

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Факультет радіоелектроніки, комп'ютерних систем та інфокомунікацій

Кафедра аерокосмічних радіоелектронних систем

Пояснювальна записка
до дипломної роботи
(тип кваліфікаційної роботи)

Магістра

(освітнійступінь)

на тему «Вимірювач частоти гармонічного сигналу з цифровою обробкою спостережень»

ХАІ.501.566М. 20О.172.1505157. ПЗ

Виконав: студент (ка) б курсу групи № 566 М
Спеціальність 172 «Телекомунікації та
радіотехніка»

(код та найменування)

Освітня програма «Радіоелектронні
пристрої, системи та комплекси»

(найменування)

Ніколаєв А. Ю.

(прізвище та ініціали студента (ки))

Керівник: Абрамов О.Д.

(прізвище та ініціали)

Рецензент: Костенко П.Ю.

(прізвище та ініціали)

Міністерство освіти і науки України
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Факультет радіоелектроніки, комп'ютерних систем та інфокомунікацій

Кафедра аерокосмічних радіоелектронних систем

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 172 «Телекомунікації та радіотехніка»
(код і найменування)

Освітня програма Радіоелектронні пристрої, системи та комплекси
(найменування)

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
Жила С. С.

(підпис)

(ініціали та прізвище)

« »

20 р.

З А В Д А Н Н Я
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТУ

Ніколаєв Андрій Юрійович

(прізвище, ім'я та по батькові)

1. Тема кваліфікаційної роботи «Вимірювач частоти гармонічного сигналу з цифровою обробкою спостережень»

керівник кваліфікаційної роботи доцент.каф 501,к.т.н. Абрамов О.Д.
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом Університету №1706-уч від «19» жовтня 2020 року.

2. Термін подання студентом кваліфікаційної роботи 16 грудня 2020 р

3. Вихідні дані до роботи відношення сигнал/шум – 0.01-100; кількість тимчасових відліків – 16, 32, 64; амплітуда – 1 В, початкова фаза – 0 рад, частота сигналу 10 Гц.

4. Зміст пояснювальної записки (перелік завдань, які потрібно розв'язати огляд літератури з питань спектрального аналізу, технологія оцінювання частоти гармонійного сигналу, моделювання в середовищах MATLAB та Simulink системи для вимірювання частоти сигналу, синтез структурної схеми та її особливості, отримання графіків, економічний розрахунок, висновки.

5. Перелік графічного матеріалу: структурні схеми: вимірювача частоти, буферного пристрою, що запам'ятовує відліки, блоків квадратурного перетворювача, спрощена схема вимірювача частоти; принципова схема вхідного пристрою, схема моделювання вимірювача частоти в Simulink; графіки спектру сигналу, графіки залежності оцінки частоти від сигнал/шум,

графіки залежності дисперсії від сигнал/шуму, графіки залежності похибки від співвідношення сигнал шум.

6. Консультанти розділів кваліфікаційної роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
Основний	Абрамов О. Д. д.т.н.,проф. к.501		
Додатковий	Абрамов О. Д. д.т.н.,проф. к.501		
Економічна частина	Хлівна І. В. д.т.н.,проф. к 601		

Нормоконтроль _____ «____» _____ 20__ р.
(підпис) (ініціали та прізвище)

7. Дата видачі завдання «19» жовтня 2020 р.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ п/п	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів кваліфікаційної роботи	Примітка
1	Огляд методів спектрального аналізу	19.10 – 25.10	Виконано
2	Синтез алгоритму оцінювання частоти	25.10 – 7.11	Виконано
3	Атестація характеристик синтезованого алгоритму	7.11 – 15.11	Виконано
4	Синтез структурної схеми вимірювача частоти	15.11 – 20.11	Виконано
5	Моделювання вимірювача частоти в середовищі Simulink	20.11 – 28.11	Виконано
6	Виконання економічної частини проекту	28.11 – 2.12	Виконано
7	Оформлення результатів виконаної роботи	2.12 – 14.12	Виконано
8	Захист роботи	15.12.20	Виконано

Студент _____

(підпис)

Ніколаєв А. Ю.

(ініціали та прізвище)

Керівник кваліфікаційної роботи _____

(підпис)

Абрамов О.Д.

(ініціали та прізвище)

РЕФЕРАТ

Дипломний робота: 91 с., 26 рис., 13 табл., 10 джерел, 2 додатка.

Об'єкт розробки – вимірювач частоти гармонійних сигналів.

Предмет дослідження – цифрове моделювання синтезованого алгоритму оцінки частоти, принципова схема вхідного пристрою частотоміра, модель вимірювача частоти.

Мета роботи – дослідження алгоритму оцінювання частоти гармонійного сигналу при сегментації даних за методом максимальної правдоподібності, атестація його якісних характеристик на рівні цифрового моделювання.

Метод проектування – статистичний аналіз та цифрове моделювання в середовищі Matlab і Simulink.

В роботі розглянуті існуючі методи спектрального аналізу, виділено їх переваги та недоліки. Синтезованого алгоритму оцінювання частоти гармонійного сигналу при сегментації даних спостережень. Проведено цифрове моделювання алгоритму та аналіз основних технічних рішень, на основі якого розроблено структурна схема вимірювача частоти. Зроблено розрахунок окремих вузлів частотоміра.

Виконано економічний розрахунок собівартості на науково-дослідницьку роботу для дослідження алгоритму оцінювання частоти гармонійного сигналу.

МЕТОД МАКСИМАЛЬНОЇ ПРАВДОПОДІБНОСТІ, ГАРМОНІЧНИЙ СИГНАЛ, ВЛАСНИЙ ВЕКТОР, ВИМІРЮВАЧ ЧАСТОТИ, СЕГМЕНТАЦІЯ ДАНИХ.

THE ABSTRACT

Master's degree work: 91 p., 26 fig., 13 tables, 10 sources, 2 application.

The object of development – is a frequency meter for harmonic signals.

The subject of research – digital modeling of the synthesized algorithm of frequency estimation, the schematic diagram of the input device of the frequency meter, the model of the frequency meter.

The purpose of the work – is to study the algorithm for estimating the frequency of the harmonic signal by the synthesized method of maximum likelihood, certification of its qualitative characteristics at the level of digital modeling.

Design method – statistical analysis and digital modeling using Matlab and Simulink.

The paper considers the existing methods of spectral analysis, highlights their advantages and disadvantages. Digital simulation was performed according to the synthesized method of maximum likelihood. The analysis of the basic technical decisions on the basis of which the structural scheme of the frequency meter is developed is carried out. The calculation of individual nodes of the frequency meter is made.

The economic calculation of the cost of research work for the study of the algorithm for estimating the frequency of the harmonic signal is performed.

METHOD OF MAXIMUM LIKELIHOOD, HARMONIC SIGNAL, OWN VECTOR, FREQUENCY METER, DATA SEGMENTATION.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....	9
ВСТУП.....	
Ошибка! Закладка не определена.	
1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ 3 ПИТАНЬ СПЕКТРАЛЬБНОГО АНАЛІЗУ.....	11
1.1 Методи спектрального аналізу.....	8
1.2 Підвищення ефективності спектрального аналізу методом ESPRIT з використанням технології сурогатних даних.....	25
1.3 Адаптивна корекція методу ESPRIT з використанням технологія сурогатного даних.....	31
1.4 Спектральний аналіз методом ESPRIT при попередньої обробки даних методом SSA.....	32
1.5 Метод цифрового спектрального аналізу вузькосмугових сигналів.....	34
1.6 Аналіз похибок при цифрових методах спектрального аналізу.....	37
2 ТЕХНОЛОГІЯ ОЦІНЮВАННЯ ЧАСТОТИ ГАРМОНІЙНОГО СИГНАЛУ..	45
2.1 Оцінка параметрів радіотехнічних сигналів.....	45
2.2 Оцінка частоти методом максимальної правдоподібності.....	51
2.3 Атестаційні характеристики метода максимальної правдоподібності..	53
2.4 Синтез алгоритму оцінювання частоти з використанням сегментації даних спостережень.....	58
2.5 Атестаційні характеристики алгоритму оцінювання частоти з використанням сегментації даних.....	60
3 СИНТЕЗ СТРУКТУРНОЇ СХЕМИ ПАНОРАМНОГО ВИМІРЮВАЧА ЧАСТОТИ.....	68
3.1 Структурна схему вимірювача частоти.....	68
3.2 Розрахунок електричних параметрів вхідного пристрою частотоміра.....	74
3.3 Основні принципи моделювання вимірювача частоти в середовищі Simulink.....	78
4 ЕКОНОМІЧНА ЧАСТНА. РОЗРАХУНОК СОБІВАРТОСТІ РОБОТИ.....	81
4.1 Мета економічного розділу.....	81
4.2 Розрахунок собівартості.....	81
ВИСНОВОК.....	90
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	91
ДОДАТОК А.....	92
ДОДАТОК Б.....	93

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

- A_m – річні амортизаційні відрахування по даному виду обладнання, грн;
 f – частота, Гц;
 g – відношення сигнал/шум;
 EV – Eigen Vectors (Власний Вектор);
 n – прийнята кількість виконавців;
 L – кількість відліків;
 MUSIC – MUltiple Signal Classification (Метод Класифікації Множинних Сигналів);
 P – потужність, Вт;
 T – тривалість етапу, дні;
 t – трудомісткість етапу, чол.-дні;
 $T_{ар}$ – тарифна вартість 1 кВт електроенергії, грн;
 $T_{мнк}$ - трудомісткість молодшого наукового керівника, чол.-дн;
 T_i – трудомісткість молодшого наукового керівника і керівника, чол.-дн;
 W – споживана потужність, Вт.
 A_k – амплітуда комплексної експоненти, В;
 a_k – коефіцієнт загасання k -й комплексної експоненти;
 φ_k – початкова фаза k -й синусоїди, рад;
 Δt – інтервал дискретизації, с
 σ – дисперсія, Гц;
 АРКС – авторегресія з ковзанням середнього;
 АЦП – аналого-цифровий перетворювач;
 ВВ – власні вектора;
 ВЗ – власні значення;
 ЄСВ – єдиний соціальний внесок;
 КВП – критерій відношення правдоподібності;
 КМ – коваріаційна матриця;
 КФ – кореляційна функція;
 МП – максимальна правдоподібність;
 ММП – методології максимальної правдоподібності;
 НДР – науково-дослідницька робота;
 ОП – операційний підсилювач;
 ППС – підпростори сигналів;
 ППШ – підпростори шуму;
 СЩП – спектральна щільність потужності;
 ТТЛ – транзисторно-транзисторна логіка;
 ШПФ – швидке перетворення Фур'є;
 ЦВП – цифрові вимірювальні пристрої.

ВСТУП

Відомі сучасні технології обробки дискретизованих спостережень, отримані на базі власноструктурних методів, за допомогою яких спеціалісти намагаються вирішити на сьогоднішній день основні задачі спектрального аналізу, зокрема, задачі оцінювання частоти гармонічних компонент [1-4]. Тим не менш обчислювальні аспекти та якісні показники оцінки при використанні вказаних технологій і їх модифікацій в умові невеликої кількості вибірок спостережень не задовольняє вимоги радіотехнічної практики.

У багатьох випадках спектральний аналіз доводиться робити при низькому відношенні сигнал - шум і (або) маючи в розпорядженні короткі записи даних (в радіолокації, наприклад, в кожному відбитому імпульсі може міститися лише кілька відліків). Традиційні методи спектрального аналізу, засновані на алгоритмі швидкого перетворення Фур'є (ШПФ), характеризуються високою обчислювальною ефективністю. Однак має місце обмеження роздільної здатності величиною, зворотної часу спостереження, та ефект маскуванню спектральних ліній слабких сигналів бічними пелюстками спектральних ліній сильніших сигналів. Застосування сучасних методів спектрального аналізу в певних умовах дозволяє подолати властиві традиційним методам недоліки і отримати досить високу роздільну здатність (вище релєївської межі) при порівняно короткій послідовності даних.

В роботі представлена методологія синтезу алгоритмів оцінювання частоти комплексного гармонійного сигналу по дискретним відлікам спостережень процесу при використанні сегментації даних.

1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ З ПИТАНЬ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Потреба вирішення завдань спектрального аналізу (тимчасового або просторового) виникає в ряді напрямках, таких як радіолокація, радіозв'язок та інших. Велика увага приділяється оцінюванню координат та параметрів руху повітряних об'єктів. Прикладом може слугувати, оцінювання частоти Доплера відбитих від групових цілей сигналів. Доплерівській частотний спектр служить характеристикою об'єктів, що рухаються. В радіолокації, цю інформацію використовують для вирішення завдань виявлення, класифікації та розпізнавання. Завдання «над роздільна здатність» по частоті є актуальною радіолокаційною завданням (наприклад, «над роздільна здатність» по частоті Доплера відбитих від групових цілей сигналів в імпульсно-доплерівських радіолокаторах, при розпізнаванні цілей, обробці зображень, отриманих бортовий радіолокаційною станцією з синтезом апертури і т.д.), яка може вирішуватися методами спектрального аналізу.

Рішення завдання спектрального аналізу можливо класичними методами, параметричними методами (заснованими на параметричних моделях випадкових процесів), методом Кейпон, власно-структурними методами і т.д.

1.1 Методи спектрального аналізу

Методи цифрової обробки радіосигналів знаходять зараз широке застосування при спектральному аналізі в різних областях науки і техніки. При цьому під цифровою обробкою розуміють процес, при якому необхідні виміри й обчислення здійснюються шляхом операцій над числами, що представляють в дискретній формі аналізований сигнал. Спектральні характеристики аналізованого процесу можна визначити за допомогою універсальних ЕОМ, запрограмують ваних відповідним чином, або спеціалізованих обчислювальних пристроїв - цифрових аналізаторів спектра. Цифрові аналізатори спектру зазвичай дозволяють змінювати алгоритм обчислень в певних межах і часто за цим показником наближаються до універсальних ЕОМ. Тому розглядаючи принципи цифрового спектрального аналізу, ми не будемо орієнтуватися на певний тип обчислювального пристрою.

Вихідною передумовою для введення цифрових методів спектрального аналізу є теорема Котельнікова, згідно з якою сигнал, спектр якого обмежен зверху частотою f_b , повністю описується відліками, взятими через інтервали часу:

$$\Delta t = \frac{1}{2f_b}, \quad (1.1)$$

застосованого до спектральному аналізу під обмеженням по спектру сигналом $S(t)$ будемо розуміти всю сукупність радіосигналів і шумів в смузі огляду Φ_0 . Спочатку будемо вважати, що смуга аналізу розташована від 0 до $\Phi_0 = f_b$.

Дискретизація сигналу в смузі огляду здійснюється виміром миттєвих значень напруги на виході ШПТ в моменти часу $t = i\Delta t$, де i – ціле число, послідовно приймає значення $0, 1, 2, \dots$. В результаті аналізуючи реалізація $S(t)$ описується дискретним процесом $S(i\Delta t)$. Спектральні характеристики безперервної реалізації отримують відповідної обробкою послідовності відліків. При цифровому спектральному аналізі одночасно обробляється завжди кінцеве число відліків M , яке називають об'ємом вибірки [9].

