Міністерство освіти і науки України
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Кафедра інформаційних технологій проектування (№ 105)

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛІНИ
Спеціальні математичні методи

Галузь знань: **12 «Інформаційні технології»**
(шифр і назва галузі)

Спеціальність: **126 « Інформаційні системи та технології»**
(код та найменування спеціальності)

Освітня програма: **«Інформаційні системи та технології підтримки віртуальних середовищ»**
(найменування освітньої програми)

Форма навчання: денна

Рівень вищої освіти: перший (бакалаврський)

Харків 2020 рік

Міністерство освіти і науки України
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Кафедра інформаційних технологій проектування (№ 105)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Керівник проектної групи/
Голова НМК

________ ______________________
(підпис) (ініціали та прізвище)

«____» ____________ 2019 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА ОБОВ'ЯЗКОВОЇ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Спеціальні математичні методи

Галузь знань: **12 «Інформаційні технології»**
(шифр і назва галузі)

Спеціальність: **122 «Комп'ютерні науки»**
(код та найменування спеціальності)

Освітня програма: **«Системне проектування»**
(найменування освітньої програми)

Форма навчання: денна

Рівень вищої освіти: перший (бакалаврський)

Харків 2019 рік

Міністерство освіти і науки України
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Кафедра інформаційних технологій проектування (№ 105)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Керівник проектної групи/
Голова НМК

________ ________________________
(підпис) (ініціали та прізвище)

«____» ____________ 2019 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА ОБОВ'ЯЗКОВОЇ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
Спеціальні математичні методи

Галузь знань: **12 «Інформаційні технології»**
(шифр і назва галузі)

Спеціальність: **122 «Комп'ютерні науки»**
(код та найменування спеціальності)

Освітня програма: **«Інформаційні технології проектування»**
(найменування освітньої програми)

Форма навчання: денна

Рівень вищої освіти: перший (бакалаврський)

Харків 2019 рік

Міністерство освіти і науки України
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Кафедра інформаційних технологій проектування (№ 105)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Керівник проектної групи/
Голова НМК

________ ______________________
(підпис) (ініціали та прізвище)

«____» ____________ 2019 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА ОБОВ'ЯЗКОВОЇ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
Спеціальні математичні методи

Галузь знань: **12 «Інформаційні технології»**
(шифр і назва галузі)

Спеціальність: **126 « Інформаційні системи та технології»**
(код та найменування спеціальності)

Освітня програма: **«Інформаційні системи та технології підтримки віртуальних середовищ»**
(найменування освітньої програми)

Форма навчання: денна

Рівень вищої освіти: перший (бакалаврський)

Харків 2019 рік

Робоча програма навчальної дисципліни «Спеціальні математичні методи»
(назва дисципліни)

для студентів за спеціальністю 126 « Інформаційні системи та технології» освітньою програмою «Інформаційні системи та технології підтримки віртуальних середовищ»

«7» червня 2019 р., – 11 с.

Розробник: ст. викладач кафедри вищої математики та системного аналізу

О.А. Мураховська ________________
(підпис)

Робочу програму розглянуто на засіданні кафедри інформаційних технологій проектування (№ 105)
Протокол № ____ від « _____» _________ 2019р.

Завідувач кафедри інформаційних технологій проектування

д.т.н., професор _______________________ (Є. А. Дружинін)
(підпис) (прізвище та ініціали)

Робоча програма навчальної дисципліни «Спеціальні математичні методи»
(назва дисципліни)

для студентів за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки»
освітньою програмою «Інформаційні технології проектування»

«7» червня 2019 р., – 11 с.

Розробник: ст. викладач кафедри вищої математики та системного аналізу

О.А. Мураховська ______________
(підпис)

Робочу програму розглянуто на засіданні кафедри інформаційних технологій проектування (№ 105)
Протокол № ____ від « _____» _________ 2019р.

Завідувач кафедри інформаційних технологій проектування

д.т.н., професор ______________________ (Є. А. Дружинін)
(підпис) (прізвище та ініціали)

Робоча програма навчальної дисципліни «Спеціальні математичні методи»
(назва дисципліни)
для студентів за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки»
освітньою програмою «Системне проектування»

«7» червня 2019 р., – 11 с.

Розробник: ст. викладач кафедри вищої математики та системного аналізу

О.А. Мураховська _______________
(підпис)

Робочу програму розглянуто на засіданні кафедри інформаційних технологій проектування (№ 105)
Протокол № ____ від « _____» _________ 2019р.

Завідувач кафедри інформаційних технологій проектування

д.т.н., професор ________________________ (Є. А. Дружинін)
(підпис) (прізвище та ініціали)

1. Опис навчальної дисципліни

<table>
<tr><th>Найменування показників</th><th>Галузь знань,
напрям підготовки,
освітньо-кваліфікаційний рівень</th><th colspan="2">Характеристика навчальної дисципліни
(денна форма навчання)</th></tr>
<tr><td>Кількість кредитів – 3,5</td><td rowspan="15">Галузь знань:
12 «Інформаційні технології»

Спеціальність:
126 «Інформаційні системи та технології»

Освітня програма
«Інформаційні системи та технології підтримки віртуальних середовищ»

Рівень вищої освіти: перший (бакалаврський)</td><td colspan="2">Навчальний рік</td></tr>
<tr><td>Модулів – 2</td><td colspan="2" rowspan="2">2019/2020</td></tr>
<tr><td>Змістових модулів – 9</td></tr>
<tr><td>Розрахунково-графічна робота «Розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь»</td><td colspan="2">Семестр</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Загальна кількість годин – 48/105.</td><td>4-й</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Лекції[1)]</td></tr>
<tr><td rowspan="9">Тижневих годин для денної форми навчання:
аудиторних – 3,
самостійної роботи студента – 3,5.</td><td colspan="2">24 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Практичні, семінарські[1)]</td></tr>
<tr><td colspan="2">— год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лабораторні роботи[1)]</td></tr>
<tr><td colspan="2">24 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостійна робота</td></tr>
<tr><td colspan="2">57 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Вид контролю: залік</td></tr>
</table>

Примітка

Співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної роботи становить: – 48/105.

[1)] Аудиторне навантаження може бути збільшене або зменшене на одну годину в залежності від розкладу занять.

1. Опис навчальної дисципліни

<table>
<tr><th>Найменування показників</th><th>Галузь знань,
напрям підготовки,
освітньо-кваліфікаційний рівень</th><th colspan="2">Характеристика навчальної дисципліни
(денна форма навчання)</th></tr>
<tr><td>Кількість кредитів – 3,5</td><td rowspan="15">Галузь знань:
12 «Інформаційні технології»

Спеціальність:
122 «Комп’ютерні науки»

Освітня програма:
«Інформаційні технології проектування»

Рівень вищої освіти: перший (бакалаврський)</td><td colspan="2">Навчальний рік</td></tr>
<tr><td>Модулів – 2</td><td colspan="2" rowspan="2">2019/2020</td></tr>
<tr><td>Змістових модулів – 9</td></tr>
<tr><td>Розрахунково-графічна робота «Розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь»</td><td colspan="2">Семестр</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Загальна кількість годин – 48/105.</td><td>4-й</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Лекції[1)]</td></tr>
<tr><td rowspan="9">Тижневих годин для денної форми навчання:
аудиторних – 3,
самостійної роботи студента – 3,5.</td><td colspan="2">24 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Практичні, семінарські[1)]</td></tr>
<tr><td colspan="2">— год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лабораторні роботи[1)]</td></tr>
<tr><td colspan="2">24 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостійна робота</td></tr>
<tr><td colspan="2">57 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Вид контролю: залік</td></tr>
</table>

Примітка

Співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної роботи становить: – 48/105.

[1)] Аудиторне навантаження може бути збільшене або зменшене на одну годину в залежності від розкладу занять.

1. Опис навчальної дисципліни

<table>
<tr><th>Найменування показників</th><th>Галузь знань,
напрям підготовки,
освітньо-кваліфікаційний рівень</th><th colspan="2">Характеристика навчальної дисципліни
(денна форма навчання)</th></tr>
<tr><td>Кількість кредитів – 3,5</td><td rowspan="15">Галузь знань:
12 «Інформаційні технології»

Спеціальність:
122 «Комп’ютерні науки»

Освітня програма:
«Системне проектування»

Рівень вищої освіти: перший (бакалаврський)</td><td colspan="2">Навчальний рік</td></tr>
<tr><td>Модулів – 2</td><td colspan="2" rowspan="2">2019/2020</td></tr>
<tr><td>Змістових модулів – 9</td></tr>
<tr><td>Розрахунково-графічна робота «Розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь»</td><td colspan="2">Семестр</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Загальна кількість годин – 48/105.</td><td>4-й</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Лекції[1)]</td></tr>
<tr><td rowspan="9">Тижневих годин для денної форми навчання:
аудиторних – 3,
самостійної роботи студента – 3,5.</td><td colspan="2">24 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Практичні, семінарські[1)]</td></tr>
<tr><td colspan="2">— год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лабораторні роботи[1)]</td></tr>
<tr><td colspan="2">24 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостійна робота</td></tr>
<tr><td colspan="2">57 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Вид контролю: залік</td></tr>
</table>

Примітка

Співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної роботи становить: – 48/105.

[1)] Аудиторне навантаження може бути збільшене або зменшене на одну годину в залежності від розкладу занять.

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Мета навчання полягає в ознайомленні студентів з основними методами математичної постановки і розв’язання задач з використанням комп’ютерів, а також в наданні навиків програмування коректних обчислювальних алгоритмів для розв’язання лінійних і нелінійних рівнянь, обробки експериментальних даних, чисельного диференціювання, інтегрування і розв’язання звичайних диференційних рівнянь.

Основними **завданнями** дисципліни є формування у студентів базових системних понять і навичок, які необхідні для розв’язання задач з деяких розділів математики, для яких точне рішення або відсутнє, або приблизний вид рішення обумовлюється неточністю вхідних даних задачі.

Міждисциплінарні зв’язки: вища математика, теорія ймовірностей та математична статистика, програмування.

Результати навчання:

- знати методи зберігання чисел в пам’яті комп’ютера і дії над ними, оцінку точності дій з приблизними числами;
- знати методи розв’язання основних математичних задач – інтегрування, диференціювання, розв’язання лінійних і трансцендентних рівнянь и систем рівнянь за допомогою комп’ютерів;
- знати основні чисельні методи розв’язання лінійних і нелінійних алгебраїчних рівнянь (робота з матрицями різних типів і ітераційні алгоритми), методи обробки експериментальних даних (інтерполяція і наближення), чисельні методи інтегрування і диференціювання, чисельні методи розв’язання диференційних рівнянь у звичайних диференціалах і екстремальних задач (одномірних и багатомірних).
- вміти коректно використовувати чисельні методи для розв’язання математично формалізованих задач на комп’ютерах;
- вміти використовувати основні чисельні методи розв’язання математичних задач;
- вміти оцінювати область використання чисельних методів, ефективність і похибку чисельного рішення;
- вміти розробляти алгоритми і програми для розв’язання облікових задач з необхідною точністю результату, що отримується.

Студент має надбати первинні **навички** доступу до чисельних методів, що використовуються при розв’язанні прикладних задач економіки і техніки.

3. Програма навчальної дисципліни

<u>Модуль 1</u>

Змістовий модуль 1. Математичне моделювання і обчислювальний експеримент

Тема 1. Чисельні методи як розділ сучасної математики. Поняття і актуальність чисельних методів. Роль комп'ютерно-орієнтованих чисельних методів в дослідженні складних математичних моделей.

Тема 2. Поняття похибки. Класифікація похибок. Абсолютна і відносна похибки числа і функції. Пряма і зворотна задачі теорії похибок. Несталі алгоритми. Особливості машинної арифметики.

Змістовий модуль 2. Чисельні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Тема 3. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Метод виключення невідомих (метод Гауса) розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Схема єдиного ділення. Метод Гауса з вибором головного елемента. LU – розкладення матриці. Методи обертання, квадратного кореня.

Тема 4. Векторні і матричні норми. Узгодженість норм. Обумовленість СЛАР. Число обумовленості матриці. Обчислення визначника. Звернення матриці.

Ортогональні перетворення. Матриці обертання і відображення. QR- та HR-розкладання матриць.

Метод прогонки рішень СЛАР з трьох діагональною матрицею. Стійкість. Коректність. Варіанти методу прогонки. Можливість розпаралелювання розрахунків

Змістовий модуль 3. Ітераційні методи

Тема 5. Поняття ітераційних методів. Стаціонарні та нестаціонарні ітераційні методи. Теореми збіжності. Метод Якобі. Метод Гауса-Зейделя. Канонічна форма ітераційних методів. Збіжність. Метод простої ітерації. Збіжність. Метод релаксації . Метод найшвидшого спуска. Метод мінімальних нев'язок. Метод сполучених градієнтів.

Тема 6. Власні значення. Повна і часткова проблема власних значень. Прямі та ітераційні методи. Ступеневий метод обчислення максимального по модулю власного числа. Метод скалярних добутків. Методи вичерпання. Метод Якобі рішення повної проблеми власних значень для симетричної матриці. QR-метод. Уточнення власних чисел і векторів. Оцінки власних чисел. Теореми Гершгоріна.

Змістовий модуль 4. Чисельні методи розв'язання нелінійних рівнянь

Тема 7. Підходи до розв'язання систем нелінійних рівнянь. Обчислення коренів нелінійних рівнянь. Відділення коренів. Метод поділу відрізка навпіл. Метод хорд. Методи простої ітерації, Ньютона. Модифікації методу Ньютона. Збіжність. Метод Вегстейна.

Підходи до розв'язання систем нелінійних рівнянь. Методи простої ітерації, Зейделя, Ньютона. Збіжність.

Змістовий модуль 5. Інтерполяція

Тема 8. Інтерполяційні многочлени. Існування і одиничність узагальненого інтерполяційного многочлена. Інтерполювання алгебраїчними многочленами. Інтерполяційні поліноми Лагранжа і Ньютона. Оцінка похибки інтерполяції.

Тема 9. Многочлени Чебишева. Оптимізація похибки інтерполяції. Збіжність інтерполяційного процесу. Сплайн-інтерполяція. Побудова кубічного сплайна

Тема 10. Найкраще наближення в лінійному нормованому просторі. Існування і одиничність елемента найкращого наближення. Многочлен найкращого наближення.

Найкраще наближення в гільбертовому просторі. Метод найменших квадратів. Апроксимація функцій багатьох змінних.

Модульний контроль

<u>Модуль 2</u>

Змістовий модуль 6. Чисельне інтегрування (квадратурні формули**)**

Тема 11. **Квадратурні і некваратурні формули чисельного інтегрування**. Загальні поняття. Інтерполяційні квадратурні формули. Квадратурні формули прямокутників, трапецій, Сімпсона. Квадратурні формули найвищого алгебраїчного ступеня точності. Побудова. Похибка. Стійкість. Інтегрування функцій спеціального виду. Апостеріорна оцінка похибки чисельного інтегрування методом Рунге. Неквадратурні формули чисельного інтегрування – метод Монте-Карло.

Змістовий модуль 7. Чисельне диференціювання

Тема 12. Наближене обчислення кратних інтегралів. Метод Монте-Карло. Формули чисельного диференціювання. Оцінка похибки. Некоректність. Регуляризація. Поняття сіткової функції. Найпростіші оператори кінцевих різниць.

Змістовий модуль 8. Чисельні методи розв'язання звичайних диференціальних рівнянь

Тема 13. Розв'язання звичайних диференціальних рівнянь. Метод Ейлера для задачі Коші. Методи Рунге-Кутта 2-го і 4-го порядку. Поняття стійкості різницевих методів. Явні і неявні схеми та їх стійкість.

Модульний контроль

4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин (денна форма)				
	усього	у тому числі			
		Лек	Прак	Лаб	Сам.роб.
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Модуль 1					
Змістовий модуль 1. Математичне моделювання і обчислювальний експеримент .					
Тема 1. Чисельні методи як розділ сучасної математики	3	1	—	—	2
Разом за змістовим модулем 1	**3**	**1**			**2**
Змістовий модуль 2. Похибки обчислювання на сучасних комп'ютерах (зникнення, переповнення, округлення)					
Тема 2. Поняття похибки	3	1	—	—	2
Разом за змістовим модулем 2	**3**	**1**			**2**
Змістовий модуль 3. Чисельні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь					
Тема 3. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь	10	2		4	**4**
Тема 4. Векторні і матричні норми	6	2			**4**
Тема 5. Поняття ітераційних методів	10	2		4	4
Тема 6. Власні значення	6	2			**4**
Разом за змістовим модулем 3	**32**	**8**		**8**	**16**
Змістовий модуль 4. Чисельні методи розв'язання нелінійних рівнянь					

Тема 7. Підходи до розв'язання систем нелінійних рівнянь	8	2	—	2	4
Разом за змістовим модулем 4	**8**	**2**		**2**	**4**
Змістовий модуль 5. Інтерполяція					
Тема 8. Інтерполяційні многочлени	13	1	—	6	6
Тема 9. Многочлени Чебишева	7	1			6
Тема 10. Найкраще наближення в лінійному нормованому просторі	8	2			6
Разом за змістовим модулем 5	**28**	**4**		**6**	**18**
Усього годин за модулем 1	**74**	**16**		**16**	**42**
Модуль 2					
Змістовий модуль 6. Чисельне інтегрування (квадратурні формули)					
Тема 11. Квадратурні і неквадратурні формули чисельного інтегрування	12	2		4	6
Разом за змістовим модулем 6	**12**	**2**		**4**	**6**
Змістовий модуль 7. Чисельне диференціювання					
Тема 12. Наближене обчислення кратних інтегралів	6	2			4
Разом за змістовим модулем 7	**6**	**2**			**4**
Змістовий модуль 8. Чисельні методи розв’язання звичайних диференціальних рівнянь					
Тема 13. Розв’язання звичайних диференціальних рівнянь	13	4		4	5
Разом за змістовим модулем 8	**13**	**4**		**4**	**5**
Усього годин за модулем 2	**31**	**8**		**8**	**15**
Усього годин за дисципліною	**105**	**24**	—	**24**	**57**

5. Теми семінарських занять

Семінарські заняття навчальним планом не передбачені

6. Теми практичних занять

Практичні заняття навчальним планом не передбачені

7. Теми лабораторних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1.	Знайомство з математичним пакетом MathCAD	2
2.	Дії над матрицями в MathCAD	2
3.	Теорія похибок і машинна аріфметіка	4
4.	Глобальна та кусочно-лінійна інтерполяція засобами пакету Mathcad	4
5.	Сплайн-інтерполяція засобами пакету Mathcad	4
6.	Розв'язання алгебраїчних рівнянь в математичному пакеті MathCAD	4
7.	Розв'язання задачі Коші в MathCAD	4
	Разом	**24**

8. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1.	Чисельні методи як розділ сучасної математики	2
2.	Поняття похибки	2
3.	Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь	4
4.	Векторні і матричні норми	4
5.	Поняття ітераційних методів	4
6.	Власні значення	4
7.	Підходи до розв'язання систем нелінійних рівнянь	4
8.	Інтерполяційні многочлени	6
9.	Многочлени Чебишева	6
10.	Найкраще наближення в лінійному нормованому просторі	6
11.	Квадратурні і неквадратурні формули чисельного інтегрування	6
12.	Наближене обчислення кратних інтегралів	4
13.	Розв'язання звичайних диференціальних рівнянь	5
	Разом	**57**

9. Індивідуальне завдання

Виконання розрахунково-графічної роботи «Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь».

10. Методи навчання

Проведення аудиторних лекцій, практичних занять, лабораторних робіт, індивідуальні консультації (при необхідності), самостійна робота студентів за матеріалами, опублікованими кафедрою (методичні посібники).

11. Методи контролю

Проведення поточного контролю у вигляді тестів, усної здачі індивідуальних робіт, письмового модульного контролю, фінальний контроль у вигляді семестрового контролю: звлік (проводиться у разі відмови студента від балів поточного тестування та за наявності допуску).

12. Критерії оцінювання та розподіл балів, які отримують студенти

12.1. Розподіл балів, які отримують студенти (кількісні критерії оцінювання)

Складові навчальної роботи	**Бали за одне заняття (завдання)**	**Кількість занять (завдань)**	**Сумарна кількість балів**
Модуль 1			
Виконання лабораторних робіт	0…5	3	0…15
Модульний контроль	0…25	1	0…25
Модуль 2			
Виконання лабораторних робіт	0…5	4	0…20
Модульний контроль	0…20	1	0…20
Виконання та захист	0…20	1	0…20

розрахункової роботи			
Всього за семестр			**0…100**

Семестровий контроль (залік) проводиться у разі відмови студента від балів поточного тестування та за наявності допуску. При складанні заліку студент має можливість отримати максимум 100 балів.

Білет для заліку складається з двох теоретичних та трьох практичних завдань. За кожне теоретичне питання та практичне завдання студент може отримати до 20 балів. Максимальна сума всіх балів – 100.

12.2. Якісні критерії оцінювання

Необхідний обсяг знань для одержання позитивної оцінки:

знати:

- методи зберігання чисел в пам'яті комп'ютера і дії над ними, оцінку точності дій з приблизними числами;
- методи розв'язання основних математичних задач – інтегрування, диференціювання, розв'язання лінійних і трансцендентних рівнянь и систем рівнянь за допомогою комп'ютерів;
- основні чисельні методи розв'язання лінійних і нелінійних алгебраїчних рівнянь (робота з матрицями різних типів і ітераційні алгоритми), методи обробки експериментальних даних (інтерполяція і наближення), чисельні методи інтегрування і диференціювання, чисельні методи розв'язання диференційних рівнянь у звичайних диференціалах і екстремальних задач (одномірних и багатомірних).

