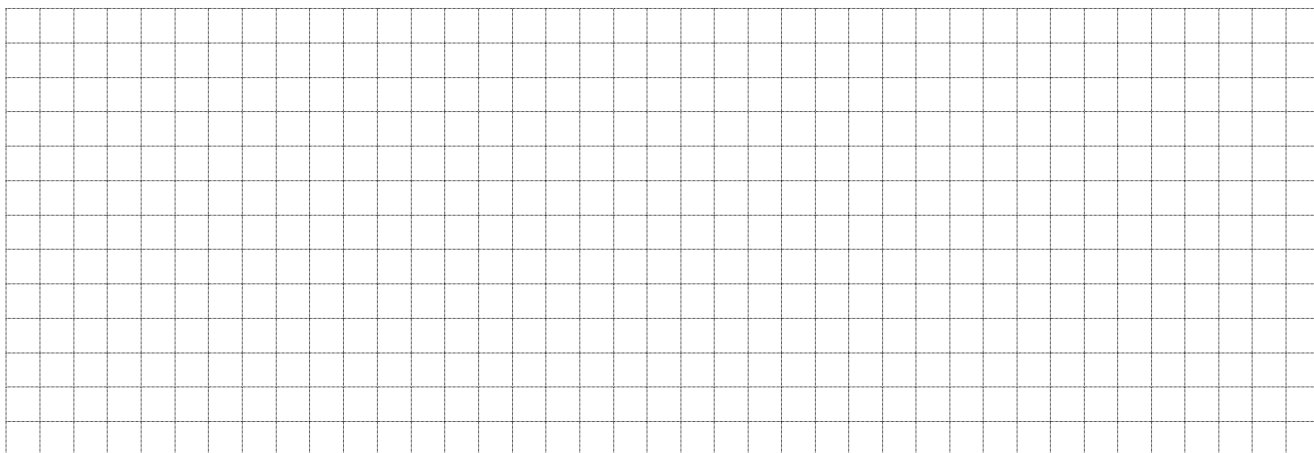
11.20. Знайдіть відстань від початку координат до прямої $2x - y = 4$.



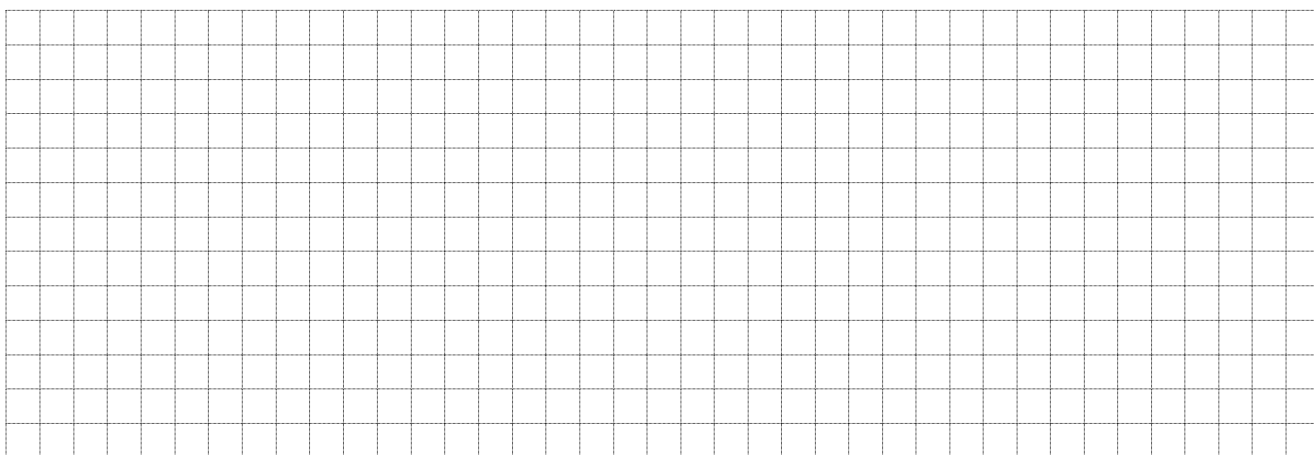
11.21. Знайдіть периметр трикутника, обмеженого осями координат і прямою $7y - 2x = 28$.



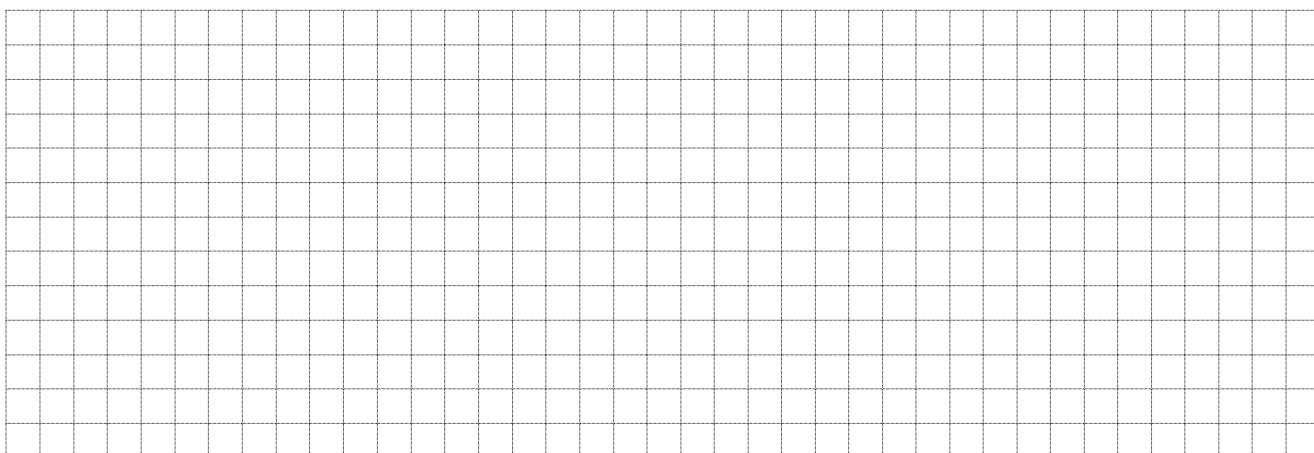
11.22. Знайдіть площу трикутника, обмеженого прямими $3x + 2y = 6$ і $y = -\frac{9}{4}x$ та віссю ординат.



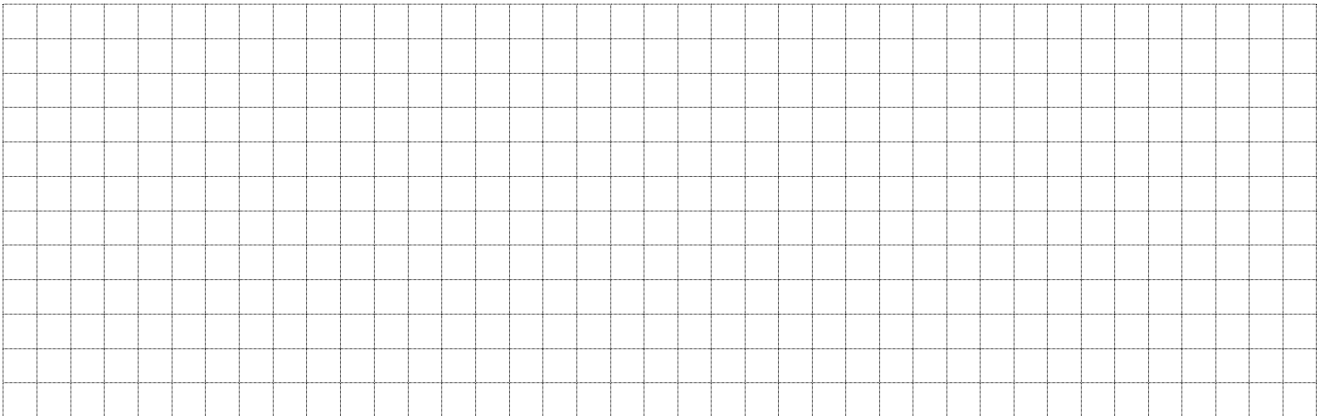
11.23. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $C(3;-1)$, кутовий коефіцієнт якої дорівнює: 1) -2 ; 2) 0 .



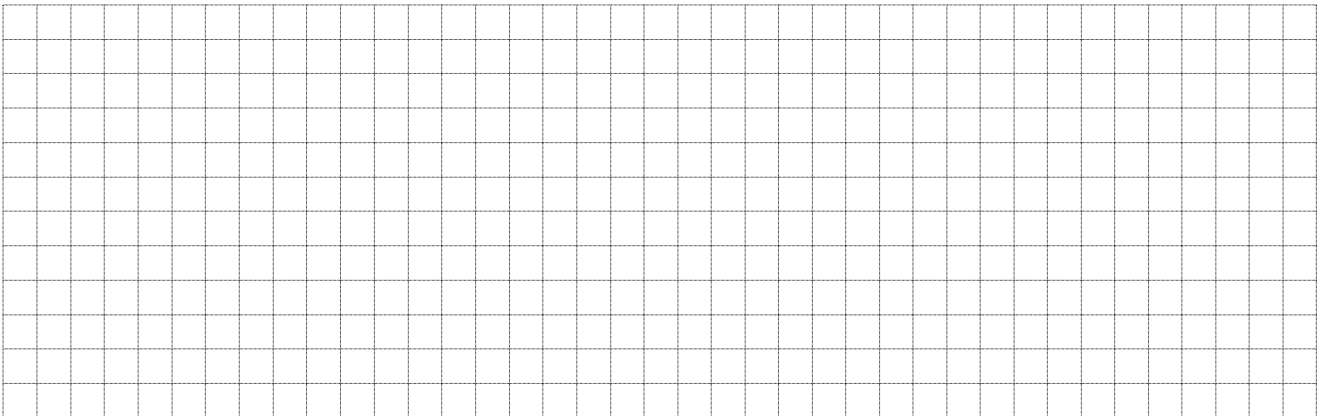
11.24. Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої, яка проходить через точки: 1) $A(3;2)$ і $B(-4;1)$; 2) $A(5;-7)$ і $B(4;-7)$.



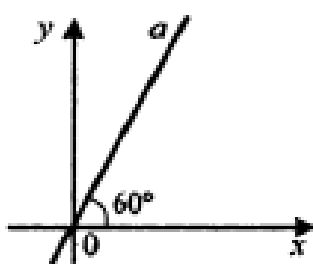
11.25. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $K(-2;5)$ і паралельна прямій $y = 4x - 2$.



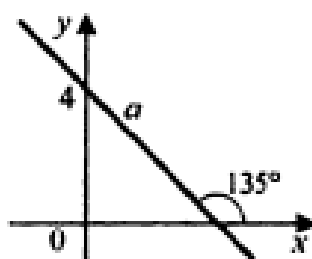
11.26. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $F(3;-5)$ і утворює з додатним напрямом осі абсцис кут: 1) 45° ; 2) 135° .



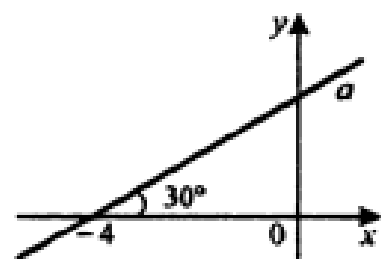
11.27. Запишіть рівняння прямої, зображеної на рисунку.



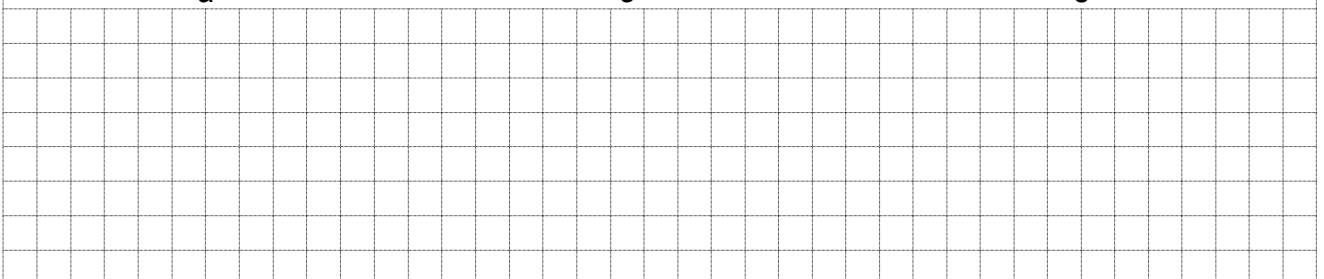
а



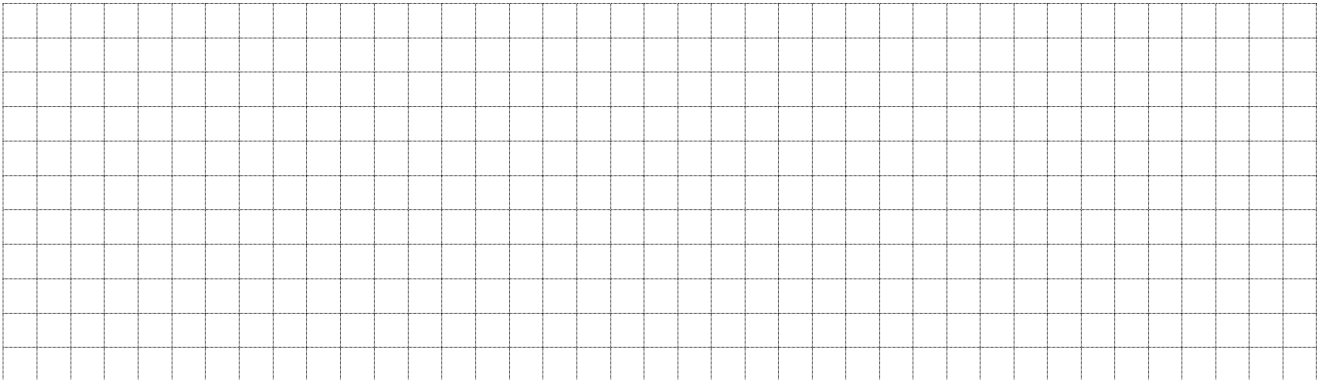
б



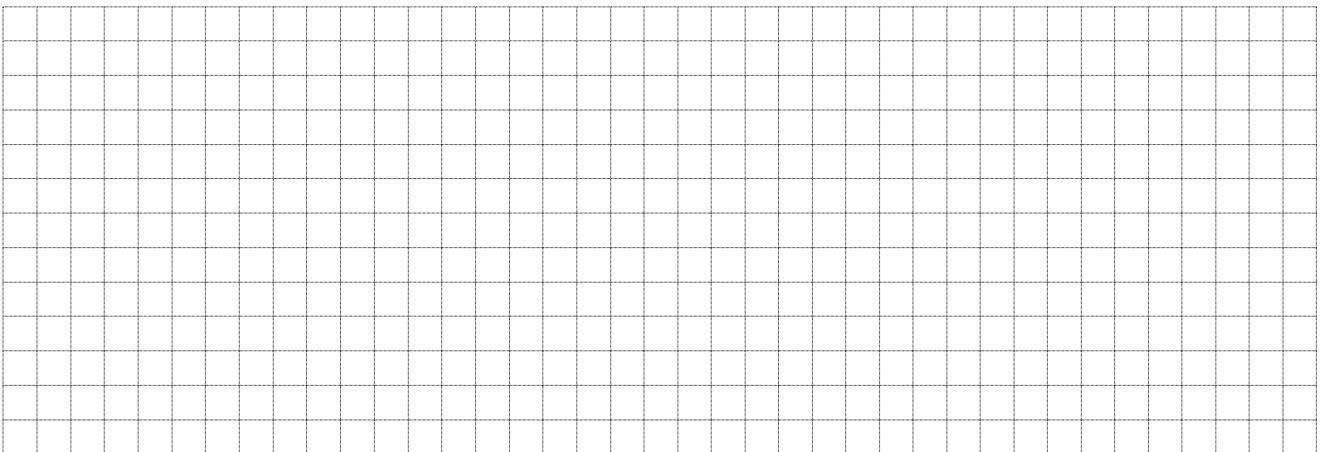
в



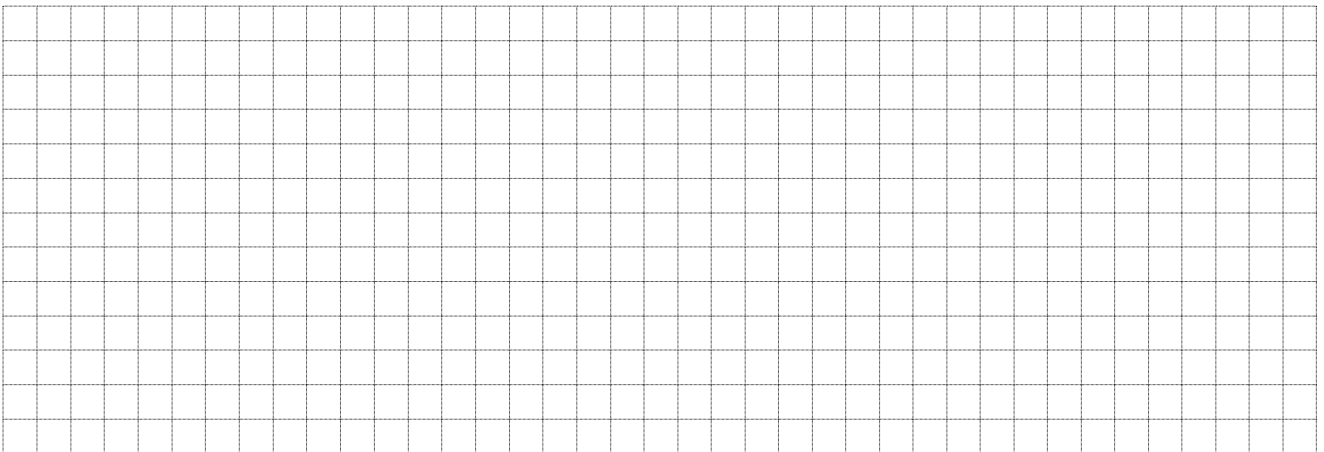
- 11.28. Серед даних прямих укажіть пари паралельних прямих:
1) $3x - 4y = -8$; 2) $6x - 8y = 9$; 3) $4x - 7y = -6$; 4) $5x - 10y = -7$;
5) $x - 2y = 1$.



- 11.29. Складіть рівняння прямої, яка паралельна прямій $y = 3x + 4$ і перетинає пряму $y = -4x + 16$ у точці, що належить осі абсцис.

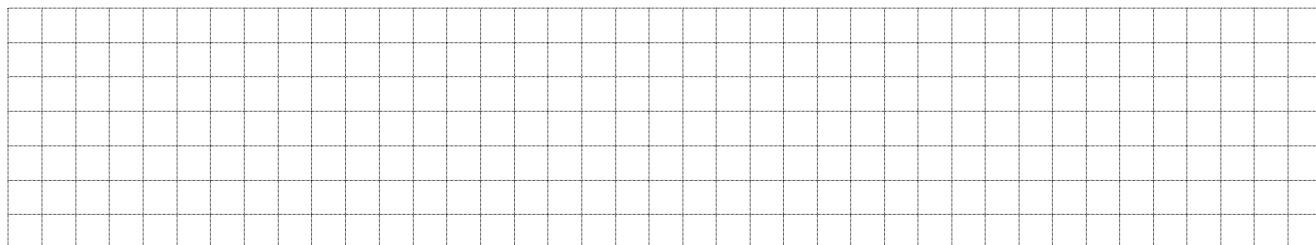


- 11.30. Дано трикутник ABC , де $A(1;-2)$, $B(3;4)$, $C(-1;2)$. Знайдіть рівняння прямої, яка проходить через вершину B і перпендикулярна до медіани, проведеної з вершини A .