У витоках класичної теорії обробки сигналів лежить теорія операційного числення на основі інтегральних перетворень:

$$F(p) = \int_b^a f(t)\psi(t, p)dt, \quad (1.2)$$

де $f(t)$ – перетворювана функція;

$\psi(t, p)$ – ядро (базис) інтегрального перетворення.

Від ядра залежить вид перетворення та характер задач, які за допомогою нього вирішуються.

Найбільш узагальненим є перетворення Лапласа: $\psi(t, p) = e^{-pt}$, $a = -\infty, b = \infty$ оскільки з ним можна зв'язати перетворення, які отримали найбільше практичне впровадження. Перетворення Лапласа пов'язує клас функцій дійсної змінної t з функцією-зображенням комплексної змінної $p = s + j\sigma$. Тобто зображення по Лапласу є спектральна функція експоненційно-згасаючої гармонічної функції з коефіцієнтом загасання s , та частотою коливань σ . Звідси слідує зв'язок з гармонічним аналізом за Фур'є ($s = 0, \sigma = \omega$) – перетворення сигналів у частотну область та подальший аналіз отриманих спектрів. Застосування інтегрального перетворення Фур'є є дуже наочною демонстрацією головних періодичних властивостей сигналу, які описуються всього двома дійсними функціями $\sin \omega t$ та $\cos \omega t$, або однією комплексною $e^{j\omega t}$. Перетворення Фур'є дає блискучі результати для стаціонарних сигналів, а його реалізація не потребує великих витрат. З розвитком технологій і ускладненням вирішуваних задач почали даватися взнаки обмеження застосування перетворення Фур'є, зокрема для сигналів, які втрачають глобальну стаціонарність. Тут на допомогу приходять вікна та алгоритми розбиття сигналів у часі на стаціонарні відрізки, за допомогою яких будуються спектри (STFT – short-time Fourier Transform). Отже тепер результат перетворення Фур'є стає функцією не тільки частоти, але й часу і вигляду та розміру вікна. Для такого багатовимірного перетворення часто застосовують термін „часо-частотно-масштабне” перетворення (від англ. TFS – time-frequency-scale), а класичне перетворення Фур'є називають одновимірним [6].

Для обчислення спектральних складових за сукупністю значень використовують алгоритм дискретного перетворення Фур'є (ДПФ), який дозволяє перерахувати сукупність тимчасових відліків в комплексний дискретний спектр:

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \sum_{i=0}^{M-1} h(i)S(i\Delta t) \cos \frac{2\pi ik}{M}, \\ b_k &= \sum_{i=0}^{M-1} h(i)S(i\Delta t) \sin \frac{2\pi ik}{M}, \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

де a_k - дійсна частина комплексного коефіцієнта спектра Фур'є, рад/с;

b_k – уявна частина комплексного коефіцієнта спектра Фур'є, рад/с;

k – номер гармонійної складової спектра аналізованої реалізації.

За отриманими коефіцієнтами a_k і b_k обчислюють коефіцієнти спектру амплітуд:

$$C_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}. \quad (1.4)$$

У сукупності коефіцієнтів C_k міститься вся інформація про розподіл енергії сигналу по частоті, тому вона в певному сенсі є аналогом спектральної характеристики сигналу, що отримується при фільтрових методах аналізу.

Цифрові методи дозволяють досить просто обчислювати і спектр фаз аналізованої реалізації:

$$\varphi_k = -\arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right). \quad (1.5)$$

Так як спектр фаз сигналу істотно залежить від початку відліку реалізації, він до недавнього часу не знаходив практичного застосування при спектральному аналізі радіосигналів. З введенням ж цифрових методів спектрального розкладання, коефіцієнти спектра фаз широко використовуються, зокрема, для відновлення тимчасових характеристик одного або декількох вузькосмугових сигналів з усієї сукупності випромінювань, що потрапляють в смугу аналізу.

Фазові спектри радіосигналів після відповідної обробки можна використовувати також для розпізнавання сигналів.

Таким чином, використання алгоритму ДПФ еквівалентно застосуванню аналізатора спектра паралельного типу з $M/2$ вузькосмуговими фільтрами. Ці штучно формуються УЗТ, одержувані в результаті обробки дискретної послідовності за алгоритмом ДПФ, будемо називати еквівалентними фільтрами [9].

Класичні методи спектрального оцінювання відносяться до числа найбільш стійких методів спектрального оцінювання. Вони застосовуються майже до всіх класів сигналів і шумів, що володіють стаціонарними властивостями, тоді як альтернативні їм методи з високою роздільною здатністю виявляються стійкими тільки в разі обмеженого класу стаціонарних сигналів. У класичних методах, як правило, використовується алгоритм ДПФ, в зв'язку з чим вони виявляються найбільш обчислювально ефективними методами з числа наявних методів спектрального оцінювання. Відзначимо також, що отримуються з їх допомогою оцінки СЩП лінійно залежать від потужності синусоїд, присутніх в даних, тоді як альтернативні їм методи часто

не забезпечують лінійного зв'язку між висотою спектральних піків і потужністю цих синусоїд.

Основний недолік класичних методів спектрального оцінювання обумовлений викривленням, впливом просочування по бічних пелюстках через неминуче зважування в них кінцевих послідовностей даних. Обробка за допомогою вікон дозволяє послабити вплив бічних пелюсток, але лише за рахунок погіршення спектральної роздільної здатності. Роздільна здатність, що забезпечується класичними методами, не може перевищувати величини, зворотної довжини даних, і не залежить від характеристик аналізованих даних. Для поліпшення статистичної стійкості спектральних оцінок може бути використано псевдо усереднення по ансамблю за рахунок сегментації даних, але це також погіршує спектральний дозвіл. Обробка кінцевих записів даних вимагає прийняття певних компромісів щодо роздільної здатності, стійкості (мінімізації дисперсії оцінки) і придушення просочування. Часто при наявності дуже коротких даних нам необхідно отримати набагато більшу роздільну здатність, ніж може забезпечити повний запис даних при одно сегментному аналізі. Домогтися цього можна за рахунок погіршення статистичної стійкості оцінок.

Стандартний метод боротьби з ефектом просочування частот полягає в згладжуванні вихідної реалізації спеціальними тимчасовими вікнами (ваговими функціями). Існує безліч таких згладжують вікон, але слід відзначити, що вибір вагової функції являє собою досить важке завдання. При цьому немає загального практичного правила вибору функції тимчасового вікна. Це завдання дослідник вирішує в кожному конкретно випадку відповідно до поставленої мети, керуючись характеристиками спектральних вікон і власним досвідом. До того ж застосування вікна погіршує частотну роздільну здатність, що особливо важливо при обробці коротких реалізацій.

Спектральний аналіз використовується для обробки як детермінованих, так і випадкових сигналів. При аналізі детермінованих сигналів використовують амплітудний спектр і фазову характеристику. Застосування перетворення Фур'є до випадкового сигналу дає миттєвий амплітудний спектр (вибірковий спектр), однак отримана таким чином оцінка спектральної характеристики виявляється незадовільною через статистичної неспроможності. Тому аналіз випадкових сигналів (особливо стаціонарних) ґрунтується на використанні такої характеристики, як спектр потужності сигналу, яка б показала розподіл потужності сигналу по частотах.

Для обчислення спектра потужності існують два класи методів:

- періодограмні методи, засновані на перетворенні Фур'є з наступним усередненням за кількома спектрами,
- корелограмні методи, засновані на перетворенні Фур'є усередненої автокореляційною послідовністю.

Періодограмний метод. Ухвалою СПМ, заснованим на допущенні про ергодичності, є наступна дискретно-тимчасова форма:

$$P_{xx}(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon \left\{ \frac{1}{(2N+1)T} \left| T \sum_{n=-N}^N x[n] \exp(-j2\pi f n T) \right|^2 \right\}. \quad (1.6)$$

Нехтуючи операцією обчислення математичного очікування і вважаючи, що кінцеве безліч даних $x[0], \dots, x[N-1]$ містить N відліків, отримуємо вибіркового спектра:

$$\tilde{P}_{xx}(f) = \frac{1}{NT} \left| T \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi f n T) \right|^2 = \frac{T}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi f n T) \right|^2. \quad (1.7)$$

який може бути обчислений по кінцевій послідовності даних. Це - вихідна не модифіковані форма періодограмний оцінки СПМ, оскільки була опущена операція обчислення математичного очікування. Тому для згладжування періодограмний оцінки необхідно застосовувати щось на зразок псевдоусереднюючим по ансамблю. Існує три основних типи методів згладжування. Даньелл запропонував згладжувати швидкі флуктуації вибіркового спектра шляхом усереднення по сусідніх частотах спектра. Даний метод, званий періодограма Даньелла, зводиться до обчислення згортки періодограми зі згладжує функцією. У методі Бартлетта аналізований сигнал ділиться на не перекриваючі сегменти, для кожного сегмента обчислюється періодограма і потім ці періодограми усереднюються. Якщо кореляційна функція сигналу на тривалості сегмента загасає до малих значень, то періодограми окремих сегментів можна вважати незалежними. В цьому випадку дисперсія періодограми Бартлетта зазвичай пропорційна числу використовуваних сегментів, однак зі зростанням числа сегментів при фіксованому загальній кількості відліків сигналу падає спектральний дозвіл (за рахунок того, що сегменти стають коротшими). Уелч вніс в метод Бартлетта два удосконалення: використання вагової функції і розбиття сигналу на перекриваються фрагменти [1].

Коррелограмний метод заснований на використанні автокореляційної послідовності r_m , перетворення Фур'є якої дає спектр потужності:

$$P(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m e^{-j2\pi f m \Delta t}, \quad (1.8)$$

$$r_m = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M x_{n+m} x_n^*. \quad (1.9)$$

Перехід до кінцевої довжині записи даних призводить наступного поданням спектра потужності:

$$P(f) = \sum_{m=-L}^L r_m e^{-j2\pi f m \Delta t}, \quad (1.10)$$

$$r_m = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-m-1} x_{n+m} x_n^*. \quad (1.11)$$

Ефект неявно присутнього вікна через сталість даних призводить до згортки істинної спектральної щільності з перетворенням Фур'є прямокутного

вікна. Спроба зменшення цього ефекту призводить до використання кореляційного вікна:

$$P(f) = \sum_{m=-L}^L W_m \hat{r}_m e^{-j2\pi f m \Delta t}. \quad (1.12)$$

Така форма оцінки було запропоновано Блекманом і Тьюкі. Вікно нормується так, щоб $W_0=1$.

Потенційну можливість отримання більш точних спектральних оцінок (в порівнянні з класичними методами) дає використання параметричних методів. В основу цих методів покладено деяка математична модель з відомою частотною характеристикою. В результаті спектральний аналіз зводиться до знаходження таких параметрів моделі, при яких вона найбільш близька до досліджуваного сигналу.

На основі узагальнення авторегресивної моделі отримано метод авторегресії і ковзного середнього (АРКС). Математична модель для дискретних рівновіддалених відліків в загальному випадку описується АРКС-рівнянням:

$$y_n + a_1 y_{n-1} + \dots + a_p y_{n-p} = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + \dots + b_q x_{n-q}. \quad (1.13)$$

Окремі випадки цієї моделі – авторегресійна (АР) модель:

$$y_n + a_1 y_{n-1} + \dots + a_p y_{n-p} = b_0 x_n. \quad (1.14)$$

та модель ковзаючого середнього (КС):

$$y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + \dots + b_q x_{n-q}. \quad (1.15)$$

Запропоновано багато способів оцінювання параметрів АРКС. Однак всі ці методи вимагають значних матричних обчислень та ітеративних методів оптимізації. Для зменшення обсягу обчислень були розроблені субоптимальні методи. Але ці методи дозволяють проводити лише роздільну оцінку АР - параметрів і параметрів КС, в той час, як для отримання оптимальних значень параметрів потрібно їх спільна оцінка. Результати, одержані за допомогою методу АРКС, істотно залежать від значень оцінок автокореляційних функцій. Для отримання якісних результатів потрібні точні значення автокореляційних функцій.

Найбільшого поширення набули методи спектрального оцінювання, засновані на АР моделі формування сигналу, що пояснюється простотою моделі, зручністю розрахунків на її основі і хорошим відповідністю багатьом реальним завданням. В основі АР моделі лежить припущення, що дискретний сигнал x_n формується шляхом пропускання дискретного білого шуму u_n з нульовим середнім і дисперсією ρ через рекурсивний фільтр p -го порядку

$$x_n = - \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} + u_n. \quad (1.16)$$

Коефіцієнти a_k , - авторегресійні параметри (АР-параметри). Спектральна щільність потужності АР-процесу визначається співвідношенням:

$$p_{AP}(f) = \frac{\Delta t \rho}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j2\pi f k \Delta t} \right|}, \quad (1.17)$$

де t - інтервал дискретизації, с.

У загальному вигляді АР-параметри знаходяться як рішення системи лінійних рівнянь:

$$R_x = ar, \quad (1.18)$$

де R_x – кореляційна матриця сигналу x_n ;

r – стовпець значень кореляційної функції для k рівного від 1 до p .

При виконанні аналізу реальних сигналів замість істинних значень кореляційної функції використовують їх оцінки. Розроблено ряд методів авторегресійного аналізу, які відрізняються в основному способом обліку в обчисленнях відліків сигналу, що не мають зрушеною пари при обчисленні оцінки кореляційної функції.

Найбільш простий метод оцінювання АР-параметрів - метод Юла-Уокера, заснований на вирішенні наступної системи рівнянь:

$$\begin{pmatrix} r_0 & r_{-1} & \cdots & r_{-p} \\ r_1 & r_0 & \cdots & r_{-p+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{-p} & r_{-p-1} & \cdots & r_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Рішення системи (1.19) дозволяє оцінити значення АР-параметрів a_k і дисперсії білого шуму ρ , однак використання незміщених автокореляційних оцінок може привести до неопозитивним-певної автокореляційної матриці, що означає, що АР-фільтр буде нестійким. При використанні зміщених автокореляційних оцінок ця проблема не виникає [1].

Застосування для вирішення системи (1.19) ефективної рекурентної процедури отримало назву алгоритму Левінсона. Рішення системи (1.18) проводиться для порядків, які послідовно збільшуються АР-моделі (починаючи з $p=1$). При цьому АР-параметри p -го порядку зв'язуються з АР-параметрами ($p-1$) - го порядку наступним співвідношенням при $a_{p-1,0} = 1$:

$$a_{p,n} = a_{p-1,n} + K_p a_{p-1,p-n}^*, \quad n = 1, 2, \dots, p-1, \quad (1.20)$$

де $a_{p-1,0}$ - коефіцієнт.

Рекурсивне рівняння для оцінки дисперсії білого шуму має вигляд:

$$\rho_p = \rho_{p-1} (1 - |K_p|^2). \quad (1.21)$$

з початковою умовою $\rho_0 = r_0$.

Переваги методу Левінсона:

- автоматичне визначення параметрів моделей нижчих порядків, що дуже зручно, коли значення порядку заздалегідь невідомо;
- достатня умова стійкості АР-моделі порядку p : $K_3 < 1$ легко контролюється в процесі обчислень;

– трудомісткість алгоритму Левінсона при вирішенні системи (1.20) менше в порівнянні з трудомісткістю методу Гаусса.