Необхідний обсяг умінь для одержання позитивної оцінки:

уміти:

- коректно використовувати чисельні методи для розв'язання математично формалізованих задач на комп'ютерах;
- використовувати основні чисельні методи розв'язання математичних задач;
- оцінювати область використання чисельних методів, ефективність і похибку чисельного рішення;
- розробляти алгоритми і програми для розв'язання облікових задач з необхідною точністю результату, що отримується.

12.3 Критерії оцінювання роботи студента протягом семестру

Задовільно (60-74). Показати мінімум знань та умінь. Захистити всі лабораторні роботи. Застосовувати основні чисельні методи для розв'язання прикладних задач. Відповіді студента розкривають суть питань без достатньої повноти і обґрунтування, або у відповідях є неправильне тлумачення окремих понять та неточність у формулюванні відповідних термінів.

Добре (75-89). Твердо знати матеріал, захистити всі лабораторні роботи. Розв'язувати прикладні задачі із застосуванням чисельних методів. Вміти оцінювати область використання чисельних методів, ефективність і похибку чисельного рішення. У відповідях студента можуть допускатися окремі помилки непринципового характеру, які не впливають на розкриття суті теоретичних питань. Завдання в цілому виконуються без помилок, але в обґрунтуванні розв'язання є певні недоліки.

Відмінно (90-100). Здати всі контрольні точки з оцінкою «відмінно». Досконально знати всі теми та уміти застосовувати їх.

Курсову роботу не передбачено навчальним планом.

Шкала оцінювання: бальна і традиційна

Сума балів	Оцінка за традиційною шкалою	
	Іспит, диференційований залік	Залік
90 – 100	Відмінно	Зараховано
75 – 89	Добре	
60 – 74	Задовільно	
0 – 59	Незадовільно	Не зараховано

13. Методичне забезпечення

1. Рыженко Е.И. Численные методы. Лабораторный практикум (в электронной форме). - ХАИ, 2013.

14. Рекомендована література

14.1. Базова

1. Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В. Вычислительные методы для инженеров. - М.: Высшая школа, 1994.
2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. - М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П. Кобельков Г.М. Численные методы / Учебн. пособие- М.: Наука, 1988.- 631с.
4. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. - М.: Высшая школа, 2002.
5. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры. - М.: Наука, 1977.
6. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. - М.: Наука, 984.
7. Волков Е. А. Численные методы. - СПб.: Лань, 2004.
8. Калиткин Н. Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978.
9. Коновалов А.Н. Введение в вычислительные методы линейной алгебры. – Новосибирск, Наука, 1993. - 158 с.
10. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. - М.: Наука, 1989.
11. Плис А. И., Сливина Н. А. Лабораторный практикум по высшей математике. - М.: Высшая школа, 1994.
12. Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение. - М.: Мир, 1984.
13. Самарский А. А. Введение в численные методы. - М.: Наука, 1987.
14. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. - М.: Наука, 1989.
15. Самарский А. А., Николаев. Методы решения сеточных уравнений. - М.:Наука, 1978.
16. Самарский А.А. Введение в численные методы / Учебн. пособие- М.: Наука, 1982.- 271с.
17. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы / Учебн. пособие- М.: Наука, 1989.- 430с.
18. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980.- 280с.

14.2. Додаткова і довідкова література

1. Джонсон, К. Численные методы в химии / К. Дж. Джонсон ; пер. с англ. В.П. Дмитриева, С.В. Кривеко, И.Г. Сыщиковой ; под ред. А.М. Евсеева. – М. : Мир, 1983. – 503 с.
2. Мэтьюз Д. Численные методы. Использование MATHLAB : учебное издание / Д. Мэтьюз, К. Финк ; пер. с англ. Л.Ф. Козаченко ; под. ред. Ю.В. Козаченко. – М. : Изд. дом Вильямс, 2001. – 720 с. : ил.

3. Турчак Л.И. Основы численных методов: учеб. пособие / Л.И. Турчак, П.В. Плотников. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 304 с.
4. Эберт К. Компьютеры. Применение в химии / К. Эберт, Х. Эдерер ; пер. с нем. А.Е. Гохмана ; под. ред. Н.С. Зефирова. – М. : Мир, 1988. – 415 с.
5. Самарский А.А. Математическое моделирование: Идей. Методы. Примеры. : монография / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 320 с.
6. Формалев В.Ф. Численные методы: учебник / В.Ф. Формалев, Д.Л. Ревизников ; под ред. А.И. Кибзуна. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.
7. Н.Н.Калиткин Численные методы. ФизМатЛит. 2000.
8. Васильев, А.Н. Научные вычисления в Microsoft Excel [Текст] : серия: Решение практических задач / А.Н. Васильев – М. : Диалектика, 2004. – 512 с. : ил.

15. Інформаційні ресурси

1. Библиотека алгоритмов / Бочканов С., Быстрицкий В. – Режим доступа: http://alglib.sources.ru, свободный. – Яз. рус.
2. Численные методы и программирование / Режим – доступа: http://www.physchem.chimfak.sfedu.ru/Source/NumMethods, свободный. – Яз. рус

Міністерство освіти і науки України
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Кафедра інформаційних технологій проектування (№ 105)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Керівник проектної групи/
Голова НМК

_______ ____________________
(підпис) (ініціали та прізвище)

«____» ____________ 2019 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА ОБОВ'ЯЗКОВОЇ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
Спеціальні математичні методи

Галузь знань: **12 «Інформаційні технології»**
(шифр і назва галузі)

Спеціальність: **122 «Комп'ютерні науки»**
(код та найменування спеціальності)

Освітня програма: **«Інформаційні технології проектування»**
(найменування освітньої програми)

Форма навчання: денна

Рівень вищої освіти: перший (бакалаврський)

Харків 2019 рік

Робоча програма навчальної дисципліни «Спеціальні математичні методи»
(назва дисципліни)
для студентів за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки»
освітньою програмою «Інформаційні технології проектування»

«7» червня 2019 р., – 11 с.

Розробник: ст. викладач кафедри вищої математики та системного аналізу

О.А. Мураховська _______________
(підпис)

Робочу програму розглянуто на засіданні кафедри інформаційних технологій проектування (№ 105)
Протокол № ____ від « _____» _________ 2019р.

Завідувач кафедри інформаційних технологій проектування

д.т.н., професор _______________________ (Є. А. Дружинін)
(підпис) (прізвище та ініціали)

1. Опис навчальної дисципліни

<table>
<tr><th>Найменування показників</th><th>Галузь знань,
напрям підготовки,
освітньо-кваліфікаційний рівень</th><th colspan="2">Характеристика навчальної дисципліни
(денна форма навчання)</th></tr>
<tr><td>Кількість кредитів – 3,5</td><td rowspan="15"><u>Галузь знань:</u>
<u>12 «Інформаційні технології»</u>

<u>Спеціальність:</u>
<u>122 «Комп’ютерні науки»</u>

<u>Освітня програма:</u>
<u>«Інформаційні технології проектування»</u>

<u>Рівень вищої освіти: перший (бакалаврський)</u></td><td colspan="2">Навчальний рік</td></tr>
<tr><td>Модулів – 2</td><td colspan="2" rowspan="2">2019/2020</td></tr>
<tr><td>Змістових модулів – 8</td></tr>
<tr><td>Розрахунково-графічна робота «Розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь»</td><td colspan="2">Семестр</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Загальна кількість годин – 42/105.</td><td>4-й</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Лекції[1)]</td></tr>
<tr><td rowspan="9">Тижневих годин для денної форми навчання:
аудиторних – 3,
самостійної роботи студента – 5,3.</td><td colspan="2">18 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Практичні, семінарські[1)]</td></tr>
<tr><td colspan="2">— год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лабораторні роботи[1)]</td></tr>
<tr><td colspan="2">24 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостійна робота</td></tr>
<tr><td colspan="2">63 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Вид контролю: іспит</td></tr>
</table>

Примітка

Співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної роботи становить: – 42/105.

[1)] Аудиторне навантаження може бути збільшене або зменшене на одну годину в залежності від розкладу занять.

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Мета навчання полягає в ознайомленні студентів з основними методами математичної постановки і розв’язання задач з використанням комп’ютерів, а також в наданні навиків програмування коректних обчислювальних алгоритмів для розв’язання лінійних і нелінійних рівнянь, обробки експериментальних даних, чисельного диференціювання, інтегрування і розв’язання звичайних диференційних рівнянь.

Основними **завданнями** дисципліни є формування у студентів базових системних понять і навичок, які необхідні для розв’язання задач з деяких розділів математики, для яких точне рішення або відсутнє, або приблизний вид рішення обумовлюється неточністю вхідних даних задачі.

Міждисциплінарні зв’язки: вища математика, теорія ймовірностей та математична статистика, програмування.

Результати навчання:

- знати методи зберігання чисел в пам’яті комп’ютера і дії над ними, оцінку точності дій з приблизними числами;
- знати методи розв’язання основних математичних задач – інтегрування, диференціювання, розв’язання лінійних і трансцендентних рівнянь и систем рівнянь за допомогою комп’ютерів;
- знати основні чисельні методи розв’язання лінійних і нелінійних алгебраїчних рівнянь (робота з матрицями різних типів і ітераційні алгоритми), методи обробки експериментальних даних (інтерполяція і наближення), чисельні методи інтегрування і диференціювання, чисельні методи розв’язання диференційних рівнянь у звичайних диференціалах і екстремальних задач (одномірних и багатомірних).
- вміти коректно використовувати чисельні методи для розв’язання математично формалізованих задач на комп’ютерах;
- вміти використовувати основні чисельні методи розв’язання математичних задач;
- вміти оцінювати область використання чисельних методів, ефективність і похибку чисельного рішення;
- вміти розробляти алгоритми і програми для розв’язання облікових задач з необхідною точністю результату, що отримується.

Студент має надбати первинні **навички** доступу до чисельних методів, що використовуються при розв’язанні прикладних задач економіки і техніки.

3. Програма навчальної дисципліни

<u>Модуль 1</u>

Змістовий модуль 1. Математичне моделювання і обчислювальний експеримент

Тема 1. Чисельні методи як розділ сучасної математики. Поняття і актуальність чисельних методів. Роль комп'ютерно-орієнтованих чисельних методів в дослідженні складних математичних моделей.

Тема 2. Поняття похибки. Класифікація похибок. Абсолютна і відносна похибки числа і функції. Пряма і зворотна задачі теорії похибок. Несталі алгоритми. Особливості машинної арифметики.

Змістовий модуль 2. Чисельні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Тема 3. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Метод виключення невідомих (метод Гауса) розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Схема єдиного ділення. Метод Гауса з вибором головного елемента. LU – розкладення матриці. Методи обертання, квадратного кореня.

Тема 4. Векторні і матричні норми. Узгодженість норм. Обумовленість СЛАР. Число обумовленості матриці. Обчислення визначника. Звернення матриці.

Ортогональні перетворення. Матриці обертання і відображення. QR- та HR-розкладання матриць.

Метод прогонки рішень СЛАР з трьохдіагональною матрицею. Стійкість. Кореактність. Варіанти методу прогонки. Можливість розпаралелювання розрахунків

Змістовий модуль 3. Ітераційні методи

Тема 5. Поняття ітераційних методів. Стаціонарні та нестаціонарні ітераційні методи. Теореми збіжності. Метод Якобі. Метод Гауса-Зейделя. Канонічна форма ітераційних методів. Збіжність. Метод простої ітерації. Збіжність. Метод релаксації . Метод найшвидшого спуска. Метод мінімальних нев'язок. Метод сполучених градієнтів.

Тема 6. Власні значення. Повна і часткова проблема власних значень. Прямі та ітераційні методи. Ступеневий метод обчислення максимального по модулю власного числа. Метод скалярних добутків. Методи вичерпання. Метод Якобі рішення повної проблеми власних значень для симетричної матриці. QR-метод. Уточнення власних чисел і векторів. Оцінки власних чисел. Теореми Гершгоріна.

Змістовий модуль 4. Чисельні методи розв'язання нелінійних рівнянь

Тема 7. Підходи до розв'язання систем нелінійних рівнянь. Обчислення коренів нелінійних рівнянь. Відділення коренів. Метод поділу відрізка навпіл. Метод хорд. Методи простої ітерації, Ньютона. Модифікації методу Ньютона. Збіжність. Метод Вегстейна.

Підходи до розв'язання систем нелінійних рівнянь. Методи простої ітерації, Зейделя, Ньютона. Збіжність.

Змістовий модуль 5. Інтерполяція

Тема 8. Інтерполяційні многочлени. Існування і одиничність узагальненого інтерполяційного многочлена. Інтерполювання алгебраїчними многочленами. Інтерполяційні поліноми Лагранжа і Ньютона. Оцінка похибки інтерполяції.

Тема 9. Многочлени Чебишева. Оптимізація похибки інтерполяції. Збіжність інтерполяційного процесу. Сплайн-інтерполяція. Побудова кубічного сплайна

Тема 10. Найкраще наближення в лінійному нормованому просторі. Існування і одиничність елемента найкращого наближення. Многочлен найкращого наближення.

Найкраще наближення в гільбертовому просторі. Метод найменших квадратів. Апроксимація функцій багатьох змінних.

Модульний контроль

<u>Модуль 2</u>

Змістовий модуль 6. Чисельне інтегрування (квадратурні формули**)**

Тема 11. **Квадратурні і некваратурні формули чисельного інтегрування**. Загальні поняття. Інтерполяційні квадратурні формули. Квадратурні формули прямокутників, трапецій, Сімпсона. Квадратурні формули найвищого алгебраїчного ступеня точності. Побудова. Похибка. Стійкість. Інтегрування функцій спеціального виду. Апостеріорна оцінка похибки чисельного інтегрування методом Рунге. Неквадратурні формули чисельного інтегрування – метод Монте-Карло.

Змістовий модуль 7. Чисельне диференціювання

Тема 12. Наближене обчислення кратних інтегралів. Метод Монте-Карло. Формули чисельного диференціювання. Оцінка похибки. Некоректність. Регуляризація. Поняття сіткової функції. Найпростіші оператори кінцевих різниць.

Змістовий модуль 8. Чисельні методи розв'язання звичайних диференціальних рівнянь

Тема 13. Розв'язання звичайних диференціальних рівнянь. Метод Ейлера для задачі Коші. Методи Рунге-Кутта 2-го і 4-го порядку. Поняття стійкості різницевих методів. Явні і неявні схеми та їх стійкість.

Модульний контроль

4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин (денна форма)				
	усього	у тому числі			
		Лек	Прак	Лаб	Сам.роб.
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Модуль 1					
Змістовий модуль 1. Математичне моделювання і обчислювальний експеримент .					
Тема 1. Чисельні методи як розділ сучасної математики	3	1	—	—	2
Разом за змістовим модулем 1	**3**	**1**			**2**
Змістовий модуль 2. Похибки обчислювання на сучасних комп'ютерах (зникнення, переповнення, округлення)					
Тема 2. Поняття похибки	3	1	—	—	2
Разом за змістовим модулем 2	**3**	**1**			**2**
Змістовий модуль 3. Чисельні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь					
Тема 3. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь	12	2		4	6
Тема 4. Векторні і матричні норми	8	2			6
Тема 5. Поняття ітераційних методів	11	1		4	6
Тема 6. Власні значення	5	1			4
Разом за змістовим модулем 3	**36**	**6**		**8**	**22**
Змістовий модуль 4. Чисельні методи розв'язання нелінійних рівнянь					

Тема 7. Підходи до розв'язання систем нелінійних рівнянь	8	2	—	2	4
Разом за змістовим модулем 4	**8**	**2**		**2**	**4**
Змістовий модуль 5. Інтерполяція					
Тема 8. Інтерполяційні многочлени	13	1	—	6	6
Тема 9. Многочлени Чебишева	7	1			6
Тема 10. Найкраще наближення в лінійному нормованому просторі	8	2			6
Разом за змістовим модулем 5	**28**	**4**		**6**	**18**
Усього годин за модулем 1	**78**	**14**		**16**	**48**
Модуль 2					
Змістовий модуль 6. Чисельне інтегрування (квадратурні формули)					
Тема 11. Квадратурні і неквадратурні формули чисельного інтегрування	11	1		4	6
Разом за змістовим модулем 6	**11**	**1**		**4**	**6**
Змістовий модуль 7. Чисельне диференціювання					
Тема 12. Наближене обчислення кратних інтегралів	5	1			4
Разом за змістовим модулем 7	**5**	**1**			**4**
Змістовий модуль 8. Чисельні методи розв’язання звичайних диференціальних рівнянь					
Тема 13. Розв’язання звичайних диференціальних рівнянь	11	2		4	5
Разом за змістовим модулем 8	**11**	**2**		**4**	**5**
Усього годин за модулем 2	**27**	**4**		**8**	**15**
ІНДЗ					
Усього годин за дисципліною	**105**	**18**	—	**24**	**63**

5. Теми семінарських занять

Семінарські заняття навчальним планом не передбачені

6. Теми практичних занять

Практичні заняття навчальним планом не передбачені

7. Теми лабораторних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1.	Знайомство з математичним пакетом MathCAD	2
2.	Дії над матрицями в MathCAD	2
3.	Теорія похибок і машинна аріфметіка	4
4.	Глобальна та кусочно-лінійна інтерполяція засобами пакету Mathcad	4
5.	Сплайн-інтерполяція засобами пакету Mathcad	4
6.	Розв'язання алгебраїчних рівнянь в математичному пакеті MathCAD	4
7.	Розв'язання задачі Коші в MathCAD	4

	Разом	**24**

8. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1.	Чисельні методи як розділ сучасної математики	2
2.	Поняття похибки	2
3.	Розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь	6
4.	Векторні і матричні норми	6
5.	Поняття ітераційних методів	6
6.	Власні значення	4
7.	Підходи до розв'язання систем нелінійних рівнянь	4
8.	Інтерполяційні многочлени	6
9.	Многочлени Чебишева	6
10.	Найкраще наближення в лінійному нормованому просторі	6
11.	Квадратурні і неквадратурні формули чисельного інтегрування	6
12.	Наближене обчислення кратних інтегралів	4
13.	Розв’язання звичайних диференціальних рівнянь	5
	Разом	**63**

9. Індивідуальне завдання

Виконання розрахунково-графічної роботи «Розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь».

10. Методи навчання

Проведення аудиторних лекцій, практичних занять, лабораторних робіт, індивідуальні консультації (при необхідності), самостійна робота студентів за матеріалами, опублікованими кафедрою (методичні посібники).

11. Методи контролю

Проведення поточного контролю у вигляді тестів, усної здачі індивідуальних робіт, письмового модульного контролю, фінальний контроль у вигляді семестрового контролю: іспит (проводиться у разі відмови студента від балів поточного тестування та за наявності допуску).

12. Критерії оцінювання та розподіл балів, які отримують студенти

12.1. Розподіл балів, які отримують студенти (кількісні критерії оцінювання)

Складові навчальної роботи	Бали за одне заняття (завдання)	Кількість занять (завдань)	Сумарна кількість балів
Модуль 1			
Виконання лабораторних робіт	0…5	3	0…15
Модульний контроль	0…25	1	0…25
Модуль 2			
Виконання лабораторних робіт	0…5	4	0…20

Модульний контроль	0…20	1	0…20
Виконання та захист розрахункової роботи	0…20	1	0…20
Всього за семестр			**0…100**

Семестровий контроль (іспит) проводиться у разі відмови студента від балів поточного тестування та за наявності допуску. При складанні іспиту студент має можливість отримати максимум 100 балів.

Білет для іспиту складається з двох теоретичних та трьох практичних завдань. За кожне теоретичне питання та практичне завдання студент може отримати до 20 балів. Максимальна сума всіх балів – 100.

12.2. Якісні критерії оцінювання

Необхідний обсяг знань для одержання позитивної оцінки:

знати:

- методи зберігання чисел в пам'яті комп'ютера і дії над ними, оцінку точності дій з приблизними числами;
- методи розв'язання основних математичних задач – інтегрування, диференціювання, розв'язання лінійних і трансцендентних рівнянь и систем рівнянь за допомогою комп'ютерів;
- основні чисельні методи розв'язання лінійних і нелінійних алгебраїчних рівнянь (робота з матрицями різних типів і ітераційні алгоритми), методи обробки експериментальних даних (інтерполяція і наближення), чисельні методи інтегрування і диференціювання, чисельні методи розв'язання диференційних рівнянь у звичайних диференціалах і екстремальних задач (одномірних и багатомірних).

Необхідний обсяг умінь для одержання позитивної оцінки:

уміти:

- коректно використовувати чисельні методи для розв'язання математично формалізованих задач на комп'ютерах;
- використовувати основні чисельні методи розв'язання математичних задач;
- оцінювати область використання чисельних методів, ефективність і похибку чисельного рішення;
- розробляти алгоритми і програми для розв'язання облікових задач з необхідною точністю результату, що отримується.

12.3 Критерії оцінювання роботи студента протягом семестру

Задовільно (60-74). Показати мінімум знань та умінь. Захистити всі лабораторні роботи. Застосовувати основні чисельні методи для розв'язання прикладних задач. Відповіді студента розкривають суть питань без достатньої повноти і обґрунтування, або у відповідях є неправильне тлумачення окремих понять та неточність у формулюванні відповідних термінів.

Добре (75-89). Твердо знати матеріал, захистити всі лабораторні роботи. Розв'язувати прикладні задачі із застосуванням чисельних методів. Вміти оцінювати область використання чисельних методів, ефективність і похибку чисельного рішення. У відповідях студента можуть допускатися окремі помилки непринципового характеру, які не впливають на розкриття суті теоретичних питань. Завдання в цілому виконуються без помилок, але в обгрунтуванні розв'язання є певні недоліки.

Відмінно (90-100). Здати всі контрольні точки з оцінкою «відмінно». Досконально знати всі теми та уміти застосовувати їх.

Курсову роботу не передбачено навчальним планом.