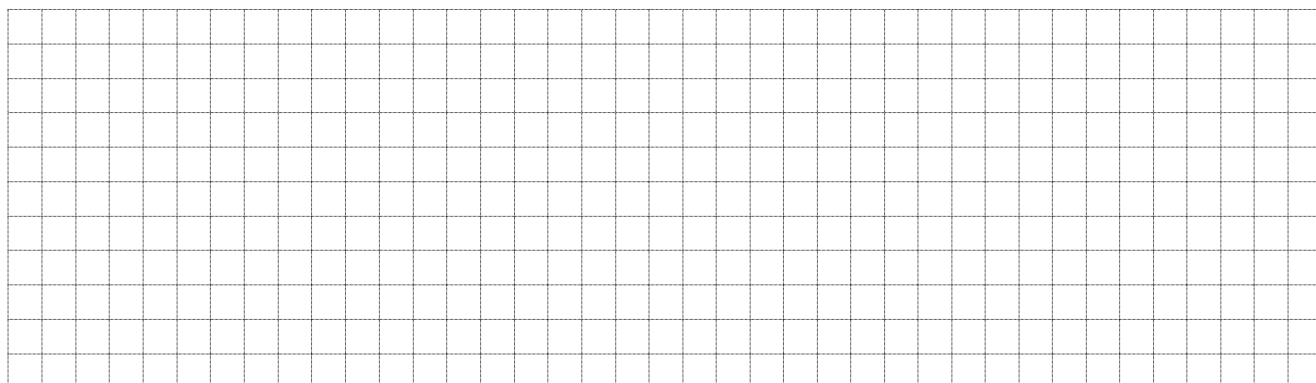
**Додаткові вправи,
які було запропоновано під час проведення ЗНО**

11.31. Точка **C** лежить на осі **x** прямокутної системи координат і знаходиться на відстані **5** одиниць від точки **A(-2;4)**. Відрізок **AC** перетинає вісь **y**. Знайдіть координати точки **C**.

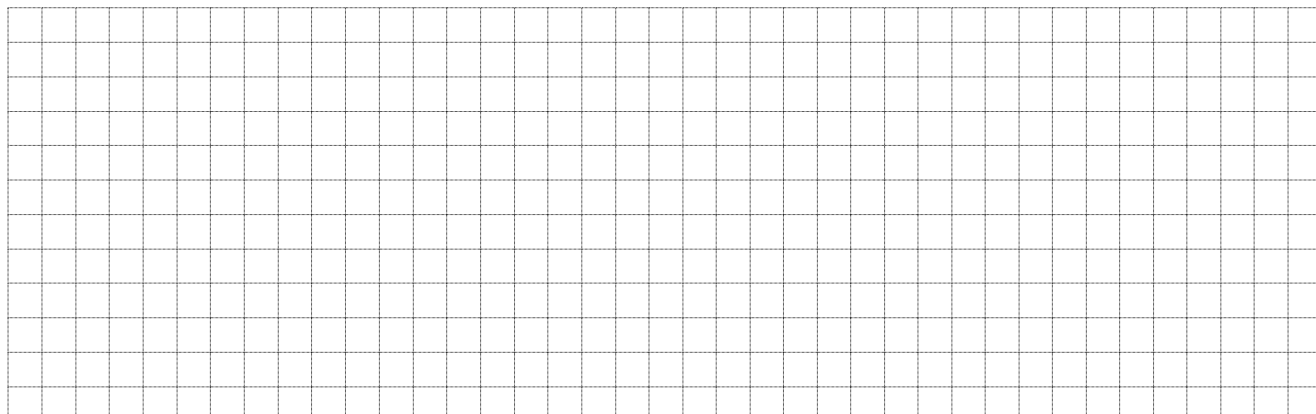


| | | | | |
|--------|--------|---------|--------|--------|
| А | Б | В | Г | Д |
| (1; 0) | (0; 1) | (-5; 0) | (0; 0) | (3; 4) |

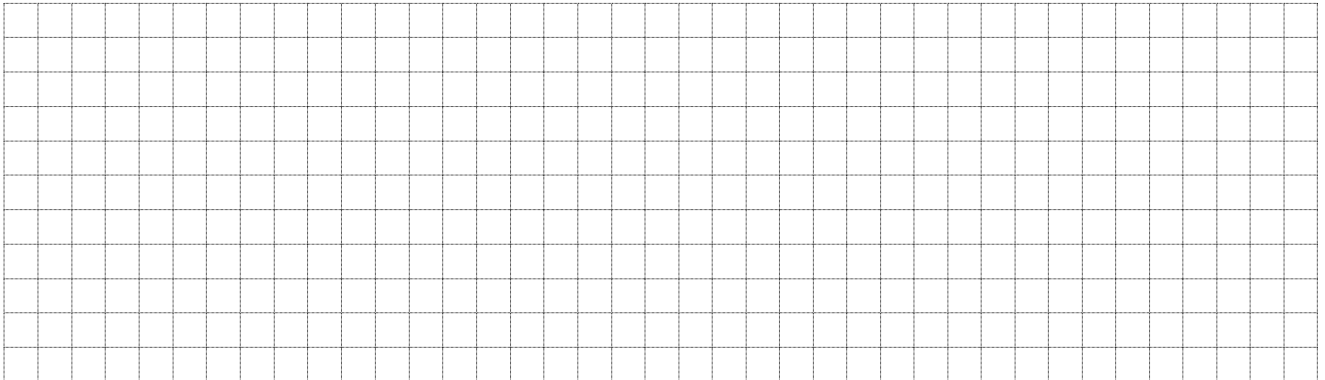
11.32. Центр кола, заданого рівнянням $x^2 - 8x + y^2 + 7 = 0$, збігається з точкою перетину діагоналей **AC** і **BD** паралелограма **ABCD**. Обчисліть площу цього паралелограма, якщо **A(-4;-3)** і **B(0;3)**.



11.33. У прямокутній системі координат на площині **xу** навколо трикутника **ABC** описано коло, задане рівнянням $x^2 - 4x + y^2 = 68$. Визначте довжину сторони **BC**, якщо $\angle A = 45^\circ$.



11.34. У прямокутній системі координат на площині задано трапецію $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). Площа трапеції дорівнює 42 од^2 . Визначте абсцису вершини D , якщо $A(-1;3)$, $B(1;6)$, $C(7;6)$.

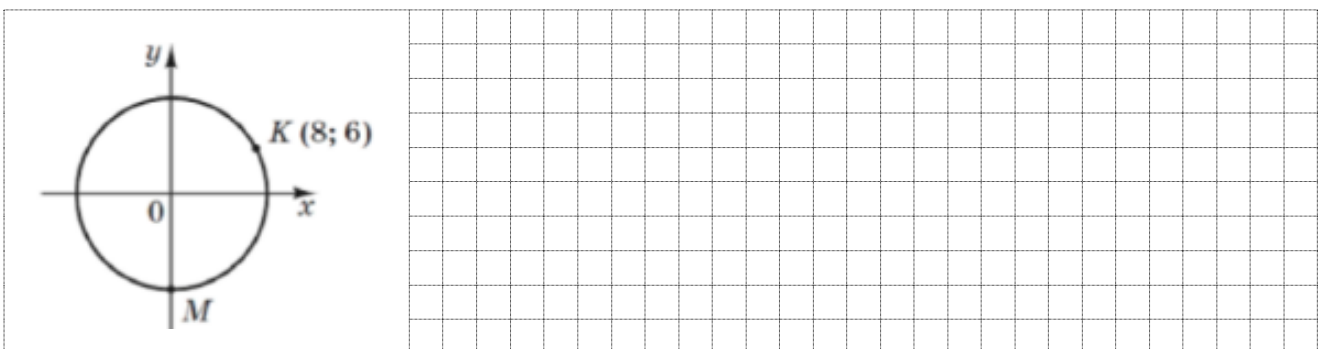


11.35. Точка $A(3;1)$ належить колу з центром у точці $O(-2;1)$. Знайдіть радіус цього кола.



| А | Б | В | Г | Д |
|----|---|---|---|---|
| 10 | 5 | 3 | 2 | 1 |

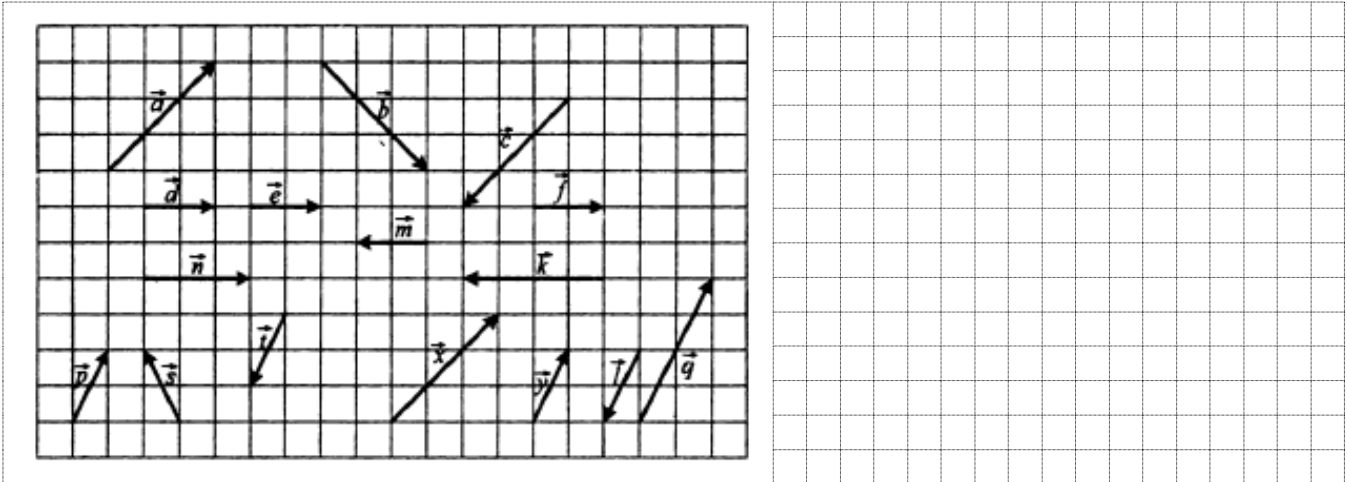
11.36. На координатній площині xOy зображено коло, центр якого збігається з початком координат (див. рисунок). Точки $K(8;6)$ і $M(x;y)$ належать цьому колу. Визначте координати точки M .



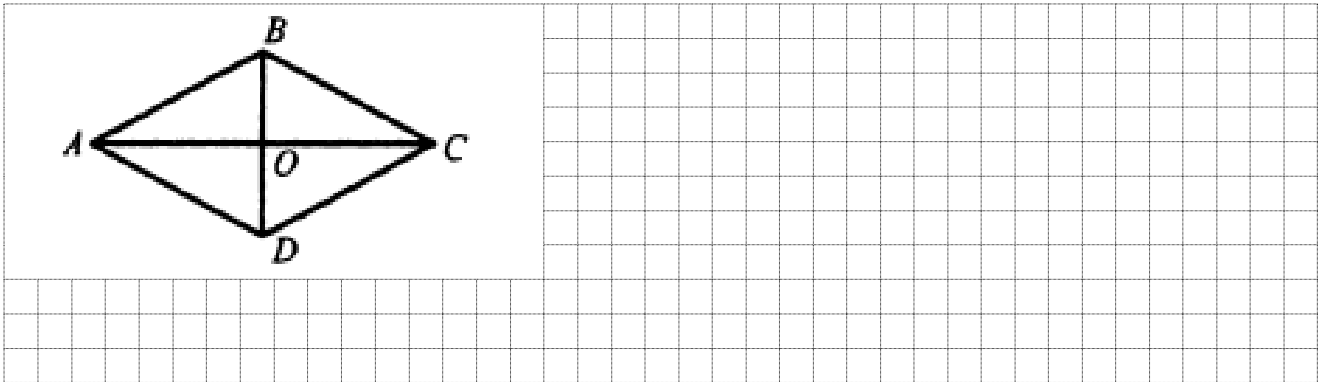
| А | Б | В | Г | Д |
|-----------|----------|-----------|-----------|----------|
| $(-10;0)$ | $(10;0)$ | $(0;-14)$ | $(0;-10)$ | $(0;10)$ |

Заняття 12
ПОНЯТТЯ ВЕКТОРА. КООРДИНАТИ ВЕКТОРА.
ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

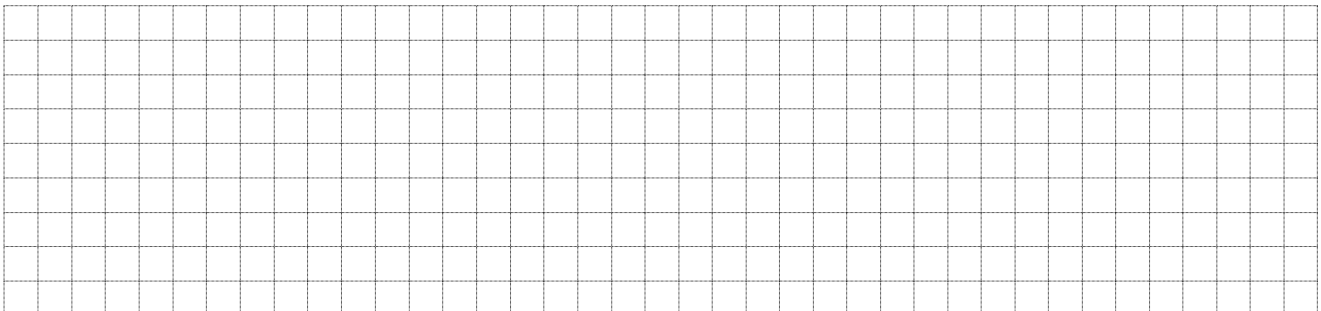
12.1. Які з векторів, зображених на рисунку, є: 1) рівними; 2) співнапрямленими; 3) протилежно напрямленими; 4) колінеарними; 5) мають рівні модулі?



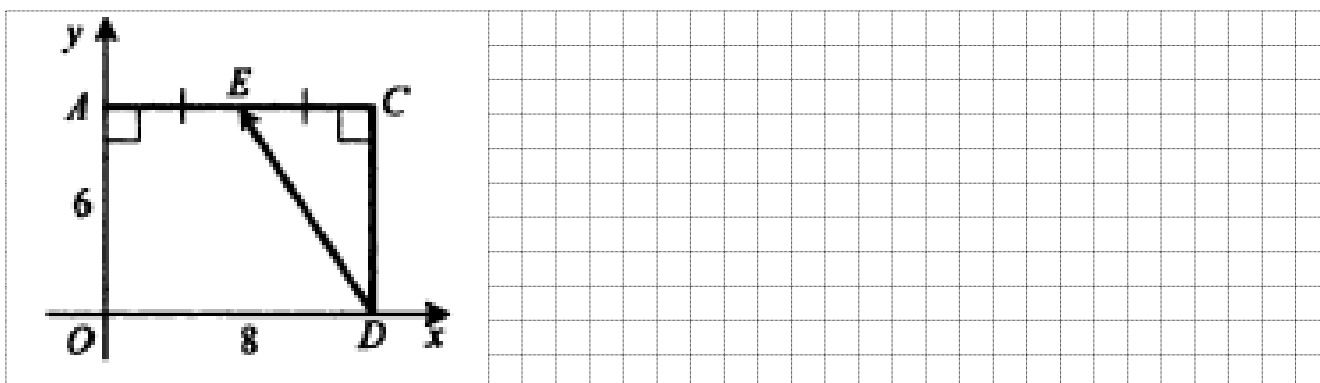
12.2. Чотирикутник $ABCD$ – ромб. Укажіть вектор, який дорівнює вектору: 1) \overrightarrow{CD} ; 2) \overrightarrow{DC} ; 3) \overrightarrow{BO} ; 4) \overrightarrow{DO} .



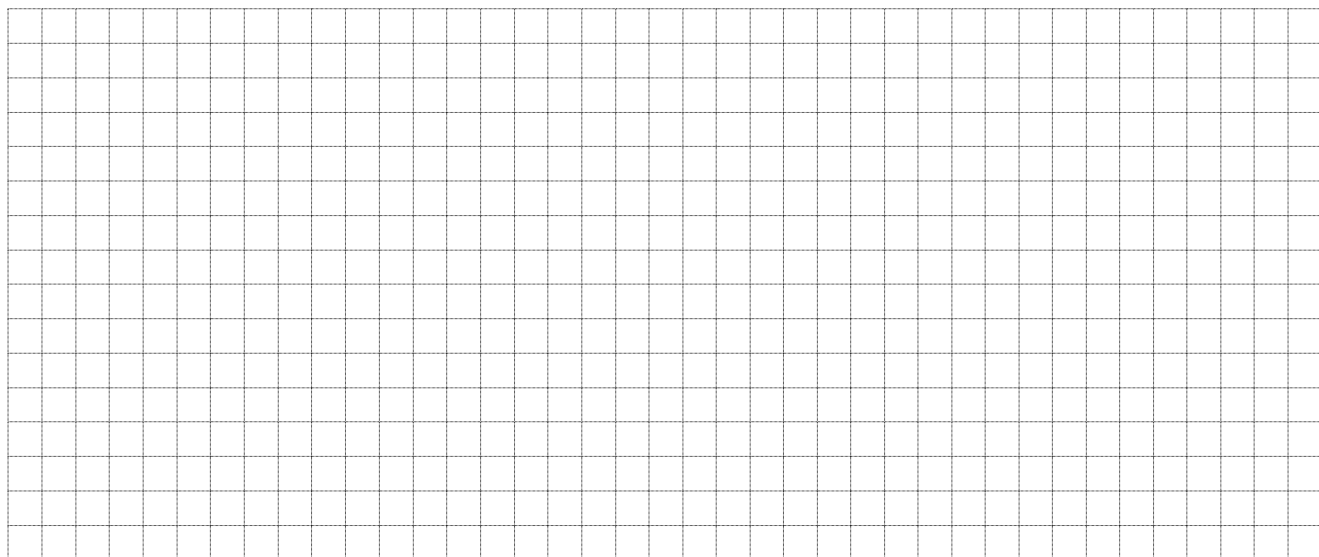
12.3. Знайдіть координати вектора \overrightarrow{AB} , якщо: 1) $A(5;-7), B(3;1)$; 2) $A(-8;0), B(0;8)$.