На відміну від стохастичних методів АР аналізу в основі методу Проні лежить моделювання вибіркового даних детермінованою моделлю - лінійною комбінацією експоненційних функцій.

Нехай є n комплексних відліків даних $y_i, i = 1, \bar{n}$. Метод Проні дозволяє оцінити y_i за допомогою p -членної моделі комплексних експонент:

$$y_i = \sum_{k=1}^p A_k \exp(a_k + j2\pi f_k)(i-k)\Delta t + j\varphi_k, \quad (1.22)$$

де A_k – амплітуда комплексної експоненти, В;

a_k – коефіцієнт загасання k -ї комплексної експоненти;

f_k – частота, Гц;

φ_k – початкова фаза k -ї синусоїди, рад;

Δt – інтервал дискретизації, с.

Для отримання параметрів моделі (1.22) використовуються оцінки за методом найменших квадратів.

Одним з параметричних методів спектрального аналізу є алгоритм Проні, що використовує подання спостережуваного процесу у вигляді комплексного експоненціального ряду. Метод дозволяє за відліком сигналу знайти параметри цих комплексних експонент, що, у свою чергу, дає можливість записати вираз для спектральної щільності досліджуваного сигналу. Широке застосування методу Проні стало можливим тільки останнім часом, оскільки він істотно нелінійний і вимагає великих обчислювальних витрат. У зв'язку з цим виникла необхідність детального дослідження даного методу з точки зору оптимальності його математичної реалізації, а також потенційної стійкості до флуктуацій відліків сигналу і шумів дискретизації.

Метод Проні – це метод аналізу коротких відрізків сигналу, заснований на апроксимації сигналу кінцевою сумою комплексних експонент. Сучасний варіант методу Проні узагальнено на моделі, що складаються з загасаючих синусоїд (комплексних експонент), крім цього, в ньому використовується процедура оцінювання параметрів моделі за методом найменших квадратів для наближеної підгонки моделі в тих випадках, коли кількість точок даних $N > 2p$ – перевищує мінімально необхідну їх кількість для визначення параметрів p експонент. Ця процедура отримала назву узагальненого методу Проні. Метод Проні, строго кажучи, не є методом спектрального оцінювання. Однак (однак) він тісно пов'язаний з алгоритмами лінійного передбачення за методом найменших квадратів, використовуваними при спектральному оцінюванні на основі моделей авторегресії. На відміну від стохастичних параметричних моделей, метод Проні для апроксимації даних використовується детермінована експоненціальна модель, обчислення спектральної щільності енергії (СЩЕ) та складає суть спектральної інтерпретації методу. Метод Проні доцільно виділяти три етапи.

Перший етап виділення параметрів лінійного передбачення, з допомогою яких здійснюється підгонка наявних даних.

Другий, з коефіцієнтів лінійного передбачення формулюється поліном і визначаються його коріння, які будуть давати оцінки коефіцієнтів загасання і частот синусоїд для кожного експоненціального числа.

$$a_i = \frac{\ln |z_i|}{\Delta t}, \quad (1.23)$$

$$f_i = \arctg\left[\frac{\operatorname{Im} z_i}{\operatorname{Re} z_i} \frac{1}{2\pi\Delta t}\right]. \quad (1.24)$$

де z_i - корені характеристичного рівняння;

Третій етап, шукаємо рішення другої системи лінійних рівнянь, яка дає оцінку амплітуд експонент і початкових фаз синусоїд. Рівняння відповідні лінійного прогнозу, за своєю структурою ідентичних рівнянь ЮлаУолкера для авторегресійного процесу, а тому існує тісний зв'язок між фільтром лінійного передбачення і авторегресивним процесом. Зважаючи на це співвідношення між параметрами лінійного передбачення та авторегресії, дозволяє інтерпретувати перший і другий етапи як процедуру відшукування полюсів деякого авторегресійного процесу. Таким чином, будь-який метод спектрального аналізу з використанням авторегресійної моделі або моделі авторегресії ковзного середнього, які передбачають визначення положення полюсів, можна (з допуском) розглядати як процедуру Проні.

Один з класів спектральних методів, заснованих на аналізі власних значень автокореляційної матриці описується в науковій літературі, як клас методів, що забезпечують найкращі характеристики дозволу і оцінювання частоти, ніж авторегресивний метод і метод Проні, особливо при низькому відношенні сигнал/шум, коли ці методи не в змозі дозволити близькі по частоті синусоїди або інші вузькосмугові спектральні компоненти. Ключовою операцією в цих методах є поділ інформації, що міститься в автокореляційній матриці або матриці даних, на два векторних підпростору - підпростір сигналу і підпростір шуму.

До класу методів оцінювання частоти, основаних на аналізі власних значень відповідних матриць, належать алгоритми гармонійного розкладання Писаренко і класифікації множинних сигналів MUSIC (MULTiple Signal Classification) [7].

Метод гармонійного розкладання Писаренко відноситься до числа найперших процедур спектрального оцінювання, заснованих на аналізі власних значень. У цьому методі передбачається, що аналізований процес складається з суміші M комплексних синусоїд, і адитивного комплексного білого шуму, а для оцінки частот синусоїд, їх потужності і дисперсії білого шуму використовується відома автокореляційна послідовність.

Оцінки параметрів при цьому визначаються значеннями коренів полінома, коефіцієнти якого є елементи власного вектора, відповідного найменшому власному числу зазначеної матриці. При практичному використанні метода Писаренко необхідно мати стійку оцінку кореляційної матриці, яку, як правило, вдається отримати лише при наявності досить великої кількості різних вибірок даних спостереження, що знижує практичну цінність цього методу. Інший

недолік методу Писаренко полягає в тому, що розмірність аналізованої матриці визначається числом елементів вибірки спостережень, яке, як правило, значно перевищує число сигналів. В результаті цього після рішення полінома високого ступеня виникає досить складне завдання, пов'язана з відбором тих коренів, які відповідають реально присутнім сигналам. Зазвичай для цього порівнюють отримані оцінки потужностей, з яких, природно, вибираються максимальні, які і вважають належними реально присутнім сигналам. Недоліком методу Писаренко, крім появи зайвих коренів, є також низька точність їх локалізації. До переваг методу Писаренко можна віднести те, що для реального обчислення власного вектора матриці, що відповідає її найменшому власному числу, існують не дуже складні алгоритми.

Метод Multiple Signal Classification (MUSIC) призначений для аналізу сигналів, що представляють собою суму синусоїд з білим шумом. Метою спектрального аналізу подібних сигналів, є не розрахунок спектра як такого, а визначення частот, амплітуд і потужностей гармонійних складових. За допомогою методу MUSIC отримуємо залежність рівня сигналу від частоти тобто, псевдоспектр. Головне завдання цих методів - це поділ інформації, яка міститься в коваріаційній матриці

$$\begin{pmatrix} x_p & x_{p-1} & \dots & x_1 \\ x_{p+1} & x_p & \dots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N-1} & x_{N-2} & \dots & x_{N-p} \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

або модифікованій коваріаційній матриці на два векторних підпростора - підпростір сигналу і підпростір шуму:

$$\begin{pmatrix} x_{p+1} & x_p & \dots & x_1 \\ x_{p+2} & x_{p+1} & \dots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N & x_{N-1} & \dots & x_{N-p} \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dots & \dot{x}_{p+1} \\ \dot{x}_2 & \dot{x}_3 & \dots & \dot{x}_{p+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{x}_{N-p} & \dot{x}_{N-p+1} & \dots & \dot{x}_N \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

Псевдоспектр сигналу обчислюється таким чином:

$$P_{music}(f) = \frac{1}{\sum_{k=M+1}^{P+1} \alpha_k \left| \sum_{n=1}^{P+1} e^{j2\pi(n-1)f\Delta t} V_k[n] \right|^2}, \quad (1.27)$$

де $V_{k,n}$ - n -й елемент k -го власного вектора коваріаційної матриці;

$\alpha_k = 1$ коефіцієнт (розраховується методом MUSIC);

$\alpha_k = 1/\lambda_k$ (розраховується методом EV);

λ_k - власні значення коваріаційної матриці.

Ефективність такого поділу визначається наявністю будь-якої апріорної інформації про сигнал

Близьким родичем MUSIC є метод аналізу власних векторів. Його відмінність полягає лише в тому, що використовуються вагові коефіцієнти, обернено пропорційні відповідним власним числам.

При заданому значенні порядку M метод EV породжує менше помилкових спектральних піків, ніж MUSIC, і, як правило, краще передає форму спектра шуму [7].

Одним із методів спектрального оцінювання є швидкий рекурсивний алгоритм найменших квадратів.

Класичний РНК-алгоритм призначений для вирішення звичайних лінійних задач мінімізації по методу найменших квадратів. Однак структура рівняння "володіє додатковими властивостями, які можна використовувати для побудови більш ефективного алгоритму, все ще дозволяє отримувати точне рішення по методу найменших квадратів. Ці властивості аналогічні використаним при виведенні швидкого блочного алгоритму. Швидкі блокові алгоритми були рекурсивними по порядку, але фіксованими за часом (оскільки використовувався блок даних з A 'відліків). Застосовуючи аналогічний підхід, можна створити швидкий РНК-алгоритм, але на відміну від швидких блокових алгоритмів він буде рекурсивним за часом і фіксованим по порядку. Ключовим, в швидкому алгоритмі, являється процедура поновлення для вектора коефіцієнтів посилення $C_{p-1,N}$ в рівнянні (1.2):

$$\begin{aligned} a_{p,N+1} &= a_{p,N} - P_N x_{p-1}[N] (x_p^T[N] a_{p,N} + x[N+1]) C_{p-1,N} = \\ &= a_{p,N} - e_{p,N}[N+1] P_x x_{p-1}[N] = \\ &= a_{p,N} - e_{p,N}[N+1] e_{p-1,N} \end{aligned} \quad (1.28)$$

в якій використовуються тільки операції над векторами, а не над матрицями. Обчислювальні витрати, необхідні повним РНК-алгоритмом, зменшуються з p^2 до точно $5p$ операцій (множень/додавань), що в 2,5 рази більше обчислювальних витрат для НСК-алгоритму, який вимагає $2p$ операцій. В обчислювальному відношенні це робить даний РНК-алгоритм ніж НСК-алгоритм. Зауважимо також, що існує тенденція називати швидкий РНК алгоритм «швидким алгоритмом Калмана», але це не зовсім правильно із-за невиваждкого характеру детермінованого рішення, за методом найменших квадратів. Швидкий РНК-алгоритм володіє двома додатковими перевагами, які відсутні у класичного РНК-алгоритму. При виконанні швидкого РНК-алгоритму обчислюються і оновлюються також і коефіцієнти лінійного передбачення $a_{p,N,[k]}^b$, які мінімізують суму квадратів помилок лінійного передбачення:

$$\left. \begin{aligned} R_{p,N}^b &= \sum_{n=1}^N \omega^{N-n} |e_{p,N}^b[n]^2|, \\ e_{p,N}^b[n] &= x[n-p] + \sum_{k=1}^p a_{p,N}^b[k] x[n-p+k]. \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

Це може виявитися корисним для методів визначення експоненційних сигналів.

Для того щоб матриця $R_{p,N}$ стала несингулярною, потрібно як мінімум $p+1$ відліків даних (ранг цієї матриці дорівнює $p-1$). У класичному РНК-алгоритмі ця складність ініціалізації усувається за допомогою вибору довільних початкових значень P_0 і $a_{p,0}$, що призводить до деякого змішання одержуваних оцінок.

Швидкий РНК-алгоритм володіє, по всій видимості, поганою довготривалою чисельною стійкістю, проте він все ж досить точний при використанні записів даних короткої та середньої довжини. Зазначалося, що при тривалій роботі РНК-алгоритму в адаптивному режимі його характеристики розходяться. Це обумовлено накопиченням помилок при обчисленнях з кінцевою точністю, особливо в тому випадку, коли матриця майже сингулярна, що може мати місце при аналізі вузькосмугових сигналів. Для усунення сингулярності цієї матриці до вхідного сигналу можна, наприклад, додати слабкий білий. Вчений Лінь вдався до «рятівного» рішення, яке засновувалось на повторній ініціалізації вектора коефіцієнтів підсилення. Для збільшення динамічного діапазону обчислювальних машин з обмеженою точністю і поліпшення характеристик можна використовувати швидкий РНК-алгоритм нормованого квадратного кореня. Однак ці нормовані алгоритми по суті подвоюють обчислювальну складність, оскільки зменшення вдвічі необхідної точності обертається необхідністю зберігання і обчислення параметрів цих алгоритмів. Використання призводить, очевидно, до появи в алгоритмі значного власного шуму. РНК алгоритм сходиться експоненціально і рівномірно незалежно від розкиду власних значень автокореляційної матриці сигналу; його збіжність залежить лише від вагового множника ω після змін на вході (початкова збіжність від ω не залежить).

Одним із методів спектрального оцінювання є метод мінімум дисперсії. Спектральна оцінка мінімальної дисперсії (МД) була вперше введена Кейпон при просторово-часовому аналізі багатовимірних сигналів решіток сейсмічних датчиків. Метод отримання такої оцінки характеризувався Кейпоіом як метод спектрального аналізу з високою роздільною здатністю, хоча в дійсності його вирішення лежить між роздільною здатністю авторегресивної спектральної оцінки і роздільною здатністю класичних спектральних оцінок. Лакосс переформулював метод просторово-часового аналізу Кейпона стосовно завдань спектрального аналізу одновимірних часових рядів і назвав його методом (спектрального оцінювання) максимальної правдоподібності (ММП), оскільки в статті Кеннона, опублікованій в 1969 р. використовувалася функція максимальної правдоподібності і гаусовий процес. Однак назва ММП не зовсім

точно, так як даний метод не дає оцінки максимальної правдоподібності для функції спектральної щільності потужності (СЩП). Насправді МД-оцінка не є істинною функцією СЩП, оскільки на відміну від справжньої СЩП площа під графіком МД-оцінки не характеризує повну потужність вимірюваного процесу. Зворотне перетворення Фур'є, відповідне МД-оцінки, також не збігається з автокореляційною послідовністю, яка використовується для отримання цієї оцінки, чим вона відрізняється від АР-оцінок, які цією властивістю володіють. Таким чином, МД-оцінку можна вважати спектральною оцінкою в тому сенсі, що вона описує відносні інтенсивності компонент частотного спектра, але не є оцінкою істинної СЩП. І все ж до переваг МД-оцінки слід віднести той факт, що вона дає спектр, висоти піків в якому лінійно пропорційні потужності синусоїд, присутніх в уже згадуваному процесі. Мінімальна дисперсія - це характеристика, яка більш інформативна поблизу початку координат оцінки. Вона виходить за допомогою мінімізації дисперсії процесу на виході вузькосмугового фільтра, частотна характеристика якого адаптується до спектральних компонентів вхідного процесу на кожній частоті представляє інтерес [1].