Шкала оцінювання: бальна і традиційна

Сума балів	Оцінка за традиційною шкалою	
	Іспит, диференційований залік	Залік
90 – 100	Відмінно	Зараховано
75 – 89	Добре	
60 – 74	Задовільно	
0 – 59	Незадовільно	Не зараховано

13. Методичне забезпечення

1. Рыженко Е.И. Численные методы. Лабораторный практикум (в электронной форме). - ХАИ, 2013.

14. Рекомендована література

14.1. Базова

1. Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В. Вычислительные методы для инженеров. - М.: Высшая школа, 1994.
2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. - М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П. Кобельков Г.М. Численные методы / Учебн. пособие- М.: Наука, 1988.- 631с.
4. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. - М.: Высшая школа, 2002.
5. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры. - М.: Наука, 1977.
6. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. - М.: Наука, 984.
7. Волков Е. А. Численные методы. - СПб.: Лань, 2004.
8. Калиткин Н. Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978.
9. Коновалов А.Н. Введение в вычислительные методы линейной алгебры. – Новосибирск, Наука, 1993. - 158 с.
10. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. - М.: Наука, 1989.
11. Плис А. И., Сливина Н. А. Лабораторный практикум по высшей математике. - М.: Высшая школа, 1994.
12. Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение. - М.: Мир, 1984.
13. Самарский А. А. Введение в численные методы. - М.: Наука, 1987.
14. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. - М.: Наука, 1989.
15. Самарский А. А., Николаев. Методы решения сеточных уравнений. - М.:Наука, 1978.
16. Самарский А.А. Введение в численные методы / Учебн. пособие- М.: Наука, 1982.- 271с.
17. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы / Учебн. пособие- М.: Наука, 1989.- 430с.
18. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980.- 280с.

14.2. Додаткова і довідкова література

1. Джонсон, К. Численные методы в химии / К. Дж. Джонсон ; пер. с англ. В.П. Дмитриева, С.В. Кривеко, И.Г. Сыщиковой ; под ред. А.М. Евсеева. – М. : Мир, 1983. – 503 с.

2. Мэтьюз Д. Численные методы. Использование MATHLAB : учебное издание / Д. Мэтьюз, К. Финк ; пер. с англ. Л.Ф. Козаченко ; под. ред. Ю.В. Козаченко. – М. : Изд. дом Вильямс, 2001. – 720 с. : ил.
3. Турчак Л.И. Основы численных методов: учеб. пособие / Л.И. Турчак, П.В. Плотников. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 304 с.
4. Эберт К. Компьютеры. Применение в химии / К. Эберт, Х. Эдерер ; пер. с нем. А.Е. Гохмана ; под. ред. Н.С. Зефирова. – М. : Мир, 1988. – 415 с.
5. Самарский А.А. Математическое моделирование: Идей. Методы. Примеры. : монография / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 320 с.
6. Формалев В.Ф. Численные методы: учебник / В.Ф. Формалев, Д.Л. Ревизников ; под ред. А.И. Кибзуна. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.
7. Н.Н.Калиткин Численные методы. ФизМатЛит. 2000.
8. Васильев, А.Н. Научные вычисления в Microsoft Excel [Текст] : серия: Решение практических задач / А.Н. Васильев – М. : Диалектика, 2004. – 512 с. : ил.

15. Інформаційні ресурси

1. Библиотека алгоритмов / Бочканов С., Быстрицкий В. – Режим доступа: http://alglib.sources.ru, свободный. – Яз. рус.
2. Численные методы и программирование / Режим – доступа: http://www.physchem.chimfak.sfedu.ru/Source/NumMethods, свободный. – Яз. рус

Лекція1

Етапи розв‘язування задач на ЕОМ. Математичне моделювання. Методи розв‘язування математичних задач. Чисельні методи. Структура похибки розв‘язку задачі. Похибки функції. Зворотна задача теорії похибок. Представлення чисел в ЕОМ. Стійкість. Коректність.

Етапи розв‘язування задач на ЕОМ. Математичне моделювання. Методи розв‘язування математичних задач

Будь-яка задача, насамперед, представляється своїм фізичним змістом, тобто текстом.

Приклад. Тіло рухається по орбіті, що являє собою еліпс, в одному з фокусів якого знаходиться сонце. Визначити положення тіла (планети, комети), якщо відомий його ексцентриситет.

По фізичному змісту задачі ми цілком розуміємо, що дано і що потрібно отримати, однак відповісти на поставлене запитання не можемо. Тому потрібно побудувати модель (у даному випадку, математичну), що адекватно відображає всі характеристики і взаємозв'язки досліджуваного явища. Математична модель являє собою сукупність формул, використовуючи які, можна одержати рішення задачі. Наведений приклад становить задачу астрономії. Використовуючи закони Кеплера руху тіл по орбіті і деякі геометричні положення, одержимо математичну модель поставленої фізичної задачі у виді трансцендентного рівняння.

Отримане рівняння неможливо вирішити аналітично. Помітимо, що в деяких випадках аналітичне рішення можливе, але надзвичайно складне. У тім і іншому випадку слід визначити, до якого класу відноситься отримана математична модель (трансцендентне рівняння; система рівнянь; диференціальне рівняння; обчислення визначеного інтеграла; задача лінійного чи нелінійного програмування і т.д.), і відповідно до цього визначити чисельний метод рішення. Для кожного класу задач існує достатня кількість різних методів рішення. Вибір методу залежить від виду отриманих співвідношень, точності, з яким потрібно дістати рішення задачі, швидкості одержання рішення (кількості ітерацій) і т.д.

Коли визначений метод рішення, його представляють у виді алгоритму, тобто послідовності кроків, що ведуть від вихідних даних до результату. Готовий алгоритм записують у виді програми мовою програмування (наприклад, мовою PASKAL). Після того, як програма пройшла трансляцію (тобто правильна з погляду синтаксису), необхідно перевірити її відповідність фізичному змісту задачі. З цією метою вводять спрощені вхідні дані. Якщо результат відповідає умові, програма готова до обробки даних по вихідній задачі.

Чисельні методи. Структура похибки розв'язку задачі

Чисельні методи – могутній математичний засіб розв'язування задач. Найпростіші чисельні методи виникли і широко використовувалися задовго до появи ЕОМ. Застосовувати чисельні методи для розв'язування прикладних задач на базі ЕОМ треба обережно, оскільки точність знайденого розв'язку залежить від багатьох факторів. При цьому слід уміти оцінити похибку обчисленого розв'язку.

Похибка розв'язку задачі складається з похибки математичної моделі, неусувної похибки, похибки методу і обчислювальної похибки.

Похибка математичної моделі пов'язана з тим, що модель описує явище наближено, з припущеннями і спрощеннями. Тому треба мати уявлення про точність кінцевого результату, щоб спростити побудову математичної моделі.

Неусувна похибка зумовлена похибками у вхідних даних задачі. Вона залежить від методу розв'язування задачі. Але, щоб правильно обрати метод і визначити точність обчислень, важливо знати межі неусувної похибки.

Похибка методу пов'язана з необхідністю заміни неперервної моделі дискретною або з обривом нескінченного ітераційного процесу після скінченої кількості ітерацій.

Похибку, яку дістають від заміни неперервної моделі дискретною, називають *похибкою дискретизації* (або *похибкою апроксимації*).

Крім похибки дискретизації, існує інший тип похибки чисельних методів. В основі багатьох методів лежить ідея ітераційного процесу, у ході якого будується за певним правилом послідовність наближень до розв'язку задачі. Похибку, спричинену обривом ітераційного процесу, називають *похибкою збіжності.*

Обчислювальні похибки пов'язані з похибками округлення чисел. Обчислення, як ручні, так і на ЕОМ, виконують з певною кількістю значущих цифр. Похибки округлення можуть по-різному впливати на кінцевий результат. Якщо немає систематичних причин, випадкове нагромадження похибок округлення незначне.

Втрата точності може статися і при додаванні до великого числа дуже малих чисел. Для зменшення похибки додавати числа варто в порядку їх зростання. У машинній арифметиці комутативний і дистрибутивний закони алгебри не завжди виконуються. Обчислювальний алгоритм треба будувати так, щоб похибка округлень була значно меншою від усіх інших похибок.

Похибки функцій

Основна задача теорії погрішності полягає в наступному: відомі погрішності деякої системи величин, потрібно визначити погрішність даної функції від цих величин.

Нехай задана диференціювальна функція

$$u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

і нехай $|\Delta x_i|$ $(i = 1,2,...,n)$ - абсолютні погрішності аргументів функції. Тоді абсолютна погрішність функції

$$|\Delta u| = |f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)|.$$

Звичайно на практиці $|\Delta x_i|$ - малі величини, добутками, квадратами і вищими ступенями які можна знехтувати. Тому можна покласти:

$$|\Delta u| \approx |df(x_1, x_2, ..., x_n)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| |\Delta x_i|.$$

Отже,

$$|\Delta u| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| |\Delta x_i|. \quad (1)$$

Звідси, позначаючи через $|\Delta x_i|\ (i = 1,2,...,n)$ граничні абсолютні погрішності аргументів x_i і через Δu - граничну погрішність функції u, для малих $|\Delta x_i|$ одержимо:

$$\Delta u \le \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \Delta x_i. \quad (2)$$

Розділивши обидві частини нерівності (1) на u, будемо мати оцінку для відносної погрішності функції u

$$\delta \le \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{u}\right| |\Delta x_i| = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial}{\partial x_i} \ln(x_1, ..., x_n)\right| |\Delta x_i|. \quad (3)$$

Отже, за граничну відносну погрішність функції u можна прийняти:

$$\delta_u = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial}{\partial x_i} \ln u\right| \Delta x_i.$$

Зворотна задача теорії похибок

На практиці важлива зворотна задача: які повинні бути абсолютні погрішності аргументів функції, щоб абсолютна погрішність функції не перевищувала заданої величини.

Ця задача математично невизначена, тому що задану граничну погрішність Δu функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можна забезпечити, установлюючи по-різному граничні абсолютні погрішності $|\Delta x_i|$ її аргументів.

Найпростіше рішення зворотної задачі дається так названим *принципом рівних впливів.* Відповідно до цього принципу припускається,

що всі частки диференціальні.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \quad (i = 1,2,...,n)$$

однаково впливають на утворення загальної абсолютної погрішності Δa функції
$u = f(x_1, x_2, ..., x_n).$

Нехай величина граничної абсолютної погрішності Δa задана. Тоді на підставі формули (2)

$$\Delta_u = \sum_{i=1} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \Delta x_i. \quad (4)$$

Припускаючи, що всі доданки рівні між собою, будемо мати

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|\Delta x_1 = \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|\Delta x_2 = \ldots = \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|\Delta x_n = \frac{\Delta n}{n}.$$

Звідси

$$\Delta x_i = \frac{\Delta u}{n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|} \qquad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{5}$$

Представлення чисел в ЕОМ

Особливості двоїчної арифметики.

Застосування двоїчної системи числення в ЕОМ може розглядатися в двох аспектах:
1)двоїчна нумерація; 2)двоїчна арифметика, тобто виконання арифметичних обчислень над двоїчними числами.

Внутрішній двоїчний код символу – це його порядковий номер у двоїчній системі числення. «Як кодується зображення», наприклад, коди квітів восьмикольорової і 16-ткольорової палітри можна перевести в їхні десяткові номери. Червоний колір - номер 4 (двоїчний код 100); коричневий – номер 6 (код 110).

Для виконання обчислень з багатозначними числами необхідно знати правила додавання і правила множення однозначних чисел.

Правила:

0 + 0 = 0	0 * 0 = 0	0 – 0 = 0
1 + 0 = 1	1 * 0 = 0	1 – 0 = 1
1 + 1 = 10	1 * 1 = 1	10 – 1 = 1

Принцип перестановочного додавання і множення працює у всіх системах числення. Прийоми виконання обчислень з багатозначними числами в двоїчній системі аналогічні десяткової. (у стовпчик, розподіл куточком).

1001101101	10010 6 10 = 1001;
-100110111	1011 : 10 = 101,1
100110110	101100 : 10 = 10110

Зв'язок між двоїчною і шістнадцятирічною системами.

Представлення інформації, що зберігається в комп'ютерній пам'яті, у її справжньому двоїчному виді дуже громіздко через велику кількість цифр. Для цих цілей прийнято використовувати 8-меричну чи 16-тирічну системи.

Існує простий зв'язок між двоїчною та 16-тирічною системами. При перекладі числа з однієї системи в іншу, однієї шістнадцятирічної цифри відповідає чотирьохрозрядний двоїчний код. Є спеціальні таблиці відповідності. Такий зв'язок заснований на тім, що 16=24, і число різних 4-х розрядних комбінацій з цифр 0 і 1 дорівнює 16: від 1000 до 1111. Тому переклад чисел з «16» на «2» і назад виробляється шляхом формального перекодування. Прийнято вважати, що якщо дане 16-тирічне представлення внутрішньої інформації, то це рівносильне наявності двоїчного представлення. Перевага 16-тирічного представлення полягає в тому, що воно в 4 рази коротше двоічного.

Стійкість. Коректність

Похибки у вхідних даних задачі – неусувні. Обчислювач не може їх змінити, але мусить знати, як вони впливають на точність кінцевого результату такого самого порядку, як і порядок похибки вхідних даних, в інших задачах похибка результату може на кілька порядків перевищувати похибку вхідних даних. Чутливість задачі до неточностей у вхідних даних характеризується поняттям *стійкості*.

Задача називається *стійкою* за вхідними даними, якщо її розв‘язок неперервно залежить від вхідних даних, тобто малі похибки вхідних даних спричиняють малі похибки розв‘язку задачі. Якщо ця умова не виконується, то задача вважається нестійкою за вхідними даними. Приклад нестійкої задачі, який належить Уілкінсону.

Коренями багаточлена

$$P(x) = (x-1)(x-2)...(x-20) = x^{20} - 210x^{19} + ...$$

є числа $x_1 = 1$, $x_2 = 2$,..., $x_{20} = 20$.

Нехай один з коренів багаточлена обчислено з незначною похибкою.

Наприклад, коефіцієнт -210 при x^{19} змінимо на коефіцієнт $-210 + 2^{-23}(2^{-23} \approx 10^{-7})$. Тоді дещо змінений багаточлен $P(x) = P(x) - 2^{-23}x^{19}$ має такі округлені до двох десяткових (після коми) знаків корені:

$$x_1 = 1{,}00;\ x_2 = 2{,}00;\ ...;\ x_8 = 8{,}01;\ x_9 = 8{,}92;$$

$$x_{10,11} = 10{,}10 \pm 0{,}64i;\ x_{12,13} = 11{,}79 \pm 1{,}65i;\ ...;$$

$$x_{18,19} = 19{,}50 \pm 1{,}94i;\ x_{20} = 20{,}85.$$

Незначна похибка в коефіцієнті –210 даного багаточлена викликала суттєво інші значення коренів (десять з них стали комплексними). Причиною цього є нестійкість задачі, оскільки корені обчислювали з точністю до 11 значущих цифр і похибка округлень незначна.

Іноді під час розв‘язування стійкої за вхідними даними задачі нестійким може бути метод її розв‘язування.

Нехай треба обчислити інтеграли

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1}dx,\ n = 1,2,...$$

Інтегруючи за частинами, маємо

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1}dx = x^n e^{x-1}\Big|_0^1 - \int_0^1 nx^{n-1}e^{x-1}dx = 1 - n\int_0^1 x^{n-1}e^{x-1}dx.$$

Звідси дістанемо

$$I_1 = \frac{1}{e},\ I_2 = 1 - 2I_1,\ ...,\ I_n = 1 - nI_{n-1}.$$

Використавши рекурентне співвідношення, обчислимо перші дев‘ять інтегралів

$I_1 = 0{,}367879$, $I_2 = 0{,}264242$, $I_3 = 0{,}207274$,

$I_4 = 0{,}170904$, $I_5 = 0{,}145480$, $I_6 = 0{,}127120$,

$I_7 = 0{,}110160$, $I_8 = 0{,}118720$, $I_9 = -0{,}0684800$.

Значення інтеграла I_9 помилкове, оскільки підінтегральна функція $x^9 e^{x-1}$ в усіх точках відрізка $[0;1]$ невід'ємна. Помилка зумовлена похибкою округлення значення I_1 до шести значущих цифр. Ця похибка наближено дорівнює $4{,}4 \cdot 10^{-7}$. При обчисленні I_2 вона множиться на -3 і т.д. Похибка в I_9 дорівнює $9! \cdot 4{,}4 \cdot 10^{-7} \approx 0{,}1601$. Вона створила істинне значення I_9, яке з трьома значущими цифрами дорівнює 0,0916.

Введемо тепер поняття *коректності задачі*.

Задача називається *коректно поставленою*, якщо для будь-яких вхідних даних з десятого класу існує єдиний і стійкий за вхідними даними її розв'язок. Наведена вище задача обчислення коренів багаточлена є некоректно поставленою, а обчислення інтегралів – коректно поставленою задачею.

Для розв'язання некоректно поставлених задач застосовувати класичні чисельні методи не варто, оскільки похибки округлень при розрахунках можуть катастрофічно зростати і призвести до результату, далекого від шуканого розв'язку. Для розв'язання некоректно поставлених задач використовують так звані методи регуляризації, які замінюють дану задачу коректно поставленою.

Лекція 2-3 **Інтерполювання функції**

Задача наближеної функції. Інтерполяційні многочлени Ньютона і Лагранжа. Оцінка похибки інтерполювання. Екстраполювання й обернене інтерполювання. Інтерполювання функції за допомогою сплайнів.

Інтерполяційні многочлени Ньютона і Лагранжа. Оцінка похибки інтерполяційної форми

Для довільно заданих вузлів інтерполяції користуються більш загальною формулою, так названою *інтерполяційною формулою Лагранжа.*

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)} y_i \qquad (1)$$

многочлен $L_n(x)$ виду (1) називають і*нтерполяційним многочленом Лагранжа,* а наближену рівність

$$f(x) \approx L_n(x)$$

- *інтерполяційною формулою Лагранжа.*

Оцінка похибки інтерполяційної формули Лагранжа. Якщо функція f на відрізку $[a;b]$ є многочленом степеня, що менший або дорівнює n, то з єдності інтерполяційного многочлена випливає, що інтерполяційний многочлен $L_n(x)$ тотожно дорівнює f, тобто $f(x) - L_n(x) \equiv 0,\ x \in [a;b].$

Якщо f на відрізку $[a;b]$, який містить вузли інтерполяції x_i $(i = 0,1,...,n)$, не є многочленом степеня, що менший або дорівнює n, то різниця

$$R_n(f,x) = f(x) - L_n(x)$$

дорівнюватиме нулю лише у вузлах інтерполяції x_i $(i = 0,1,...,n)$, а в інших точках відрізка $[a;b]$ вона відмінна від тотожнього нуля. Функція $R_n(f,x)$, яка характеризує точність наближення функції f інтерполяційним многочленом $L_n(x)$, називають *залишковим членом* інтерполяційної формули Лагранжа, або *похибкою інтерполювання.*

Інтерполяційні многочлени Ньютона

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!\,h^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + ... +$$

$$+ \frac{\Delta^k y_0}{k!\,h^k}(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1}) + ... + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1}).$$

цей многочлен називають *першим інтерполяційним многочленом Ньютона.*

Замінивши функцію f відповідним їй інтерполяційним многочленом Ньютона, дістанемо наближену рівність

$$f(x) \approx P_n(x).$$

Цю формулу називають *першою інтерполяційною формулою Ньютона.*

На вигляд многочлен (і формула) Ньютона відрізняється від многочлена (і формули) Лагранжа. Але якщо ці многочлени побудовано для тієї самої функції f і однієї й тієї самої системи вузлів x_i $(i = 0,1,...,n)$, то за теоремою про єдність розв‘язку інтерполяційної задачі вони тотожно дорівнюватимуть одна одній.

Різницю

$$f(x) - P_n(x_0 + th) = R_n(x, f)$$

називають *залишковим членом першої інтерполяційної формули Ньютона.*

Залишковий член першої інтерполяційної формули Ньютона можна записати так:

$$R_n(x; f) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} t(t-1)...(t-n).$$

Перша інтерполяційна формула Ньютона практично незручна для інтерполяції функції поблизу кінця таблиці. У цьому випадку звичайно застосовується *друга інтерполяційна формула Ньютона.*

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\,h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + ... +$$
$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})...(x - x_1).$$

цей многочлен і називається *другим інтерполяційним многочленом Ньютона.*

Замінивши функцію $f(x)$ другим інтерполяційним многочленом Ньютона, дістанемо наближену рівність

$$f(x) \approx P_n(x)$$

ця рівність називається *другою інтерполяційною формулою Ньютона,* а різницю

$f(x) - P_n(x) = R_n(x; f)$ - *залишковим членом* цієї формули.

Оскільки інтерполяційні многочлени Лагранжа і Ньютона є різними формами запису одного і того самого інтерполяційного многочлена, то оцінка залишкового члена формули Ньютона буде такою самою, як і для формули Лагранжа, побудованої для тієї самої функції і тієї самої системи вузлів. Тому для *абсолютної похибки* інтерполяційної формули справедлива оцінка

$$\left|R_n(x; f)\right| \le M_{n+1} \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \left|t(t+1)(t+2)...(t+n)\right|,$$

де

$$M_{n+1} = \max_{[x_0; x_n]} \left|f^{(n+1)}(\xi)\right|.$$

Екстраполювання й обернене інтерполювання

Екстраполювання. Нехай функцію f задано своїми значеннями $y_i = f(x_i)$ $(i = 0,1,...,n)$ у рівновіддалених точках $x_i (i = 0,1,...,n)$. Обчислення значень функції f для значень аргументу, що не належить відрізку $[x_0; x_n]$, тобто для $x < x_0$ і $x > x_n$, називають *екстраполюванням,* або *екстраполяцією.*

Для обчислення значення функції f в точці $x < x_0$ доцільно застосувати першу інтерполяційну формулу Ньютона. У цьому разі $t = \frac{x - x_0}{h} < 0$, тому кажуть, що першу інтерполяційну формулу Ньютона використовують для екстраполювання назад. Якщо $x > x_n$, то $t = \frac{x - x_n}{h} > 0$. У цьому разі доцільно використовувати другу інтерполяційну формулу Ньютона. Тоді кажуть, що її використовують для екстраполювання вперед.