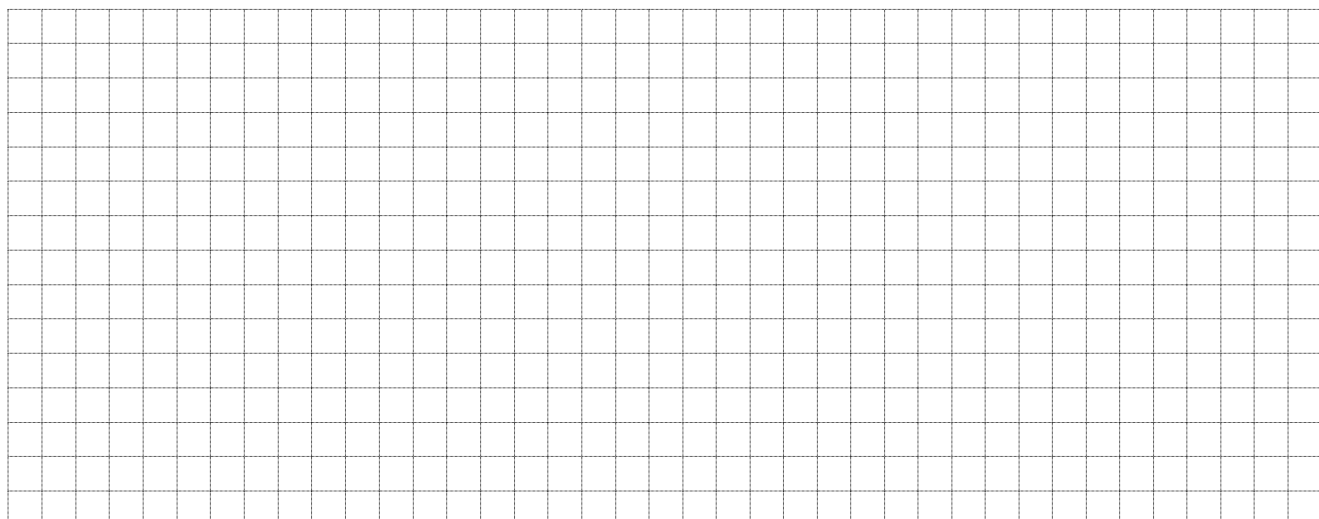
12.4. Знайдіть координати вектора \overline{DE} .



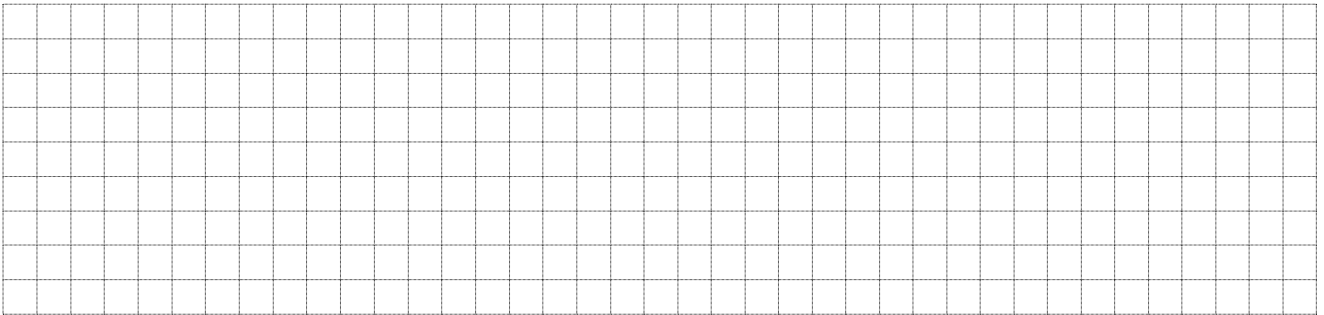
12.5. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(3;-4)$, $B(-2;7)$, $C(-4;16)$ і $D(1;5)$ є паралелограмом.



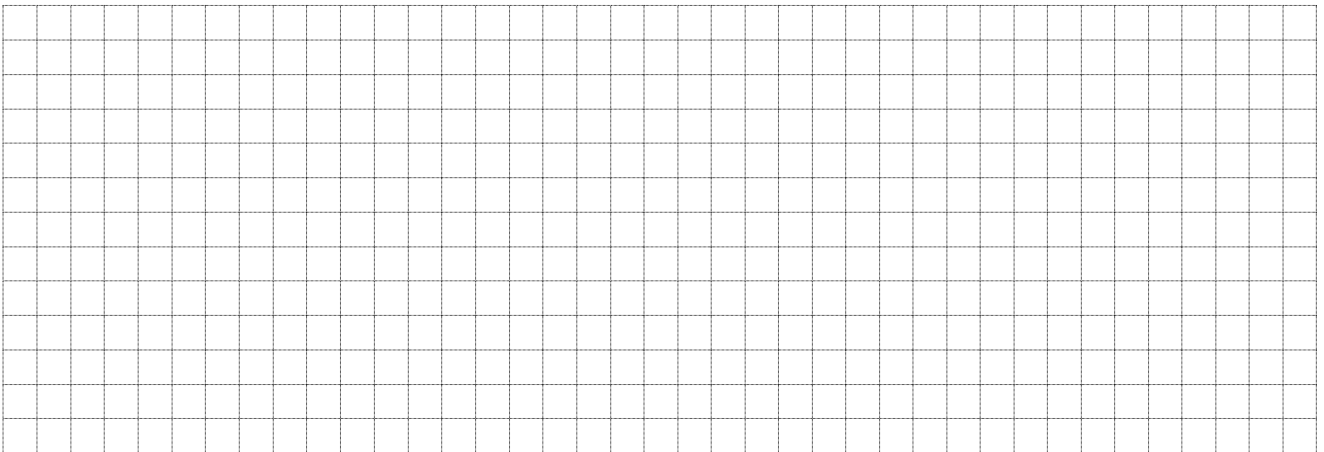
12.6. Дано координати трьох вершин паралелограма $ABCD$: $A(3;-2)$, $B(-4;1)$, $C(-2;-3)$. Знайдіть координати вершини D .



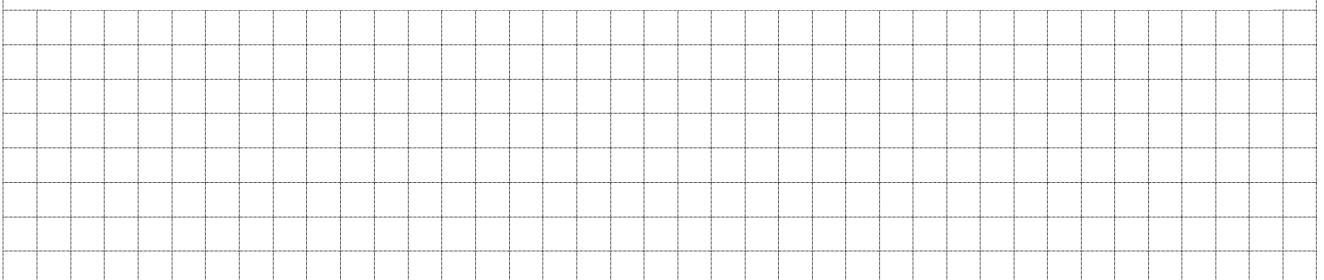
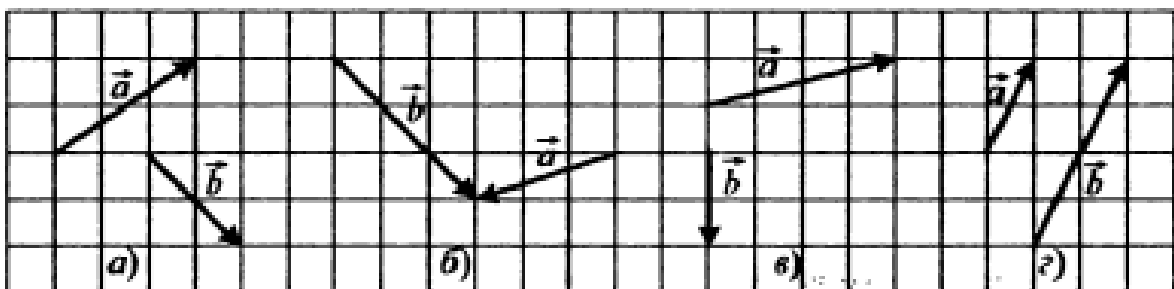
12.7. Серед векторів знайдіть ті, які мають рівні модулі:
 $\vec{a}(3;-4)$; $\vec{b}(-4;2)$; $\vec{c}(3;\sqrt{11})$; $\vec{d}(-2;-4)$; $\vec{e}(-1;-2\sqrt{6})$; $\vec{f}(-4;5)$.



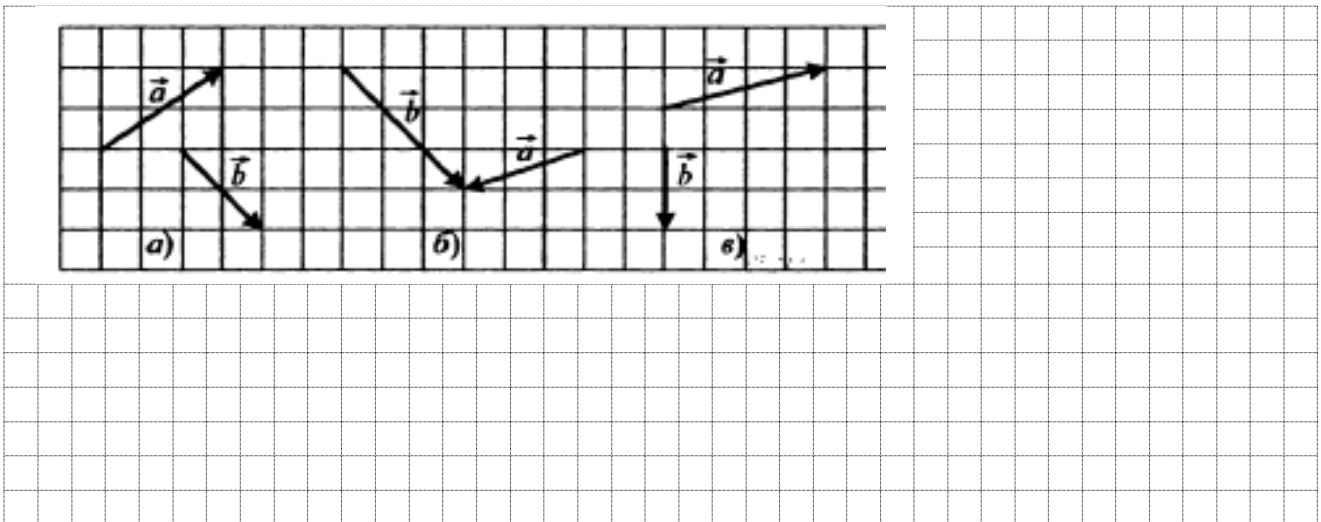
12.8. Модуль вектора $\vec{m}(x;y)$ дорівнює $\sqrt{5}$, а координата x цього вектора більша за координату y на 1. Знайдіть координати вектора \vec{m} .



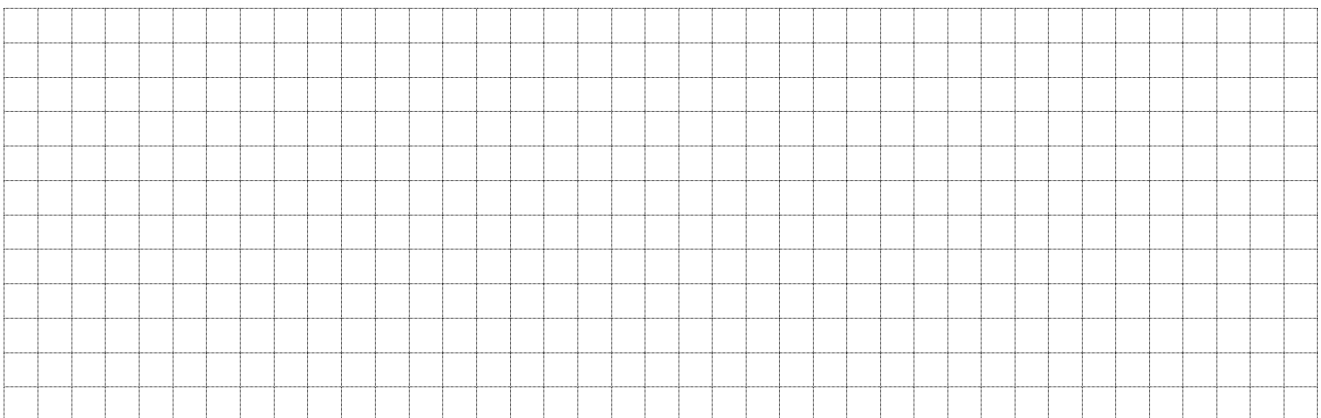
12.9. За допомогою правила трикутника побудуйте суму векторів \vec{a} і \vec{b} , зображених на рисунку.



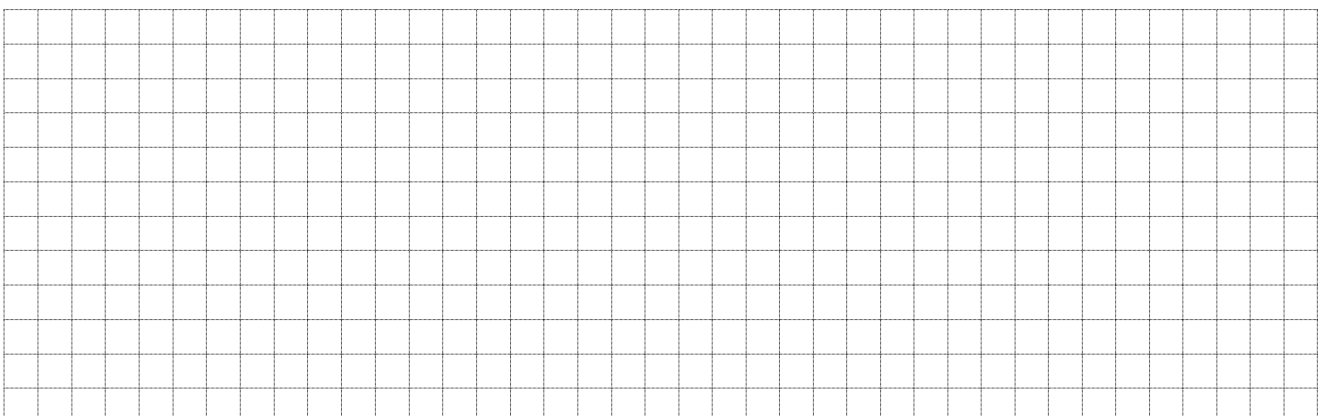
12.10. За допомогою правила паралелограма побудуйте суму векторів \vec{a} і \vec{b} , зображених на рисунку. Побудуйте вектор $\vec{a} - \vec{b}$.



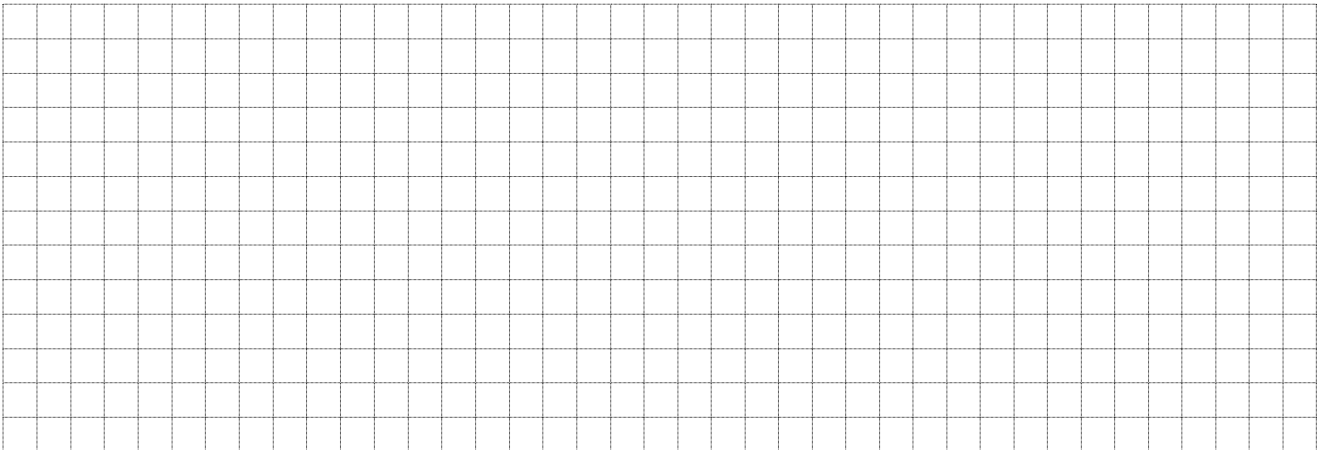
12.11. Чотирикутник $ABCD$ – паралелограм. Знайдіть: 1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$; 3) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DC}$.



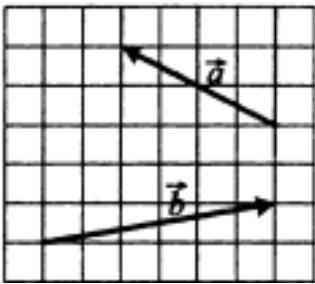
12.12. Дано вектори $\vec{a}(4;-5)$ і $\vec{b}(-1;7)$. Знайдіть: 1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $|\vec{a} + \vec{b}|$; 4) $|\vec{a} - \vec{b}|$.



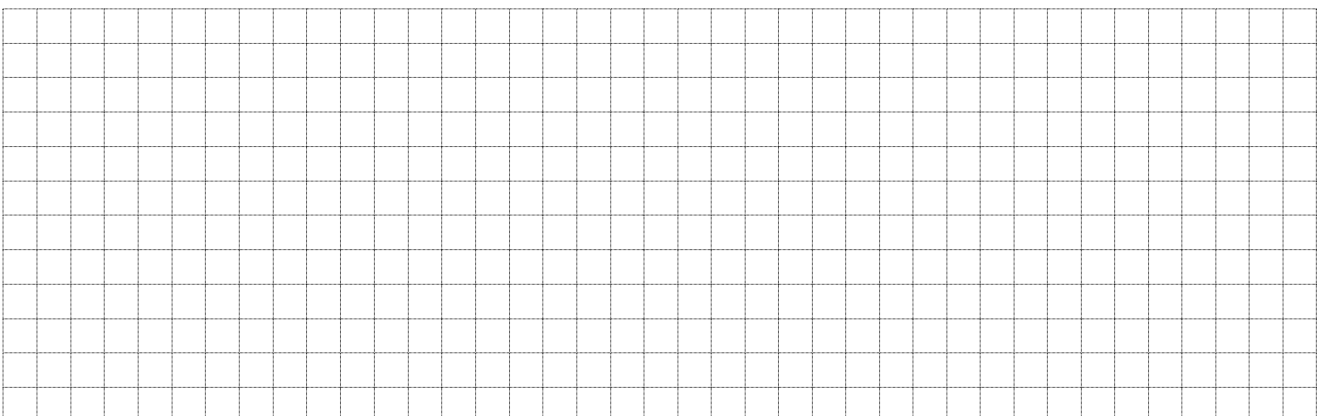
12.13. Знайдіть координати векторів \vec{a} і \vec{b} , якщо їх сума має координати $(5; -2)$, а різниця – $(7; 5)$.