Найбільш ефективна реалізація методу спектральної МД оцінки складається з наступних етапів:

- обчислити на основі даних послідовність оцінок автокореляцію;
- вирішити рівняння Юла-Уолкера для АР-параметрів за допомогою алгоритму Левінсої;
- визначити кореляцію АР-параметрів для отримання коефіцієнтів використовувати вираз;

$$\left. \begin{aligned} \psi_{МД}[k] &= \frac{1}{R_p} \sum_{i=0}^{p-k} (p+1-k-2i) a_p[k+i] a_p^*[i], \text{ при } 0 \leq k \leq p, \\ \psi_{МД}[k] &= \psi_{МД}^*[-k], \text{ при } -1 \geq k \geq -p. \end{aligned} \right\}; \quad (1.30)$$

– обчислити спектральну МД-оцінку в необхідному частотному діапазоні, використовуючи вираз (1.30) і алгоритм ШПФ. На практиці дещо краще в обчислювальному відношенні результати можна отримати, замінюючи перші два етапи будь-який з процедур визначення АР-параметрів. Так, наприклад, їх можна замінити наступним етапом;

- обчислити ЛР-коефіцієнти за допомогою алгоритму Берга.

Використання алгоритму Берга матеє на увазі, що автокореляційні функції отримуються з теплицевої матриці.

Останніми роками при обробці сигналів широко використовується новий математичний базис представлення сигналів за допомогою "коротких хвиль" - вейвлетів. За його допомогою можуть оброблятися нестационарні сигнали, сигнали з розривами і іншими особливостями і сигнали у вигляді пачок.

Вейвлет – перетворення сигналів є узагальненням спектрального аналізу, типовий представник якого – класичне перетворення Фур'є. Термін "вейвлет" (wavelet) у перекладі з англійського означає "маленька (коротка) хвиля". Вейвлети - це узагальнена назва сімейств математичних функцій певної форми,

які локальні в часі й по частоті, і в яких усі функції виходять із однієї базової (, що породжує) за допомогою її зсувів і розтягань по осі часу. Вейвлет-перетворення розглядають аналізовані тимчасові функції в термінах коливань, локалізованих за часом і частоті. Як правило, вейвлет-перетворення (WT) підрозділяють на дискретне (DWT) і неперервне (CWT).

DWT використовується для перетворень і кодування сигналів, CWT - для аналізу сигналів. Вейвлет-перетворення в цей час приймаються на озброєння для величезного числа різноманітних застосувань, нерідко заміняючи звичайне перетворення Фур'є. Це спостерігається в багатьох областях, включаючи молекулярну динаміку, квантову механіку, астрофізику, геофізику, оптику, обробку зображень, загальну обробку сигналів.

Вейвлетний аналіз являє собою особливий тип лінійного перетворення сигналів і відображуваних цими сигналами фізичних даних про процеси й фізичних властивостях природних середовищ і об'єктів. Базис власних функцій, по якому проводиться вейвлетне розкладання сигналів, має багатьма специфічними властивостями й можливостями. Вейвлетні функції базису дозволяють сконцентрувати увагу на тих або інших локальних особливостях аналізованих процесів, які не можуть бути виявлені за допомогою традиційних перетворень Фур'є й Лапласа.

Вейвлети мають вигляд коротких хвильових пакетів з нульовим інтегральним значенням, локалізованих по осі аргументів (незалежних змінних), інваріантних до зсуву й лінійних до операції масштабування (стиснення/розтягання). По локалізації в часовому і частотному представленні вейвлети займають проміжне положення між гармонійними (синусоїдальними) функціями, локалізованими по частоті, і функцією Дірака, локалізованої в часі.

Теорія вейвлетів не є фундаментальною фізичною теорією, але вона дає зручний і ефективний інструмент для розв'язання багатьох практичних задач. Основна область застосування вейвлетних перетворень – аналіз і обробка сигналів і функцій, нестационарних у часі або неоднорідних у просторі, коли результати аналізу повинні містити не тільки загальну частотну характеристику сигналу (розподіл енергії сигналу по частотних складових), але й відомості про певні локальні координати, на яких проявляють себе ті або інші групи частотних складових, або на яких відбуваються швидкі зміни частотних складових сигналу.

У порівнянні з розкладанням сигналів на ряди Фур'є, вейвлети здатні з набагато більш високою точністю представляти локальні особливості сигналів, аж до розривів 1-го роду (стрибків). На відміну від перетворень Фур'є, вейвлет-перетворення одномірних сигналів забезпечує двовимірну розгортку, при цьому частота і координата розглядаються як незалежні змінні, що дає можливість аналізу сигналів відразу у двох просторах.

Гармонійні базисні функції перетворення Фур'є гранично локалізовані в частотній області і не локалізовані в часовій. Їхньою протилежністю є імпульсні базисні функції типу імпульсів Кронекера, які гранично локалізовані в часовій області і "розмиті" по всьому частотному діапазону. Вейвлети по

локалізації в цих двох виставах можна розглядати як функції, що займають проміжне положення між гармонійними й імпульсними функціями. Вони повинні бути локалізованими як у часовій, так і в частотній області представлення. Однак при проектуванні таких функцій ми неминуче зіштовхнемося з принципом невизначеності, що зв'язують ефективні значення тривалості функцій і ширини їх спектра. Чим точніше ми будемо здійснювати локалізацію часового положення функції, тем ширше буде ставати її спектр, і навпаки.

Вейвлетний базис простору $L^2(\mathbb{R}), \mathbb{R}(-\infty, \infty)$, доцільно конструювати з фінітних функцій, що належать цьому ж простору, які повинні прагнути до нуля на нескінченності. Чим швидше ці функції прагнуть до нуля, тем зручніше використовувати їх як базис перетворення при аналізі реальних сигналів.

Припустимо, що такою функцією є ψ – функція $\psi(t)$, рівна нулю за межами деякого кінцевого інтервалу й нульове середнє значення по інтервалу завдання. Останнє необхідно для завдання певної локалізації спектра вейвлета в частотній області. На основі цієї функції сконструюємо базис у просторі $L^2(\mathbb{R})$ за допомогою масштабних перетворень незалежної змінної.

Функція зміни частотної незалежної змінної в спектральному представленні сигналів відображається в часовому представленні розтяганням/стисненням сигналу. Для вейвлетного базису це можна виконати функцією типу $\psi(t) \rightarrow \psi(\alpha^m t), \alpha = \text{const}, m = 0, 1, \dots, M$. тобто шляхом лінійної операції розтягання/стиснення функції, що забезпечує самоподоба, на різних масштабах представлення. Однак скінченність (локальність) функції $\psi(t)$ на часовій осі вимагає додаткової незалежної змінної послідовних переносів (зсувів) функції $\psi(t)$ уздовж осі (параметра локалізації), типу $\psi(t) \rightarrow \psi(t+k)$, для перекриття всієї числової осі простору $\mathbb{R}(-\infty, \infty)$. З урахуванням обох умов одночасно структура базисної функції може бути прийнята наступна:

$$\psi(t) \rightarrow \psi(\alpha^m t + k). \quad (1.31)$$

Для спрощення подальших викладень значення змінних m і k приймемо цілочисельними. При приведенні функції (1.1) до одиничної норми, одержуємо:

$$\psi_{mk}(t) \rightarrow \alpha^{m/2} \psi(\alpha^m t + k). \quad (1.32)$$

Якщо для сімейства функцій $\psi_{mk}(t)$ виконується умова ортогональності:

$$\langle \psi_{nk}(t), \psi_m(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{nk}(t) \psi_m^*(t) dt = \delta_{nk} \delta_{km}, \quad (1.33)$$

то сімейство $\psi_{mk}(t)$ може використовуватися в якості ортонормованого базису простору $L^2(\mathbb{R})$. Звідси випливає, що довільна функція цього простору може бути представлена у вигляді ряду (розкладання по базису $\psi_{mk}(t)$):

$$\left. \begin{aligned}
 s(t) &= \sum_{m,k=-\infty}^{\infty} S_{mk} \psi_{mk}(t), \\
 S_{mk} &= \langle s(t), \psi_{mk}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi_{mk}(t) dt.
 \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

Вейвлетний спектр, на відміну від перетворення Фур'є, є двовимірним і визначає двовимірну поверхню в просторі змінних m і k . При графічній виставі параметр розтягання/стиснення спектра m відкладається по осі абсцис, параметр локалізації k по осі ординат – осі незалежної змінної сигналу.

В основі вейвлет-перетворень, у загальному випадку, лежить використання двох неперервних, взаємозалежних і інтегровальних по незалежній змінній функцій:

- Вейвлет-функції $\psi(t)$ як ψ -функції часу з нульовим значенням інтеграла й частотним фур'є-образом $\psi(\omega)$. Цією функцією, яку звичайно й називають вейвлетом, виділяються деталі сигналу і його локальні особливості. У якості функцій, що аналізують вейвлети, звичайно вибираються функції, добре локалізовані й у часовій, і в частотній області;

- масштабуючої функції $\varphi(t)$ як часової скейлінг-функції ρ з одиничним значенням інтеграла, за допомогою якої виконується грубе наближення (апроксимація) сигналу.

Поняття масштабу ВП має аналогію з масштабом географічних карт. Більші значення масштабу відповідають глобальному уявленню сигналу, а низькі значення масштабу дозволяють розрізнити деталі. У термінах частоти низькі частоти відповідають глобальній інформації про сигнал (розподілена на всій його довжині), а високі частоти - детальної інформації й особливостям, які мають малу довжину, тобто масштаб вейвлета, як одиниця шкали частотно-тимчасової вистави сигналів, обернений до частоти.

Масштабування, як математична операція, розширює або стискає сигнал. Більші значення масштабів відповідають розширенням сигналу, а малі значення - стислим версіям. У визначенні вейвлета коефіцієнт масштабу α стоїть в знаменнику. Відповідно, $\alpha > 1$ розширює сигнал, $\alpha < 1$ стискає його.

Процедура перетворення стартує з масштабу $\alpha=1$ й триває при значеннях, що збільшуються, а, тобто аналіз починається з високих частот і проводиться у бік низьких частот. Перше значення 'a' відповідає найбільш стиснутому вейвлету. При збільшенні значення 'a' вейвлет розширюється. Вейвлет поміщається в початок сигналу ($t=1$), перемножується із сигналом, інтегрується на інтервалі свого завдання й нормалізується на $1/\sqrt{a}$. При заданні парних або непарних функцій вейвлетів результат обчислення $S(a, b)$ поміщається в точку ($a=1, b=0$) масштабно-часового спектра перетворення. Зсув b може розглядатися як час із моменту $t=0$, при цьому координатна вісь b , по суті, повторює часову вісь сигналу. Для повного включення в обробку всіх точок вхідного сигналу потрібне завдання початкових (і кінцевих) умов перетворення (певних значень вхідного сигналу при $t < 0$ й $t > t_{\max}$ на півширині вікна вейвлета).

Для обчислення наступного масштабного рядка значення a збільшується на деяке значення. При НПВ в аналітичній формі $\Delta b \rightarrow 0$ й $\Delta a \rightarrow 0$. При виконанні перетворення в комп'ютері обчислюється апроксимація зі збільшенням обох параметрів з певним кроком. Тим самим ми здійснюємо дискретизацію масштабно-часової площини. Початкове значення масштабного коефіцієнта може бути й менше 1. У принципі, для деталізації найвищих частот сигналу мінімальний розмір вікна вейвлета не повинен перевищувати період самої високочастотної гармоніки.

У принципі, при обробці даних на ПК може виконуватися дискретизована версія неперервного вейвлет-перетворення із завданням дискретних значень параметрів (a , b) вейвлетів з довільним кроком Δa і Δb , але вона вимагає великої кількості обчислень. Крім того, у результаті виходить надлишкова кількість коефіцієнтів, що набагато перевершує число відліків вихідного сигналу, яке не потрібно для реконструкції сигналів. Дискретне вейвлет-перетворення (ДВП) забезпечує досить інформації, як для аналізу сигналу, так і для його синтезу, будучи разом з тим ощадливим по числу операцій і по необхідній пам'яті. ДВП оперує з дискретними значеннями параметрів a й b , які задаються, як правило, у вигляді статечних функцій:

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0^{-m}, \\ b &= ka_0^{-m}, \\ a_0 &> 1, \\ m, k &\in 1, \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

де I – простір цілих чисел;
 m – параметр масштабу;
 k – параметр зсуву.

Базис простору $L^2(\mathbb{R})$ в дискретному представленні:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{mk}(t) &= |a_0|^{m/2} \psi(a_0^m t - k), \\ m, k &\in I, \\ \psi(t) &\in L^2(\mathbb{R}). \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

Вейвлет-коефіцієнти прямого перетворення:

$$C_{mk} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi_{mk}(t) dt. \quad (1.37)$$

У загальному випадку, значення ' a ' може бути довільним, але звичайно ухвалюється рівним 2, при цьому перетворення називається діадним вейвлет-перетворенням. Для діадного перетворення розроблений швидкий алгоритм обчислень, аналогічний швидкому перетворенню Фур'є, що визначило його широке використання при аналізі дискретних функцій і масивів цифрових даних.

Зворотне дискретне перетворення для неперервних сигналів при нормованому ортогональному вейвлетному базисі простору:

$$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{mk} \psi_{mk}(t). \quad (1.38)$$

Число практично використаних вейвлетів по масштабному коефіцієнту m задає рівень декомпозиції сигналу, при цьому за нульовий рівень ($m=0$) звичайно приймається рівень максимального часового розділення сигналу, тобто сам сигнал, а наступні рівні ($m<0$) утворюють спадаюче вейвлет-дерево. У програмному забезпеченні обчислень для виключення використання негативної нумерації по m знак 'мінус' звичайно переноситься безпосередньо в (1.38), тобто використовується наступне представлення базисних функцій:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{mk}(t) &= |a_0|^{-m/2} \psi(\alpha_0^{-m} t - k), \\ m, k &\in I, \\ \psi(t) &\in L^2(\mathbb{R}). \end{aligned} \right\}; \quad (1.39)$$

У принципі, при обробці даних на ПК може виконуватися дискретизована версія неперервного вейвлет-перетворення із завданням дискретних значень параметрів (a , b) вейвлетів з довільним кроком Δa і Δb , але вона вимагає великої кількості обчислень. Крім того, у результаті виходить надлишкова кількість коефіцієнтів, що набагато перевершує число відліків вихідного сигналу, яке не потрібно для реконструкції сигналів.

Переваги і недоліки вейвлетних перетворень:

- Вейвлетні перетворення мають практично всі переваги перетворень Фур'є;
- Вейвлетні бази можуть бути добре локалізованими як по частоті, так і за часом. При виділенні в сигналах добре локалізованих різномасштабних процесів можна розглядати тільки ті масштабні рівні розкладання, які становлять інтерес;
- Вейвлетні бази, на відміну від перетворення Фур'є, мають досить багато різноманітних базових функцій, властивості яких орієнтовані на розв'язок різних задач. Базисні вейвлети можуть мати й кінцеві, і нескінченні носії, реалізовані функціями різної гладкості;
- недоліком вейвлетних перетворень є їхня відносна складність [6].