Слід зазначити, що екстраполювання є менш точною операцією, ніж інтерполювання. Тому до екстраполювання можна вдатись тоді, коли відстані x від точки x_0 або x_n менше за крок таблиці h. При більшій відстані слід чекати значних похибок. Тому межі застосування екстраполяції обмежені.

Обернене інтерполювання. Раніше розглядалися задачі на знаходження значень функції для значення аргументу, яких немає в таблиці. Проте на практиці часто стикаємось з оберненою задачею: за таблицею функції знайти значення аргументу, яке відповідає заданому значенню функції, якого в таблиці немає. Цю задачу називають *задачею оберненого інтерполювання.*

Якщо функція f строго монотонна (зростаюча або спадна) на заданій ділянці таблиці, то для неї існує обернена монотонна функція $x = \varphi(y)$. У цьому разі обернене інтерполювання зводиться до звичайного інтерполювання для оберненої функції $x = \varphi(y)$. При цьому значення $y_i = f(x_i)$ вважають значеннями аргументу, а значення x_i - значенням функції $x_i = \varphi(y_i)$. Але табличні різниці Δy_i функції f не зберігають сталих значень, тому для оберненого інтерполювання зручно використовувати інтерполяційний многочлен Лагранжа. Якщо функція f не монотонна, то для неї записують інтерполяційний многочлен Ньютона або Лагранжа, а потім розв’язують рівняння $P_n(x) = y$ або $L_n(x) = y$ відносно x при заданому y.

Інтерполювання функції за допомогою сплайнів

При інтерполюванні функцій з великою кількістю вузлів інтерполяційний поліном має високий степінь, що спричиняє коливання полінома на проміжках між вузлами інтерполювання. Щоб зменшити степінь інтерполяційного полінома вузли інтерполювання можна розбити на групи і будувати інтерполяційні поліноми з меншою кількістю вузлів. Але в цьому разі на стиках між вузлами порушуються аналітичні властивості інтерполяційного полінома, з‘являються точки розриву похідних. Позбутися цих недоліків при інтерполюванні можна за допомогою *сплайнів.* Сплайн на проміжку між вузлами інтерполювання є поліномом невисокого степеня. На всьому відрізку інтерполювання сплайн – це функція склеєна з різних частин поліномів заданого степеня. Наочне уявлення про сплайни дають криві, побудовані за допомогою лекал, а також трамвайні та залізничні колії. Найпростіший приклад сплайнів – ламані.

Лекція 4

Методи обробки експериментальних даних

Задача найкращого наближення. Рівномірне наближення. Середньоквадратичне наближення. Метод найменших квадратів наближення функції, заданої таблично. Побудова емпіричних формул, визначення параметрів залежності. Згладжування табличних функцій.

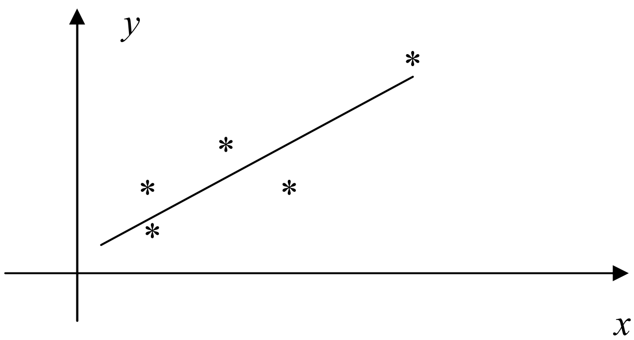
При заміні функції, заданої таблично на інтервалі $[a,b]$, що інтерполює необхідне виконання двох умов: ступінь полінома *n* збігається з кількістю вузлів і значення полінома у вузлах інтерполяції збігаються зі значеннями функції $y = f(x)$ у цих же вузлах: $P_n(x_i) = f(x_i)$. Однак при рішенні реальних задач кількість вузлів, а виходить, і ступінь полінома, може бути дуже високою; до того ж вимагати виконання другої умови взагалі нема рації, тому що на практиці таблиця значень функції може бути отримана в результаті експерименту, тобто з погрішностями. Тому на практиці частіше для апроксимації функції використовують метод найменших квадратів.

Постановка задачі. Нехай функція $y = f(x)$ задана (чи представлена в результаті табулювання) у виді таблиці

X	X_1	X_2	……………	X_N
Y	Y_1	Y_2	……………	Y_N

Побудувати аналітичну функцію $b^* = \varphi(x)$, оптимальним образом апроксимуючу дану.

Для підбора аналітичної функції $b^* = \varphi(x)$ будують крапковий графік вихідної функції по заданій таблиці, після чого проводять деяку лінію так, щоб крапки крапкового графіка розташовувалися по обидві сторони від цієї лінії.



Як аналітичну функцію найчастіше вибирають наступні:

- лінійну $b^* = a_0 x + a_1$;
- квадратичну $b^* = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$;
- напівкубічну $b^* = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$;

- показову $b^* = a_0 a_1^x$;
- логарифмічну $b^* = a_0 + a_1 \ln x$; і т.д.

Параметри залежності $a_0, a_1, \dots$ визначають, виходячи з наступного критерію оптимальності: середньоквадратичне відхилення (сума квадратів відхилень) функції і її наближення повинне бути найменшим:

$$\sigma(a_0, a_1, \dots) = \sum (y^* - y)^2 \to \min.$$

Оптимальні значення параметрів визначають із системи рівнянь: частки похідні по кожному з параметрів повинні дорівнювати нулю.

$$\frac{\partial \sigma}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial a_1} = 0, \quad \dots\dots \frac{\partial \sigma}{\partial a_n} = 0,$$

відповідно до теореми про екстремум функції декількох перемінних. Як приклад розглянемо лінійну апроксимацію, тобто $b^* = a_0 x + a_1$; тоді середньоквадратичне відхилення прийме вигляд

$$\sigma(a_0, a_1, \dots) = \sum (a_0 x + a_1 - y)^2 \to \min.$$

Диференціюючи праву частину по a_0 і a_1, одержимо два лінійних рівняння з двома невідомими.

$$\begin{cases} \sum x^2 a_0 + \sum x a_1 = \sum xy; \\ \sum x a_0 + n a_1 = \sum y. \end{cases}$$

Вирішуючи систему, наприклад, методом Крамера, одержуємо шукані оптимальні значення параметрів лінійної залежності.

Лекція 5-6 **Методи обробки експериментальних даних**

Задача найкращого наближення. Рівномірне наближення. Середньоквадратичне наближення. Метод найменших квадратів наближення функції, заданої таблично. Побудова емпіричних формул, визначення параметрів залежності. Згладжування табличних функцій.

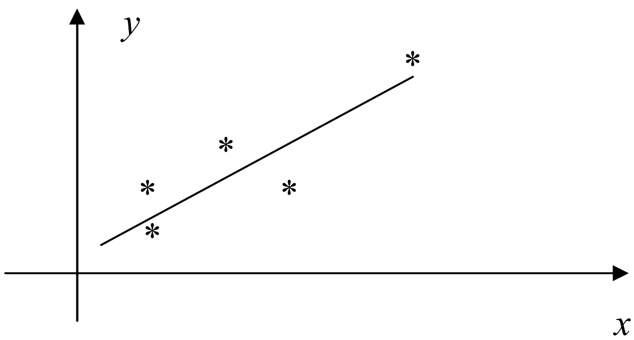
При заміні функції, заданої таблично на інтервалі $[a,b]$, що інтерполює необхідне виконання двох умов: ступінь полінома *n* збігається з кількістю вузлів і значення полінома у вузлах інтерполяції збігаються зі значеннями функції $y = f(x)$ у цих же вузлах: $P_n(x_i) = f(x_i)$. Однак при рішенні реальних задач кількість вузлів, а виходить, і ступінь полінома, може бути дуже високою; до того ж вимагати виконання другої умови взагалі нема рації, тому що на практиці таблиця значень функції може бути отримана в результаті експерименту, тобто з погрішностями. Тому на практиці частіше для апроксимації функції використовують метод найменших квадратів.

Постановка задачі. Нехай функція $y = f(x)$ задана (чи представлена в результаті табулювання) у виді таблиці

X	X_1	X_2	…………..	X_N
Y	Y_1	Y_2	…………..	Y_N

Побудувати аналітичну функцію $b^* = \varphi(x)$, оптимальним образом апроксимуючу дану.

Для підбора аналітичної функції $b^* = \varphi(x)$ будують крапковий графік вихідної функції по заданій таблиці, після чого проводять деяку лінію так, щоб крапки крапкового графіка розташовувалися по обидві сторони від цієї лінії.



Як аналітичну функцію найчастіше вибирають наступні:

- лінійну $b^* = a_0 x + a_1$;
- квадратичну $b^* = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$;
- напівкубічну $b^* = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$;

- показову $b^* = a_0 a_1^x$;
- логарифмічну $b^* = a_0 + a_1 \ln x$; і т.д.

Параметри залежності $a_0, a_1, ...$ визначають, виходячи з наступного критерію оптимальності: середньоквадратичне відхилення (сума квадратів відхилень) функції і її наближення повинне бути найменшим:

$$\sigma(a_0, a_1, ...) = \sum (y^* - y)^2 \to \min.$$

Оптимальні значення параметрів визначають із системи рівнянь: частки похідні по кожному з параметрів повинні дорівнювати нулю.

$$\frac{\partial \sigma}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial a_1} = 0, \quad \ldots\ldots \frac{\partial \sigma}{\partial a_n} = 0,$$

відповідно до теореми про екстремум функції декількох перемінних. Як приклад розглянемо лінійну апроксимацію, тобто $b^* = a_0 x + a_1$; тоді середньоквадратичне відхилення прийме вигляд

$$\sigma(a_0, a_1, ...) = \sum (a_0 x + a_1 - y)^2 \to \min.$$

Диференціюючи праву частину по a_0 і a_1, одержимо два лінійних рівняння з двома невідомими.

$$\begin{cases} \sum x^2 a_0 + \sum x a_1 = \sum xy; \\ \sum x a_0 + n a_1 = \sum y. \end{cases}$$

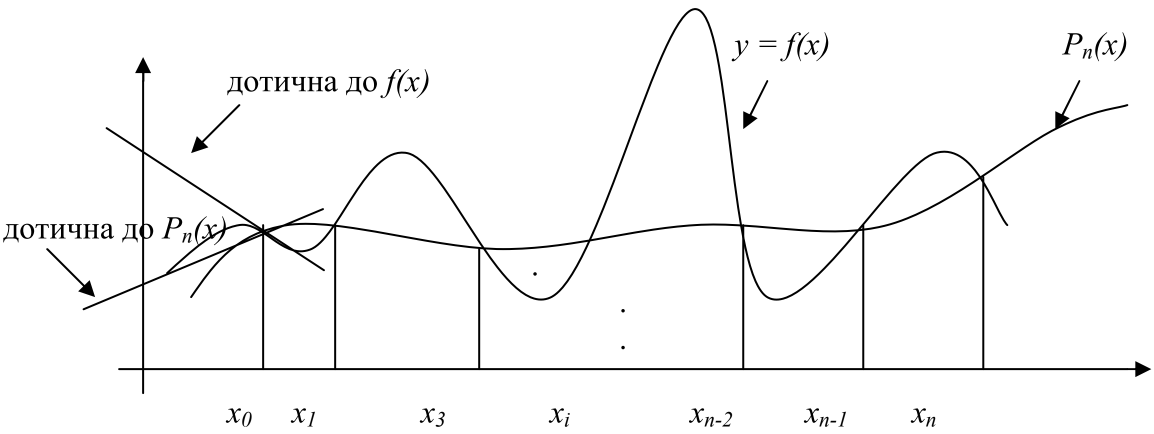
Вирішуючи систему, наприклад, методом Крамера, одержуємо шукані оптимальні значення параметрів лінійної залежності.

Лекція 7 **Чисельне диференціювання**

Чисельне диференціювання. Некоректність задачі чисельного диференціювання. Використання інтерполяційних поліномів для побудови формул чисельного диференціювання. Оцінка погрішності чисельного диференціювання.

Постановка задачі. Нехай функція $y = f(x)$ задана складно аналітично чи взагалі таблично на деякому інтервалі безперервності $[a,b]$. Потрібно про диференціювати цю функцію (n раз).

При аналітичному завданні функції обчислення похідних, тим більше високих порядків, досить складно, але необхідно при рішенні досить широкого кола практичних задач. Якщо ж функція задана таблично, обчислення похідних у звичайному, класичному змісті взагалі неможливо. У цих випадках використовують чисельне диференціювання. Воно засновано на заміні функції інтерполяційним поліномом. Однак задача чисельного диференціювання є некоректно поставленою, тому що збіг значень вихідної та функції, що інтерполює, у вузлах інтерполяції ще не означає збігу в проміжних крапках.



Для рішення задачі чисельного диференціювання використовують, зокрема, інтерполяційний поліном Ньютона, для системи рівновіддалених вузлів $x_{i+1} = x_i+h$, де h – крок інтерполяції на інтервалі $[a,b]$.

$$y'_k = y'(x_k) = (\Delta y_k - \frac{1}{2}\Delta^2 y_k + \frac{1}{3}\Delta^3 y_k - \ldots)/\Delta x_k\,;$$

$$y''(x_k) = (\Delta^2 y_k - \Delta^3 y_k + \frac{11}{12}\Delta^4 y_k - \frac{5}{6}\Delta^5 y_k + \ldots)/(\Delta x_k)^2;\ \ldots.$$

Диференціюючи послідовно, одержують похідні функції, заданої таблично, відповідно третього, четвертого, …порядків. Тут Δx – крок інтерполяції, Δy_k, $\Delta^2 y_k$, …- кінцеві різниці першого, другого і т.д. порядків.

Аналогічно застосовуються інтерполяційні формули Стирлинга і Бесселя.

Лекція 8-9 **Чисельне інтегрування функцій**

Задача чисельного інтегрування. Побудова квадратурних формул. Оцінка похибки чисельного інтегрування. Квадратурні формули Ньютона-Котеса. Формули прямокутників, трапецій, Сімпсона. Наближене обчислення кратних інтегралів.

Задача чисельного інтегрування. Побудова квадратурних формул. Оцінка похибки чисельного інтегрування

Постановка задачі. Нехай функція $y = f(x)$ задана аналітично або таблично на деякому інтервалі безперивності $[a;b]$. Вимагається обчислити визначений інтеграл

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Ця задача не завжди розв‘язується класичним способом (аналітично, з використанням методів та таблиць інтегрування). Тим більше, що підінтегральна функція задана на проміжку інтегрування таблично. У цих випадках треба будувати формули для наближеного обчислення визначених інтегралів. Особливо важливе значення мають методи чисельного інтегрування функцій, в яких для знаходження наближеного значення підінтегральної функції та її похідних у скінченій кількості точок, що належать переважно проміжку інтегрування. Такі формули обчислення наближеного значення визначених інтегралів називають *формулами механічних квадратур,* або *квадратурними формулами.*

Найчастіше застосовують квадратурні формули, в яких використовуються значення підінтегральної функції f в окремих точках відрізка інтегрування, тобто формули вигляду

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k). \qquad (1)$$

Сумі в правій частині (1) називають *квадратурною сумою,* дійсні числа x_k і A_k відповідно *вузлами* і *коефіцієнтами* квадратурної формули.

Рівність (1) наближена. Різницю між визначеним інтегралом і квадратурною сумою

$$R_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

називають *залишковим членом,* або *похибкою* квадратурної формули (1).

Крім похибки, яка виникає від заміни інтеграла квадратурною сумою (*похибки методу* $|R_n(f)|$), є похибка, яка зумовлена виконанням арифметичних дій над наближеними числами – значеннями $f(x_k)$. Якщо абсолютні похибки значень $f(x_k)$ дорівнюють Δ_f, то абсолютна похибка квадратурної суми $\sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ дорівнюватиме $\tilde{R} = \Delta_f \sum_{k=1}^{n} |A_k|$. Це так звана *неусувна похибка,* яка зумовлена наближеними значеннями $f(x_k)$. У процесі обчислень виникає ще похибка за рахунок округлення проміжних результатів. Оцінюючи похибки чисельного інтегрування, треба врахувати також і *похибку остаточного округлення* Δ_0. Отже, повна похибка чисельного інтегрування Δ_i дорівнює сумі названих вище трьох похибок, тобто

$$\Delta_I = \left|R_n(f)\right| + \widetilde{R} + \Delta_0 = \left|R(f)\right| + \Delta_f \sum_{k=1}^{n} \left|A_k\right| + \Delta_0. \qquad (2)$$

Для побудови квадратурних формул виду (1) часто вдаються до параболічного інтерполювання підінтегральної функції f.

Квадратурні формули Ньютона – Котеса. Формули прямокутників, трапецій, Сімпсона

Квадратурні формули Ньютона – Котеса замкнутого типу для рівновіддалених вузлів

$$\int_a^b y(x)dx \approx a_0 y_0 + a_1 y_1 + ... + a_n y_n dx,$$

де

$$a_k = \frac{(-1)^{n-k}\Delta x}{k!(n-k)!}\int_0^n \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)...(\lambda-n)}{(\lambda-k)}d\lambda,$$

тут a_i – коефіцієнти Котеса.

Для різних значень n виводяться:

$n=1$: формула трапеції

$$\int_a^b y(x)dx = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + ... + 2y_{n-1} + y_n),$$

n – кількість розбиття інтервалу $[a,b]$, $h = (a-b)/n$, y_i – значення функції в вузлових точках.

$n=2$: формула Сімпсона

$$\int_a^b y(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + ... + 4y_{n-1} + y_n),$$

тобто значення функції з парними індексами сумуються з коефіцієнтом 4, з непарними – з коефіцієнтом 2; кількість розбиття n повинна бути обов‘язково парним. Геометрично метод трапеції складається з заміни підінтегральної функції відрізком прямої (поліном першого ступеня); метод Сімпсона (метод парабол) – у заміні функції поліномом другого степеня (параболою).

Лекція 10-11 **Розв‘язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь**

Розв‘язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Деякі поняття матричної алгебри. Представлення лінійної системи в матричній формі. Розв‘язання систем лінійних рівнянь в матричній формі. Метод Крамера. Метод Гауса. Метод квадратних коренів. Матричний метод. Ітеративні методи.

Розв‘язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Способи рішення систем лінійних рівнянь в основному розділяють на дві групи:

1) *точні методи, що* представляють собою кінцеві алгоритми для обчислення коренів системи (такі, наприклад, правило Крамера, метод Гауса, метод головних елементів, метод квадратних коренів і ін.),
2) *ітераційні методи, що* дозволяють одержувати корені системи з заданою точністю шляхом нескінченних процесів, що сходяться, (до числа їхній відносяться метод ітерації, метод Зейделя, метод релаксації та ін.).

Деякі поняття матричної алгебри. Представлення лінійної системи в матричній формі. Розв‘язання систем лінійних рівнянь в матричній формі. Метод Крамера

Нехай дана система n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

Позначимо через

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

матрицю з коефіцієнтів системи (1), через

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

– стовпець її вільних членів і через

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

– стовпець з невідомих (шуканий вектор). Тоді система (1) коротко може бути записана у вигляді матричного рівняння

$$A\bar{x} = \bar{b}. \qquad (5)$$

Сукупність чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, обертаючих систему (1) у тотожність, називається розв‘язком цієї системи, а самі числа $x_i -$ її коренями.

Якщо система (1) крамеровська, то система (5) має розв‘язок

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b}.$$

Якщо визначник системи (1)

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то вона має єдиний розв'язок. Його можна обчислити за *формулами Крамера*

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}, \ (k = 1,2,...,n),$$

де матрицю дістають з матриці A, замінивши її k-й стовпець стовпцем вільних членів.

Формули Крамера мають велике теоретичне значення, але через великий обсяг обчислювальної роботи мало ефективні при чисельному розв‘язуванні лінійних систем. За цими формулами треба обчислити значення $(n+1)$ визначників порядку n, для чого виконати значну кількість арифметичних операцій.

Метод Гауса

Найпростішим методом розв‘язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь є *метод послідовного виключення змінних,* або *метод Гауса.* Є кілька модифікацій цього методу. Розглянемо *схему єдиного ділення,* за якою систему розв‘язують в два етапи. На першому етапі вихідну систему рівнянь зводять до рівносильної їй системи трикутної форми. Цей процес перетворення називають *прямим ходом.* На другому етапі, який називають *зворотним ходом,* знаходять розв‘язок лінійної системи рівнянь трикутної форми.

Оскільки перетворення систем рівнянь є фактично перетвореннями їх коефіцієнтів при змінних і вільних членів, то для виконання перетворень немає потреби виписувати системи. Досить всі записи розміщувати в окремій таблиці, яка складається з кількох частин, що відповідають певним крокам перетворення вихідної системи рівнянь.

Обмежимося розглядом системи трьох рівнянь з трьома змінними

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34}. \end{cases} \qquad (6)$$

визначник Δ якої не дорівнює нулю.