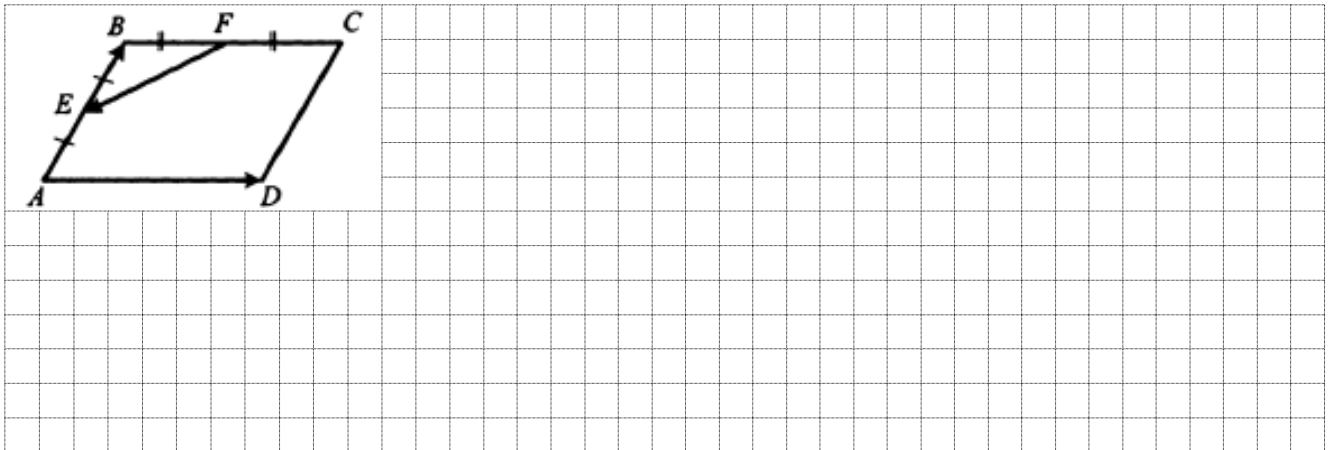
12.14. Дано вектори. Побудуйте вектор: 1) $2\vec{a}$; 2) $-\frac{2}{3}\vec{b}$; 3) $\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$.



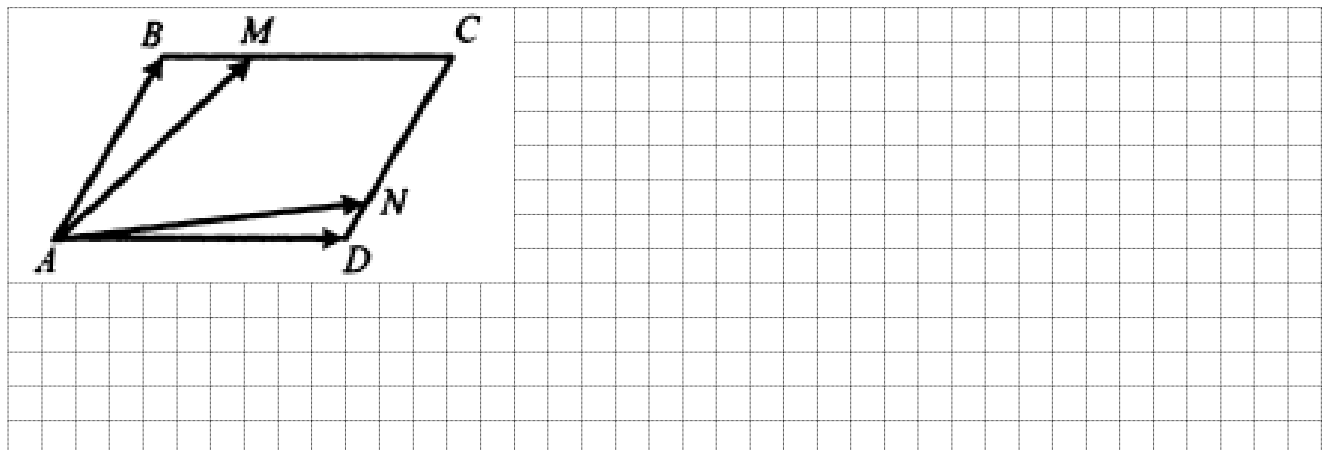
12.15. Побудуйте два неколінеарних вектори \vec{m} і \vec{n} . Позначте довільну точку та відкладіть від неї вектор: 1) $3\vec{m} - 2\vec{n}$; 2) $\frac{1}{4}\vec{m} + \frac{2}{5}\vec{n}$.



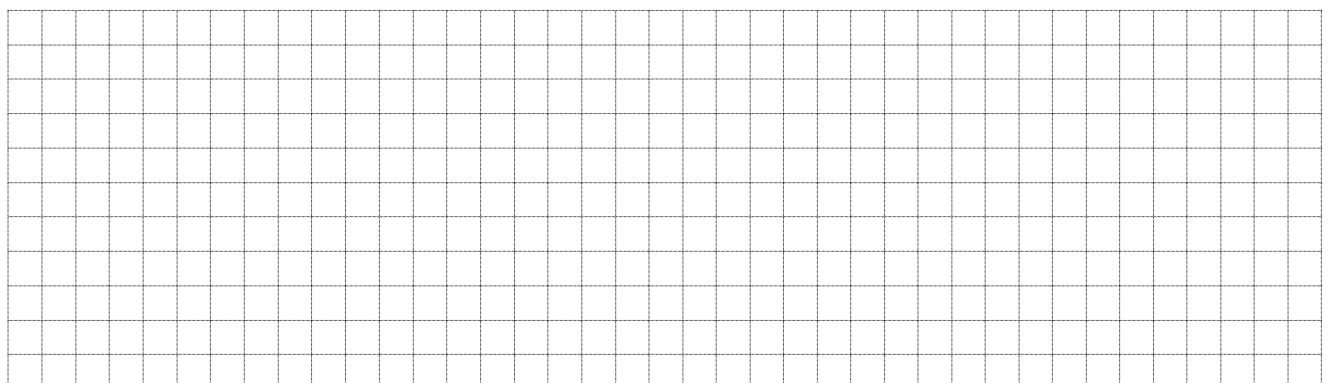
12.16. Точки E і F – середини сторін AB і BC паралелограма $ABCD$. Виразіть вектор \overrightarrow{FE} через вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.



12.17. На сторонах BC і CD паралелограма $ABCD$ позначено точки M і N , причому $BM = \frac{1}{3}BC$, $CN = \frac{4}{5}CD$. Виразіть вектори \overrightarrow{AM} і \overrightarrow{AN} через вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.



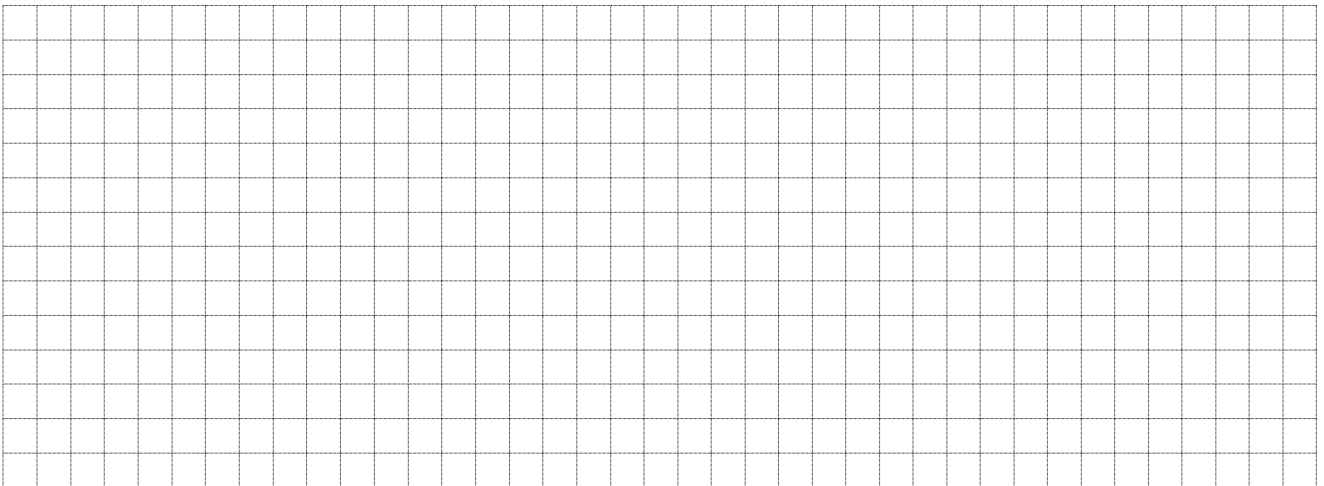
12.18. Знайдіть координати вектора \vec{b} , колінеарного вектора $\vec{a}(-6;8)$, якщо $|\vec{b}| = 40$.



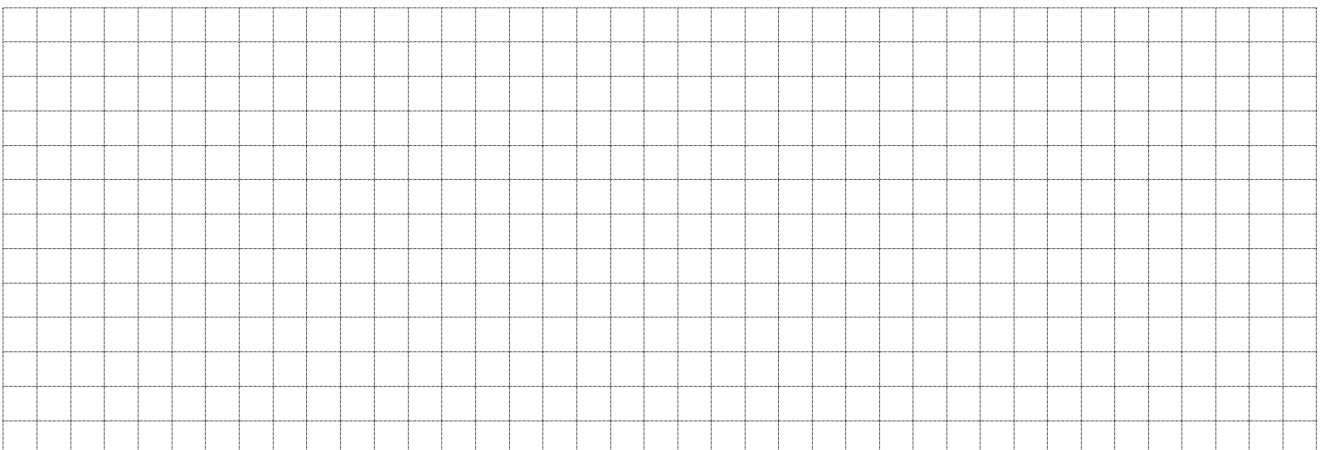
12.19. Чи лежать точки $A(4;2)$, $B(5;6)$ і $C(7;14)$ на одній прямій?



12.20. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-4;-5)$, $B(-3;2)$, $C(3;4)$ і $D(8;-1)$ є трапецією.



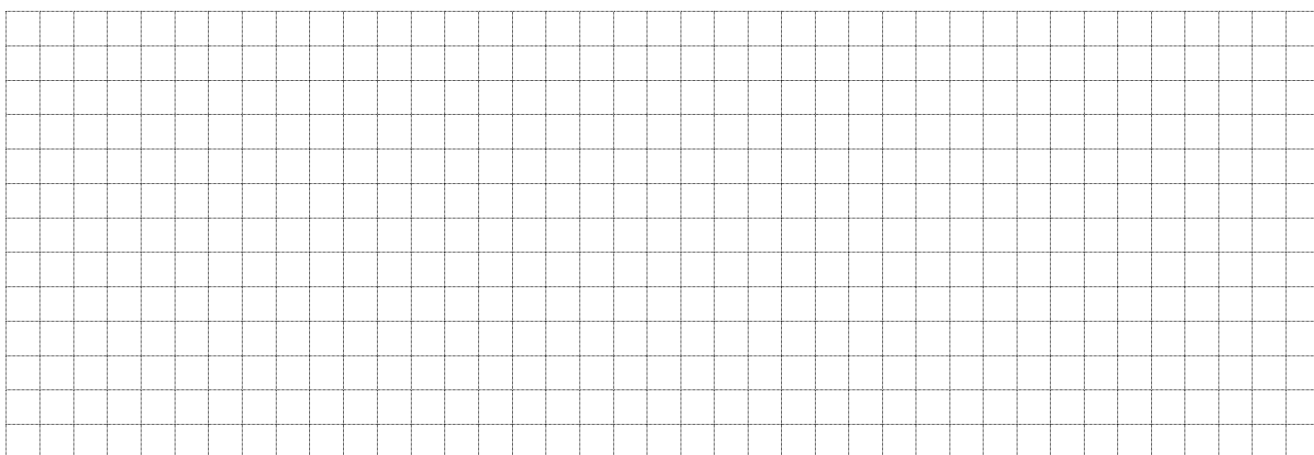
12.21. Кут між векторами \vec{a} і \vec{b} дорівнює 120° , $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 6$. Знайдіть:
1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 2) $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot \vec{a}$.



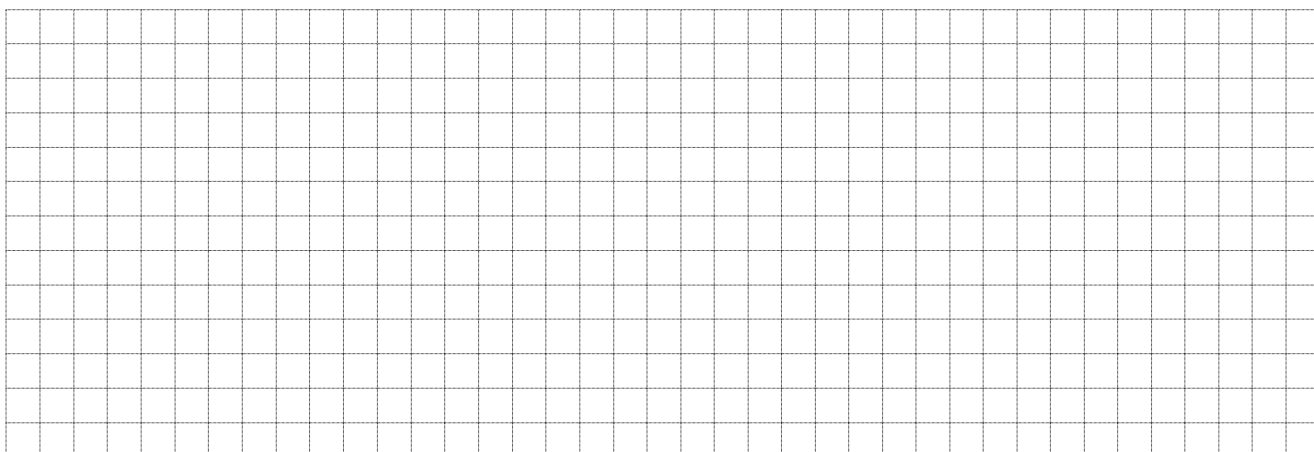
12.22. Кут між векторами дорівнює 30° , $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. Знайдіть скалярний добуток $(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$.



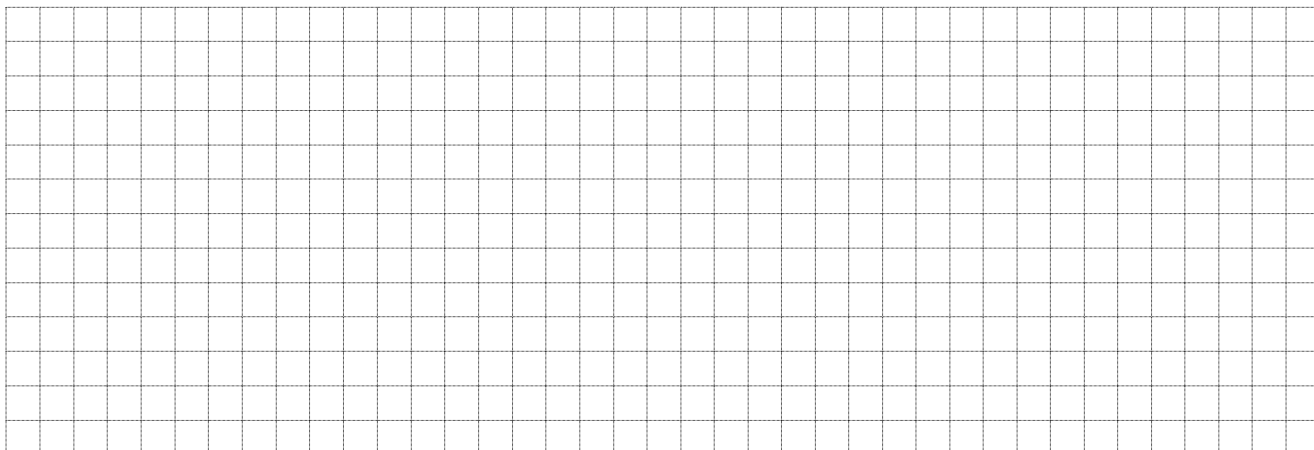
12.23. Знайдіть скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} , якщо:
1) $\vec{a}(3;4)$, $\vec{b}(5;2)$; 2) $\vec{a}(4;-3)$, $\vec{b}(-6;1)$.



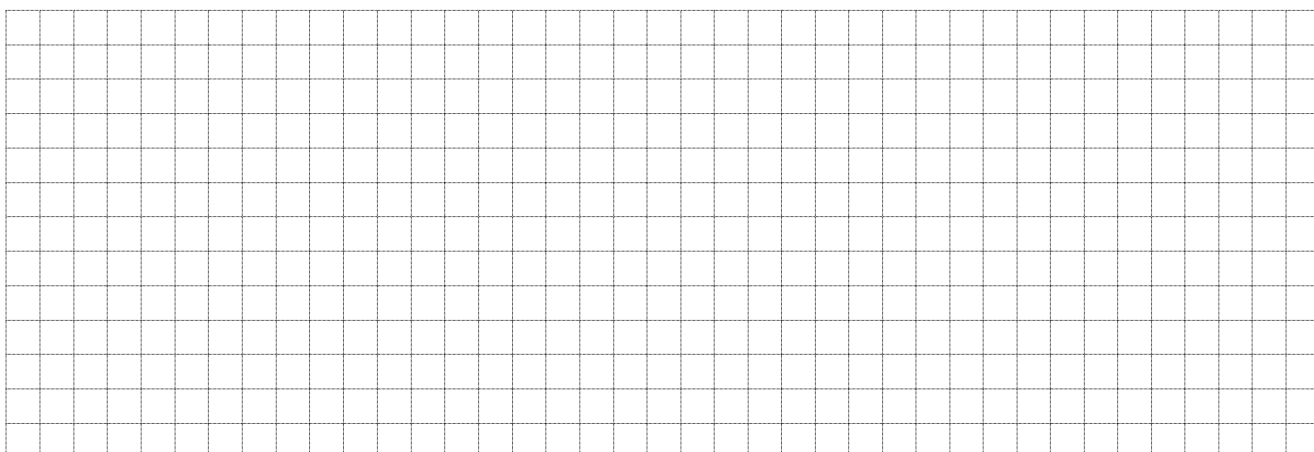
12.24. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}(-2;3)$ і $\vec{b}(3;-4)$.