1.2 Підвищення ефективності спектрального аналізу методом ESPRIT з використанням технології сурогатних даних

У багатьох випадках спектральний аналіз доводиться робити при низькому відношенні сигнал - шум і (або) маючи в розпорядженні короткі записи даних (в радіолокації, наприклад, в кожному відбитому імпульсі може міститися лише кілька відліків). Традиційні методи спектрального аналізу, засновані на алгоритмі швидкого перетворення Фур'є (ШПФ), характеризуються високою обчислювальною ефективністю. Однак має місце обмеження роздільної здатності величиною, зворотної часу спостереження, і ефект маскуванія спектральних ліній слабких сигналів бічними пелюстками спектральних ліній сильніших сигналів. Застосування сучасних методів спектрального аналізу в

певних умовах дозволяє подолати властиві традиційним методам недоліки і отримати досить високу роздільну здатність (вище релєївської межі) при порівняно короткої послідовності даних.

При оцінюванні частоти Доплера інтервал спостереження обмежений, тому що збільшення тривалості спостереження часто призводить до «розмазування» спектра сигналу внаслідок більш швидкої зміни частот Доплера в порівнянні з тривалістю спостереження. Також важливим є завдання «над роздільна здатність» по кутовій координаті - при оцінюванні кутових координат джерел випромінювання, які формують одночасно сигнали, несучі частоти яких однакові. При цьому має місце обмеження на розмір апертури антеною решітки.

Власноструктурні (ВС) методи використовують інформацію вимірюваних параметрів джерел сигналів, яка міститься у власних векторах (ВВ) і значеннях (ВЗ) ковариаційної матриці спостереження.

Стосовно до задачі оцінювання частот компонент гармонійного сигналу вони забезпечують кращими характеристиками роздільної здатності - вимірювання, ніж методи, засновані на ШПФ. Завдання роздільної здатності (оцінки числа) гармонійних компонент сигналу при цьому зазвичай вирішується перед застосуванням ВС методів за допомогою критеріїв АІС, MDL і інших методів.

ВС методи також називають методами, заснованими на використанні підпросторів Subspace-based methods), що обумовлено виконанням після розкладання ковариаційної матриці (КМ) спостережень за СЗ і СВ (eigenvalue decomposition- EVD) поділу СЗ і СВ на відповідні підпростори сигналів (ППС) і підпростори шуму (ППШ). Зазначений поділ проводиться на підставі оцінки числа джерел випромінювання (числа гармонійних компонент сигналу при оцінюванні частоти).

Завдання пошуку СЗ і СВ КМ спостережень виникає також в розкладанні Карунена - Лоева, аналізі головних компонент (principal component analysis- PCA), факторному аналізі, запропонованих в статистиці і набули широкого поширення в цифровій обробці сигналів.

У реальних для практики умовах низького відношення сигнал-шум (ВСШ) і (або) малого числа відліків даних ефективність спектрального аналізу (точність оцінювання, роздільна здатність) СС методами також може погіршуватися. Це явище відоме як пороговий ефект (threshold effect) і зустрічається в результаті появи аномальних оцінок (outliers) при оцінюванні частот гармонійних компонент сигналу (напрямок приходу (НП) сигналів). Наявність аномальних оцінок при спектральному аналізі СС методами часто пов'язують з ефектом перекачування (swar) підпросторів, коли виміряні дані краще апроксимуються деякими ВВ ППШ вибіркової КМ, ніж деякими ВВ ППС.

Зниження граничного ВСШ ВС методів при оцінюванні НП декількох сигналів, які спостерігаються на виходах антенної решітки (АР) в присутності шуму, на особливу увагу заслуговують роботи, які ґрунтуються на новому класі

технологій, об'єднаних загальним терміном «чисельний ресамплінг» (resampling). Найбільш відомими методами цієї технології є метод «складного ножа» (jackknife) і бутстреп (bootstrap). Ці підходи дозволяють формувати так звані «псевдовибірки» в разі, коли немає можливості повторно отримати справжні спостереження (збільшити обсяг вибірки). У додатках обробки сигналів також можливе здійснення ресамплінг ВВ КМ, застосування до одного ансамблю даних декількох методів спектрального аналізу, що відрізняються своїми характеристиками, додаванням псевдовипадкового шуму до вихідних даних і т.д.

Так стратегія спільного оцінювання (joint estimation strategy - JES) напрямків приходу декількох сигналів (комбінованої пеленгації) має на увазі використання різних методів (формування «банку» методів - bank) і їх застосування до ансамблю даних (пов'язаної з ним вибіркової коваріаційної матриці). В представлена псевдовипадкова стратегія спільного оцінювання НП (pseudorandom JES - PR-JES). При цьому виконується ресамплінг ВВ ППШ вибіркової КМ.

В реалізації стратегії спільного оцінювання з використанням влосноструктурних методів просторово-часового спектрального аналізу на основі адаптивних решітчастих фільтрів використовують варіант бутстрепа, в якому псевдовибірки формуються додаванням псевдовипадкового шуму до вихідних даних. При цьому дисперсія псевдошума змінюється відповідно до зміни дисперсії шуму вимірювання. Особливістю вищенаведених підходів є виконання цензурування оцінок спектральних компонент і використання додаткової апріорної інформації про можливість інтервалу їх значень.

Розвитком методів «чисельного ресамплінгу» є технологія сурогатних даних (Surrogate data), яка використовується при нелінійному аналізі часових рядів. Серед алгоритмів формування сурогатних даних, зазвичай виділяти алгоритми, які зберігають статистичні властивості спостереження, і які зберігають статистичні і динамічні властивості входу сигналу. До алгоритмів першої групи включають алгоритм з випадковим змішуванням вхідного масиву даних (random shuffle algorithm), алгоритм з рандомізацією фази Фур'є-спектра спостереження (random phase (RP) algorithm), алгоритм з підбором амплітуди після перетворення Фур'є (amplitude adjusted Fourier transform algorithm); в алгоритмі другої групи - атс-алгоритм (attractor trajectory surrogates) - алгоритм формування сурогатних даних, що зберігає траєкторію аттрактора джерело сигналу (джерело даних), алгоритм формування псевдоперіодичних сурогатних даних (pseudo-periodic surrogate).

Алгоритм з рандомізацією фази Фур'є-спектру спостереження використовується для адаптивної корекції попередньої обробки які спостерігаються на фоні шуму сигналів при їх спектральному аналізі методом Root-MUSIC.

На сьогоднішній день метод ESPRIT (оцінювання параметрів сигналу за допомогою обертальної інваріантності) має найменшу обчислювальною складність серед ВС методів. Відомо, що при оцінюванні НП сигналів даний

метод поступається в точності методу Root-MUSIC (MUSIC), в той час як при оцінюванні частот гармонійних компонент сигналу точність оцінок частот, одержуваних цим методом, трохи вище, ніж у MUSIC. Але при низьких значеннях ССШ і (або) малому числі вибірок ефективність даного методу також характеризується наявністю граничного ефекту.

Послідовність результатів спостереження $y(n)$, що складається з узятих через рівні проміжки часу відліків V гармонійних коливань $x_v(n) = \alpha_v \sin(\omega_v n + \varphi_v)$ і білого гаусівського шуму $e(n)$ описується виразом:

$$y(n) = \sum_{v=1}^V x_v(n) + e(n) = s(n) + e(n), \quad (1.40)$$

де α_v - амплітуда, В;

ω_v - частота, рад/с;

φ_v - фаза v -й на гармонійної компоненти сигналу, рад.

Частота f_v пов'язана з частотою аналогового сигналу (сигнала до дискретизації) f_{va} співвідношенням

$$f_v = \frac{f_{va}}{f_d},$$

де f_d - частота дискретизації сигналу.

Використовуючи метод спектрального аналізу ESPRIT по спостереженню $\{y(n)\}_{n=0}^{N-1}$ необхідно дати оцінки значень частот $\omega_v = 1, \dots, V$. Оцінку числа гармонійних компонент сигналу зазвичай отримують перед застосуванням методу спектрального аналізу одним з відомих методів - Акаїке (AIC), Шварца-Ріссанена (MDL) та ін..

Вважаємо, що φ_v - випадкова незалежна величина, рівномірно розподілена на інтервалі $[0, 2\pi)$, $\omega_v \in [0, \pi)$, а шум $e(n)$ має нульове математичне очікування і дисперсію σ^2 . Для забезпечення рангу КМ спостереження рівного або перевищуючого число гармонійних компонент сигналу спостереження розбивається на сегменти, які перекриваються. Вектор вхідних даних довжиною N представимо у вигляді K векторів розміром $m > 2V$, при $K = N - m + 1$ та $n = 1, \dots, K$ виду:

$$y(n) = [y(n) \dots y(n+m-1)]^T. \quad (1.41)$$

У разі оцінювання НП в АР як сегментів зазвичай виступають знімки даних (при обробці сигналів в АР є додатковий ступінь свободи, відсутній при обробці тимчасових рядів).

Вираз (1.22) можна представити в матричному вигляді:

$$y(n) = Vx(n) + e(n) = g(n) + e(n), \quad (1.42)$$

де $x(n)$ - вектор розмірністю $2V \times 1$;

V - матриця розмірністю $m \times 2V$.

$$x(n) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \sin(\omega_1 n + \phi_1) \\ \alpha_1 \cos(\omega_1 n + \phi_1) \\ \vdots \\ \alpha_v \sin(\omega_v n + \phi_v) \\ \alpha_v \cos(\omega_v n + \phi_v) \end{bmatrix}. \quad (1.43)$$

матриця, в якій

$$B = [A(\omega_1) \dots A(\omega_v)]$$

матриці складаються

$$A(\omega_v) = [a_c(\omega_v) \ a_s(\omega_v)]$$

з двох векторів

$$\left. \begin{aligned} a_c(\omega_v) &= [1 \cos(\omega_v) \dots \cos((m-1)\omega_v)]^T, \\ a_s(\omega_v) &= [0 \sin(\omega_v) \dots \sin((m-1)\omega_v)]^T, \end{aligned} \right\}$$

а вектор шуму

$$e(n) = [e(n) \dots e(n+m-1)]^T.$$

Відзначимо, що при обробці сигналів в антенних решітках матриця B - матриця амплітудно-фазового розподілу (АФР) джерел випромінювання.

З врахуванням (1.41) КМ $y(n)$ має вигляд:

$$R = E[y(n)y^T(n)] = BSB^T + \sigma^2 I \quad (1.44)$$

де E - символ математична очікування;

S - КМ сигналу.

$$S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha_1^2 I_{2 \times 2} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_v^2 I_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad (1.45)$$

де $I_{2 \times 2}$ - матриця розмір 2×2 .

Вибір $m > 2V$ визначає застосування ВС методів. Крім того, значення m впливає на якість оцінки км і точність характеристики ВС методів. Оцінка коваріаційної матриці розміром $m \times m$ має наступний вигляд:

$$\hat{R} = \frac{1}{K} \sum_{n=1}^K y(n)y^T(n) = \frac{1}{K} YY^T, \quad (1.46)$$

де Y - матриця даних.

В разі з дійсними синусоїдами $\hat{V} = 2V$. Проте, відомі варіанти методів АІС, MDL, які враховують «дійсність» моделі (на відміну від випадку комплексного представлення даних). В цьому випадку $\hat{V} = V$ і це необхідно врахувати при поділі ВВ і ВЗ на відповідні ППС і ППШ (наприклад, до СЗ ППС будуть відноситись ВЗ $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_{2\hat{V}}$).

Для матриці \hat{R} правильне наступне розкладання на ВВ і ВЗ при $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_{\hat{V}}$ та при $\gamma_{\hat{V}+1} = \gamma_{\hat{V}+2} = \dots = \gamma_m$:

$$\hat{R} = \sum_{q=1}^m \hat{\gamma}_q \hat{u}_q \hat{u}_q^T = [\hat{U}_s \hat{U}_n] \begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_s & 0 \\ 0 & \hat{\Lambda}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_s^T \\ \hat{U}_n^T \end{bmatrix}, \quad (1.47)$$

де $\hat{\gamma}_q$ - ВЗ ППС;

$\hat{\gamma}_m$ - ППШ;

\hat{U}_s - матриця ВВ ППШ розмірністю $m \times V$;

$\hat{\Lambda}_s$ - діагональна матриця, яка містить \hat{V} сигнальних (найбільших) СЗ;

$\hat{\Lambda}_n$ - діагональна матриця, розмірністю $m \times \hat{V}$ СЗ ППШ;

\hat{V} - оцінка числа гармонійних компонент сигналу.

З огляду на те, що вихідний метод ESPRIT розроблений для комплексного представлення сигналу, покажемо особливості реалізації методу для розглянутого випадку дійсного гармонійного сигналу. При оцінюванні НП сигналів метод ESPRIT передбачає наявність двох ідентичних підрешіток, зміщених щодо один одного на відому відстань Δ . Підрешітки можуть бути як незалежними (окремими АР), так і формуватися з однієї АР. За аналогією тимчасової ряд може бути розглянутий як що складається з двох сегментів. Особливість оцінювання частот гармонійних компонент сигналу - вихідний часовий ряд зазвичай розбивається на сегменти розміром m на етапи формування КМ (аналогом чого є процедура просторового згладжування при обробці сигналів в АР). Еквівалентом числа A можна вважати величину m . Для реалізації методу ESPRIT вважаємо, що сегмент може бути представлений у вигляді підсегментів (термін підсегмент використаний за аналогією з терміном підрешітках (subarray)). При максимальному перекритті підсегменти перший підсегмент містить перші $m-1$ компоненти сегмента, а другий - останні $m-1$ компоненти. Математично формування підсегментів (відбір елементів сегмента) описують за допомогою матриць вибору 1.29, які «відбирають» певні компоненти сегмента (перші $m-1$ і останні $m-1$):

$$\left. \begin{aligned} J_{1\tilde{m}} &= [I_{\tilde{m} \times \tilde{m}} \ O_{\tilde{m} \times 1}], \\ J_{2\tilde{m}} &= [O_{\tilde{m} \times 1} \ I_{\tilde{m} \times \tilde{m}}], \end{aligned} \right\} \quad (1.48)$$

де $O_{\tilde{m} \times 1}$ - нульова матриця розміром $\tilde{m} \times 1$;

$\tilde{m} = m - 1$ - число елементів в підсегменті.

Першому і другому підсегменту можна поставити у відповідність матриці:

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= J_{1\tilde{m}} B, \\ B_2 &= J_{2\tilde{m}} B. \end{aligned} \right\} \quad (1.49)$$

При обробці в АР це матриці АФР джерел для першої і другої підрешітки. Інформація про частоти гармонійних компонент сигналу може бути отримана з діагональною матриці Φ , яка визначається матричного рівняння:

$$J_{1\tilde{m}} B \Phi = J_{2\tilde{m}} B. \quad (1.50)$$

Для даної моделі даних матриця буде мати наступний вигляд:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \cos(\omega_1) & \sin(\omega_1) & & & 0 \\ -\sin(\omega_1) & \cos(\omega_1) & & & \\ & & \ddots & \cos(\omega_v) & \sin(\omega_v) \\ & & & -\sin(\omega_v) & \cos(\omega_v) \\ 0 & & & & \end{bmatrix}. \quad (1.51)$$

При великому відношенні сигнал - шум і (або) числі навчальних вибірок справедливо рівність:

$$U_s = BT, \quad (1.52)$$

де U_s - матриця сигнальних СВ КМ;

T - деяка несингулярная матриця.