Кроки перетво-рень	Рядок	Коефіцієнт при змінних			Вільний член	Контроль	
		x_1	x_2	x_3		Контрольна сума $\sum$	Рядкова сума σ

1	2	3	4	5	6	7	8
1	1 2 3	a_{11} a_{21} a_{31}	a_{12} a_{22} a_{32}	a_{13} a_{23} a_{33}	a_{14} a_{24} a_{34}	a_{15} a_{25} a_{35}	$\sum_{j=1}^{4} a_{1j}$ $\sum_{j=1}^{4} a_{2j}$ $\sum_{j=1}^{4} a_{3j}$
2	4 5 6	1	$a_{12}^{(1)}$ $a_{22}^{(1)}$ $a_{32}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$ $a_{23}^{(1)}$ $a_{33}^{(1)}$	$a_{14}^{(1)}$ $a_{24}^{(1)}$ $a_{34}^{(1)}$	$a_{15}^{(1)}$ $a_{25}^{(1)}$ $a_{35}^{(1)}$	$\sum_{j=2}^{4} a_{1j}^{(1)} + 1$ $\sum_{j=2}^{4} a_{2j}^{(1)}$ $\sum_{j=2}^{4} a_{3j}^{(1)}$
3	7 8	1	1	$a_{23}^{(2)}$ $a_{33}^{(2)}$	$a_{24}^{(2)}$ $a_{34}^{(2)}$	$a_{25}^{(2)}$ $a_{35}^{(2)}$	$\sum_{j=3}^{4} a_{2j}^{(2)} + 1$ $\sum_{j=3}^{4} a_{3j}^{(2)}$
4	9 10 11	1	1	1	x_3 x_2 x_1	$\bar{x}_3$ $\bar{x}_2$ $\bar{x}_1$	$1 + x_3$ $1 + x_2$ $1 + x_1$

У процесі розв‘язування системи рівнянь треба організувати контроль правильності обчислень. Щоб вчасно виявити (і виправити) випадкові обчислювальні помилки, доцільно забезпечити контроль правильності обчислень у кожному рядку таблиці (так званий поточний контроль). Для цього до схеми обчислень введено два додаткових стовпці: 7-й – контрольна сума $\sum$ і 8-й – рядкова сума σ.

Контрольна сума a_{i5} $(i = 1,2,3)$ - це сума коефіцієнтів при змінних і вільного члена для кожного рівняння системи (6)

$$a_{i5} = \sum_{j=1}^{4} a_{ij} \quad (i = 1,2,3). \tag{7}$$

Якщо a_{i5} прийняти за нові вільні члени в системі (6), то утворена лінійна система

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\bar{x}_j = a_{i5} \quad (i = 1,2,3) \tag{8}$$

буде мати невідомі $\bar{x}_j$, зв‘язані з попередніми невідомими x_j співвідношенням

$$\bar{x}_j = x_j + 1 \quad (i = 1,2,3). \tag{9}$$

Насправді, підставляючи формули (9) в рівняння (8), в силу системи (6) та формул (7) отримуємо тотожність

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\bar{x}_j + \sum_{j=1}^{3} a_{ij} = \sum_{j=1}^{4} a_{ij} \equiv a_{i5} \quad (i = 1,2,3).$$

Взагалі, якщо з контрольними сумами в кожному рядку робити такі ж операції, над іншими елементами цього рядка, то при відсутності помилок в обчисленнях, елементи стовпця $\sum$ рівні сумам елементів відповідно утворених рядків. Ця обставина є контролем прямого хода. Зворотній хід контролюється знаходженням чисел $\bar{x}_j$, які повинні співпадати з числами $\bar{x}_j + 1$.

Метод квадратних коренів

Цей метод використовують для знаходження розв‘язку лінійної системи яка задана у вигляді матричного рівняння (5). В якій матриця $A = (a_{ij})$ симетрична, тобто елементи, симетричні відносно головної діагоналі. Відомо, що симетричну матрицю A завжди можна подати у вигляді добутку двох взаємно транспонованих трикутних матриць

$$A = T'T, \tag{10}$$

де

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \dots & t_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{pmatrix};$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & 0 & \dots & 0 \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{1n} & t_{2n} & t_{3n} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Якщо тепер перемножити матриці T' і T, а потім прирівняти відповідні елементи матриць у рівності (10), то для знаходження $\frac{n(n+1)}{2}$ елементів t_{ij} $(i = 1,2,...,n;\ j = i, i+1,...,n)$ матриці T дістанемо систему $\frac{n(n+1)}{2}$ рівнянь

$$\begin{cases} t_{1i}^2 + t_{2i}^2 + ... + t_{ii}^2 = a_{ii} \\ t_{1i}t_{1j} + t_{2i}t_{2j} + ... + t_{ii}t_{ij} = a_{ij} \end{cases} \quad (i = 1,2,...,n);\ j - i + 1, i + 2,...,n; i < j).$$

З цієї системи знаходимо послідовно елементи матриці T (і T'). Маємо

$$\begin{cases} t_{11} = \sqrt{a_{11}}, t_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{t_{11}} (j = 2,3,...,n), \\ t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2} (1 < i \le n), \\ t_{ij} = (a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} t_{ki} t_{kj} / t_{ii} (i < j), \\ t_{ij} = 0 (i > j). \end{cases}$$

З рівності (10) випливає, що система (5) рівносильна двом системам рівнянь з трикутними матрицями $T'y = b$ і $Tx = y$.

Розв‘язавши систему $T'y = b$ з нижньою трикутною матрицею T', знайдемо

$$y_1 = \frac{b_1}{t_{11}}, \quad y_i = \frac{b_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} t_{ki} y_k}{t_{ii}} \quad (1 < i \le n).$$

Розв‘язавши потім систему $Tx = y$ з верхньою матрицею T, знайдемо шуканий розв‘язок системи (5)

$$x_n = \frac{y_n}{t_{nn}}, \quad x_i = \frac{y_i - \sum\limits_{k=i+1}^{n} t_{ik} x_k}{t_{ii}} \quad (1 \le i < n).$$

Метод простої ітерації

Застосування методу Гауса для розв‘язання системи лінійних рівнянь з великою кількістю невідомих досить громіздке. Крім того, кількість невідомих може бути така велика, що коефіцієнти системи не завжди можна розмістити в пам‘яті ЕОМ. Тоді застосовувати для її розв‘язування метод Гауса взагалі не можна. У цих випадках розв‘язують систему ітераційними методами.

Розглянемо *метод простої ітерації.*

Нехай задано систему лінійних рівнянь (1), або в матричному вигляді (5), тобто

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} ... a_{1n} \\ a_{21} a_{22} ... a_{2n} \\ .... \\ a_{n1} a_{n2} ... a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Нехай діагональні елементи a_{ii} $(i = 1,2,...,n)$ матриці A відмінні від нуля. Тоді, розв‘язавши перше рівняння системи (1) відносно x_1, а друге – відносно x_2 і т.д., дістанемо систему

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 + ... + \alpha_{1n} x_n + \beta_1, \\ x_2 = \alpha_{12} x_1 + \alpha_{23} x_3 + ... + a_{2n} x_n + \beta_2, \\ .... \\ x_n = \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + ... + \alpha_{nn-1} x_{n-1} + \beta_n, \end{cases} \tag{11}$$

де

$$a_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, i \neq j, \\ 0, i = j; \end{cases} \quad \beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

Ввівши до розгляду матриці

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}...\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}...\alpha_{2n} \\ .... \\ \alpha_{n1}\alpha_{n2}...\alpha_{nn} \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

систему (11) запишемо у вигляді

$$x = \alpha x + \beta. \tag{12}$$

Систему (12) називають системою *нормального виду.*

Розв‘яжемо її методом послідовних наближень. За початкове наближення візьмемо, наприклад, стовпець вільних членів, тобто $x^{(0)} = \beta.$

Тоді послідовно знаходимо

$$x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + \beta \quad (k = 0,1,2,...) \tag{13}$$

або в розгорнутому вигляді

$$x_i^{(0)} = \beta_i,$$

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + \beta_i, \; i = 1,2,...n; k = 0,1,2,... \tag{14}$$

Якщо послідовність наближень $x^{(0)}, x^{(1)},..., x^{(k)}...$ має границю $x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)},$ то ця границя і буде розв‘язком системи (12).

Справді, перейшовши до границі, коли $k \to \infty,$ у рівності (13), маємо

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k+1)} = \lim_{k\to\infty}(\alpha x^{(k)} + \beta) = \alpha \lim_{k\to\infty} x^{(k)} + \lim_{k\to\infty} \beta,$$

або

$$x^* = \alpha x^* + \beta.$$

Таким чином, вектор

$$x^* = \begin{bmatrix} x_n^* \\ x_n^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix},$$

є розв‘язком системи (12), а отже, і системи (1).

Метод послідовних наближень, який визначається формулами (13) або (14), називається методом *простої ітерації*.

Лекція 12 **Розв‘язування звичайних диференціальних рівнянь**

Чисельні методи розв‘язування звичайних диференціальних рівнянь. Постановка задачі Коші. Метод Ейлера. Метод Рунге – Кутта. Оцінка точності. Крайові задачі. Метод кінцевих різностей. Рівняння другого порядку та методи їх вирішення.

Звичайним диференціальним рівнянням (ЗДР) називається рівняння виду $F(x, y, y', y''...) = 0;$ де x – незалежна змінна, $y = y(x)$ – залежна змінна, $y', y''...$ - послідовні похідні. Рівняння першого порядку, розв‘язане відносно першої похідної, має вигляд $y' = f(x, y).$ Тоді $y = y(x,C)$ – загальний розв‘язок ЗДР першого порядку; C – невизначена постійна. Геометрично загальний розв‘язок являє собою сімейство інтегральних кривих на площині.

Постановка задачі Коші

Задача Коші полягає в тому, щоб знайти розв‘язок

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

який задовольняє початкову умову

$$y(x)\Big|_{x=x_0} = y_0. \tag{2}$$

Геометрично це означає, що треба знайти ту інтегральну криву $y(x)$ рівняння (1), що проходить через точку (x_0, y_0).

Задача Коші (1) – (2) має єдиний розв‘язок. Однак на практиці не завжди вдається вирішити задачу Коші аналітично, бо аналітичне розв‘язання дуже складне. Тоді використовують чисельні методи розв‘язання задачі Коші. Найбільш відомі – метод Ейлера та метод Рунге – Кутта.

Метод Ейлера

Розглянемо рівняння (1) з початковою умовою $y(x) = y_0.$ Треба одержати розв‘язок задачі Коші на інтервалі неперервності функції $[a,b].$ Використовуючи визначення похідної, звідси одержимо $y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, x_{k-1}).$ За цією рекурентною формулою, знаючи початкову точку $(x_0, y_0),$ отримують послідовно $(x_1, y_1),$ $(x_2, y_2), ..., (x_n, y_n).$ Іншими словами, розв‘язок поставленої задачі Коші являється функція $y = y(x),$ задана таблично. Отриманий розв‘язок являється досить наближеним, похибка метода на кожному кроці (локальна похибка) до кінця інтервалу становиться значною. Однак модифікований метод Ейлера дає можливість уточнювати розв‘язок на кожному кроці (в кожній точці x_i, y_i), тим самим уточнюється розв‘язок на всьому інтервалі пошуку розв‘язку $[a,b]$:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k + \frac{h}{2}, y_{k-1} + \frac{h}{2});$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} f(x_{k+1}, y_k + hf_k).$$

Метод Рунге-Кутта

Формули Рунге-Кутта першого порядку точності

Нехай функція $f(x,y)$ в околі точки (x_k,y_k) має неперервні частинні похідні першого порядку. Тоді розв'язок $y(x)$ задачі Коші в околі точки x_k матиме неперервні похідні до другого порядку включно. Тому для досить малих значень h у точці $x_{k+1} = x_k+h$ можна подати за степенями h, врахувавши що

$$y'(x_k) = f(x_k, y_k) = f_k \tag{3}$$

таким чином

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hf(x_k, y_k) + O(h^2)$$

Формули першого порядку точності будуватимемо в такому вигляді:

$$y_{k+1} = y_k + w_1 k_1 \tag{4}$$

де $k_1 = hf(x_k, y_k)$, w_1 – невідомий параметр. Розклавши за степенями h праву частину виразу (4), матимемо

$$y_{k+1} = y_k + hw_1 f(x_k, y_k) \tag{5}$$

Прирівнявши між собою коефіцієнти при h у формулах знаходимо $w_1 = 1$. Підставивши це значення w_1 в рівність (4) впевнюємося в тому, що формулою Рунге-Кутта першого порядку точності є формула Ейлера. Похибка цього методу на кожному кроці є величиною порядку h^2.

Формули Рунге-Кутта другого порядку точності.

Формули другого порядку точності шукатимемо в такому вигляді:

$$y_{k+1} = y_k + w_1 k_1 + w_2 k_2 \tag{6}$$

де

$$k_1 = hf(x_k, y_k) \tag{7}$$

$$k_2 = hf(x_k + \alpha_2 h, y_k + \beta_{21} k_1) \tag{8}$$

Якщо покласти $w_2 = 1$, тоді $w_1 = 0$, $\alpha_2 = \beta_{21} = 1/2$, а формули (6)-(8) набувають вид:

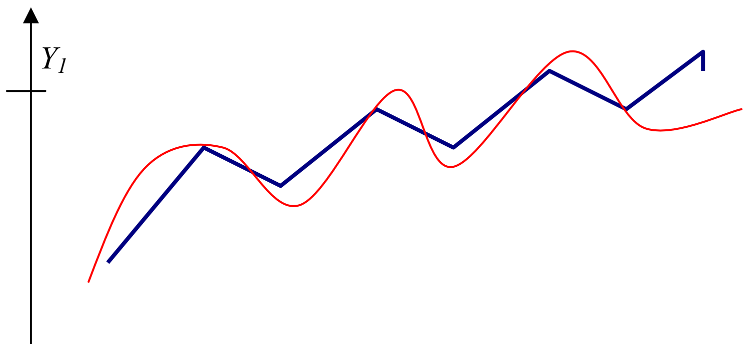
$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}(k_1 + k_2); k_1 = hf(x_k, y_k) \quad k_2 = hf(x_k + h, y_k + k_1),$$

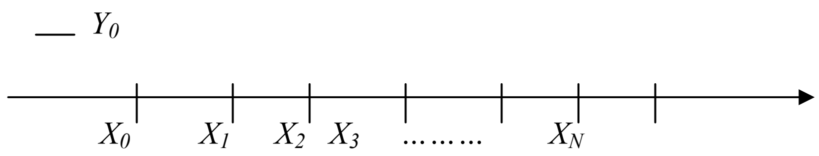
тобто дістали формули удосконаленого методу Ейлера.

Якщо покласти $w_2 = 3/4$, тоді $w_1 = 1/4$, $\alpha_2 = \beta_{21} = 2/3$ дістанемо розрахункові формули

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_2)$$

$$k_1 = hf(x_k, y_k) \qquad k_2 = hf(x_k + \frac{2}{3}h, y_k + \frac{2}{3}k_1).$$





Ламана Ейлера –

Интегральна кривая –

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1

ІНТЕРПОЛЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

Ціль роботи – здобути практичні навички розробки алгоритмів та програм, які здійснюють глобальне та локальне (лінійне та квадратичне) інтерполювання поліномами Лагранжа.

Теоретичні відомості

Нехай задана система точок: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_i, y_i), ..., (x_n, y_n)$, при цьому $x_0 < x_1 < ... < x_i < x_n$. Надалі ці точки будемо називати вузлами інтерполяції.

Задача інтерполяції полягає в побудові деякої функції $y = f(x)$, графік якої проходить через вузли інтерполяції, тобто для будь-якого x_i маємо $y_i = f(x_i)$. Така функція називається інтерполяційною, для заданого набору вузлів.

Найпростішим серед можливих інтерполяційних функцій є інтерполяційний многочлен, зокрема, многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{(x - x_0)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_n)}{(x_k - x_0)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)}. \qquad (1)$$

Якщо многочлен Лагранжа будується один для всієї системи точок, то таку інтерполяцію будемо називати глобальною.

Досить часто для кожної пари точок $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$, $(i = 0, 1, ..., n-1)$ будують лінійні інтерполяційні поліноми:

$$L_1(x) = y_i \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} + y_{i+1} \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}, \qquad (2)$$

де $x_i \le x \le x_{i+1}$.

В багатьох наближених обчисленнях (наприклад, формула Сімпсона, при обчислені інтегралів) використовують також квадратичну інтерполяцію. Для цього область інтерполювання необхідно поділити на парне число відрізків.

Беремо три вузли інтерполяції $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), (x_{i+2}, y_{i+2})$, де $i = (0, 2, 4, ..., n-2)$:

$$L_2(x) = y_i \frac{(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})} + y_{i+1} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+2})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2})} + y_{i+2} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i+2} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1})}$$

(3)

Інтерполяцію за формулами (2), (3) називають, відповідно, локальною лінійною та локальною квадратичною інтерполяцією.

Індивідуальне завдання

Для функцій, заданих в таблиці 1, побудувати графік (для цього можна використати пакети MathCad, Maple). Інтервал інтерполювання для змінної x підібрати так, щоб на ньому функція мала один максимум та один мінімум. Обчислити координати шести характерних точок, які лежать на графіку функції (за ці точки краще взяти кінці відрізка інтерполювання, точку максимуму, мінімуму та перегибу). Взяти ці точки за вузли інтерполяції.

Скласти програму, що реалізує:

1) глобальну інтерполяцію;
2) локальну лінійну інтерполяцію;
3) локальну квадратичну інтерполяцію;
4) побудувати сумісно графіки заданої функції та трьох видів інтерполяції;
5) для довільно вибраної точки $x_0 < x < x_n$, яка не співпадає з вузлами інтерполяції для кожного виду інтерполяції передбачити обчислення відносної похибки за формулою:

$$\delta = \frac{|y_{набл} - y_{точн}|}{y_{точн}} 100\% \tag{4}$$

Зробити висновки.

Таблиця 1 – Варіанти завдань

№ варіанту	Функція	№ варіанту	Функція
1	**2**	**3**	**4**
1	$y = 4 - \cos x^2$	14	$y = \ln(4 - \cos x)$
2	$y = e^{\sin(x+2)}$	15	$y = 3 + \cos(x^2)$
3	$y = e^{\cos 2x}$	16	$y = 2\sin x + \cos^2 x$
4	$y = 2 + \ln(4 + \sin x)$	17	$y = e^{\cos(2+x)}$
5	$y = 4 + \sin(2 + x^2)$	18	$y = 2 - \sin(x/2)$
6	$y = \ln(4 - \cos x)$	19	$y = e^{(1+\sin(x/2))}$
7	$y = e^{\sin 2x}$	20	$y = \ln(3 + \sin(x/2))$
8	$y = \ln(4 + \sin 2x)$	21	$y = e^{\sin(x/2)}$
9	$y = 2 + \cos x$	22	$y = \ln(3 - \cos x^2)$
10	$y = 3\sin(e^x)$	23	$y = 2 - \sin(x^2 / 2)$
11	$y = 2 + \cos(e^x)$	24	$y = \sin 3x + \cos(x + 5)$
12	$y = 2 + \sin(x^2)$	25	$y = 3 + \sin x$
13	$y = 4 + \ln(2 + \sin x)$		

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Ціль роботи – здобути практичні навички розробки алгоритмів і програм чисельних методів обчислення визначених інтегралів.

Теоретичні відомості

Чисельні методи обчислення визначеного інтегралу ґрунтуються на його визначенні та геометричній інтерпретації. З геометричної точки зору визначений інтеграл

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

є площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $f(x)$ та прямими $x = a, x = b$.

Розділимо відрізок $[a,b]$ на n рівних частин довжиною h. Надалі h будемо називати шагом чисельного методу.

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Тоді координати кінців відрізків поділу визначаються за формулою:

$$x_i = x_0 + ih,$$

де $x_0 = a, i = 0,1,...,n$. Через кожну точку поділу проведемо пряму паралельно осі oy, тим самим криволінійну трапецію розіб'ємо на n частинних криволінійних трапецій.

Найпростіші чисельні методи наближеного обчислення визначеного інтегралу це *метод лівих прямокутників* та *метод правих прямокутників*.

(А): *Метод лівих прямокутників* одержуємо, коли площу кожної i-тої частинної криволінійної трапеції замінимо на прямокутник, ширина якого h, висота дорівнює значенню функції $f(x_i)$ (надалі це значення будемо позначати f_i).

Розрахункова формула має вигляд:

$$S_{n-1} = h(f_0 + f_1 + ... + f_{n-1}).$$

Для організації циклу, краще використати її аналог

$$S_0 = hf_0 \Rightarrow S_i = S_{i-1} + hf_i, (i = 1,...,n-1). \qquad (1)$$

(Б): *Метод правих прямокутників* одержуємо коли площу кожної i-тої частинної криволінійної трапеції замінимо на прямокутник, ширина якого h, висота дорівнює значенню функції на правому кінці частинної криволінійної трапеції.

Розрахункова формула має вигляд:

$$S_n = h(f_1 + f_2 + ... + f_n).$$

Для організації циклу краще використати її аналог

$$S_0 = hf_1; S_i = S_{i-1} + hf_i, (i = 1,...,n). \qquad (2)$$

(В): *Метод трапецій*. Маємо площу кожної i-тої трапеції з висотою h та основами f_{i-1}, f_i.

Розрахункова формула має вигляду:

$$S_n = h\left(\frac{f_0 + f_1}{2} + \frac{f_1 + f_2}{2} + \ldots + \frac{f_{n-1} + f_n}{2}\right).$$

Для організації циклу краще використовувати її аналог

$$S_1 = \frac{f_0 + f_1}{2}h;\; S_i = S_{i-1} + h\frac{f_{i-1} + f_i}{2};(i = 2,\ldots,n). \qquad (3)$$

Зауваження: якщо врахувати результати лабораторної роботи 1, то формулу трапеції ми одержуємо заміною функції $f(x)$ кусочно-лінійною інтерпретацією з послідуючим інтегруванням.