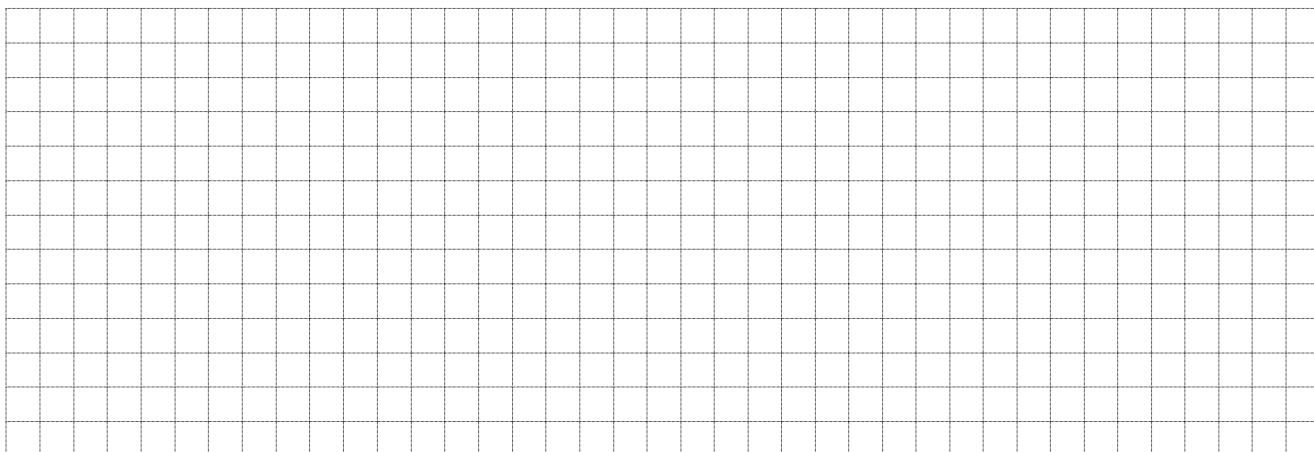
12.25. Знайдіть координати вектора \vec{m} , колінеарного вектору $\vec{n}(-3;1)$, якщо $\vec{m} \cdot \vec{n} = 24$.



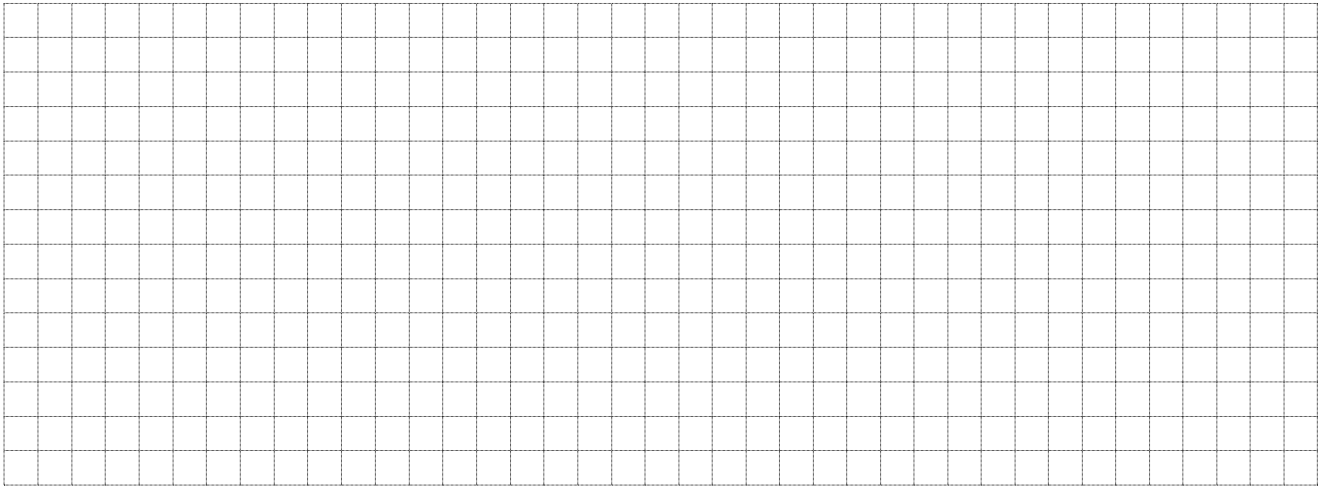
12.26. Дано вектори $\vec{a}(5;2)$ і $\vec{b}(-4;y)$. При якому значенні y вектори \vec{a} і \vec{b} є перпендикулярними?



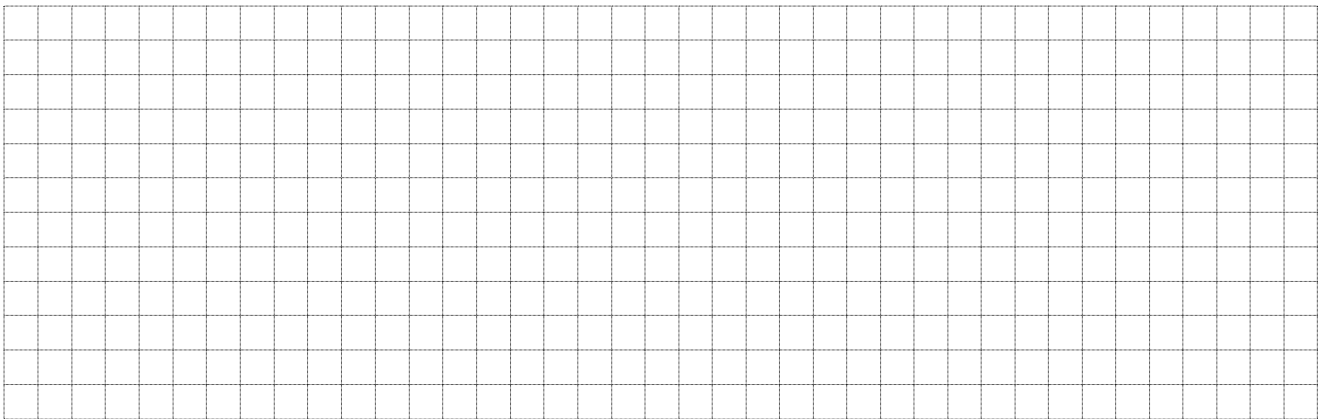
12.27. Дано вектори $\vec{a}(3;-5)$ і $\vec{b}(x;6)$. При яких значеннях x кут між векторами \vec{a} і \vec{b} є: 1) гострим; 2) прямим; 3) тупим?



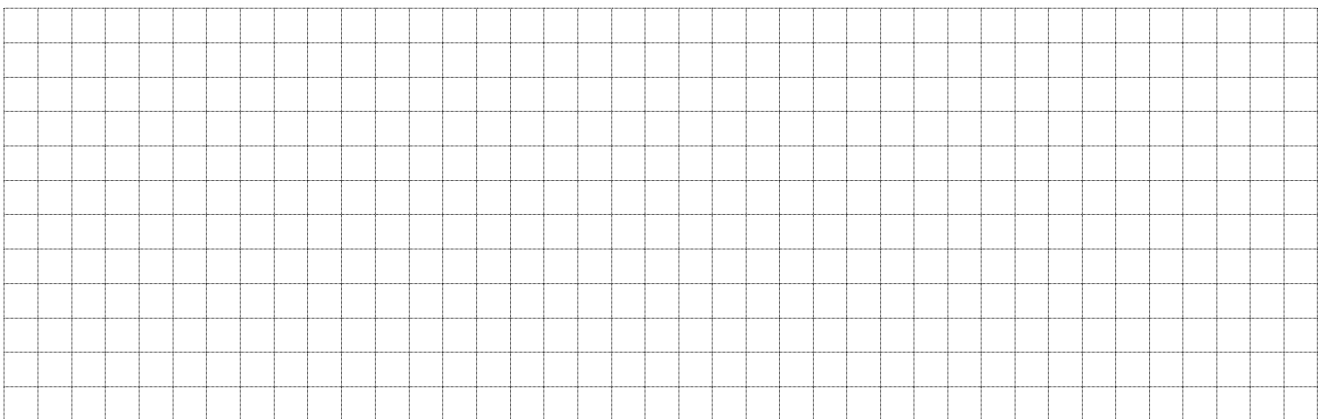
12.28. Дано вектори \vec{a} і \vec{b} , $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Знайдіть:
1) $|\vec{a} + \vec{b}|$; 2) $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.



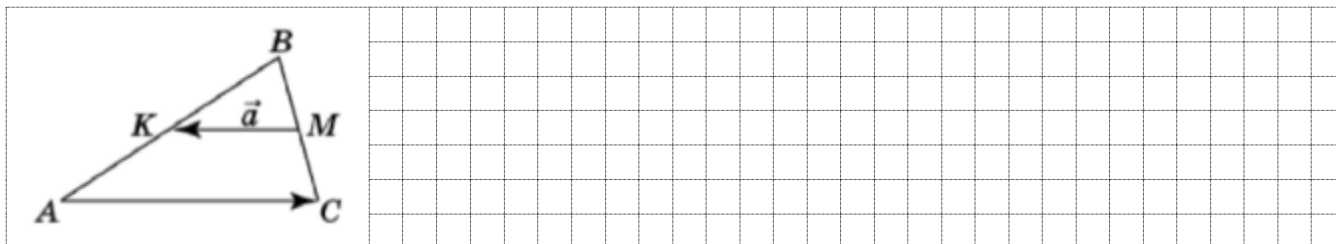
12.29. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a} = \vec{m} + 3\vec{n}$ і $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ і $\vec{m} \perp \vec{n}$.



12.30. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A(-2;1)$, $B(2;5)$, $C(5;2)$ і $D(1;-2)$ є прямокутником.

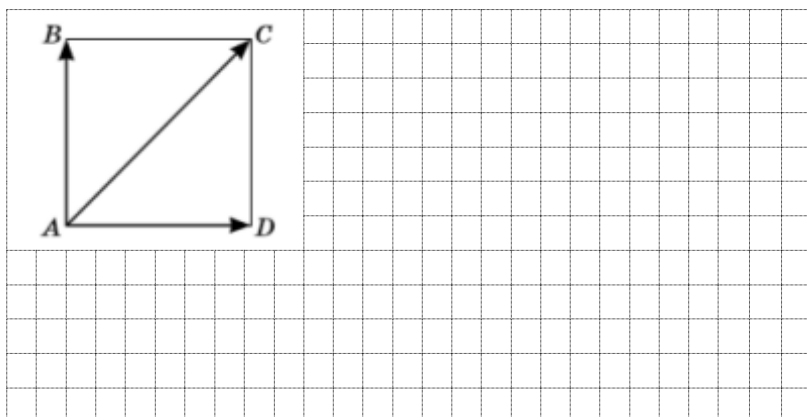


12.34. На рисунку зображено трикутник ABC , точки K і M – середини сторін AB і BC відповідно. Укажіть правильну рівність, якщо $\overrightarrow{MK} = \vec{a}$.



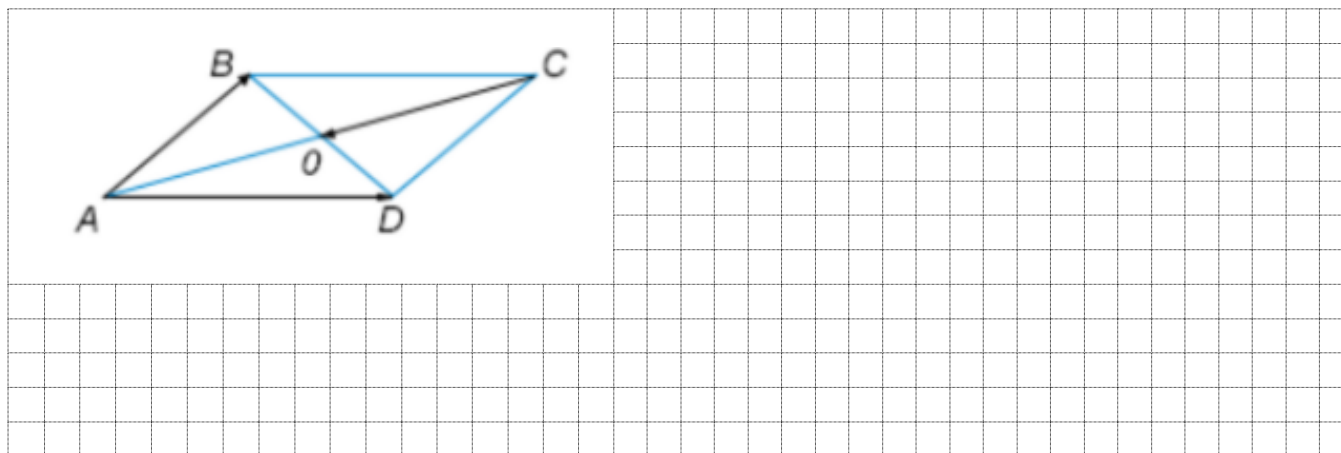
| А | Б | В | Г | Д |
|----------------------------------|--|----------------------------------|---|-----------------------------------|
| $\overrightarrow{AC} = 2\vec{a}$ | $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{a}$ | $\overrightarrow{AC} = -\vec{a}$ | $\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\vec{a}$ | $\overrightarrow{AC} = -2\vec{a}$ |

12.35. На рисунку зображено квадрат $ABCD$. Укажіть правильну векторну рівність.



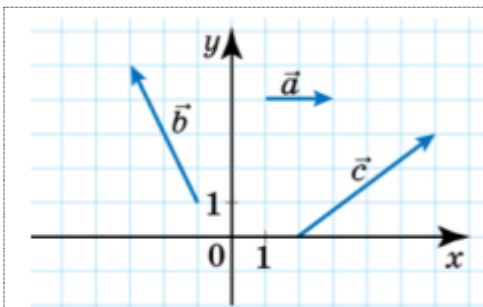
- А $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$
- Б $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$
- В $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
- Г $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$
- Д $\overrightarrow{AC} = -\sqrt{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

12.36. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O (див. рисунок). Укажіть правильну векторну рівність.

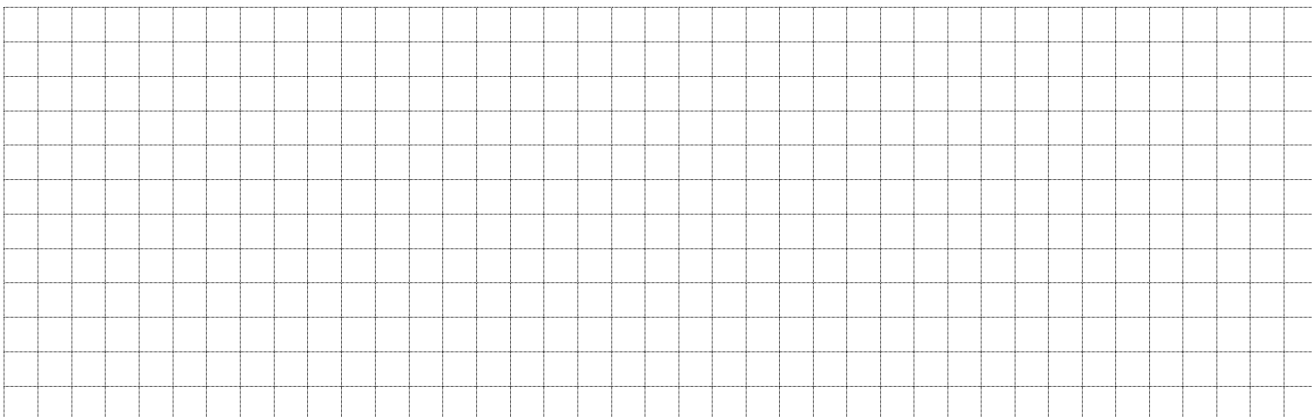


| А | Б | В | Г | Д |
|--|---|--|--|--|
| $\overrightarrow{CO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$ | $\overrightarrow{CO} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$ | $\overrightarrow{CO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$ | $\overrightarrow{CO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$ | $\overrightarrow{CO} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$ |

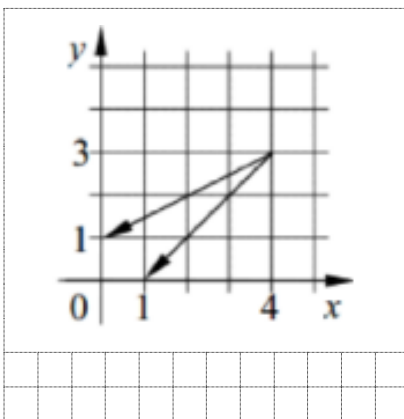
12.37. У прямокутній системі координат на площині зображено вектори \vec{a} , \vec{b} та \vec{c} . Визначте косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ та \vec{c} .



12.38. Паралелограм $ABCD$ побудовано на векторах \vec{a} і \vec{b} як на сторонах. Відомо, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$. Знайдіть величину кута між векторами \vec{a} і \vec{b} (у градусах).



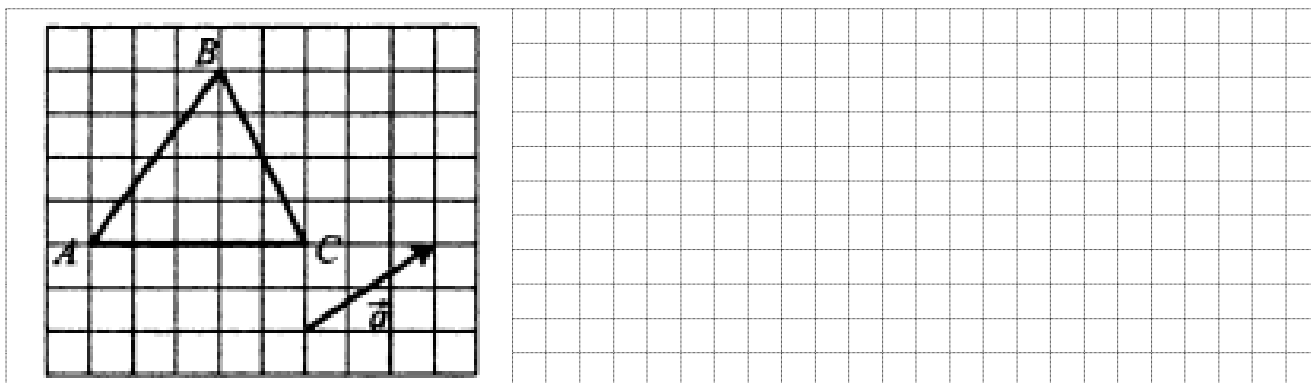
12.39. Обчисліть скалярний добуток векторів, зображених на рисунку.