На його підставі визначають співвідношення:

$$\left. \begin{aligned} U_{s1} &= B_1 T, \\ U_{s2} &= B_2 T = B_1 \Phi T. \end{aligned} \right\} \quad (1.53)$$

в яких матриці $U_{s1} = J_{1\bar{m}} U_s$, $U_{s2} = J_{2\bar{m}} U_s$. Підстановка співвідношення $B_1 = U_{s1} T^{-1}$ в 1.34 дає:

$$U_{s2} = U_{s1} T^{-1} \Phi T = U_{s1} \Xi. \quad (1.54)$$

Оцінки частот гармонійних компонент сигналу методом ESPRIT отримують з ВЗ матриці Ξ - рішення матричного рівняння $U_{s2} = U_{s1} \Xi$. Матриця Ξ - речова матриця, тому її ВЗ з'являються в комплексно-сполучених парах (на одну гармонійну компоненту сигналу доводиться два комплексно-сполучених ВЗ) наступного вигляду: $\cos(\omega_v) + j\sin(\omega_v)$ і $\cos(\omega_v) - j\sin(\omega_v)$. Тому, для кожної гармонічної компоненти сигналу спочатку здійснюється відбір одного ВЗ з пари комплексно-сполучених ВЗ. Потім оцінка частоти гармонічної компоненти сигналу може бути отримана обчисленням фазового кута для комплексного ВЗ і ділення на 2π . Для вирішення рівняння $U_{s2} = U_{s1} \Xi$ використовують метод найменших квадратів (НК-least squares), узагальнених НК (TLS total least squares) та інші. Використання того чи іншого методу обумовлює назву методу спектрального аналізу - LS-ESPRIT, TLS-ESPRIT і т.д. [3].

1.3 Адаптивна корекція Методу ESPRIT з використанням технологія сурогатного даних

Розглянемо особливості корекції методу ESPRIT (використовуваної їм КМ) за допомогою алгоритму формування сурогатних даних з рандомізацією фаз компонент Фур'є-спектра спостереження. У цьому алгоритмі сурогатні дані формуються виконанням таких операцій: 1) дискретного перетворення Фур'є (ДПФ) вихідних даних; 2) рандомізація фаз $\{\varphi_k\}_{k=0}^{N-1}$ отриманого масиву шляхом заміни їх значень на рівномірно розподілені в інтервалі $[0, 2\pi]$ випадкові величини; 3) зворотне ДПФ. При цьому, щоб зворотне перетворення Фур'є було

дійсним, необхідно провести симетрування фаз. Індексу k відповідає фізична $\omega_k = k2\pi f_0 / N$ або нормована частота $\bar{\omega}_k = k2\pi / N$.

Рандомізацію фаз Фур'є-спектра спостереження запропоновано виконувати таким чином:

$$\varphi_{randcontr}(\omega_k) = \varphi(\omega_k) + \xi\varphi_{rand}(\omega_k), \quad (1.55)$$

де ω_k - частоти аналізу (біни) ДПФ, рад/с;

$\varphi(\omega_k)$ - фази Фур'є-спектра спостереження, рад;

$\varphi_{rand}(\omega_k)$ - випадкові числа з рівномірним законом розподілу для діапазону $\in [0, 2\pi]$, рад;

ξ - параметр, що змінює ефективність рандомізації фаз Фур'є-спектра спостереження для діапазону $\in [0, 1]$.

ξ змінюється пропорційно до ВСШ. При збільшенні ВСШ, коли точність оцінюваних параметрів ВС методами і так висока, необхідно зменшувати ефективність рандомізації. Для формування сурогатних даних визначається дисперсія шуму:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{(M-V)} \text{trace}(\hat{\Lambda}_n), \quad (1.56)$$

де $\text{trace}(\hat{\Lambda}_n)$ - слід матриці, і приймається $\xi = \hat{\sigma}$.

Якщо потужності гармонійних компонент невідомі - необхідно їх обчислювати, а потім визначати ξ . По ансамблю із N_s векторів сурогатних даних формується ансамбль відповідних їм КМ і оцінюється усереднена КМ:

$$\hat{R}_{sur} = (1 / N_s) \sum_{i=1}^{N_s} \hat{R}_{sur,i}, \quad (1.57)$$

що містить необхідну інформацію для спектрального аналізу з використанням методу ESPRIT. Перевага пропонованого підходу полягає в меншому обсязі обчислень (обчислюється лише один метод, а не набір методів), відсутності потреби попередніх оцінок частот сигналів [3].

1.4 Спектральний аналіз методом ESPRIT при попередньої обробки даних методом SSA

Поліпшення характеристик як ВС методів, так і інших методів СА, можливо при апроксимації МД або КМ відповідним матрицям пониженого рангу, які записують через головний ВВ (ВВ ППС). В основі такої апроксимації лежить теорема Еккарта-Янга-Мирського. За рахунок усунення основної долі внеска шуму в МД або КМ збільшується співвідношення сигнал-шум (ССШ). Крім того, додаткові переваги можна отримати при використанні структурних властивостей МД (КМ).

Розвитком цих підходів є метод SSA (singular spectrum analysis-аналіз сингулярного спектру матриці). До відомих підходів зі зниженню шуму спостереження можна віднести метод узагальнений найменших квадратів (total

least squares – TLS) і структурованих найменших квадратів (structured total least squares – STLS), вейвлети та інші.

Попередня обробка вхідної послідовності за допомогою методу SSA дозволяє підвищити точність оцінювання частот гармонійних компонент сигналу власно структурними (BC) методами в умовах характерного для практики малого числа вибірок. Матриця даних (в методі SSA звана траєкторна) ганкелевого типу формується в результаті розбиття вхідної послідовності на сегменти які перекриваються. Розбиття на сегменти також характерно, наприклад, для періодограмних методів спектрального аналізу.

При обробці сигналів в антенних решітках (АР) для декореляції сигналів (яка можлива при багатопробності поширення радіохвиль і т.д.) виконується розбиття АР на сегменти (підрешітки).

Послідовність результатів спостереження $y(n)$, що складається з узятих через рівні проміжки часу відліків V гармонійних компонент

$$x_v(n) = \alpha_v \sin(\omega_v n + \varphi_v)$$

і білого гаусового шуму $e(n)$, описується формулою (1.22). По спостереженню $\{y(n)\}_{n=0}^{N-1}$ необхідно дати оцінки значень частот $\omega_v = 1, \dots, V$, використовуючи методи спектрального аналізу.

Виконання тимчасового СА ускладнюється в випадку наявності однієї вибірки тимчасового ряду. Вихідний масив даних (повна вибірка) розбивається на сегменти, які перекриваються, і отримують деяке число вибірок (підвибірок) меншого розміру. Сегментація спостережуваної послідовності (її розбиття на неперекриваючі (покриваючі) сегменти) в спектральному аналізі вперше була використана для зменшення дисперсії оцінки спектральної щільності потужності сигналу в періодограмах Бартлетта, Уелча і Даньел. Згладжування вибіркового спектра в цих методах засновано на створенні і усередненні псевдоансамбля періодограмм, які обчислюються незалежно для кожного з сегментів.

У просторовому СА розбиття АР на підрешітки крім методів просторового згладжування використовується в методі ESPRIT. Сегментація може призводити до зменшення роздільної здатності СА, тому розмір сегмента (підрешітки) вибирається з компромісних міркувань. Спорідненим завданням є задача вибору порядку моделі в авторегресійному методі. Послідовність вхідних даних з N відліків представимо у вигляді $K=N-m+1$ векторів розміром $m > 2V$ виду при $n = 1, \dots, K$:

$$y(n) = [y(n) \dots y(n+m-1)]^T. \quad (1.58)$$

Якщо такі вектора використовувати як стовпці (рядки) матриці даних, то вона буде мати Ганкелеву (теплицеву) структуру. Ганкелева матриця даних має вигляд:

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \cdots & y(N-m+1) \\ y(2) & y(3) & \cdots & y(N-m+2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y(m) & y(m+1) & \cdots & y(N) \end{bmatrix}. \quad (1.59)$$

У нелінійній динаміці розбиття скалярного тимчасового ряду на векторні тимчасові ряди (сегменти) називають вкладенням в фазовий простір. На підставі МД (1.40) отримують оцінку КМ спостереження:

$$\hat{R} = \frac{1}{K} \sum_{n=1}^K y(n) y^T(n) = \frac{1}{K} Y Y^T. \quad (1.60)$$

За результатами SVD МД або розкладання по СЗ і СВ КМ спостереження реалізуються СС методи СА.

Для реалізації методу SSA, у вітчизняній літературі відомого як метод "Гусениця" (caterpillar), виконуються такі кроки:

- за вибіркою $\{y(n)\}_{n=0}^{N-1}$ формується ганкелева МД Y ;
- виконується пошук СІВ і СІЗ МД Y (або СЗ і СВ КМ);
- групуються СІЗ і відповідні їм СІВ, що спрощено зводиться до відбору \hat{V} найбільших СІЗ відповідних їм СІВ;
- апроксимується (формується відфільтрована від шуму спостереження) МД

$$Y_{\text{анр.}} = \sum_{q=1}^{\hat{V}} \hat{\mu}_q \hat{u}_q v_q^T; \quad (1.61)$$

- формується відфільтрована вибірка тимчасового ряду $u_{\text{фільт.}}(n)$ шляхом усереднення елементів матриці $Y_{\text{анр.}}$ (ганкелізації), що знаходяться на її кроссдіагоналях [4].

1.5 Метод цифрового спектрального аналізу вузькосмугових сигналів

Слід зазначити, що до класу вузькосмугових сигналів відносяться радіосигнали на базі амплітудної, балансної та односмугової модуляції, а також групові сигнали систем зв'язку з частотним розділенням каналів. Для вузькосмугових сигналів, спектр яких розміщено у частотному діапазоні $f_1 \dots f_2$ справедливий вираз:

$$\left. \begin{array}{l} \square \frac{f}{f_0} \ll 1, \\ f = \frac{f_1 + f_2}{2}, \\ \square f = f_2 - f_1, \end{array} \right\}, \quad (1.62)$$

де f_0 – центральна частота вузькосмугового сигналу, Гц;

□ f – смуга частот, яку займає досліджуваний сигнал, Гц.

У реальному масштабі часу кінцевий результат спектрального аналізу T_{FFT} має бути отриманий за час, що не перевищує тривалість T_R оброблюваної реалізації вузькосмугового сигналу. Тобто, для усієї сукупності, що містить m визначених спектральних складових сигналу $T_{FFT} < T_R$. Якщо умова виконується, то можна здійснювати спектральний аналіз вузькосмугових сигналів у реальному масштабі часу. При фіксованій швидкодії обчислювального пристрою спектроаналізатора значення T_{FFT} визначається числом операцій, необхідних для реалізації алгоритмів цифрового спектрального аналізу сигналів.

Спектр сигналу, що знаходиться на базі ДПФ з ваговим обробленням дорівнює:

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\omega(n) \exp\left(-\frac{2\pi nk}{N}\right), \quad (1.63)$$

де $x(n)$ – відліки сигналу у часовій області, с;

$\omega(n)$ – вагова функція;

k – номер відліку у частотній області.

Для реалізації ДПФ з використанням алгоритмів ШПФ обсяг вибірки $N = 2^l$. При цифровому спектральному аналізі вузькосмугових сигналів необхідно знаходити спектральні складові:

$$Y = [Y_a, Y_{a+q}, Y_{a+2q}, \dots, Y_{a+(m-1)q}], \quad (1.64)$$

де a – номер першої спектральної складової;

q – дискретний інтервал між двома сусідніми складовими ДПФ, Гц.

На першому етапі оброблення сформований вхідний масив даних переноситься по осі частот на величину a . Для цього здійснюється множення відліків вхідного сигналу на відповідні відліки дискретної експоненти $\exp\left(-\frac{2\pi nk}{N}\right)$, тобто:

$$x_a(n) = x(n) \exp\left(-\frac{2\pi an}{N}\right). \quad (1.65)$$

Наступним етапом оброблення є створення масиву даних, що формується з елементів, отриманих за виразом:

$$x_{aq}(n) = x_a(n) + x_a\left(n + \frac{N}{q}\right) + x_a\left(n + 2\frac{N}{q}\right) + \dots + x_a\left(n + (m-1)\frac{N}{q}\right). \quad (1.66)$$

Результати розрахунків згідно з (1.66) можна записати у вигляді двовимірного масиву, що містить $\frac{N}{mq}$ стовпців і рядків. У подальшому, стовпці цього масиву обробляються з використанням алгоритму ШПФ за основою m .

$$X(n) = \sum_{n=0}^{(m-1)\frac{N}{q}} x_{aq}(n) \exp\left(-j\frac{2\pi kn}{(m-1)\frac{N}{q}}\right). \quad (1.67)$$

На базі отриманої послідовності можна знайти спектр вузькосмугового сигналу, що зважений віконною функцією:

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{mq}-1} \omega_c(n) X(n) \exp(-j \frac{2\pi kn}{N}). \quad (1.68)$$

Як вагову функцію пропонується використовувати вікно Ханна:

$$\omega_c(n) = 0.5 - 0.5 \cos(\frac{2\pi n}{N-1}). \quad (1.69)$$

Вибір цієї функції зумовлений простотою її реалізації. Вона потребує для формування відліків лише операції множення на степені числа 2 і водночас забезпечує рівень паразитних складових сигналу — 31,5 дБ.

Критерієм ефективності запропонованого методу, який зручно оцінювати за числом операцій множення, є продуктивність. Узагальненням цього критерію є коефіцієнт продуктивності, який демонструє вигравш у кількості необхідних «довгих» операцій множення у разі застосування методу багатоступового оброблення вибірок сигналу для знаходження його частотних складових відносно методу безпосереднього визначення спектра на базі алгоритмів ШПФ:

$$G_s = \frac{C_{FFT}}{C_{DSA}}, \quad (1.70)$$

де C_{FFT} — кількість «довгих» операцій множення в безпосередньому аналізі спектра сигналу на базі алгоритмів ШПФ;

C_{DSA} — кількість операцій множення в разі застосування запропонованого методу.

Оцінимо обчислювальну складність методів цифрового спектрального аналізу за числом «довгих» операцій множення. Для реалізації запропонованого методу спектрального аналізу вузькосмугових сигналів максимально необхідне число операцій множення дорівнює:

$$C_{DSA} = \frac{N}{2q} \log_2 m + \frac{2N}{mq}. \quad (1.71)$$

Спектральний аналіз вузькосмугових сигналів на базі безпосереднього виконання ШПФ вимагає $2N \log_2 N$ операцій множення. Окрім того, алгоритму ШПФ та реалізації запропонованого методу обов'язково передують операції віконного зважування та формування масиву вхідних даних, яка виконується з використанням $3N-1$ множень [5]. Тоді коефіцієнт продуктивності запропонованого методу дорівнюватиме:

$$G = \frac{q \log_2 N}{0.25 \log_2 m + \frac{1}{m}}. \quad (1.72)$$

1.6 Аналіз похибок при цифрових методах спектрального аналізу

Інформація, яку дістали на основі обробки вибірки про ознаку генеральної сукупності, завжди міститиме певні похибки, оскільки вибірка становить лише незначну частину від неї ($n < N$), тобто обсяг вибірки значно менший від обсягу генеральної сукупності.