(Г): *Метод парабол (формула* Сімпсона). Більш висока точність обчислення інтегралів забезпечується при виконанні кусочно-парабалічної інтерпретації підінтегральної функції $f(x)$, при цьому відрізок інтегрування розбивається на парне $n = 2m$ число відрізків з кроком

$$h = \frac{b-a}{2m}.$$

При цьому беремо три точки (вузли інтерполяції). Почнемо з $(x_0, f_0);(x_1, f_1);(x_2, f_2)$. Здійснюємо локальну квадратичну інтерполяцію (дивись лабораторну роботу 1) і беремо інтеграл. Тоді площа під параболою на відрізку $[x_0, x_2]$ дорівнює

$$I_0 = \frac{1}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)h.$$

Беремо наступну пару відрізків $[x_2, x_3],[x_3, x_4]$ і повторимо попередні обчислення:

$$I_2 = \frac{1}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4).$$

Продовжуючи обчислення, знайдемо наближено інтеграл над останньою парою відрізків $[x_{2m-2}, x_{2m-1}],[x_{2m-1}, x_{2m}]$:

$$I_{2m-2} = \frac{1}{3}(f_{2m-2} + 4f_{2m-1} + f_{2m}).$$

Шукане наближення значення інтегралу на відрізку $[a,b]$ одержимо коли визначимо суму площин всіх параболічних сегментів

$$S_{2m-2} = \sum_{i=0}^{m-1} I_{2i}.$$

Після деяких перетворень одержимо формулу Сімпсона

$$S_{2m-2} = \frac{1}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 2f_{2m-2} + 4f_{2m-1} + f_{2m}]h.$$

Більш зручною для програмування є формула

$$S_0 = \frac{1}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)h; S_{2i} = S_{2i-2} + \frac{1}{3}(f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2})h, (i = 1,\ldots,m-1). \qquad (4)$$

Оцінка похибки

Похибкою чисельного методу (зокрема обчислення інтегралу) є $\delta = |S_{точне} - S_{набл}|$, але ми точне значення ніколи не знаємо, тому похибку потрібно оцінити зверху.

Оцінкою похибки називають досить мале число $\varepsilon > 0$, таке, що $\delta < \varepsilon$, при цьому кажуть, що інтеграл обчислено з точністю ε.

Зрозуміло, що похибка залежить від точності чисельного методу та від числа частинних відрізків n, на яке розбивають відрізок інтегрування $[a,b]$.

Доведено, що похибка методів лівих та правих прямокутників пропорційна n^{-1}, або h. Це записують так $\delta \approx 0(n^{-1}) \approx 0(h)$.

Похибка методу трапеції $\delta \approx 0(n^{-2}) \approx 0(h^2)$.

Похибка методу Сімпсона $\delta \approx 0(n^{-4}) \approx 0(h^4)$.

Ці похибки відповідно називають похибками нульового, першого, другого та третього порядку.

Звичайно відрізок $[a,b]$ розбивають на таку кількість n частинних відрізків, щоб забезпечити необхідний порядок або оцінку похибки.

Існують більш складні, але більш конкретні оцінки похибки, а саме:

- **для методу трапецій**

$$\delta \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, де\ M_2 = \max_{a \le x \le b} |f''(x)|, \tag{5}$$

де $f''(x)$ – друга похідна функції $f(x)$.

- **для методу Сімпсона**

$$\delta \le \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4, де\ M_4 = \max_{a \le x \le b} |f^{IV}(x)|, \tag{6}$$

де $f^{IV}(x)$ – четверта похідна функції $f(x)$.

На практиці часто для досягнення заданої точності використовують метод подвійних перерахунків. Обчислення інтегралу починають для невеликих n, а потім число відрізків, на яке розбивають $[a,b]$, подвоюють, умовою виходу з циклу є:

$$|S_{2n} - S_n| < \varepsilon. \tag{7}$$

Індивідуальні завдання:

1) Обчислити інтеграл запропонованими двома методами (табл. 2).
2) Забезпечити в першому методі заданий порядок похибки.
3) В другому методі забезпечити задану оцінку похибки.
4) Порівняти результати.

Таблиця 2 – Варіанти завдань

№ варіанту	Інтеграл	Метод	Порядок похибки	Оцінка похибки
1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	$\int_{0.8}^{1.6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$	A, B	0,01	0,001 (за формулою (7))

Продовження таблиці 2

1	2	3	4	5
2	$\int_{1.2}^{2.7}\frac{dx}{\sqrt{x^2+3.2}}$	Б, Г	0,001	0,01
3	$\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+1.3}}$	А, Г	0,0001	0,001
4	$\int_{0.2}^{1.2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$	Б, В	0,01	0,0001
5	$\int_{0.8}^{1.4}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$	Б, Г	0,001	0,01
6	$\int_{0.4}^{1.2}\frac{dx}{\sqrt{0.5x^2+2}}$	В, Г	0,001	0,0001 (за формулою (7))
7	$\int_{1.4}^{2.1}\frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$	А, В	0,01	0,0001
8	$\int_{1.2}^{2.4}\frac{dx}{\sqrt{x^2+0.5}}$	А, Г	0,001	0,01
9	$\int_{0.4}^{1.2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$	Б, В	0,0001	0,01
10	$\int_{0.6}^{1.5}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$	Б, Г	0,01	0,0001 (за формулою (7))
11	$\int_{2}^{3.5}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$	В, Г	0,001	0,01
12	$\int_{0.5}^{1.3}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$	А, В	0,0001	0,01
13	$\int_{1.2}^{2.6}\frac{dx}{\sqrt{x^2+0.6}}$	А, Г	0,01	0,0001 (за формулою (7))
14	$\int_{1.4}^{2.2}\frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$	Б, В	0,001	0,01
15	$\int_{0.8}^{1.8}\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$	Б, Г	0,0001	0,01
16	$\int_{1.6}^{2.2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2.5}}$	В, Г	0,01	0,0001 (за формулою (7))
17	$\int_{0.6}^{1.6}\frac{dx}{\sqrt{x^2+0.8}}$	А, В	0,001	0,01
18	$\int_{1.2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1.2}}$	А, Г	0,001	0,01
19	$\int_{1.4}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+0.7}}$	Б, Г	0,0001	0,01

Продовження таблиці 2

1	2	3	4	5
20	$\int_{3.2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{0.5x^2+1}}$	В, Г	0,01	0,0001
21	$\int_{0.8}^{1.7} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0.3}}$	А, В	0,001	0,01
22	$\int_{1.2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{0.5x^2+1.5}}$	А, Г	0,0001	0,01
23	$\int_{2.1}^{3.6} \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$	Б, В	0,01	0,001
24	$\int_{1.3}^{2.5} \frac{dx}{\sqrt{0.2x^2+1}}$	Б, Г	0,001	0,01
25	$\int_{2.3}^{3.5} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$	В, Г	0,0001	0,01

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 3

РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ $f(x)=0$

Ціль роботи – здобути практичні навички розробки алгоритмів і програм чисельних методів розв'язання нелінійних рівнянь $f(x)=0$.

Теоретичні відомості

Будь-яке рівняння з одним невідомим можна записати у вигляді $f(x)=0$.

Розв'язком рівняння називається таке значення x (корінь рівняння), при якому $f(x)\equiv 0$. Звичайно точне знаходження коренів рівняння неможливе крім деяких спеціальних випадків, які вивчались у школі (лінійні, квадратичні рівняння та рівняння, що зводяться до них).

Задача знаходження наближеного значення кореня розпадається на два етапи:

1 Відокремлення коренів.

2 Уточнення кореня.

Відокремлення коренів – це знаходження відрізка, на якому лежить цей і тільки цей корінь рівняння.

Для відокремлення коренів корисні дві теореми з математичного аналізу.

Теорема 1. Якщо функція $y=f(x)$ безперервна на відрізку $[a;b]$ та $f(a)\cdot f(b)<0$, то всередині відрізка $[a;b]$ існує по меншій мірі один корінь рівняння $f(x)=0$.

Теорема 2. Якщо функція $y=f(x)$ безперервна на відрізку $[a;b]$ $f(a)\cdot f(b)<0$ та $f'(x)$ на інтервалі зберігає знак, то всередині відрізка $[a;b]$ існує тільки один корінь рівняння $f(x)=0$.

Для відокремлення коренів використовують також графік функції $y=f(x)$. Коренями рівняння є ті значення, при яких графік функції $y=f(x)$ перетинає вісь абсцис. Якщо побудова графіку функції $y=f(x)$ викликає утруднення, то рівняння потрібно привести до вигляду $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$ таким чином, щоб графік функції $y=\varphi_1(x)$ та $y=\varphi_2(x)$ були достатньо простими. Абсциси точок перетину цих графіків і будуть коренями рівняння.

Уточнення кореня. Припустимо, що корінь рівняння відокремлено і він знаходиться на відрізку $[a;b]$. Подальше уточнення кореня будемо знаходити одним із чисельних методів.

(А): Метод половинного ділення

Опис алгоритму.

Припустимо, що $f(a)\cdot f(b)<0$. Поділимо відрізок $[a;b]$ навпіл та знайдемо значення функції $f(x)$ в точці $x=\dfrac{a+b}{2}$. Може статись, що $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$, тоді корінь рівняння знайдено. Якщо ж $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\neq 0$, то на кінцях одного з відрізків $\left[a;\dfrac{a+b}{2}\right]$ або $\left[\dfrac{a+b}{2};b\right]$ функція буде приймати значення різних знаків. Позначимо цей відрізок через $[a_1;b_1]$ і відмітимо, що $|b_1-a_1|=\dfrac{|b-a|}{2}$. Якщо $|b_1-a_1|<\varepsilon$, то будь-яка точка з інтервалу $[a_1;b_1]$ може бути прийнята за наближене значення кореня. Якщо ж $|b_1-a_1|\geq\varepsilon$, то приймається $a=a_1$, $b=b_1$ і продовжується процес ділення відрізка навпіл. Через деяку скінчену кількість кроків отримується точне значення кореня або довжина відрізка $[a;b]$ стане менш ε. В останньому випадку за наближене значення кореня можна взяти будь-яку точку відрізка $[a;b]$, часто беруть його середину.

(Б): Метод хорд

Опис алгоритму.

Припустимо, що $f(a)\cdot f(b)<0$ та $f'(x)$, $f''(x)$ на інтервалі $[a;b]$ зберігають знак, тобто графік функції $y=f(x)$ монотонний та опуклий, тоді можна застосовувати метод хорд.

Отримаємо перше наближення. Проведемо через точки $A(a,f(a))$ та $B(b,\, f(b))$ пряму лінію (хорду), рівняння якої можна записати в вигляді:

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Одержимо точку перетину хорди з віссю абсцис, припустимо $y=0$:

$$x_1=a-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a). \qquad (1)$$

Далі можна вибрати один з двох варіантів побудови алгоритму пошуку кореня.

(Б1): Друге наближення розраховується за формулою (1) в залежності від того на кінцях якого з відрізків $[a;x_1]$ чи $[x_1;b]$ функція приймає значення різних знаків. Якщо $f(a)\cdot f(x_1)<0$, то приймемо $b=x_1$, якщо ні – $a=x_1$.

(Б2): Припустимо, що друга похідна $f''(x)$ на інтервалі $[a;b]$ має один знак. Тоді, якщо $f''(x)<0$ графік функції $y=f(x)$ опуклий догори та лежить вище хорди. В цьому випадку точка перетину хорди з віссю абсцис знаходиться між коренем рівняння $f(x)=0$ і тим кінцем відрізка $[a;b]$, на якому значення функції $f(x)$ додатне.

У випадку $f''(x) > 0$ графік функції $y = f(x)$ опуклий донизу і лежить нижче хорди. В цьому випадку точка перетину хорди з віссю абсцис знаходиться між коренем рівняння $f(x) = 0$ та тим кінцем відрізка $[a;b]$ на якому значення $f(x) < 0$.

Таким чином маємо, що в будь-якому випадку наближене значення кореня лежить між точним його значенням і тим кінцем відрізка $[a;b]$, в якому $f(x)$ та $f''(x)$ протилежні.

Висновки: якщо відомо $(n-1)$-не наближення кореня, то його n-не наближення обчислюється за формулою:

$$x_n = \frac{[bf(x_{n-1}) - x_{n-1} f(b)]}{[f(x_{n-1}) - f(b)]} \tag{2}$$

у випадку $f(a) \cdot f''(a) < 0$, чи

$$x_n = \frac{[af(x_{n-1}) - x_{n-1} f(a)]}{[f(x_{n-1}) - f(a)]} \tag{3}$$

у випадку $f(b) \cdot f''(b) < 0$.

Незалежно від того, за якою схемою (Б1) чи (Б2) будується алгоритм наближеного розв'язку рівняння, умовою закінчення обчислень (виходу з циклу) може бути одна з умов:

$$f(x_n) < \varepsilon \tag{4}$$

мінімізація нев'язки,

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon \tag{5}$$

більш надійною умовою є:

$$\frac{(x_n - x_{n-1})^2}{|2x_{n-1} - x_n - x_{n-2}|} < \varepsilon. \tag{6}$$

(В): Метод дотичних (метод Ньютона)

Нехай $f(a) \cdot f(b) < 0$ та $f''(x)$ зберігає знак на інтервалі $[a;b]$. Проведемо дотичну до графіка функції $y = f(x)$ на тому кінці відрізка $[a;b]$, де знаки $f(x)$ та $f''(x)$ співпадають. Рівняння дотичної має вигляд

$$y - f(a) = f'(a)(x - a), \text{ якщо } f(a)f''(a) > 0;$$

$$y - f(b) = f'(b)(x - b), \text{ якщо } f(a)f''(a) < 0.$$

Знайдемо точку перетину дотичної з віссю абсцис. Приймемо $y = 0$, тоді

$$x_1 = a - f(a)/f'(a), \text{ якщо } f(a)f''(a) > 0;$$

$$x_1 = b - f(b)/f'(b), \text{ якщо } f(a)f''(a) < 0.$$

Одержане значення x_1 приймемо за наближене значення кореня.

Наступні наближення обчислимо за формулою:

$$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})/f'(x_{n-1});\ n = 2,3... \tag{7}$$

Обчислення повторюють до тих пір, доки не виконається одна з умов (4-6), в залежності від того, яку з них обрано за критерій виходу з циклу.

(Г) : Комбінований метод

Нехай $f''(x)$ зберігає знак на інтервалі $[a;b]$. Було показано, що уточнення кореня методом хорд та дотичних відбувається з різних сторін: один з недостачею, другий з надлишком. Комбінований метод полягає у послідовному застосуванні методу хорд та дотичних.

Якщо, наприклад, $f(a)f''(a) > 0$, то зліва застосовуємо метод дотичних

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

а праворуч

$$b_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b-a),$$

метод хорд.

Припустимо $a = a_1$ та $b = b_1$, тоді отримаємо новий відрізок $[a;b]$, довжина якого менш довжини попереднього. Обчислення повторюємо до тих пір, доки $|b-a| < \varepsilon$.

За наближене значення кореня беруть

$x^* = a$ - з недостачею;

$x^* = b$ - з надлишком,

або

$x^* = \frac{a+b}{2}$ - середнє значення.

(Д): Метод ітерацій (метод послідовних наближень)

Замінимо рівняння $f(x) = 0$ еквівалентним йому рівнянням

$$x = \varphi(x). \tag{8}$$

це можна зробити, наприклад, так:

$x = x + cf(x)$, де c – константа.

Припустимо, що обрано деяке початкове наближення до кореня x_0 рівняння (8).

Визначимо числову послідовність за формулою (задамо ітераційний процес):

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), n = 0,1,2.... \tag{9}$$

Теорема про нерухому точку. Якщо на відрізку $[a;b]$, що містить точку x_0 та всі наступні наближення x_n, буде виконуватись умова $|\varphi'(x)| \le q \le 1$, то ітераційний процес сходиться до єдиного на відрізку $[a;b]$ кореня рівняння (8).

Іноді виконання умови збіжності вдається досягти вдалим вибором константи c.

Вихід із циклу відбувається при виконання однієї з умов (4-6).

Зауваження. На практиці умову $|\varphi'(x)|<1$ часто не перевіряють, а запускають ітераційний процес з заданим числом ітерацій, якщо сходимість не відбувається, то шукають рішення при іншому значенні константи c, або взагалі змінюють метод пошуку кореня.

Індивідуальні завдання

1) Відділити корені запропонованого рівняння (табл. 3).
2) Якщо коренів декілька, то уточнити один із них з заданою точністю ε двома вказаними методами.
3) Порівняти результати, зробити перевірку.

Таблиця 3 – Варіанти завдань

№ варіанту	Рівняння	Метод	Умова виходу з циклу	Оцінка похибки ε.
1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	$x-\sin x=0.25$	А Б1	4 5	0,001
2	$3x-\cos x-1=0$	А Б2	4 6	0,01
3	$x+\ln x=0.25$	А В	5 6	0,001
4	$x^2+4\sin x=0$	Б1 Д	4 5	0,0001
5	$3x+\cos x+1=0$	Г Д	4 6	0,01
6	$3x-e^x=0$	В Д	5 6	0,001
7	$x^2=\sin x$	Б2 Д	4 5	0,0001
8	$x^3-3x^2-24x-3=0$	А Г	4 6	0,01
9	$2-x=\ln x$	А Д	5 6	0,001
10	$x^3+4x-6=0$	Г Д	4 5	0,01
11	$x+\cos x=1$	А Д	4 6	0,001
12	$x^3=\sin x$	Б1 Д	5 6	0,01
13	$2x^3-3x^2-12x+8=0$	А Г	5 6	0,001
14	$tg(0.55x+0.1)=x^2$	А В	4 5	0,0001
15	$e^x\sin x-1=0$	А Д	4 6	0,001
16	$\arcsin x-2x-0.1=0$	А Б2	5 6	0,001
17	$x^2-2\cos x=0$	Г Д	6 4	0,01

Продовження таблиці 3

1	**2**	**3**	**4**	**5**
18	$x^2 - 20\sin x = 0$	А Б1	5 4	0,001
19	$ctgx - \dfrac{x}{4} = 0$	В Д	6 5	0,001
20	$x^3 + 4x - 6 = 0$	А Г	4 5	0,0001
21	$e^x(2 - x) - 0.5 = 0$	А Г	4 5	0,001
22	$(x-2)^2 \cdot 2^x = 1$	А Б1	5 4	0,001
23	$x^4 \cdot 3^x = 2$	А Б2	5 6	0,01
24	$2e^x = 5x + 2$	А Д	6 4	0,001
25	$x^3 + 2x - 4 = 0$	А Д	6 4	0,001

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 4

МЕТОДИ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Ціль роботи – здобути практичні навички розробки алгоритмів і програм чисельних методів розв'язання систем нелінійних рівнянь.

Теоретичні відомості

Розглянемо систему нелінійних рівнянь з невідомими

$$\begin{gathered} f_i(x_1, x_2, x_n) = 0,\ i = 1,...,n; \\ (x_1, x_2, ..., x_n). \end{gathered} \tag{1}$$

де f_i – деякі нелінійні функції.

Якщо ввести позначення $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ та $F = (f_1, f_2, ..., f_n)$, систему (1) можна записати в матричному вигляді:

$$F(X) = 0\,. \tag{2}$$

Системи нелінійних рівнянь розв'язуються ітераційними методами, які є узагальненням методів розв'язку одного рівняння $f(x) = 0$.

(А): Метод простої ітерації

У методі простої ітерації ітераційна формула має вигляд:

$$X_{k+1} = X_k + HF(X_k), k = 0,1,...,n\,. \tag{3}$$

Збіжність методу простої ітерації залежить від вдалого вибору початкової точки X_0 та вектора $H = (h_1, h_2, ..., h_n)$, де h_i деякі константи.

Зупинимось більш детально на системі двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Саме такі системи необхідно розв'язати в даній лабораторній роботі.

Приведемо систему до вигляду зручного для застосування методу простої ітерації та методу Зейделя:

$$\begin{cases} x = x + h_1 f_1(x, y), \\ y = y + h_2 f_2(x, y), \end{cases},$$

або позначивши $\varphi_1(x, y) = x + h_1 f_1(x, y),$ $\varphi_2(x, y) = y + h_2 f_2(x, y)$, одержимо:

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(x, y), \\ y &= \varphi_2(x, y). \end{aligned} \tag{5}$$

Тоді ітераційна формула в методі простої ітерації має вигляд:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \varphi_1(x_k, y_k), \\ y_{k+1} &= \varphi_2(x_k, y_k), k = 0,1,...,n. \end{aligned} \tag{6}$$

$X_0 = (x_0, y_0)$ – початкове наближення.

(Б): Метод Зейделя

Метод Зейделя відрізняється від методу простої ітерації тим, що в ньому поліпшення кожного наступного наближення відбувається покоординатно, а в методі простої ітерації повекторно. Як правило збіжність у методі Зейделя більш висока.

Для системи (5) ітераційна формула за методом Зейделя має вигляд:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \varphi_1(x_k, y_k), \\ y_{k+1} &= \varphi_2(x_{k+1}, y_k), k = 0,1,...,n. \end{aligned} \tag{7}$$

де $X_0 = (x_0, y_0)$ – початкове наближення.

Умовою досягнення заданої точності $\varepsilon > 0$ в методах (А) та (Б) є:

$$\|X_{k+1} - X_k\| \le \varepsilon$$

збіжність за евклідовою нормою.

Для системи двох рівнянь (5) ця умова матиме вигляд:

$$\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2} \le \varepsilon. \tag{8}$$

Можна також використати умову мінімізації нев'язки:

$$\sqrt{f_1^2(x_{k+1}, y_{k+1}) + f_2^2(x_{k+1}, y_{k+1})} \le \varepsilon . \tag{9}$$

Оскільки достатні умови збіжності ми не розглядали, то , якщо точність не досягається за задану кількість ітерацій, обчислювальний процес переривається з повідомленням "точність не досягнуто, рішення не знайдено". В цьому випадку потрібно повернутись до системи (4) і спробувати уточнити $X_0 = (x_0, y_0)$ початкову умову, або більш вдало вибрати $H = (h_1, h_2)$.