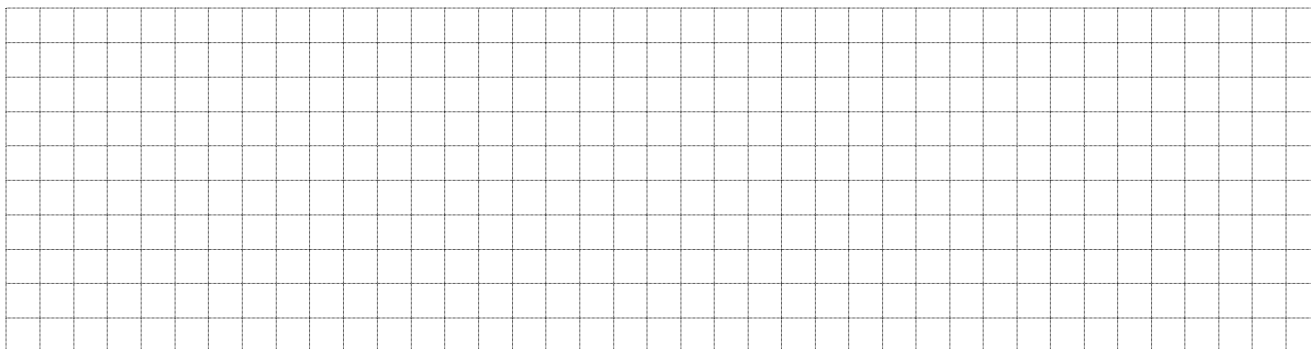
Заняття 13

РУХ (ПЕРЕМІЩЕННЯ) ФІГУРИ. ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ. ОСЬОВА І ЦЕНТРАЛЬНА СИМЕТРІЯ. ПОВОРОТ. ГОМОТЕТІЯ. ПОДІБНІСТЬ ФІГУР

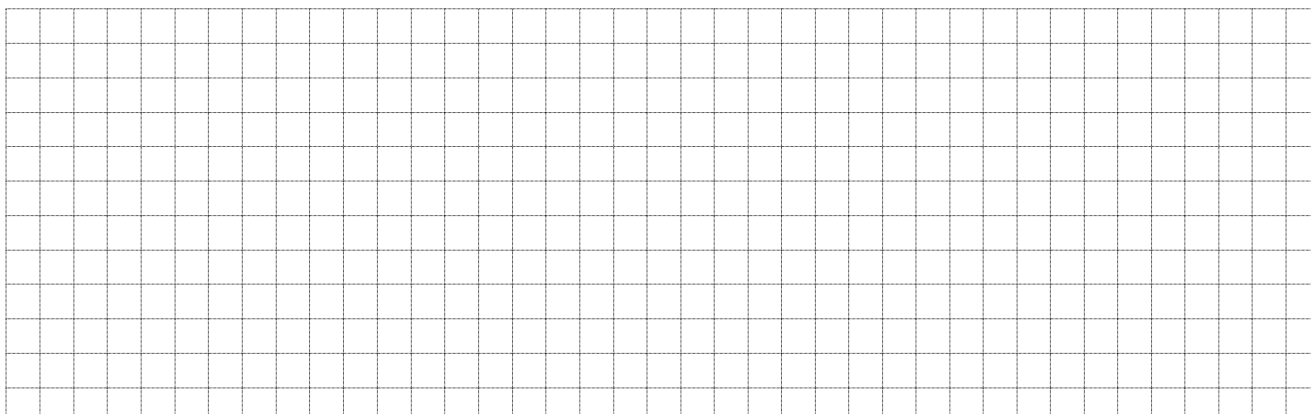
13.1. Побудуйте образ трикутника ABC при паралельному перенесенні на вектор \vec{a} .



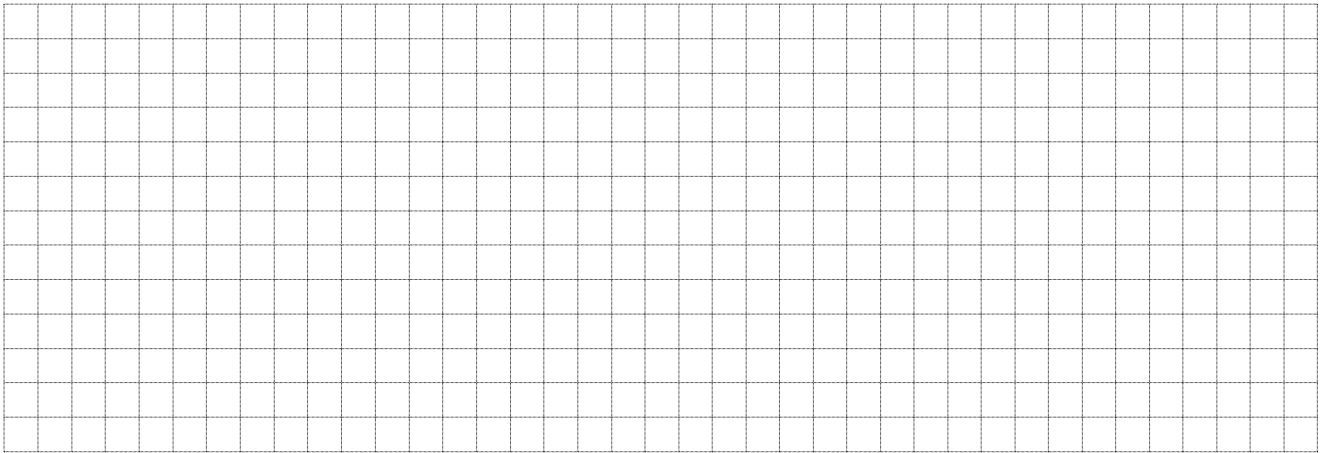
13.2. Побудуйте образи точок $A(1;3)$, $B(0;-4)$ і $C(2;0)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}(2;0)$. Запишіть координати побудованих точок.



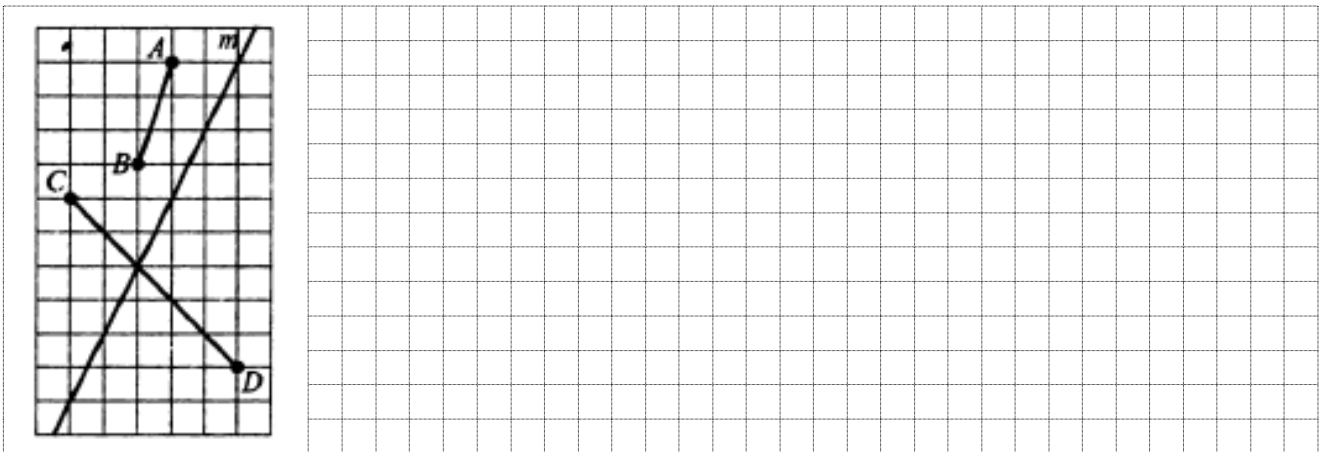
13.3. Знайдіть вектор, при паралельному перенесенні на який образом точки $A(3;1)$ буде точка $B(-1;4)$, і вектор, при паралельному перенесенні на який образом точки B буде точка A .



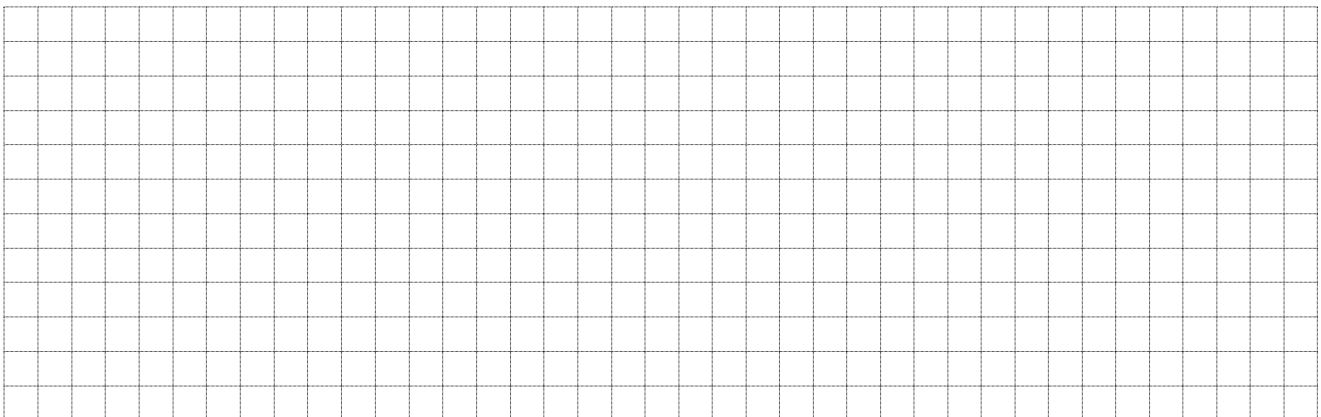
13.4. Виконайте паралельне перенесення прямої $2x + 3y = 6$.
 Запишіть рівняння отриманої прямої, якщо вона проходить через точку:
 1) $O(0;0)$; 2) $B(-1;4)$.



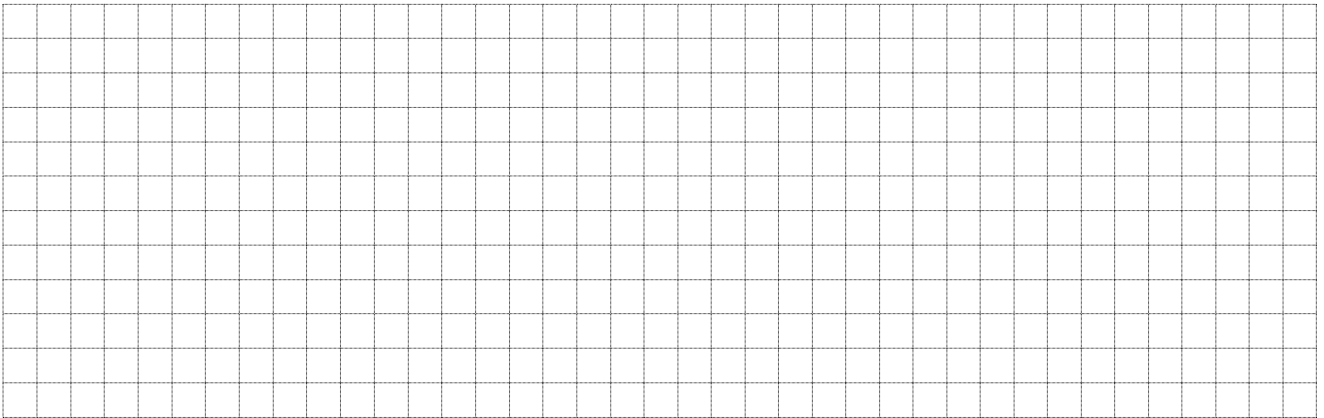
13.5. Побудуйте образи відрізків AB і CD , зображених на рисунку, при симетрії відносно прямої m .



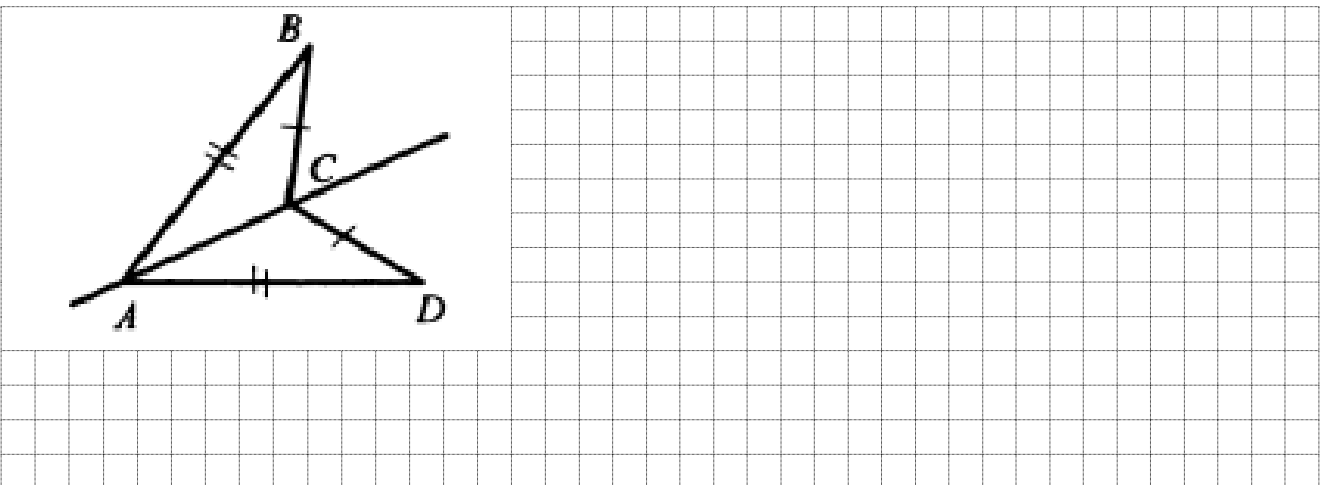
13.6. Накресліть коло радіусом 3 см і проведіть пряму, яка не проходить через його центр. Побудуйте коло, симетричне даному, відносно цієї прямої.



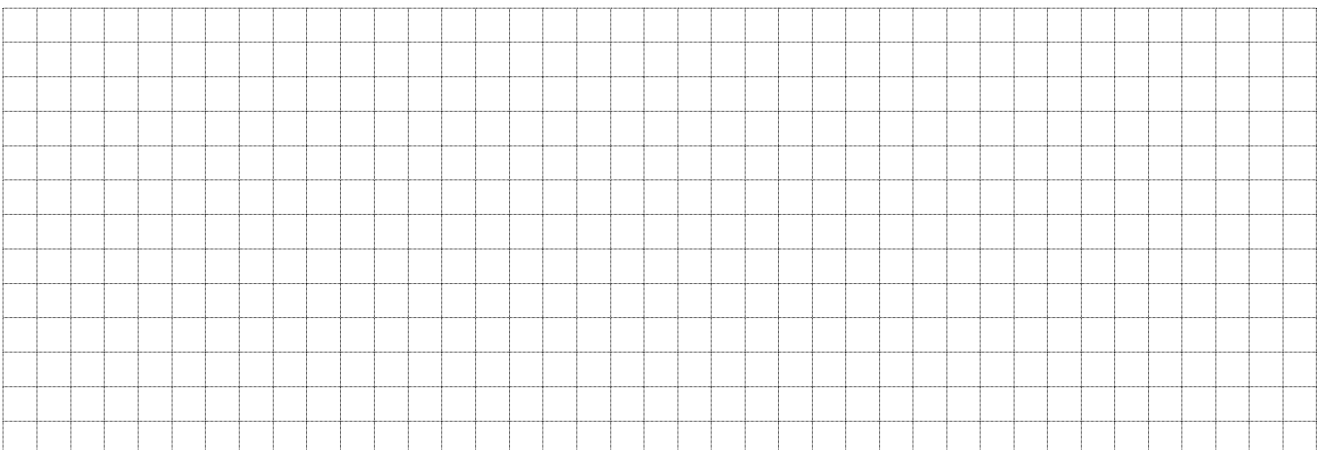
13.7. Накресліть рівносторонній трикутник зі стороною **3 см**, проведіть пряму, яка проходить через одну з його вершин і не має з трикутником інших спільних точок. Побудуйте трикутник, симетричний даному, відносно цієї прямої.



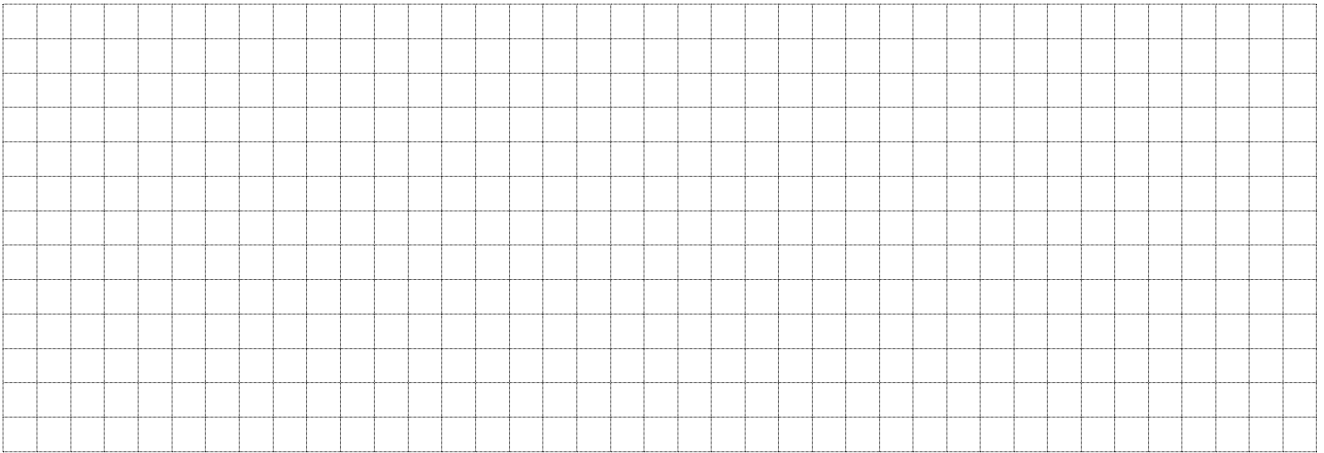
13.8. Дано $AB = AD$, $CB = CD$. Доведіть, що точки **B** і **D** симетричні відносно прямої **AC**.



13.9. Знайдіть координати точки, симетричної точці $K(3;-1)$, відносно:
 1) осі абсцис; 2) осі ординат.



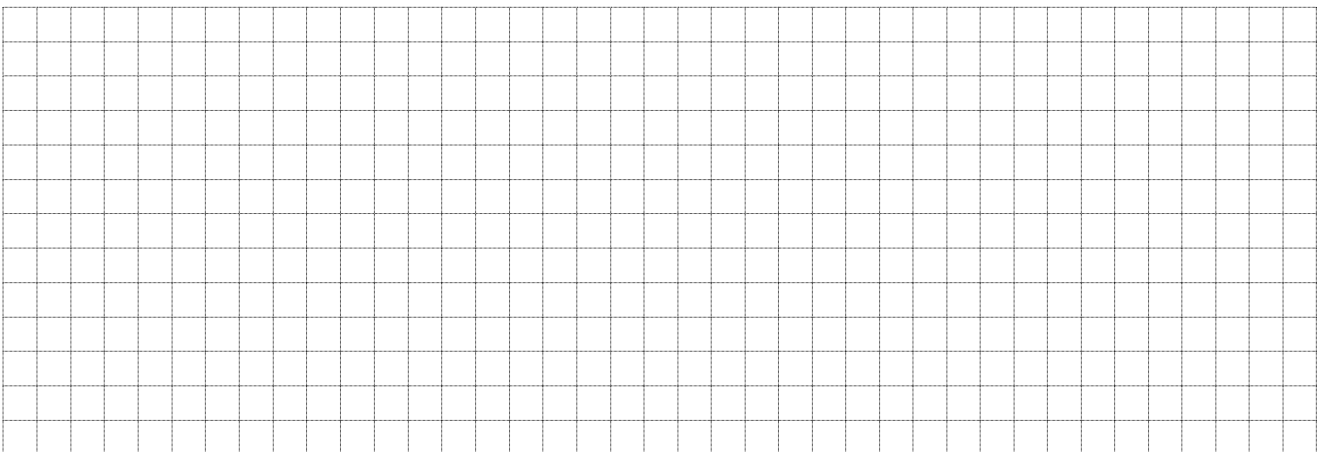
13.10. Осями симетрії ромба є прямі $x = -2$ і $y = 1$. Двома його сусідніми точками є точки $A(-2;3)$ і $B(2;1)$. Знайдіть координати решти вершин ромба.