Тому слід організувати вибірку так, щоб ця інформація була найбільш повною (вибірка має бути репрезентативною) і забезпечувала з найбільшим ступенем довіри про параметри генеральної сукупності або закон розподілу її ознаки.

Параметри генеральної сукупності: $M(x) = \{ \bar{X}_G, D_G, \sigma_G, M_0, Me, r_{xy} \}$ є величинами сталими, але їх числове значення невідоме. Ці параметри оцінюються параметрами вибірки: $\{ x_B, D_B, \sigma_B, M_0^*, Me^*, r_{xy} \}$, які дістають при обробці вибірки. Вони є величинами непередбачуваними тобто випадковими.

Тут через θ позначено оцінювальний параметр генеральної сукупності, а через θ^* - його статистичну оцінку, яку називають ще статистикою. При цьому $\theta = \text{const}$, а θ^* - випадкова величина, що має певний закон розподілу ймовірностей. Зауважимо що до реалізації вибірки кожному її варіанту розглядають як випадкову величину, що має закон розподілу ймовірностей ознаки генеральної сукупності з відповідними числовими характеристиками:

$$\left. \begin{aligned} M(x_i) &= \bar{X}_G = M(x), \\ D_G(x_i) &= D_G, \\ \sigma(x_i) &= \sigma_G. \end{aligned} \right\}$$

Статистична оцінка θ^* яка визначається одним числом, точкою, називається точковою. Беручи до уваги, що θ^* є випадковою величиною, точкова статистична оцінка може бути зміщеною і незміщеною: коли математичне сподівання цієї оцінки точно дорівнює оцінювальному параметру θ , а саме:

$$M(\theta^*) = \theta, \quad (1.73)$$

то θ^* називається незміщеною; в противному разі, тобто коли:

$$M(\theta^*) \neq \theta \quad (1.74)$$

точкова статистична оцінка θ^* називається зміщеною відносно параметра генеральної сукупності θ

$$\theta^* - \theta = \delta, \quad (1.75)$$

називається зміщенням статистичної оцінки θ^* .

Оцінювальний параметр може мати кілька точкових незміщених статистичних оцінок. Наприклад, нехай $\theta = M(X)$, яка має дві незміщені точкові статистичні оцінки θ_1^* і θ_2^* . Тоді щільності ймовірностей для θ_1^* і θ_2^* матимуть такий вигляд (рисунок 1.1):

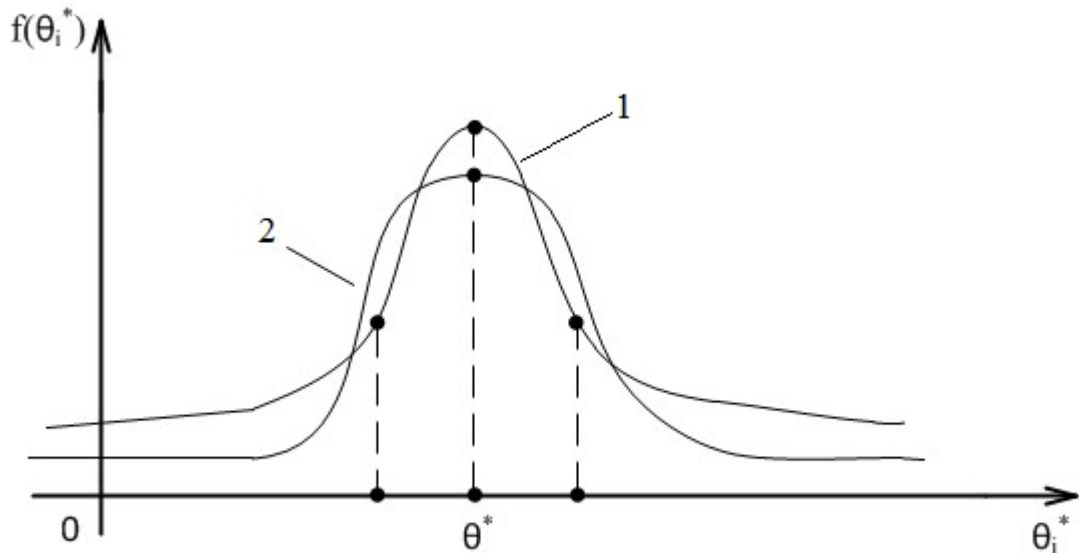


Рисунок 1.1 - Графіків щільностей оцінок:
1 – залежність $f(\theta_1^*)$; 2 - залежність $f(\theta_2^*)$

Із графіків щільностей бачимо, що оцінка θ_1^* порівняно з оцінкою θ_2^* має ту перевагу, що в малому околі параметра θ , $f(\theta_1^*) > f(\theta_2^*)$. Звідси випливає, що оцінка θ_1^* частіше набуватиме значення в цьому околі, ніж оцінка θ_2^* .

Але на «хвостах» розподілів маємо іншу картину: більші відхилення від θ будуть спостерігатися для статистичної оцінки θ_1^* частіше, ніж для θ_2^* . Тому, порівнюючи дисперсії статистичних оцінок θ_1^* і θ_2^* як міру розсіювання, бачимо, що θ_2^* має меншу дисперсію, ніж оцінка θ_1^* .

Точкова статистична оцінка називається ефективною, коли при заданому обсязі вибірки вона має мінімальну дисперсію. Отже, оцінка θ_2^* буде незміщеною й ефективною. Точкова статистична оцінка називається ґрунтовною, якщо у разі необмеженого збільшення обсягу вибірки 0^* наближається до оцінювального параметра θ , а саме:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\theta^* - \theta| < \delta) = 1. \quad (1.76)$$

Існують три методи визначення точкових статистичних оцінок для параметрів генеральної сукупності.

Метод аналогій. Цей метод базується на тому, що для параметрів генеральної сукупності вибирають такі самі параметри вибірки, тобто для оцінки $\bar{X}_r = M(x), D_r$ вибирають аналогічні статистики \bar{x}_B, D_B .

Метод найменших квадратів. Згідно з цим методом статистичні оцінки визначаються з умови мінімізації суми квадратів відхилень варіант вибірки від статистичної оцінки θ^* .

Отже, використовуючи метод найменших квадратів, можна наприклад, визначити статистичну оцінку для $\bar{X}_r = M(x)$. Для цього скористаємося функцією $u = \sum_{i=0}^n (x_i - \theta^*) n_i$. Використовуючи умову екстремуму, дістанемо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \theta^*} &= -2 \sum_{i=0}^n (x_i - \theta^*) n_i = 0, \\ \sum_{i=0}^n x_i n_i - \sum_{i=0}^n x_i \theta^* &= 0, \\ \theta^* &= \frac{\sum_{i=0}^n x_i n_i}{n} = \bar{x}_B. \end{aligned} \right\} \quad (1.77)$$

Звідси для $\theta = \bar{X}_r$ точковою статистичною оцінкою буде $\theta^* = \bar{x}_B$ - вибіркова середня.

Метод максимальної правдоподібності. Цей метод посідає центральне місце в теорії статистичного оцінювання параметрів θ . На нього свого часу звертав увагу К. Гаусс, а розробив його Р. Фішер. Цей метод розглянемо докладніше. Нехай ознака генеральної сукупності X визначається лише одним параметром θ і має щільність ймовірностей $f(x; \theta)$. У разі реалізації вибірки з варіантами x_1, x_2, \dots, x_n щільність ймовірностей вибірки буде такою:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta^*) = f(x_1, \theta^*) f(x_2, \theta^*) \times \dots \times f(x_n, \theta^*). \quad (1.78)$$

При цьому варіанти розглядаються як незалежні випадкові величини, котрі мають один і той самий закон розподілу, що й ознака генеральної сукупності X . Суть цього методу полягає в тому, що, фіксуючи значення варіант x_1, x_2, \dots, x_n визначають таке значення параметра θ^* , при якому функція (1.58) максимізується. Вона називається функцією максимальної правдоподібності позначається так: $L = L(\theta^*)$.

Наприклад, коли ознака генеральної сукупності X має нормальний закон розподілу, то функція максимальної правдоподібності набере такого вигляду:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_1^*, \theta_2^*) = \frac{1}{(2\pi\theta_2^*)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{\sum_{i=0}^n (x_i - \theta_1^*)^2}{2\theta_2^*}\right). \quad (1.79)$$

При цьому за статистичні оцінки θ_1^* і θ_2^* вибирають ті їх значення, за яких задана вибірка буде найімовірнішою, тобто функція (1.79) досягає максимуму.

На практиці зручно від функції (1.79) перейти до її логарифма, а саме:

$$\begin{aligned} \ln f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_1^*, \theta_2^*) &= L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_1^*, \theta_2^*) = \\ &= -\frac{n}{2}(\ln \pi + \ln \theta_2^*) - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \theta_1^*)^2}{2\theta_2^*}. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Згідно з необхідною умовою екстремуму для цієї функції дістанемо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_1^*} &= -\frac{1}{\theta_2^*} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta_1^*) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_2^*} &= -\frac{n}{2\theta_2^*} + \frac{n}{2(\theta_2^*)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta_1^*)^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.81)$$

З першого рівняння системи (1.77) дістанемо:

$$\theta_1^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}_B. \quad (1.82)$$

Отже, для $\bar{X}_G = M(x)$ точковою статистичною оцінкою є \bar{x}_B для $D_G - D_B$ [10].

Вимірювання частоти супроводжується такими складовими похибок вимірювання:

- похибка квантування;
- похибка дискретизації;
- динамічна похибка.

Похибка квантування. Якщо генератор квантувальних імпульсів синхронізований з початком вимірюваного інтервалу часу, то похибка квантування Δt виникає в кінці вимірюваного інтервалу як різниця між результатом вимірювання $N_x T_0$ і вимірюваним інтервалом T_x : $\Delta t = N_x T_0 - T_x$. Оскільки вимірювана величина до вимірювання невідома, то кінець інтервалу T_x може з однаковою ймовірністю припасти на будь-який момент між сусідніми квантувальними імпульсами, тому похибку квантування Δt вважають випадковою і розподіленою за рівномірним несиметричним законом з граничним значенням T_0 . Математичне сподівання похибки квантування дорівнює $T_0/2$, а середнє квадратичне відхилення $\sigma = T_0/\sqrt{12}$. Синхронізувати генератор квантувальних імпульсів з початком вимірюваного інтервалу T_x часто не вдається, тому похибка квантування виникає на початку Δt_1 і в кінці Δt_2 вимірюваного інтервалу часу T_x . Похибки Δt_1 і Δt_2 розподілені за рівномірними несиметричними законами з граничним значенням T_0 . Сумарна похибка квантування $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ розподілена за трикутним законом (законом Сімпсона) з граничним значенням T_0 . Математичне сподівання сумарної похибки квантування дорівнює нулю, а середнє квадратичне відхилення $\sigma = T_0/\sqrt{6}$. Відносна гранична похибка квантування під час вимірювання частоти за визначений інтервал часу T_N дорівнює:

$$\delta = \frac{T_x}{T_N} = \frac{T_x}{NT_0} = \frac{T_x}{NT_0 f_x}. \quad (1.83)$$

Отже, відносна гранична похибка квантування збільшується із зменшенням частоти. Для розширення частотного діапазону частотомірів у зону нижніх частот вдаються до таких заходів:

- на нижніх частотах похибку квантування можна зменшити, збільшуючи добуток NT_0 , але це веде до збільшення тривалості вимірювання, тобто до зменшення швидкодії;
- застосувати множення вимірюваної частоти, в результаті чого вимірювана частота переноситься у зону високих частот;
- перетворити $T_x \rightarrow U_x$, а далі відбувається визначення числового значення $1/U_x$;
- виміряти відносне відхилення вимірюваної частоти за допомогою цифрового відсоткового частотоміра;
- застосувати спеціальні пристрої для вимірювання похибок дискретності Δt_1 і Δt_2 ;
- вимірювати період T_x з наступним перерахунком періоду в частоту f_x .

Таблиця 1.1 - Числові характеристики похибки квантування

Варіант квантування (округлення)	Характеристики похибки квантування Δk		
	Максимальне значення	Математичне сподівання	Середнє квадратичне відхилення
До верхнього рівня квантування	ΔX_k	$\frac{\Delta X_k}{2}$	$\sigma_k = \frac{\Delta X_k}{2\sqrt{3}}$
До нижнього рівня квантування	$-\Delta X_k$	$-\frac{\Delta X_k}{2}$	
До найближчого рівня квантування	$\pm \frac{\Delta X_k}{2}$	0	

З приведених у таблиці 1.1 оцінок похибки квантування виходить, що відносно точності має перевагу округлення результату вимірювання до найближчого рівня, оскільки в цьому випадку максимальне значення похибки квантування зменшується в два рази і її математичне сподівання дорівнює нулю, тобто немає систематичної складової похибки квантування. Водночас два інших варіанти округлення обумовлюють більш просту апаратну реалізацію ЦВП і тому знаходять переважне застосування.

Похибка дискретизації. Дискретизований сигнал $x_d(t)$ у вигляді n миттєвих значень x_q сигналу $x(t)$. Тільки за цією скінченною множиною миттєвих значень x_q сигналу $x(t)$ визначають результат вимірювання, а останні значення сигналу не враховуються. При дискретизації змінного сигналу $x(t)$ протягом часу T частина інформації про нього втрачається, що призводить до методичної похибки вимірювання; її називають похибкою дискретизації. Очевидно, вона буде тим меншою, чим більше число миттєвих значень сигналу x_q бере участь в одержанні результату вимірювання. Інтервал часу Δt_q між двома суміжними моментами дискретизації t_q і t_{q+1} називають інтервалом або кроком

дискретизації. Він може бути постійним $\Delta t = \text{const}$ або змінним. У ЦВП звичайно використовують рівномірну дискретизацію як більш просту для апаратної реалізації, в цьому разі Δt називають також періодом дискретизації.

Динамічна похибка. Аналого-цифрове перетворення інформаційних сигналів неминує супроводжується динамічними похибками, до яких можна віднести також і похибки, викликані зміщенням точок дискретизації миттєвих значень, за ефектом своєї прояви близькі до динамічним. Часто динамічні похибки поділяються на дві групи: похибки першого та другого роду. Перші похибки обумовлені інерційністю вхідних ланцюгів перетворювача, яка призводить до запізнювання сигналу в точках дискретизації, другі - зміною вхідного сигналу за час перетворення. Зсув точок дискретизації миттєвих значень викликається різними причинами: як методичними, так і інструментальними і може мати як систематичний, так і випадковий характер. Необхідність оцінки похибок, що вносяться різного виду перешкодами, присутніми у вхідних сигналах, а також внутрішніми шумами, що виникають в тракці цифрового приладу, останнім часом стала досить актуальною, особливо в зв'язку з впровадженням в практику прецизійних-приладів і підвищенням рівня шумів [8].