Чисельний розв'язок системи лінійних рівнянь

Нехай задана система n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \tag{10}$$

або в матричному вигляді:

$$A \cdot X = B.$$

З курсу вищої математики відомо, що необхідною і достатньою умовою розв'язку системи (10) є умова:

$$\det(A) = |A| \ne 0 . \tag{11}$$

Якщо умова (11) виконана, то система (10) розв'язується точно, причому існує декілька методів такого розв'язку (метод Крамера, метод Гауса, матричний метод та інші).

Недоліком є те, що точний розв'язок можна одержати лише для систем, в яких кількість рівнянь невелика. Якщо кількість рівнянь велика, то поряд з технічними труднощами, виникають похибки обчислень, і отримується по суті наближене рішення.

Будемо розв'язувати лінійну систему алгебраїчних рівнянь (10) наближено. Так як лінійна система є частковим випадком нелінійної, то до неї можна застосовувати запропоновані вище методи простої ітерації та метод Зейделя.

(АЛ): Метод простої ітерації для системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Приведемо систему $A \cdot X = B$ до вигляду:

$$X = C \cdot X + D.$$

Запишемо детально цю систему для трьох рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + d_1 \\ x_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + d_2 \\ x_3 = c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 + d_3 \end{cases}. \qquad (12)$$

Метод простої ітерації для системи (12) має вигляд:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + c_{13}x_3^{(k)} + d_1, \\ x_2^{(k+1)} &= c_{21}x_1^{(k)} + c_{22}x_2^{(k)} + c_{23}x_3^{(k)} + d_2, \\ x_3^{(k+1)} &= c_{31}x_1^{(k)} + c_{32}x_2^{(k)} + c_{33}x_3^{(k)} + d_3,\ k = 0,1,\ldots,n. \end{aligned} \qquad (13)$$

За початкове наближення можна взяти будь-яку точку, але звичайно беруть:

$$X_0 = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

(БЛ): Метод Зейделя для системи лінійних рівнянь

Метод Зейделя для системи(12) має вигляд:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + c_{13}x_3^{(k)} + d_1, \\ x_2^{(k+1)} &= c_{21}x_1^{(k+1)} + c_{22}x_2^{(k)} + c_{23}x_3^{(k)} + d_2, \\ x_3^{(k+1)} &= c_{31}x_1^{(k+1)} + c_{32}x_2^{(k+1)} + c_{33}x_3^{(k)} + d_3,\ k = 0,1,\ldots,n. \end{aligned} \qquad (15)$$

За початкову умову також можна взяти (14).

Для системи (10) методи простої ітерації та Зейделя збігаються при виконанні умови:

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|,\ i = \overline{1,n}. \qquad (16)$$

тобто модулі діагональних коефіцієнтів для кожного рівняння системи більше суми модулів всіх інших коефіцієнтів цього рівняння.

Для системи лінійних рівнянь у вигляді (12) достатньою умовою збіжності є одна з умов:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| < 1, i = \overline{1,n}; \\ &\sum_{i=1}^{n} |c_{ij}| < 1, i = \overline{1,n}; \\ &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|^2 < 1. \end{aligned} \qquad (17)$$

Якщо система в вигляді (10) не задовольняє умові збіжності, то її можна привести до еквівалентної системи рівнянь, що буде задовольняти умові збіжності. Це роблять шляхом додавання та віднімання рівнянь системи.

Приклад. Дана система рівнянь:

$$\begin{cases} 4.5x_1 - 1.8x_2 + 3.6x_3 = -1.7; \\ 3.1x_1 + 2.3x_2 - 1.2x_3 = 3.6; \\ 1.8x_1 + 2.5x_2 + 4.6x_3 = 2.2. \end{cases}.$$

Привести систему до вигляду, в якому елементи головної діагоналі були б більші за модулем інших елементів (умова 16).

Зробимо перетворення.

$$\begin{cases} 7.6x_1 + 0.5x_2 + 2.4x_3 = 1.9; & (I + II) \\ 2.2x_1 + 9.1x_2 + 4.4x_3 = 9.7; & (2III + II - I) \\ -1.3x_1 + 0.2x_2 + 5.8x_3 = -1.4; & (III - II). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{7.6}(-0.5x_2 - 2.4x_3 + 1.9); \\ x_2 = \dfrac{1}{9.1}(-2.2x_2 - 4.4x_3 + 9.7); \\ x_3 = \dfrac{1}{5.8}(1.3x_2 - 0.2x_3 - 1.4). \end{cases}$$

Тепер можна застосовувати методи (АЛ) та (БЛ).

Індивідуальні завдання

Запропонованим методом розв'язати систему нелінійних рівнянь (табл. 4), обравши в якості початкового наближення точку X_0. За точність обчислень виберіть $\varepsilon = 10^{-4}$. Зробіть перевірку. Спробуйте змінити початкову умову та знайти інше рішення системи.

Таблиця 4 – Варіанти завдань

Номер варіанту	Система рівнянь	Початкова точка	Умова досягнення точності	Метод
1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	$\begin{cases} x = e^x \cos y - 1 \\ y = e^x \sin y + 1 \end{cases}$	(-0,9;1,4)	8	А
2	$\begin{cases} x = 0.25(x^2 - y^2) - x^2y^2 + 0.5 \\ y = xy(x^2 - y^2) + 0.5 \end{cases}$	(1;1)	8	Б
3	$\begin{cases} x = x/(x^2 - y^2) + 0.4 \\ y = -y(x^2 - y^2) + 1.4 \end{cases}$	(1;1)	9	Б
4	$\begin{cases} x = x^2 + 0.8y^2 + 0.1 \\ y = 2xy + 0.1 \end{cases}$	(0;0)	8	Б
5	$\begin{cases} x = x^2 - y^2 + 0.1 \\ y = 2xy + 0.1 \end{cases}$	(0;0)	9	А
6	$\begin{cases} x = x^2 - y^2 - 0.1 \\ y = 2xy + 0.1 \end{cases}$	(0;0)	9	Б
7	$\begin{cases} x = x^2 + y^2 + 0.1 \\ y = 2xy - 0.1 \end{cases}$	(0;0)	8	Б

Продовження таблиці 4

1	2	3	4	5
8	$\begin{cases} x = 1 - e^{x}\cos y \\ y = e^{-x}\sin y + 1 \end{cases}$	(0,9;1,4)	8	Б
9	$\begin{cases} x = x^2 + y^2 - 0.1 \\ y = 2xy - 0.1 \end{cases}$	(0;0)	9	А
10	$\begin{cases} x = x/(x^2 + y^2) + 0.4 \\ y = (1 - y)/(x^2 + y^2) + 1 \end{cases}$	(1;1)	9	А
11	$\begin{cases} x = x^2 y^2 - 0.25(x^2 - y^2)^2 - 0.5 \\ y = xy(y^2 - x^2) + 0.5 \end{cases}$	(-0,5;0,5)	9	А
12	$\begin{cases} x = x/(x^2 + y^2) - 0.4 \\ y = 1.4 - y/(x^2 + y^2) \end{cases}$	(-1;1)	9	Б
13	$\begin{cases} x = -x^2 - 0.8y^2 - 0.1 \\ y = y^2 - x^2 - 0.1 \end{cases}$	(0;0)	9	А
14	$\begin{cases} x = -x^2 + y^2 - 0.1 \\ y = -2xy + 0.1 \end{cases}$	(0;0)	8	А
15	$\begin{cases} x = -x^2 + y^2 + 0.1 \\ y = 0.1 - 2xy \end{cases}$	(0;0)	9	Б
16	$\begin{cases} x = -x^2 - y^2 - 0.1 \\ y = -2xy - 0.1 \end{cases}$	(0;0)	8	Б
17	$\begin{cases} x = -x^2 - y^2 + 0.1 \\ y = -2xy - 0.1 \end{cases}$	(0;0)	9	А
18	$\begin{cases} x = x/(x^2 + y^2) - 0.4 \\ y = e^{x}\sin y - 1 \end{cases}$	(-1;1)	8	А
19	$\begin{cases} x = -1 + e^{x}\cos y \\ y = e^{x}\sin y - 1 \end{cases}$	(-0,9;-1,4)	9	А
20	$\begin{cases} xy^2 - 1 = 0 \\ y + e^{x} = 0 \end{cases}$	(0,5;-1,5)	8	Б
21	$\begin{cases} xy^2 - 1 = 0 \\ y - e^{x} = 0 \end{cases}$	(0,5;1,5)	9	А
22	$\begin{cases} 1 - x^2 + e^{y} = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$	(2;2)	9	А
23	$\begin{cases} x^2 y - 1 = 0 \\ x - e^{y} = 0 \end{cases}$	(1,5;0,5)	8	Б
24	$\begin{cases} 1 - y^2 + e^{x} = 0 \\ xy + 1 = 0 \end{cases}$	(-2;2)	8	Б

Продовження таблиці 4

1	2	3	4	5
25	$\begin{cases} 1 - y^2 + e^{-x} = 0 \\ y - tgx = 0 \end{cases}$	(0;1)	9	Б

САМОСТІЙНА РОБОТА 1

МЕТОДИ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ’ЯЗКУ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Ціль роботи – здобути практичні навички розробки алгоритмів і програм чисельних методів розв’язання систем лінійних рівнянь.

Завдання. Запропонованим методом розв’язати систему лінійних рівнянь з точністю 0,001 (табл. 5). Спочатку привести систему до зручного для ітерацій вигляду.

Таблиця 5 – Варіанти завдань

Номер варіанту	Система рівнянь	Умова досягнення точності	Метод
1	2	3	4
1	$\begin{cases} 2.7x_1 + 3.3x_2 + 1.3x_3 = 2.1 \\ 3.5x_1 - 1.7x_2 + 2.8x_3 = 1.7 \\ 4.1x_1 + 5.8x_2 - 1.7x_3 = 0.8 \end{cases}$	8	БЛ
2	$\begin{cases} 3.1x_1 + 2.8x_2 + 1.9x_3 = 0.2 \\ 1.9x_1 + 3.1x_2 + 2.1x_3 = 2.1 \\ 7.5x_1 + 3.8x_2 + 4.8x_3 = 5.6 \end{cases}$	9	БЛ
3	$\begin{cases} 9.1x_1 + 5.6x_2 + 7.8x_3 = 9.8 \\ 3.8x_1 + 5.1x_2 + 2.8x_3 = 6.7 \\ 4.1x_1 + 5.7x_2 + 1.2x_3 = 5.8 \end{cases}$	9	АЛ
4	$\begin{cases} 1.7x_1 + 2.8x_2 + 1.9x_3 = 0.7 \\ 2.1x_1 + 3.4x_2 + 1.8x_3 = 1.1 \\ 4.2x_1 - 1.7x_2 + 1.3x_3 = 2.8 \end{cases}$	9	АЛ
5	$\begin{cases} 3.3x_1 + 2.1x_2 + 2.x_3 = 0.8 \\ 4.1x_1 + 3.7x_2 + 4.8x_3 = 5.7 \\ 2.7x_1 + 1.8x_2 + 1.1x_3 = 3.2 \end{cases}$	8	БЛ
6	$\begin{cases} 3.2x_1 - 2.5x_2 + 3.7x_3 = 6.5 \\ 0.5x_1 + 0.34x_2 + 1.7x_3 = -0.24 \\ 1.6x_1 + 2.3x_2 - 1.5x_3 = 4.3 \end{cases}$	8	БЛ

Продовження таблиці 5

1	**2**	**3**	**4**
7	$\begin{cases} 3.6x_1 + 1.8x_2 - 4.7x_3 = 3.8 \\ 2.7x_1 - 3.6x_2 + 1.9x_3 = 0.4 \\ 1.5x_1 + 4.5x_2 + 3.3x_3 = -1.6 \end{cases}$	8	БЛ
8	$\begin{cases} 2.4x_1 + 3.7x_2 - 8.3x_3 = 2.3 \\ 1.8x_1 + 4.3x_2 + 1.2x_3 = -1.2 \\ 3.4x_1 - 2.3x_2 + 5.2x_3 = 3.5 \end{cases}$	9	БЛ
9	$\begin{cases} 2.4x_1 + 2.5x_2 - 2.9x_3 = 4.5 \\ 0.8x_1 + 3.5x_2 - 1.4x_3 = 3.2 \\ 1.5x_1 - 2.3x_2 + 8.6x_3 = -5.5 \end{cases}$	8	АЛ
10	$\begin{cases} 1.5x_1 + 2.3x_2 - 3.7x_3 = 4.5 \\ 2.8x_1 + 3.4x_2 + 5.8x_3 = -3.2 \\ 1.2x_1 + 7.3x_2 - 2.3x_3 = 5.6 \end{cases}$	9	АЛ
11	$\begin{cases} 3.7x_1 - 2.3x_2 + 4.5x_3 = 2.4 \\ 2.5x_1 + 4.7x_2 - 7.8x_3 = 3.5 \\ 1.6x_1 + 5.3x_2 + 1.3x_3 = -2.4 \end{cases}$	8	АЛ
12	$\begin{cases} 3.2x_1 - 11.5x_2 + 3.8x_3 = 2.8 \\ 0.8x_1 + 1.3x_2 - 6.4x_3 = -6.5 \\ 2.4x_1 + 7.2x_2 - 1.2x_3 = 4.5 \end{cases}$	9	БЛ
13	$\begin{cases} 5.4x_1 - 2.4x_2 + 3.x_3 = 5.5 \\ 0.8x_1 + 1.3x_2 - 6.4x_3 = -6.5 \\ 2.4x_1 + 7.2x_2 - 1.2x_3 = 4.5 \end{cases}$	8	БЛ
14	$\begin{cases} 5.4x_1 - 2.4x_2 + 3.8x_3 = 5.5 \\ 2.5x_1 + 6.8x_2 - 1.1x_3 = 4.3 \\ 2.7x_1 - 0.6x_2 + 1.5x_3 = -3.5 \end{cases}$	9	БЛ
15	$\begin{cases} 0.9x_1 + 2.7x_2 - 3.8x_3 = 2.4 \\ 2.5x_1 + 5.8x_2 - 0.5x_3 = 3.5 \\ 4.5x_1 - 2.1x_2 + 3.2x_3 = -1.2 \end{cases}$	8	БЛ
16	$\begin{cases} 6.3x_1 + 5.2x_2 - 0.6x_3 = 1.5 \\ 3.4x_1 - 2.3x_2 + 3.4x_3 = 2.7 \\ 0.8x_1 + 1.4x_2 + 3.5x_3 = -2.3 \end{cases}$	9	АЛ
17	$\begin{cases} 4.1x_1 + 5.2x_2 - 5.8x_3 = 7.0 \\ 3.8x_1 - 3.1x_2 + 4.0x_3 = 5.3 \\ 7.8x_1 + 5.3x_2 - 6.3x_3 = 5.8 \end{cases}$	8	АЛ
18	$\begin{cases} 7.1x_1 + 6.8x_2 + 6.1x_3 = 7.0 \\ 5x_1 + 4.8x_2 + 5.3x_3 = 6.1 \\ 8.2x_1 + 7.8x_2 + 7.1x_3 = 5.8 \end{cases}$	9	БЛ

Продовження таблиці 5

1	2	3	4
19	$\begin{cases} 2.8x_1 + 3.8x_2 - 3.2x_3 = 4.5 \\ 2.5x_1 - 2.8x_2 + 3.3x_3 = 7.1 \\ 6.5x_1 - 7.1x_2 + 4.8x_3 = 6.3 \end{cases}$	8	БЛ
20	$\begin{cases} 3.8x_1 + 4.1x_2 - 2.3x_3 = 4.8 \\ -2.1x_1 + 3.9x_2 - 5.8x_3 = 3.3 \\ 1.8x_1 + 1.1x_2 - 2.1x_3 = 5.8 \end{cases}$	9	БЛ
21	$\begin{cases} 5.4x_1 - 6.2x_2 - 0.5x_3 = 0.52 \\ 3.4x_1 + 2.3x_2 + 0.8x_3 = -0.8 \\ 2.4x_1 - 1.1x_2 + 3.8x_3 = 1.8 \end{cases}$	8	БЛ
22	$\begin{cases} 4.5x_1 - 3.5x_2 + 7.4x_3 = 2.5 \\ 3.1x_1 - 0.6x_2 - 2.3x_3 = -1.5 \\ 0.8x_1 + 7.4x_2 - 0.5x_3 = 6.4 \end{cases}$	9	АЛ
23	$\begin{cases} 5.6x_1 + 2.7x_2 - 1.7x_3 = 1.9 \\ 3.4x_1 - 3.6x_2 - 6.7x_3 = -2.4 \\ 0.8x_1 + 1.3x_2 - 3.7x_3 = 1.2 \end{cases}$	8	АЛ
24	$\begin{cases} 5.4x_1 - 2.3x_2 + 3.4x_3 = -3.5 \\ 4.2x_1 + 1.7x_2 - 2.3x_3 = 2.7 \\ 3.4x_1 + 2.4x_2 + 7.4x_3 = 1.9 \end{cases}$	9	БЛ
25	$\begin{cases} 7.6x_1 + 5.8x_2 + 4.7x_3 = 10.1 \\ 3.8x_1 + 4.1x_2 + 2.7x_3 = 9.7 \\ 2.9x_1 + 2.1x_2 + 3.8x_3 = 7.8 \end{cases}$	9	АЛ

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 5

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Ціль роботи – здобути практичні навички розробки алгоритмів і програм чисельних методів розв'язання звичайних диференційних рівнянь першого порядку.

Теоретичні відомості

Задача Коші для диференційного рівняння першого порядку має вигляд:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}. \tag{1}$$

Розв'язати диференційне рівняння (1), це значить знайти на відрізку $[x_0, a]$ функцію $y = y(x)$, яка при підстановці її в рівняння та початкову умову перетворює їх в тожність.

Типи рівнянь, для яких можна знайти точне рішення охоплюють невелику частину задач, які виникають на практиці. Тому потрібні чисельні методи розв'язку задачі Коші (1).

Загальний підхід чисельного розв'язку диференційних рівнянь, це розбити відрізок $[x_0, a]$ на частинні відрізки точками $x_i = x_0 + ih, i = \overline{1, n}$, потім на кожному частинному відрізку замінити похідну деяким її різницевим наближенням та одержати замість диференційного рівняння систему кінцево-різницевих рівнянь. Розв'язавши цю систему одержимо систему точок $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_i, y_i), ..., (x_n, y_n)$. Чисельним розв'язком є ламана лінія, що з'єднує ці точки.

(А): Метод Ейлера

На частинному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ замінимо $y'(x_i) \approx \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h}$, одержимо $\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i)$, звідки

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \; i = \overline{1, n} \end{cases}. \tag{2}$$

Формула (2) описує реалізацію методу Ейлера.

Цей метод має перший порядок точності (порядок апроксимації). Його похибка дорівнює $\delta = kh^2$, або, що теж саме, $\delta = 0(h^2)$.

(Б): Полагоджений метод Ейлера

В практичних обчисленнях частіше застосовується модифікований метод Ейлера.

На частинному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ замінимо похідну на середнє арифметичне похідних (нахилів) на кінцях відрізка і одержимо розрахункову формулу полагодженого методу Ейлера:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + f(x_i, y_i)) \right] \end{cases}.$$

При програмуванні краще використовувати більш поетапну модифікацію цієї формули:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ \overline{y_{i+1}} = y_i + f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \overline{y_{i+1}}) \right],\ i = \overline{1, n} \end{cases}. \tag{3}$$

Метод має другий порядок точності, його помилка апроксимації дорівнює $\delta = 0(h^3)$.

(В): Модифікований метод Ейлера

У модифікованому методі похідну на частинному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ замінюють нахилом в середній точці відрізка. Рекурентні співвідношення мають вигляд:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + h\left[f(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{hf(x_i, y_i)}{2} \right],\ i = \overline{1, n} \end{cases}. \tag{4}$$

Цей метод також має другий порядок точності з помилкою апроксимації $\delta = 0(h^3)$.

(Г): Метод Рунге-Кутта четвертого порядку

На практиці найбільш часто використовують саме цей метод, що описується системою співвідношень:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ k_1 = hf(x_i, y_i) \\ k_2 = hf\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_1}{2} \right) \\ k_3 = hf\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_2}{2} \right) \\ k_4 = hf\left(x_i + h, y_i + k_3 \right) \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 \right],\ i = \overline{1, n} \end{cases}. \tag{5}$$

Помилка апроксимації методу $\delta = 0(h^5)$, тому його називають методом Рунге-Кутта четвертого порядку.

Оцінка похибки чисельних методів розв'язку диференційних рівнянь

Слід відзначити: наближеним рішенням є функція, яка задана множиною точок $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_i, y_i), ..., (x_n, y_n)$. Це означає, що похибку потрібно оцінювати для кожної із цих точок.

Для практичної оцінки похибки в точці $[x_i, y_i]$ використовують правило Рунге подвійного перерахунку:

$$\delta_i \approx \frac{|y_h(x_i) - y_{h/2}(x_i)|}{2^p - 1},$$

де $y_h(x_i)$ та $y_{h/2}(x_i)$ наближені рішення, обчислені в точці x_i з кроком h та $h/2$, p - точність чисельного методу.

Для методу Ейлера $p = 1$

$$\delta_i \approx |y_h(x_i) - y_{h/2}(x_i)|. \quad (6)$$

Для полагодженого та модифікованого методів Ейлера $p = 2$

$$\delta_i \approx \frac{|y_h(x_i) - y_{h/2}(x_i)|}{3}. \quad (7)$$

Для методу Рунге-Кутта $p = 4$

$$\delta_i \approx \frac{|y_h(x_i) - y_{h/2}(x_i)|}{15}. \quad (8)$$

Знайти наближене рішення з заданою точністю $\varepsilon > 0$, це значить підібрати такий крок h_i, щоб виконувалась умова:

$$\max_{1 \le i \le n} \delta_i < \varepsilon. \quad (9)$$

На практиці діють одним з двох способів.