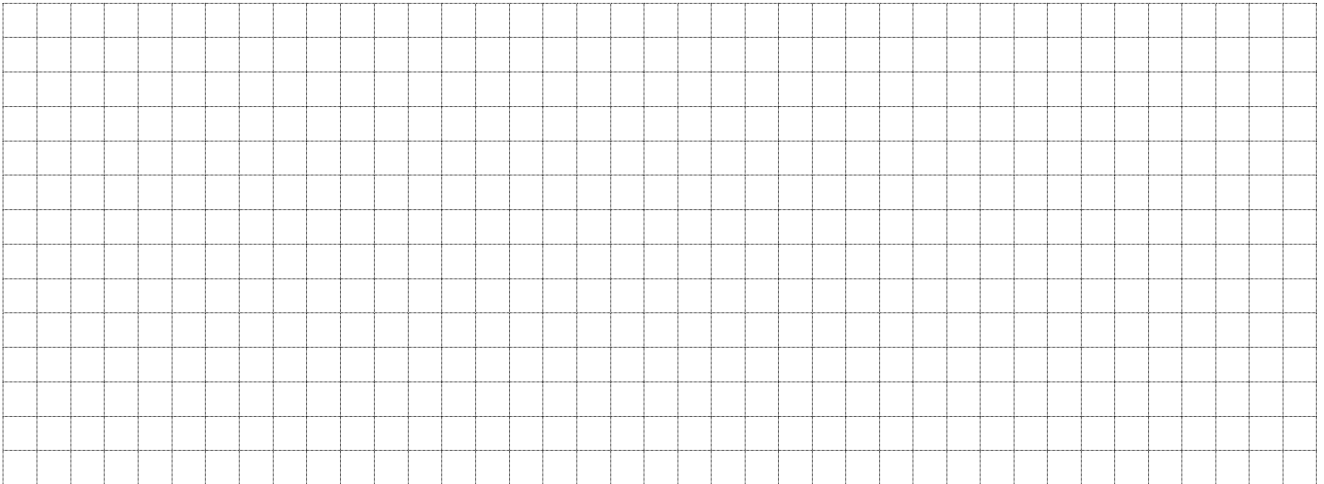
13.11. Знайдіть координати точок, симетричних точкам $M(3;-4)$ і $K(4;0)$, відносно прямої $y = x$.



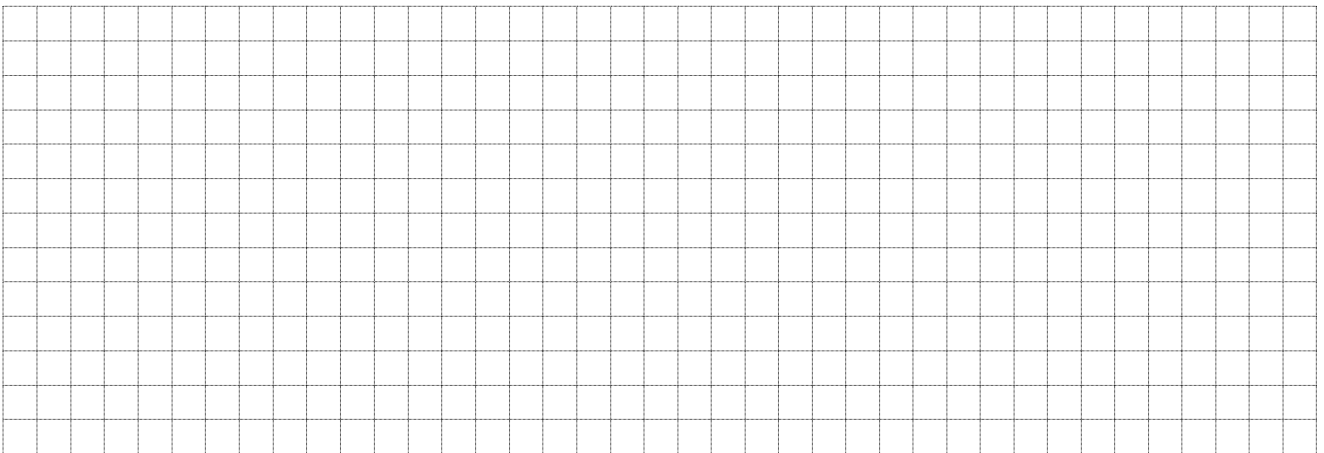
13.12. Дано відрізок AB і точку O . Побудуйте відрізок, симетричний відріzkу AB , відносно точки O .



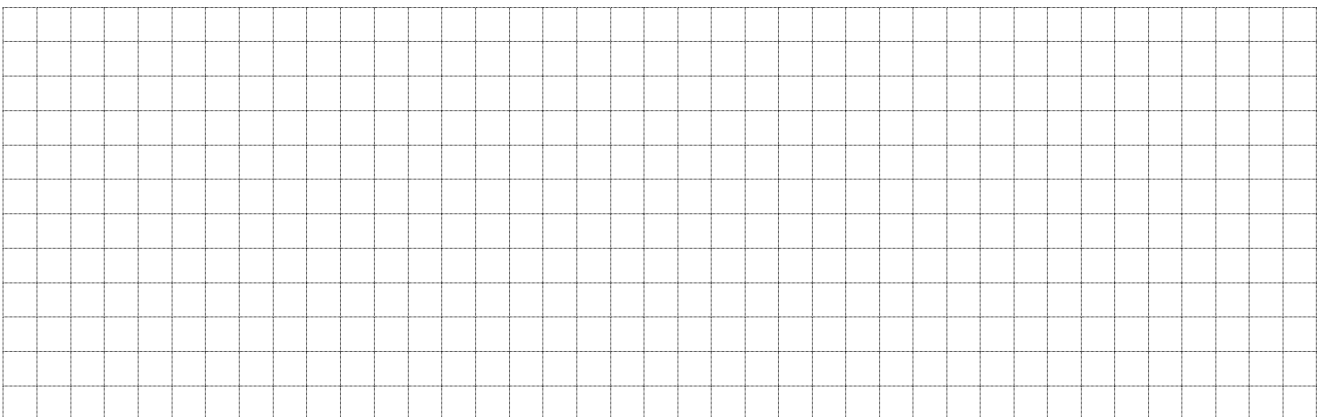
13.13. Накресліть кут ABC і позначте точку O , яка належить куту, але не належить його сторонам. Побудуйте кут, симетричний куту ABC , відносно точки O .



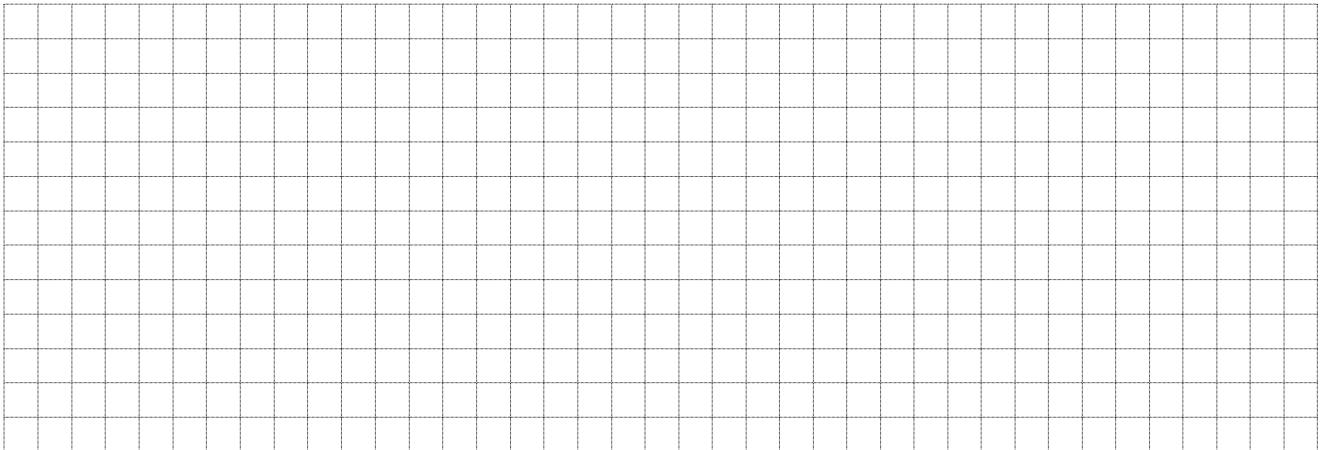
13.14. Знайдіть координати точки C , симетричної точці $B(-3;1)$, відносно точки $A(2;-5)$.



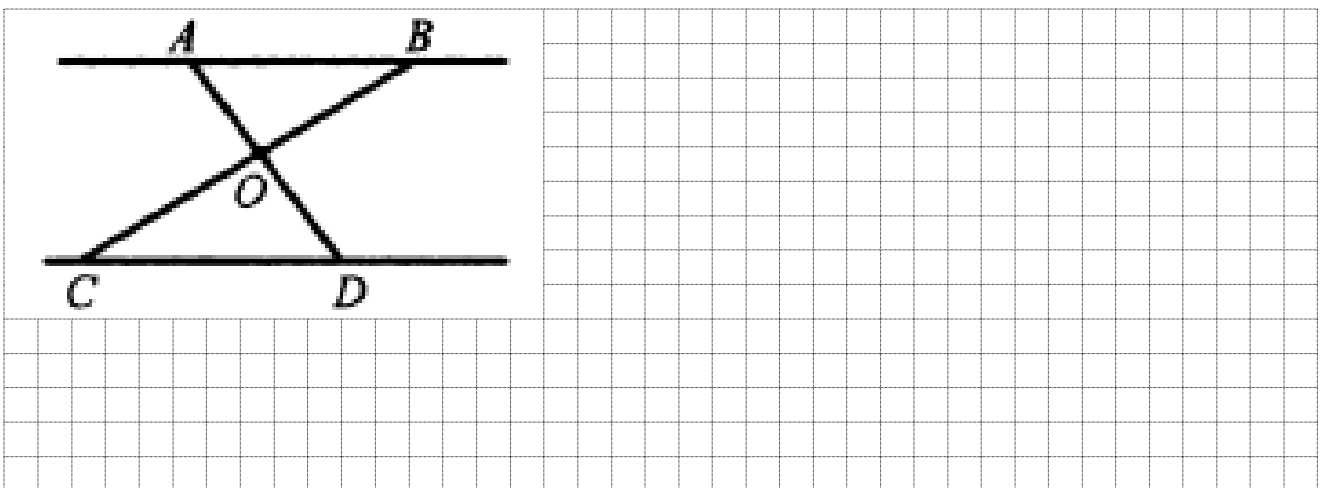
13.15. Запишіть рівняння кола, симетричного колу $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 11$ відносно: 1) початку координат; 2) точки $M(-4;2)$.



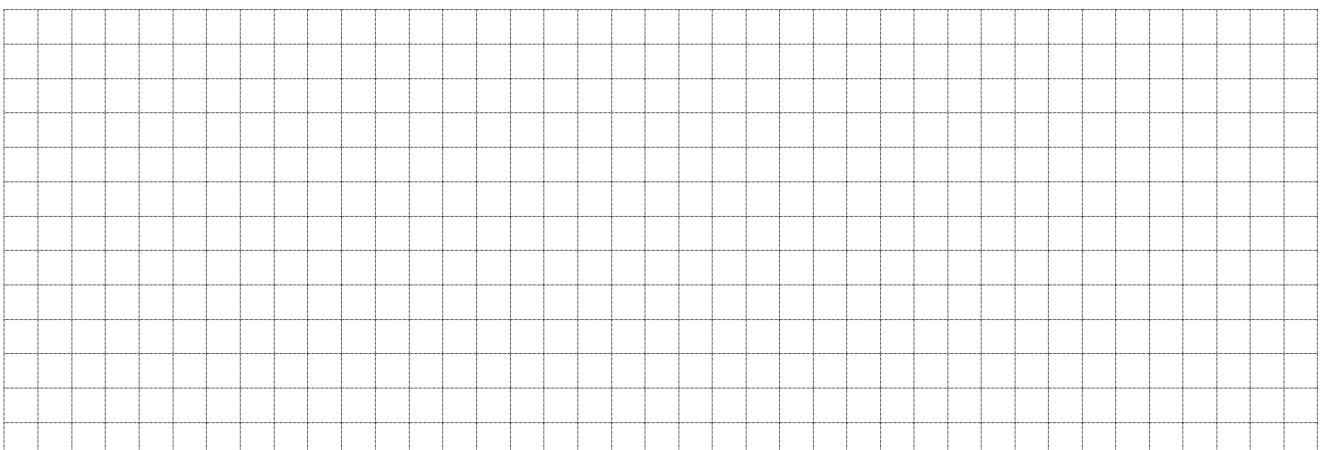
13.16. Запишіть рівняння прямої, симетричної прямій $2x - 5y = -7$ відносно: 1) початку координат; 2) точки $K(-2;1)$.



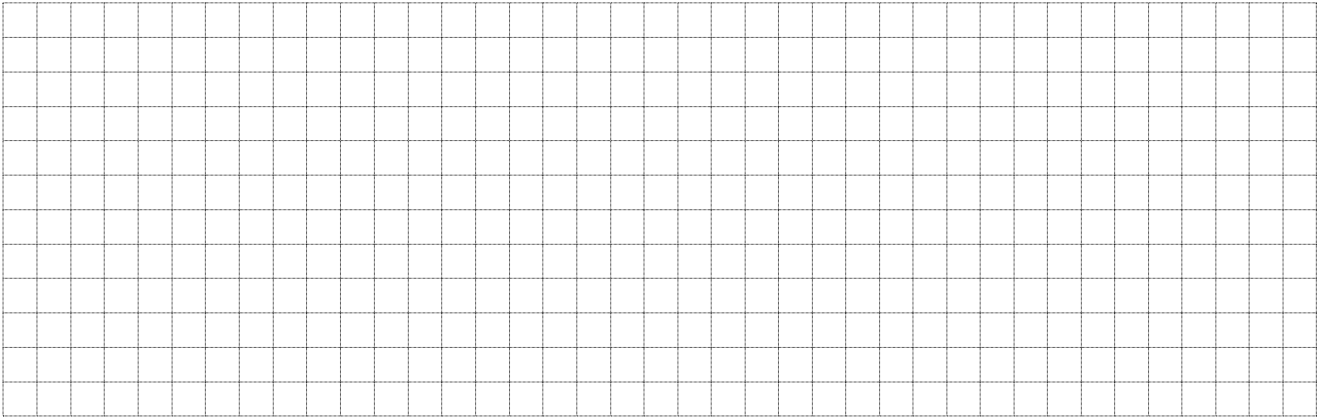
13.17. Прямі AB і CD паралельні. Точки A і D симетричні відносно точки O . Пряма BC проходить через точку O . Доведіть, що точки B і C симетричні відносно точки O .



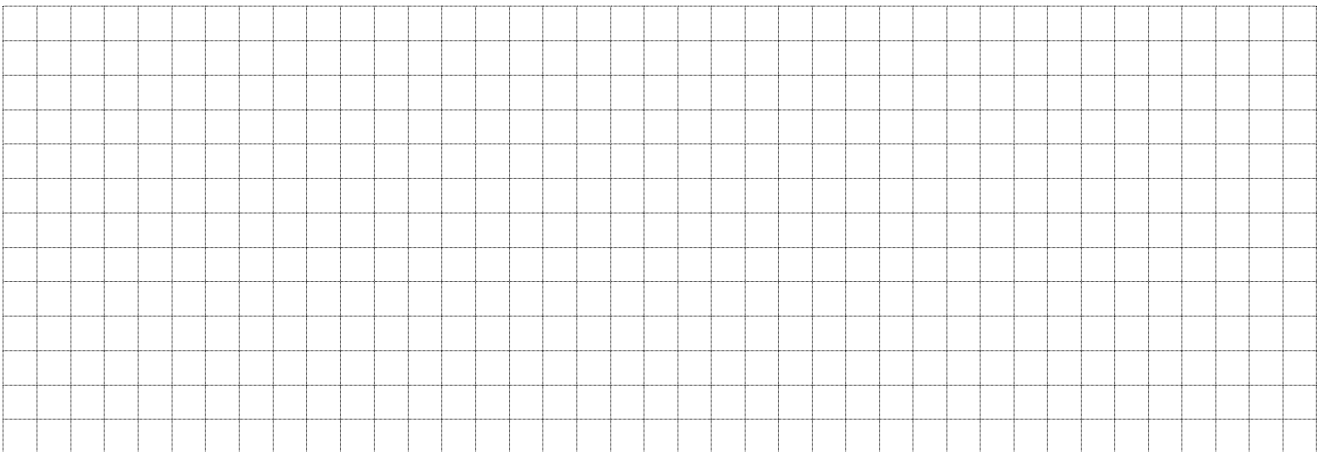
13.18. Чи є точки $M(-5;8)$ і $N(-3;4)$ симетричними відносно точки $K(-1;2)$?



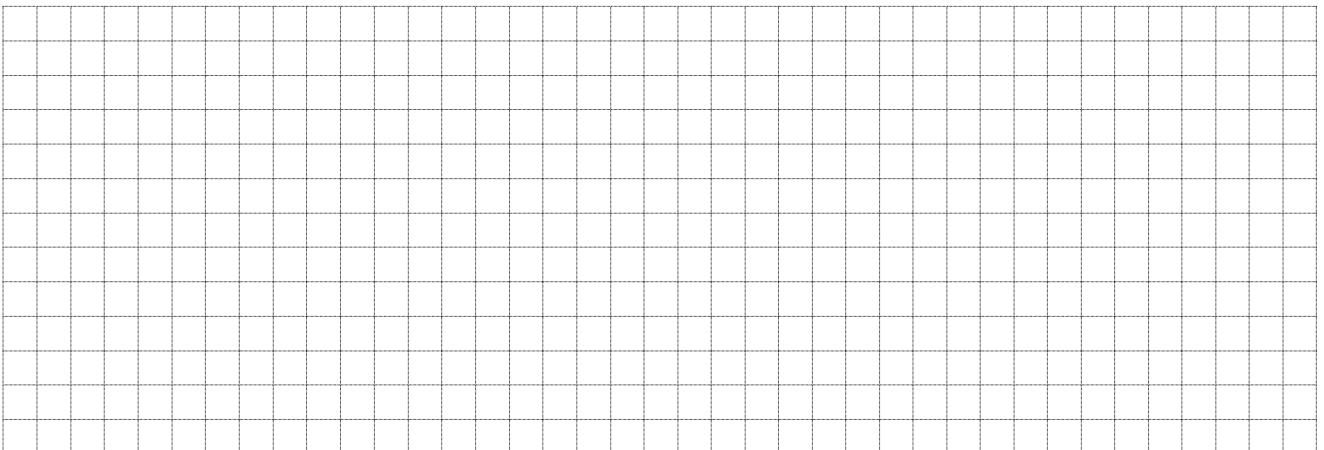
13.19. Точки $A(-4;y)$ і $B(x;3)$ симетричні відносно точки $K(5;-2)$. Знайдіть x і y .



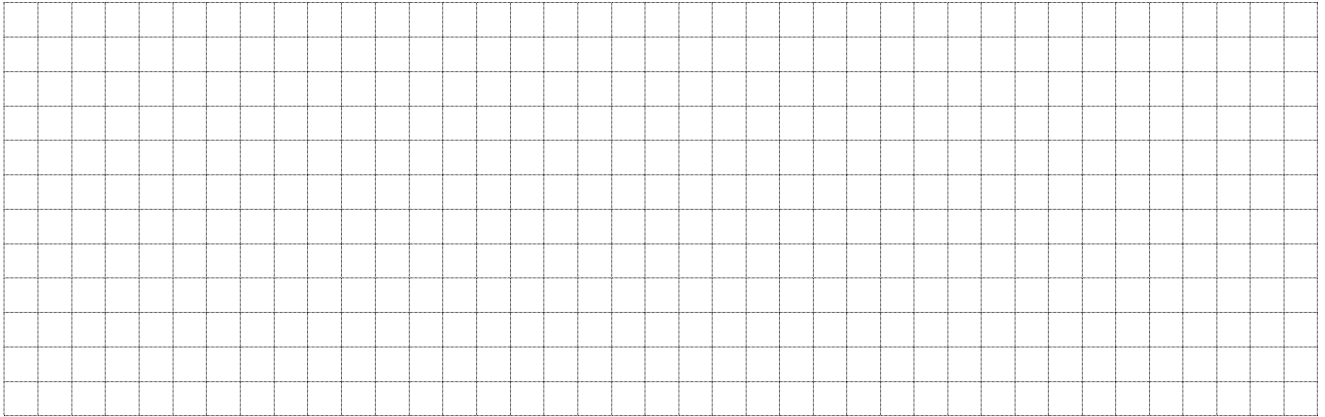
13.20. Позначте точки K і O . Побудуйте образ точки K при повороті навколо центра O : 1) на кут 30° проти годинникової стрілки; 2) на кут 100° за годинниковою стрілкою.



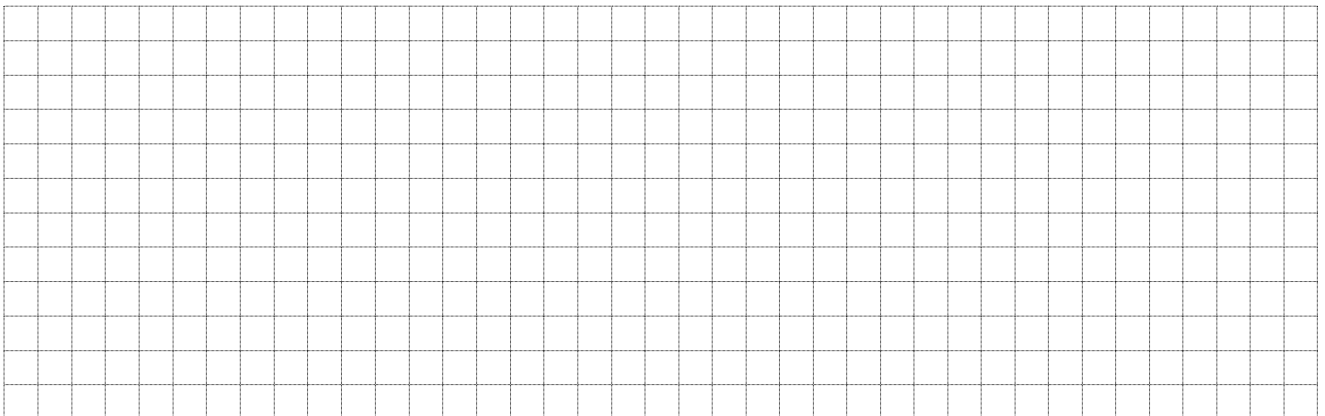
13.21. Побудуйте точки, які є образами точок $A(4;0)$, $B(0;-3)$, $C(4;1)$, $D(-1;-4)$, при повороті на кут 90° за годинниковою стрілкою навколо початку координат. Укажіть координати отриманих точок.



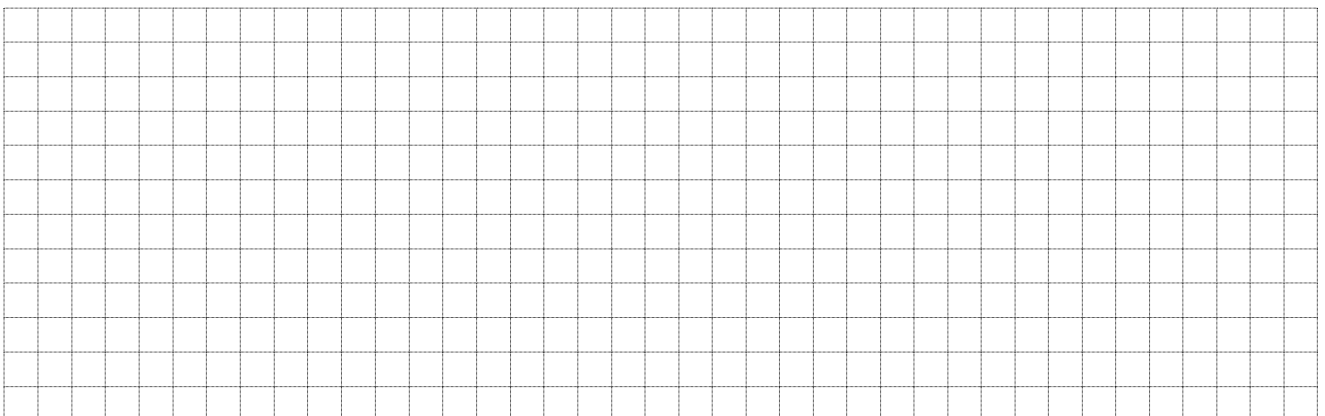
13.22. Накресліть відрізок **AB** довжиною **2 см** і позначте точку **O**, яка не належить цьому відрізку. Побудуйте відрізок, гомотетичний відрізку **AB** із центром гомотетії в точці **O** та коефіцієнтом гомотетії: 1) $k = 3$; 2) $k = -\frac{1}{2}$.



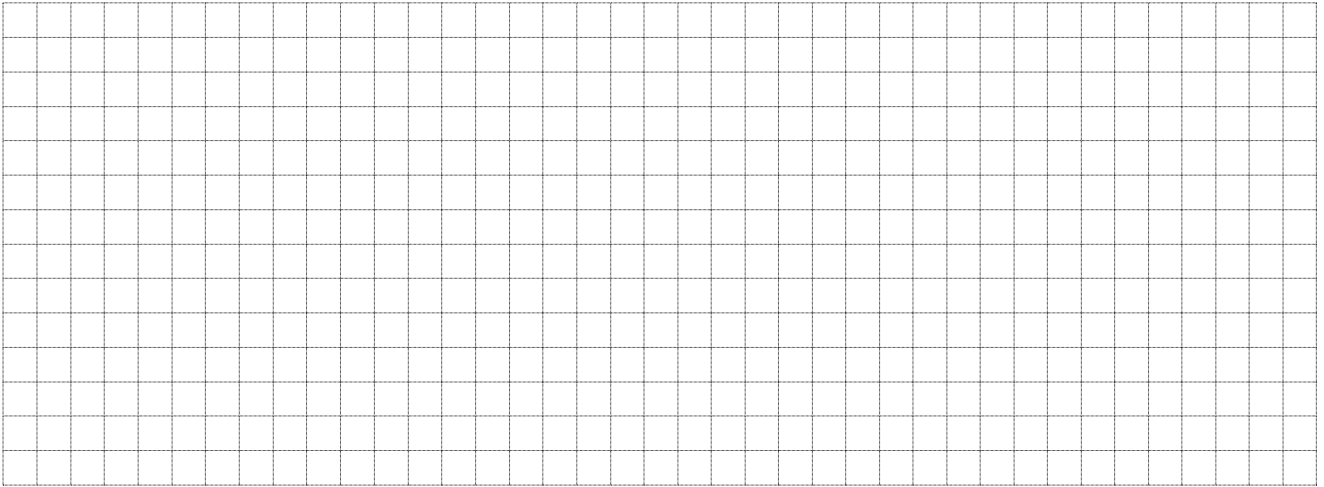
13.23. Побудуйте трикутник, гомотетичний даному трикутнику з центром гомотетії в точці перетину його медіан і коефіцієнтом гомотетії: 1) $k = 2,5$; 2) $k = -1$.



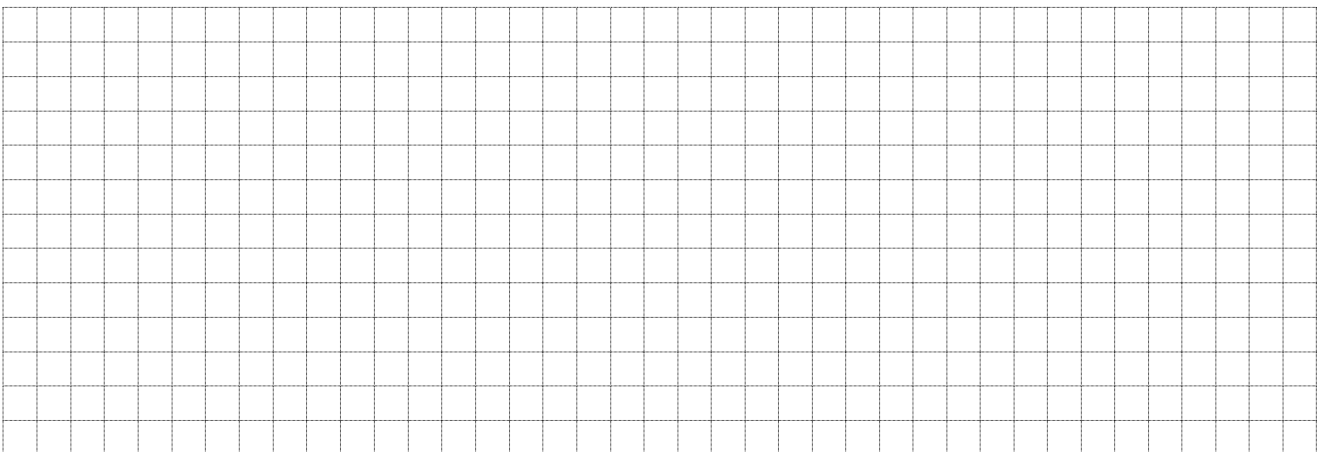
13.24. Точка **B(-1;4)** – образ точки **A(-2;8)** при гомотетії із центром у початку координат. Знайдіть коефіцієнт гомотетії.



13.25. Сторони двох правильних трикутників співвідносяться як **5:7**. Як співвідносяться їх площі?



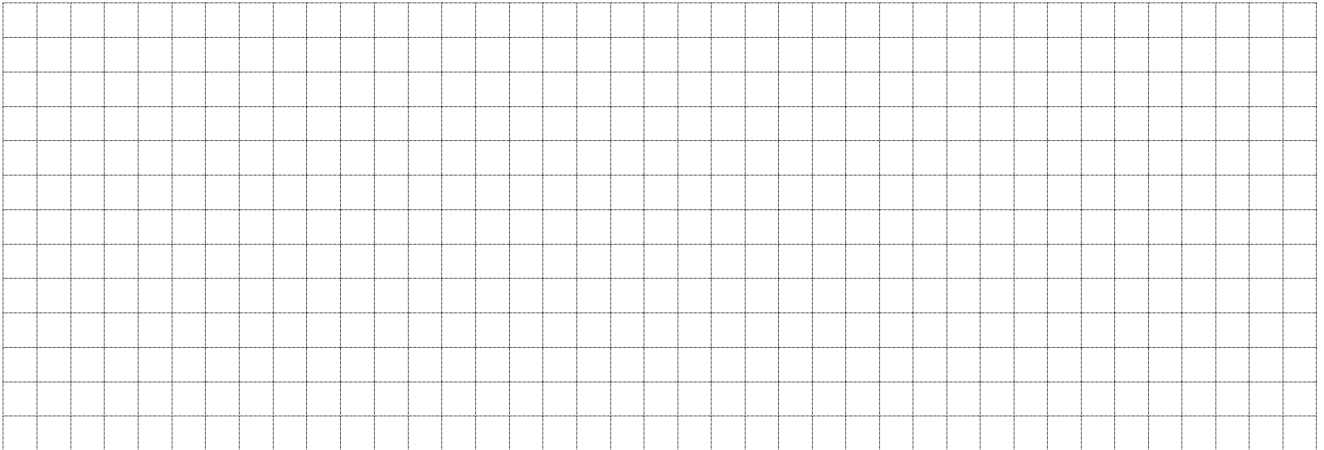
13.26. Висота рівностороннього трикутника дорівнює стороні другого. Як співвідносяться їх площі?



13.27. Сторони двох правильних трикутників співвідносяться як **4:7**, а площа більшого з них дорівнює **98 см²**. Знайдіть площу меншого трикутника.



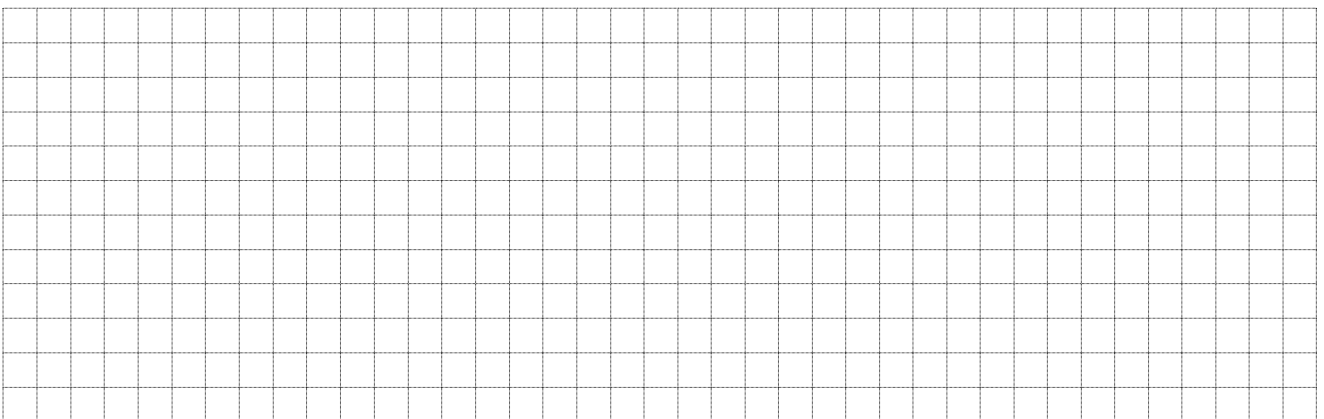
13.28. Периметри подібних багатокутників співвідносяться як **3:8**, а різниця їх площ дорівнює **385 см²**. Знайдіть площі багатокутників.



13.29. Площі двох квадратів співвідносяться як **2:5**. Сторона більшого квадрата дорівнює **10 см**. Знайдіть сторону меншого квадрата.



13.30. Сторона **BC** трикутника **ABC** дорівнює **6 см**. Пряма, паралельна **BC**, поділяє трикутник на дві рівновеликі фігури. Знайдіть відрізок цієї прямої, який міститься між сторонами трикутника.



БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

Захарійченко, Ю. О. Геометричне мислення: від периметра до площі : зб. завдань з повним розв'язанням / Ю. О. Захарійченко, Л. І. Захарійченко, В. К. Репета. — Харків : Основа, 2014. — 158 с.

Семібаламут, О. Геометрія. Квести. 5—11 класи / О. Семібаламут, І. Кирдей. — Київ : Перше вересня, 2017. — 112 с.

Геометрія. 7 клас : зб. задач і контрольних робіт / А. Г. Мерзляк, Б. В. Полонський, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір. — Харків : Гімназія, 2020. — 96 с.

Геометрія. 8 клас : зб. задач і контрольних робіт / А. Г. Мерзляк, Б. В. Полонський, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір. — Харків : Гімназія, 2015. — 112 с.

Геометрія. 9 клас : зб. задач і контрольних робіт / А. Г. Мерзляк, Б. В. Полонський, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір. — Харків : Гімназія, 2018. — 112 с.

ЗМІСТ

| | |
|---|-----|
| Заняття 1. Найпростіші геометричні фігури на площині та їх властивості. Паралельні прямі. Трикутники | 3 |
| Додаткові вправи, які було запропоновано під час проведення ЗНО | 13 |
| Заняття 2. Трикутники. Сума кутів трикутника. Коло і круг | 15 |
| Додаткові вправи, які було запропоновано під час проведення ЗНО | 25 |
| Заняття 3. Чотирикутник та його елементи. Паралелограм. Властивості та ознаки паралелограма | 27 |
| Додаткові вправи, які було запропоновано під час проведення ЗНО | 37 |
| Заняття 4. Прямокутник. Ромб. Квадрат | 39 |
| Додаткові вправи, які було запропоновано під час проведення ЗНО | 49 |
| Заняття 5. Середня лінія трикутника. Трапеція. Середня лінія трапеції | 51 |
| Додаткові вправи, які було запропоновано під час проведення ЗНО | 61 |
| Заняття 6. Центральні та вписані кути. Вписані й описані чотирикутники. Довжина кола. Площа круга | 63 |
| Додаткові вправи, які було запропоновано під час проведення ЗНО | 73 |
| Заняття 7. Теорема Фалеса. Теорема про пропорційні відрізки. Подібні трикутники. Ознаки подібності трикутників | 75 |
| Додаткові вправи, які було запропоновано під час проведення ЗНО | 85 |
| Заняття 8. Метричні співвідношення в прямокутному трикутнику. Теорема Піфагора. Розв'язання прямокутних трикутників | 86 |
| Додаткові вправи, які було запропоновано під час проведення ЗНО | 96 |
| Заняття 9. Многокутники. Площа прямокутника, паралелограма, трикутника і трапеції | 98 |
| Додаткові вправи, які було запропоновано під час проведення ЗНО | 108 |
| Заняття 10. Теорема косинусів. Теорема синусів. Розв'язання трикутників. Площа трикутників | 110 |
| Додаткові вправи, які було запропоновано під час проведення ЗНО | 120 |
| Заняття 11. Відстань між двома точками із заданими координатами. Рівняння кола. Рівняння прямої. Кутовий коефіцієнт прямої | 122 |

| | |
|---|-----|
| Додаткові вправи, які було запропоновано під час проведення ЗНО | 132 |
| Заняття 12. Поняття вектора. Координати вектора. Дії над векторами. Скалярний добуток векторів | 134 |
| Додаткові вправи, які було запропоновано під час проведення ЗНО | 144 |
| Заняття 13. Рух (переміщення) фігури. Паралельне перенесення. Осьова і центральна симетрія. Поворот. Гомотетія. Подібність фігур ... | 147 |
| БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК | 157 |

Методичне видання

**Кальчук Наталія Леонідівна
Мураховська Олена Анатоліївна
Українець Наталія Анатоліївна
Шехватова Олена Михайлівна**

**РОБОЧИЙ ЗОШИТ З ГЕОМЕТРІЇ
для слухачів фізико-математичної школи ХАІ**

Частина 1

Редактор В. І. Філатова

Зв. план, 2021

Підписано до друку 18.06.2021

Формат 60x84 $\frac{1}{8}$. Папір офс. Офс. друк.

Ум. друк. арк. 8,9. Обл.-вид. арк. 10. Наклад 200 пр.

Замовлення 148. Ціна вільна

Видавець і виготовлювач
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
<http://www.khai.edu>
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001