1 Забезпечення точності з постійним кроком ($h_{пост}$)

Вибирають деякий досить малий крок h. В кожній точці роблять подвійний перерахунок з кроками $h/2$ та h і оцінюють похибку.

Якщо умова (9) не виконується, то за нове h беруть $h/2$ і повторюють подрібнення кроку до тих пір, доки умова (9) не буде виконана.

2 Забезпечення точності з автоматичним вибором кроку($h_{змін}$)

Вибирають деякий досить малий крок h. В першій точці роблять подвійний перерахунок з кроками $h/2$ та h і оцінюють похибку. Величину подальших кроків вибирають за одним з двох правил:

$$h_{i+1} = \begin{cases} 0.5h_i, \text{ якщо } \delta > \varepsilon; \\ h_i, \text{ якщо } \varepsilon/10 \le \delta \le \varepsilon; \\ 1.5h_i, \text{ якщо } \delta < \varepsilon/10. \end{cases} \quad (10)$$

(правило трьох зон).

$$h_{i+1} = \begin{cases} 0.5h_i, \text{ якщо } \delta > \varepsilon; \\ h_i \sqrt[p+1]{\varepsilon/\delta}, \text{ якщо } \delta \le \varepsilon. \end{cases} \quad (11)$$

Якщо невдалим був вже перший крок, то його зменшують (перший крок повинен завжди бути вдалим).

Індивідуальні завдання

Розв’язати запропонованим чисельним методом задачу Коші:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

На відрізку $[x_0, a]$забезпечити точність розв’язку $\varepsilon \le 0.01$. Побудувати графік наближеного рішення (табл. 6).

Таблиця 6 – Варіанти завдань

Номер варіанту	$f(x, y)$	x_0	y_0	a	Метод	Спосіб забезпечення точності (1- $h_{пост}$; 2- $h_{змін}$)
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	$\frac{3x^2}{x^3 + y + 1}$	1	0	2	А	1
2	$\frac{y}{1+x}$	0	2	3	Б	2
3	$y - \frac{2x}{y}$	0	1	1	В	1
4	$x^3 - \frac{2y}{x}$	1	2	3	Г	2
5	$\frac{y}{2\sqrt{x}}$	4	1	6	А	1
6	$\frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$	1	0	2	Б	1
7	$\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$	1	1	3	В	2
8	$\frac{x + 1 - y^3}{3y^2}$	1	-1	3	Г	2
9	$\frac{xy^2 + xy}{1 + x^2}$	0	0	3	А	1
10	$\frac{2xy}{3x^2 - y^2}$	1	1	2	Б	2
11	$\frac{1 + y^2}{xy}$	1	1	4	В	1
12	$-\frac{y^2}{2x+1}$	4	1	6	Г	2
13	$\frac{x^2 + y^2}{10}$	1	1	2	А	1
14	$x^2 + xy^3$	0	0	3	Б	2
15	$\sqrt{xy} + 1$	0	0	2	В	2
16	$x^2 + xy + y^2$	0	0	3	А	2
17	$2xy^3 - 1$	0	0	2	Г	1
18	$\frac{x^2 + y^2}{12}$	2	3	3	Б	1
19	$\frac{4x^2 + y^2}{4}$	0	-1	2	А	2
20	$\sqrt{xy} - 2$	1	2	3	Б	1
21	$y^3 - x^3$	0	1	2	В	2
22	$\frac{x^2 + 3y^2}{4}$	2	0	5	Г	1

Продовження таблиці 6

1	2	3	4	5	6	7
23	$x^2 + y^3$	0	0	2	А	1
24	$x + y^2$	0	1	3	Б	2
25	$2x + y^2$	0	0	2	В	1

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 6

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ СТРУНИ МЕТОДОМ СІТОК

Ціль роботи – здобути практичні навички розробки алгоритмів і програм чисельних методів розв'язання змішаної крайової задачі для диференційного рівняння коливань струни методом сіток.

Теоретичні відомості

В звичайних диференційних рівняннях невідома функція $y = y(x)$ залежить від однієї змінної. Такими рівняннями можна описати лише невелику кількість процесів з фізики та інших наук.

В більшості диференційних рівнянь невідома функція $U = U(t, x, y, z)$ залежить від багатьох змінних (звичайно це час t та просторові координати x, y, z). Такі диференційні рівняння будемо називати рівняннями з частинними похідними.

Найчастіше, це рівняння другого порядку, так як згідно з законами механіки перша похідна – швидкість, друга – прискорення.

Позначимо $U_x = \frac{\partial U}{\partial x}; U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; U_{xt} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}; U_{tt} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$, тоді лінійне диференційне рівняння з частинними похідними другого порядку можна записати у вигляді

$$a_{11}U_{xx} + 2a_{12}U_{xt} + a_{22}U_{tt} + b_1U_x + b_2U_t + cU = f(x,t) \qquad (1)$$

де a_{ij}, b_i, c – константи;

$U(x,t)$ – невідома функція.

Рівняння виду (1) підрозділяють на три класи:

1) Якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то рівняння належить до класу еліптичних рівнянь.

Еліптичними рівняннями описують різноманітні електричні, магнітні та гравітаційні поля (в цьому випадку, звичайно, замість t застосовують позначення y).

2) Якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, то рівняння належить до класу гіперболічних рівнянь.

Гіперболічними рівняннями описують процеси коливань.

3) Якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, то рівняння належить до класу параболічних рівнянь.

Параболічними рівняннями описують процеси розповсюдження тепла (теплопровідності) та дифузійні процеси.

Найбільш розповсюдженим методом розв'язку диференційних рівнянь з частинними похідними є метод сіток.

Сутність методу сіток полягає у тому, що область, в якій шукають рішення прямими, котрі паралельні осям координат, розбивають на сітку. Вузлами цієї сітки є точки $(x_i, t_j) = (x_0 + ih, t_0 + jk)$, де h, k – відповідно крок по осям $0x$ та $0t$, $i, j = 0,1,\ldots$.

Невідому функцію $U(x,t)$ відшукують наближено у вузлах сітки.

Позначимо $U_{ij} = U(x_i, t_j)$.

Частинні похідні у вузлах сітки замінюють кінцево-різницевими співвідношеннями

$$U_t = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k};$$

$$U_x = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h};$$

$$U_{tt} = \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2};$$

$$U_{xx} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}. \qquad (2)$$

Зупинимось більш детально на методі сіток для розв'язання гіперболічного рівняння коливань струни.

Розглянемо фізичну задачу. Є струна довжиною L, натягнута між двома точками осі $x : x = 0; x = L$. Якщо відхилити струну від положення рівноваги та відпустити, то вона почне коливатися (рис. 1). Ми опишемо процес коливань, коли знайдемо функцію $U = U(x,t)$ величини відхилення струни від положення рівноваги в точці x в момент часу t.

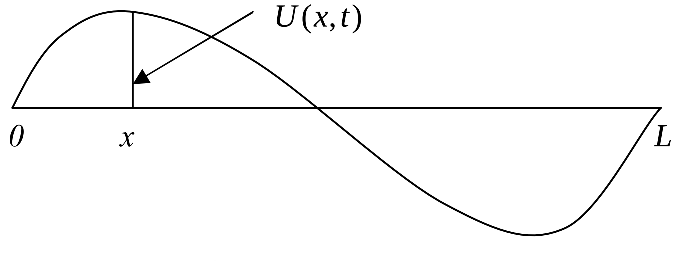


Рисунок 1 – Коливання струни

Відхилення струни $U(x,t)$ описується диференційним рівнянням

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}.$$

Постійна a^2 враховує фізичні характеристики струни. Заміною змінних ми можемо досягти виконання умови $a^2 = 1$. Для однозначного задання процесу коливань потрібно задати граничні умови, які задають режим коливань на кінцях струни, початкові умови, що задають форму струни в момент часу $t = 0$ та початкову швидкість. Така задача називається змішаною крайовою задачею.

В загальній постановці крайова задача має вигляд:

$$U_{tt} = U_{xx}; \tag{3}$$

$$U(0,t) = p(t); \tag{4}$$

$$U(L,t) = q(t); \tag{5}$$

$$U(x,0) = f(x); \tag{6}$$

$$U_t(x,0) = g(x). \tag{7}$$

(4-5) – граничні умови, (6-7) – початкові умови.

Таким чином область, де шукаємо рішення є напівсмуга $D: \{0 \le x \le L; 0 \le t \le +\infty\}$. Зрозуміло, що повинні виконуватись умови узгодження:

$$p(0) = f(0),\ q(0) = f(L),\ p'(0) = g(0),\ q'(0) = g(L).$$

Замінимо задачу (3-7) її кінцево-різницевим аналогом:

$$\frac{U_{i,\,j+1} - 2U_{ij} + U_{i,\,j-1}}{k^2} = \frac{U_{i+1,\,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,\,j}}{h^2}; \tag{3$'$}$$

$$U_{0,\,j} = p_j,\ j = 0,1,2,... \tag{4$'$}$$

$$U_{n,\,j} = q_{nj},\ j = 0,1,2,... \tag{5$'$}$$

$$U_{i,0} = f_j, i = 0,1,2,... \tag{6$'$}$$

$$\frac{U_{i1} - U_{i0}}{k} = g_i. \tag{7$'$}$$

Таким чином умови (4$'$-6$'$) задають значення функції $U(x,t)$ на кордоні області D.

За допомогою умови (7$'$) відшукуємо значення в першому прошарку

$$U_{i1} = U_{i0} + kg_i.$$

Таким чином значення функцій на нульовому та першому прошарку відомі. Позначимо $\lambda = k/h$ і приведемо рівняння (3$'$) до вигляду:

$$U_{i,\,j+1} = 2(1-\lambda^2)U_{ij} + \lambda^2(U_{i+1,\,j} + U_{i-1,\,j}) - U_{i,\,j-1};\ i = 1...n-1;\ j = 1,2,... \tag{8}$$

Для спрощення користування формулою (8) використовуємо трафарет (рис. 2).

За допомогою (8) (трафарету) (рис. 2), спираючись на відомі значення функції у вузлах сітки на попередніх двох прошарках, знаходимо значення у вузлах наступного прошарку.

Рішення різницевої задачі (3$'$-7$'$) рівномірно сходиться до рішення вихідної крайової задачі (3-7) при $h \to 0, k \to 0$, якщо $\lambda < 1$, тобто $k < h$.

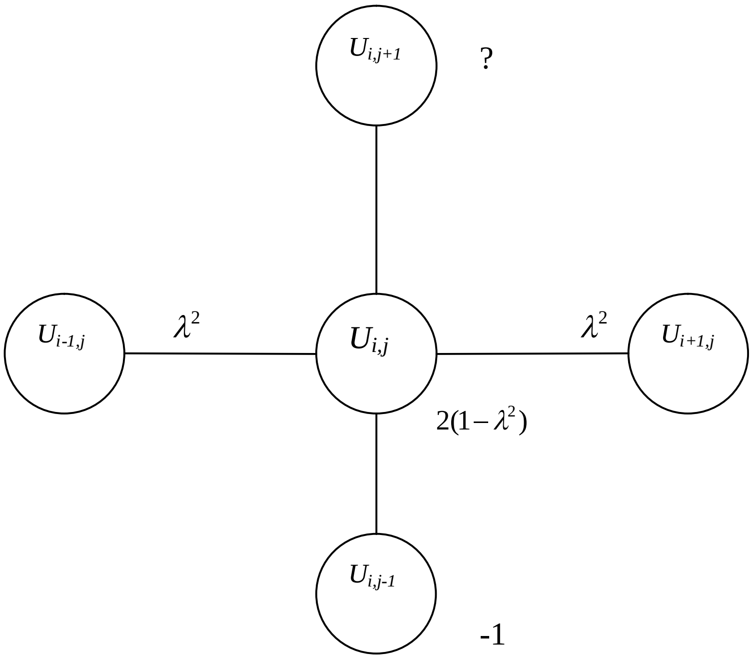


Рисунок 2 - Трафарет

Ця умова є достатньою для збіжності методу, але не є необхідною.

Індивідуальні завдання

Використовуючи метод сіток знайти функцію $U = U(x,t)$ у вузлах сітки, яка є чисельним розв'язком змішаної крайової задачі для рівняння коливань струни:

$$U_{tt} = U_{xx};$$

$U(0,t) = p(t)$ – гранична умова;

$U(1,t) = q(t)$ – гранична умова;

$U(x,0) = f(x)$ – початкова умова;

$U_t(x,0) = g(x)$ – початкова умова.

В області $D:\{0 \le x \le 1; 0 \le t \le 5\}$, вибираючи відповідні дані з таблиці 9.

Побудувати:

1) форму струни в момент часу $t=0;\ t=3;\ t=5$;
2) графіки положення точок струни для $x=0.3;\ x=0.5;\ x=0.7$.

Таблиця 8 – Варіанти завдань

Номер варіанту	h	k	Граничні умови		Початкові умови	
			$p(t)$	$q(t)$	$f(t)$	$g(t)$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	0,1	0,05	0	0	$\sin \pi x$	0
2	0,05	0,025	0	0	0	$2\sin \pi x$
3	0,1	0,025	0	$1.2(t+1)$	$(x+0.2)\sin\dfrac{\pi x}{2}$	$1+x^2$
4	0,2	0,05	0	$0.5t$	$(x+1)\sin \pi x$	x^2+x
5	0,1	0,05	$1+0.4t$	0	$(1-x^2)\cos \pi x$	$2x+0.6$

Розрахунково-графічна робота
Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Мета завдання: Освоїти технологію розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь в інтегрованому середовищі MathCad.

Завдання:
Розв'язати задану систему лінійних алгебраїчних рівнянь
1. матричним методом;
2. методом Гауса;
3. за допомогою функції lsolve;
4. методом простої ітерації;
5. методом Зейделя;
6. оформити пояснювальну записку;
7. здати роботу викладачу.

Варіанти індивідуальних завдань
(Номер варіанта відповідає номеру в списку групи)

№	Система лінійних рівнянь	№	Система лінійних рівнянь
1	$\begin{cases} 100x_1 - 14x_2 + 13x_3 = -1232 \\ 0.5x_1 + 200x_2 + 9.5x_3 = 326 \\ -9x_1 + 9x_2 + 300x_3 = 4335 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 200x_1 - 13x_2 + 12x_3 = -2470 \\ x_1 + 400x_2 + 9x_3 = 904 \\ -8x_1 + 8x_2 + 600x_3 = 7920 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 300x_1 - 12x_2 + 11x_3 = -3504 \\ 1.5x_1 + 600x_2 + 8.5x_3 = 1884 \\ -7x_1 + 7x_2 + 900x_3 = 1091 \end{cases}$	17	$\begin{cases} 400x_1 - 11x_2 + 10x_3 = -4334 \\ 2x_1 + 800x_2 + 8x_3 = 3226 \\ -6x_1 + 6x_2 + 1200x_3 = 13290 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 500x_1 - 10x_2 + 9x_3 = -4960 \\ 2.5x_1 + 1000x_2 + 7.5x_3 = 5050 \\ -5x_1 + 5x_2 + 1500x_3 = 15080 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 600x_1 - 9x_2 + 8x_3 = -5382 \\ 3x_1 + 1200x_2 + 7x_3 = 72360 \\ -4x_1 + 4x_2 + 1800x_3 = 16260 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 700x_1 - 8x_2 + 7x_3 = -5600 \\ 3.5x_1 + 1400x_2 + 6.5x_3 = 9824 \\ -3x_1 + 3x_2 + 2100x_3 = 16850 \end{cases}$	19	$\begin{cases} 800x_1 - 7x_2 + 6x_3 = -5614 \\ 4x_1 + 1600x_2 + 6x_3 = 12810 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2400x_3 = 16830 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 900x_1 - 6x_2 + 5x_3 = -5424 \\ 4.5x_1 + 1800x_2 + 5.5x_3 = 16210 \\ -x_1 + x_2 + 2700x_3 = 16220 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 1000x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -5030 \\ 5x_1 + 2000x_2 + 5x_3 = 20000 \\ 3000x_3 = 15000 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 1100x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -4432 \\ 5.5x_1 + 2200x_2 + 4.5x_3 = 24200 \\ x_1 - x_2 + 3300x_3 = 13190 \end{cases}$	21	$\begin{cases} 1200x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3630 \\ 6x_1 + 2400x_2 + 4x_3 = 2879 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3600x_3 = 1077 \end{cases}$

№	Система лінійних рівнянь	№	Система лінійних рівнянь
7	$\begin{cases} 1300x_1 - 2x_2 + x_3 = -2624 \\ 6.5x_1 + 2600x_2 + 3.5x_3 = 3379 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3900x_3 = 7755 \end{cases}$	22	$\begin{cases} 1400x_1 - x_2 = -1414 \\ 7x_1 + 2800x_2 + 3x_3 = 39200 \\ 4x_1 - 4x_2 + 4200x_3 = 4140 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 1500x_1 - x_3 = 0 \\ 7.5x_1 + 3000x_2 + 2.5x_3 = 45000 \\ 5x_1 - 5x_2 + 4500x_3 = -75 \end{cases}$	23	$\begin{cases} 1600x_1 + x_2 - 2x_3 = 1618 \\ 8x_1 + 3200x_2 + 2x_3 = 5121 \\ 6x_1 - 6x_2 + 4800x_3 = -4890 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 1700x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3440 \\ 8.5x_1 + 3400x_2 + 1.5x_3 = 57800 \\ 7x_1 - 7x_2 + 5100x_3 = -10310 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 1800x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5466 \\ 9x_1 + 3600x_2 + x_3 = 6482 \\ 8x_1 - 8x_2 + 5400x_3 = -16320 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 1900x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 76960 \\ 9.5x_1 + 3800x_2 + 0.5x_3 = 72240 \\ 9x_1 - 9x_2 + 5700x_3 = -22940 \end{cases}$	25	$\begin{cases} 2100x_1 + 6x_2 - 7x_3 = 12770 \\ 10.5x_1 + 4200x_2 - 0.5x_3 = 88270 \\ 11x_1 - 11x_2 + 6300x_3 = 37970 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 5x_1 + x_3 = 11 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -3x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$	26	$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = -3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$
12	$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$	27	$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = -5 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 7,9x_1 + 3,8x_2 + 6,5x_3 = 17,1 \\ 3,1x_1 + 2,7x_2 + 4,6x_3 = -10,3 \\ -4,25x_1 - 10,1x_2 + 8,9x_3 = 12,5 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 0,99x_1 + 0,7x_2 + 0,3x_3 = 0,1 \\ -0,1x_1 + 0,7x_2 + 0,65x_3 = -1,3 \\ -0,35x_1 - 0,1x_2 + 0,9x_3 = 3,5 \end{cases}$	29	$\begin{cases} 8,6x_1 + 9,1x_2 + 6,3x_3 = -16,2 \\ 5,1x_1 - 7,7x_2 + 9,6x_3 = -11,3 \\ 6,25x_1 - 0,1x_2 + 5,9x_3 = 13,5 \end{cases}$
15	$\begin{cases} -2,5x_1 - 3,7x_2 - 6,3x_3 = 10,1 \\ -0,1x_1 + 2,7x_2 + 3,5x_3 = -11,7 \\ -0,75x_1 - 11,1x_2 + 5,4x_3 = 13,8 \end{cases}$	30	$\begin{cases} -13,7x_1 - 19,24x_2 - x_3 = -10,62 \\ -x_1 - 12,2x_2 + x_3 = -10,3 \\ 1,75x_1 + 1,1x_2 + 1,9x_3 = 1,5 \end{cases}$

Питання до заліку

1. Математичне моделювання та обчислювальний експеримент. Чисельні методи як розділ сучасної математики. Роль комп'ютерно-орієнтованих чисельних методів в дослідженні складних математичних моделей
2. Класифікація похибок. Абсолютна і відносна похибки числа і функції. Пряма і зворотна задачі теорії похибок. Нестійкі алгоритми. Особливості машинної арифметики.
3. Інтерполяція. Існування і єдиність узагальненого интерполяционного многочлена. Інтерполяція алгебраїчними багаточленами.
4. Інтерполяція. Інтерполяційні поліноми Лагранжа і Ньютона. Оцінка похибки інтерполяції.
5. Інтерполяція. Багаточлени Чебишева. Оптимізація похибки інтерполяції. Збіжність інтерполяційного процесу.
6. Інтерполяція. Сплайн-інтерполяція. Побудова кубічного сплайна. Інтерполяція з кратними вузлами.
7. Інтерполяція. Інтерполяційні квадратурні формули. Квадратурні формули прямокутників.
8. Інтерполяція. Інтерполяційні квадратурні формули. Квадратурні формули трапецій.
9. Інтерполяція. Інтерполяційні квадратурні формули. Квадратурні формули Сімпсона.
10. Інтерполяція. Похибка. Правило Рунге оцінки похибки.
11. Квадратурні формули Гауса - квадратурні формули найвищої алгебраїчної точності.
12. Наближене інтегрування функцій спеціального виду.
13. Наближене обчислення кратних інтегралів. Метод Монте-Карло.
14. Формули чисельного диференціювання. Оцінка похибки.
15. Прямі та ітераційні методи.
16. Основи застосування методу виключення невідомих (методу Гауса) для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
17. Основи застосування методу Гауса з вибором головного елемента для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
18. Основи застосування методу LU - розкладу матриці для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
19. Основи застосування методу обертань для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
20. Обумовленість систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
21. Основи обчислення визначників. Основи метода ортогонализации.
22. Основи методу відображень.
23. Основи методу прогонки рішень СЛАР з трехдіагональной матрицею.
24. Можливості методу прогонки рішень СЛАР для розпаралелювання розрахунків.
25. Ітераційні методи, стаціонарні і нестаціонарні. Канонічна форма ітераційних методів.
26. Основи методу Якобі (ітераційного методу рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь).
27. Основи методу Гауса-Зейделя (ітераційного методу рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь).
28. Повна і часткова проблема власних значень.
29. Основи методу Якобі рішення повної проблеми власних значень для симетричній матриці.