Відповідно до викладеного оцінка МП повинна прийматися по довільній монотонно зростаючої функції відносини правдоподібності, відтвореної на множині всіх можливих значень вимірюваного параметра λ . В якості такої функції, коли вимірюваний параметр неенергетичний (основний випадок), приймають: кореляційний інтеграл для сигналу $s(t, \lambda)$ без несуттєвих параметрів:

$$Y(\lambda) = \int_0^T u(t)s(t, \lambda) dt, \quad (1.84)$$

і модульне значення комплексного кореляційного інтеграла для сигналу $s(t, \lambda)$ з невідомою фазою або для сигналу $\varepsilon s(t, \lambda, \varphi)$ з невідомими фазою φ і інтенсивністю ε :

$$Z(\lambda) = \left| \int_0^T u(t)s(t, \lambda) dt \right|. \quad (1.85)$$

Структурна схема вимірювача складається з двох елементів (рисунок 1.2): системи обробки (СО), формує зі спостереження статистику та обчислювального пристрою (ОБ).

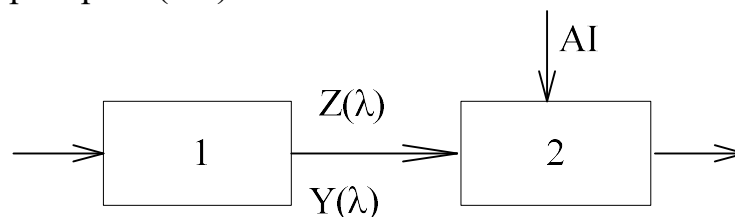


Рисунок 1.2 - Структурна схема вимірювача:
1 – система обробки; 2 - обчислювальний пристрій

У разі, коли вимірюваний параметр λ енергетичний, тобто коли енергія сигналу залежить від величини параметра $E = E(\lambda)$, в функції правдоподібності необхідно враховувати додатковий доданок, що містить $E(\lambda)$. Однак функції системи обробки СО при цьому не змінюються. Априорно відома залежність $E(\lambda)$ вводиться в пам'ять ОБ і враховується при формуванні оцінки.

Система здійснює паралельний огляд простору можливих значень вимірюваного параметра $\lambda \in \Lambda$ вона забезпечує мінімальний час входження в зв'язок і можливість одночасного вимірювання параметрів декількох сигналів, які перебувають в різних елементах роздільності. Разом з тим оглядова система в багатоканальному варіанті виходить складною, особливо, якщо вимірюється кілька параметрів.

Стежачі вимірювачі призначені для вимірювання повільно і безперервно змінюються параметрів одного сигналу через порівняно невеликі інтервали часу. У цих вимірниках інформація, отримана на попередніх циклах вимірювань дозволяє передбачити приблизне значення параметра на поточному інтервалі і тим самим істотно звузити априорну область можливих значень вимірюваного параметра на даному циклі вимірювань. За рахунок цього значно спрощується система обробки спостережень. Практично побудова стежачь вимірників засновано на припущенні, що на кожному порівняно невеликому інтервалі спостережень $t \in (0, T)$ відомо деяке значення вимірюваного параметра λ_0 зване апоріорним, близьке до його істинного значення λ_c .

При спостереженні:

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= s(t, f, \varphi) + n(t), \\ s(t, f, \varphi) &= \operatorname{Re} \{ \dot{s}(t, f) e^{j\varphi} \}. \end{aligned} \right\} \quad (1.86)$$

система обробки оглядового вимірювача повинна відтворити на своєму виході:

$$Z(f) = \left| \int_T u(t) \dot{s}(t, f) dt \right|. \quad (1.87)$$

Оглядовий вимірювач частоти реалізується у вигляді багатоканальної схеми. Кожен, наприклад i -й канал обробки в фільтровому варіанті включає в себе налаштований на частоту f_i оптимальний фільтр з імпульсною характеристикою:

$$h_{0i}(t) s(t_0 - t, f),$$

і детектор огинаючої. Вихід детектора в момент $t=t_0$ відтворює дискретний $Z(f_i)$ оптимального виходу $Z(f)$. Здвиг між сусідніми каналами по частоті $f_i - f_{i-1}$ не повинен перевищувати $f_{\text{фн}}$ ширину функції невизначеності по частоті $|\psi(f)|$. Обчислювальний пристрій в якості приблизного рішення вибирає координату дискрети, що має найбільше значення:

$$\hat{f}_k = \arg \max Z(f_i).$$

Оцінку можна зробити точніше. В цьому випадку обчислювальний пристрій інтерплітує криву $Z(f)$ за кількома дискретний поблизу максимальної дискрети і приймає рішення з безперервного виходу $Z(f)$. Теоретично гранична точність вимірювання частоти сигналу при невідомої початковій фазі:

$$\sigma_{f \min}^2 = \frac{1}{\mu(2\pi)^2 T_{ск}^2}, \quad (1.88)$$

залежить тільки від відношення сигнал/шум μ і від середньоквадратичної тривалості сигналу $T_{ск}$. Вибір початку відліку часу (розташування вимірювального інтервалу на осі t) значення не мають.

При спільному вимірі початкової фази і частоти теоретично гранична точність оцінки фази:

$$\sigma_{\varphi \min}^2 = \frac{\langle t^2 \rangle}{\mu(\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2)}, \quad (1.89)$$

в загальному випадку менше, ніж при вимірюванні фази при відомій частоті. Погіршення точності тим більше, чим більше $\langle t \rangle$. Точність залежить від розташування на вимірювальному інтервалі точки $t=0$, до якої віднесена початкова фаза [2].

2 ТЕХНОЛОГІЯ ОЦІНЮВАННЯ ЧАСТОТИ ГАРМОНІЙНОГО СИГНАЛУ

2.1 Оцінка параметрів радіотехнічних сигналів

На інтервалі спостереження $t \in T (t \in (0, T))$ на вхід системи надходить коливання (спостереження) при $\alpha \in A, \lambda \in \Lambda = (\lambda_{\min}, \lambda_{\max})$:

$$u(t) = s(t, \lambda, \alpha) + n(t), \quad (2.1)$$

де λ – інформаційний параметр, що підлягає вимірюванню (оцінці);
 α – несуттєвий параметр.

Параметри λ і α можуть бути скалярними або векторними. У деяких моделях завдання несуттєвий параметр сигналу може бути відсутнім, тобто бути апіорно відомим. Особливість полягає в тому, що в даній моделі параметри λ і α є постійними (незмінними на інтервалі спостереження $t \in T$).

Задані: детермінована функція $s(t, \lambda, \alpha)$ змінних t, λ, α (або $s(t, \lambda)$). Області зміни змінних $t \in T, \lambda \in \Lambda, \alpha \in A$. Несуттєвий параметр при його наявності покладається випадковою величиною з відомою щільністю ймовірностей $p(\alpha)$. Статистика перешкоди $n(t)$. Як і в попередньому розгляді, там, де не обмовляється протилежно, перешкода моделюється центрованим гаусовим процесом з рівномірним обмеженням або необмеженим спектром (основна гауссовская перешкода). Наведені дані в принципі визначають умовну щільність ймовірності $p(u | \lambda)$ спостереження u при даному конкретному значенні λ (функцію правдоподібності).

Система зі спостереження $\{u(t), t \in T\}$, яке видається вектором відліків $u = (u_0, u_1, \dots, u_m)$, проводить вимірювання (оцінку) інформаційного параметра λ тобто приймає рішення $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}(u)$ про те, що інформаційний параметр λ дорівнює $\hat{\lambda}$. Тут і далі ми одним і тим же символом $\hat{\lambda}$ позначаємо оцінку і функцію, що визначає перетворення u в $\hat{\lambda}$ (вирішальну функцію). Відзначимо також, що, відповідно до встановленої термінологією одним і тим же терміном "оцінка" називають як процес вимірювання параметра, так і отримане в процесі вимірювань значення параметра.

Завдання моделює широкий клас ситуацій і по суті є основною в вимірювальних системах (радіолокація, радіонавігація), а також в дискретних і цифрових системах зв'язку, в яких на кожному елементарному часовому інтервалі передається квантований або неквантований відлік $\{\lambda_i = \lambda_i(t_i), i = 1, 2, \dots\}$ повідомлення $\lambda(t)$. Крім того, для будь-якого сигналу, якщо інтервал спостереження T досить малий, змінами параметра на цьому інтервалі можна знехтувати і прийняти $\lambda = \text{const}(t)$.

Потрібно визначити: 1. Оптимальний алгоритм перетворення спостереження u в оцінку $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}(u)$, тобто оптимальну вирішальну функцію $\hat{\lambda}(u)$ або оптимальну структуру системи обробки спостереження $\{u(t), t \in T\}$, що

забезпечує отримання найкращої оцінки. 2. Якісні показники оптимальної системи.

Існують два підходи до вирішення завдання оцінювання параметра, звані статистичними і детермінованими. При статистичному підході вимірюваний параметр вважаються випадковими величинами λ з апіорно відомою щільністю ймовірностей $p(\lambda)$. При детерміністському підході параметр λ вважається детермінованою невідомою на приймальній стороні величиною. Прихильники детерміновані підходу посилаються на неправомірність ототожнення невідомості з випадковістю. Наводять приклади вимірювання будь-яких фізичних констант, відстані між двома точками на земній поверхні при геодезичних вимірах і ін. Детерміністський підхід виник раніше і називається класичним. В даний час частіше використовується загальна статистична теорія рішень та оцінювання, заснована на статистичному підході.

Введемо позначення для помилки вимірювання скалярного параметра λ : $\varepsilon = \hat{\lambda} - \lambda$. Якість вимірювання тим краще, чим менше помилка. Однак помилка є випадковою величиною, тому що являє собою функцію $\hat{\lambda}(u)$ спостереження $\{u(t), t \in T\}$, що містить випадковий процес $n(t)$. Якісним показником оцінки може служити будь-яка статистична характеристика помилки. Основним якісним показником системи оцінювання приймемо умовний (по λ) середній квадрат помилки ε при даному фіксованому (істинному) значення вимірюваного параметра:

$$\delta^2(\lambda) = \int_U [\hat{\lambda}(u - \lambda)]^2 p(u | \lambda) du = \langle (\hat{\lambda} - \lambda)^2 \rangle_u. \quad (2.2)$$

Показник якості (1) можна використовувати як для детерміністській, так і для статистичної моделі вимірюваного параметра λ , так як при його визначенні використовується тільки функція правдоподібності $p(u | \lambda)$, апіорно задана умовами завдання. Завдання і використання апіорної ПВ $p(\lambda)$ не потрібно.

Для статистичної моделі λ можна визначити також безумовний середній квадрат помилки:

$$\delta^2 = \int_U \delta^2(\lambda) p(\lambda) d\lambda = \langle (\hat{\lambda} - \lambda)^2 | \lambda \rangle_{u,\lambda}. \quad (2.3)$$

Однак, як буде показано на конкретних прикладах, в більшості випадків величина $\delta^2(\lambda)$ від λ не залежить $\delta^2(\lambda) = \text{const}(\lambda)$ і усереднення (2) втрачає сенс, так як при цьому $\delta^2 = \delta^2(\lambda)$.

Умовне (по λ) зміщення оцінки (математичне очікування помилки):

$$m_\varepsilon(\lambda) = \int_U [\hat{\lambda}(u - \lambda)] p(u | \lambda) du = \langle (\hat{\lambda} - \lambda) \rangle_u = \langle (\hat{\lambda}(u) | \lambda) \rangle_u - \lambda. \quad (2.4)$$

Оцінка називається не зміщеною, якщо її математичне очікування (умовне по λ) одно істинного значення вимірюваного параметра λ для всіх можливих його значень $\lambda \in \Lambda$:

$$\langle (\hat{\lambda}(u) | \lambda) \rangle = \int_U \hat{\lambda}(u) p(u | \lambda) du = \lambda. \quad (2.5)$$

Зсув в цьому випадку $m_\varepsilon(\lambda) = 0$ при $\lambda \in \Lambda$. Умовна незміщеність означає також безумовну незміщеність, так як при $m_\varepsilon(\lambda) = 0$:

$$m_\varepsilon = \int_{\Lambda} m_\varepsilon(\lambda) p(\lambda) d\lambda = 0. \quad (2.6)$$

Умовна (по λ) дисперсія оцінки (дисперсія помилки):

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2(\lambda) &= \left\langle [\hat{\lambda} - \lambda - m_\varepsilon(\lambda)]^2 \right\rangle = \delta^2(\lambda) - m_\varepsilon(\lambda), \\ \delta^2(\lambda) &= \sigma^2(\lambda) + m_\varepsilon(\lambda). \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Якщо оцінка незміщена ($m_\varepsilon(\lambda) = 0$), то:

$$\delta^2(\lambda) = \sigma^2(\lambda). \quad (2.8)$$

Оцінка називається спроможною, якщо при збільшенні енергії сигналу ($E \rightarrow \infty$) оцінка за ймовірністю сходиться до істинного значення λ :

$$\lim_{E \rightarrow \infty} P(|\hat{\lambda} - \lambda| > \beta) \rightarrow 0, \quad (2.9)$$

де β - довільна мала позитивна величина.

Аналогічні визначення використовуються для оцінки $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n)$ векторного параметра $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ з областями зміни складових $\lambda_i \in \Lambda_i$ і $\lambda \in \Lambda$. Вводиться позначення для помилки вимірювання по кожній складовій вектора вимірюваного параметра $\varepsilon_i = \hat{\lambda}_i - \lambda_i, i = 1, \dots, n; (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \varepsilon$. Умовні (по λ) зміщення оцінки і $\hat{\lambda}$ (математичне очікування помилки ε_i), середній квадрат помилки і дисперсія оцінки (помилки) по i -тій складовій вектора $\hat{\lambda}(i = 1, \dots, n)$.

$$m_\varepsilon(\lambda) = \left\langle (\hat{\lambda}_i - \lambda_i) \mid \lambda \right\rangle = \int_U (\hat{\lambda}_i - \lambda_i) p(u \mid \lambda) du, \quad (2.10)$$

$$\delta^2(\lambda) = \left\langle (\hat{\lambda}_i - \lambda_i)^2 \mid \lambda \right\rangle = \int_U (\hat{\lambda}_i - \lambda_i)^2 p(u \mid \lambda) du, \quad (2.11)$$

$$\sigma^2(\lambda) = \left\langle (\hat{\lambda}_i - \lambda_i - m_\varepsilon)^2 \mid \lambda \right\rangle = \left\langle (\varepsilon_i - m_\varepsilon)^2 \mid \lambda \right\rangle. \quad (2.12)$$

Статистична теорія рішень на більш широкій основі об'єднує ці завдання і разом з тим має численні інші додатки в оптиці, в технічній дефектоскопії, томографії, медичній діагностиці та в усіх інших випадках, коли потрібно оптимізація вилучення та обробки інформації, міститься в спостереженні. Під наглядом розуміються результати експерименту, що приймаються коливання в РТС або інші отримані дані, містять корисну інформацію.

Покладемо спостереження u містить інформацію про деяку ситуації $S(\lambda), \lambda \in \Lambda$. $S(\lambda)$ - це сигнал $s(t, \lambda)$, а елемент λ - його інформаційний параметр, який може бути скалярним або векторним, дискретним $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ або безперервним $\lambda \in (\lambda_{\min}, \dots, \lambda_{\max})$. У дискретному випадку - це розрізнення сигналів $\{s_i(t) = s(t, \lambda_i), i = 1, \dots, n\}$ в безперервному - оцінка параметра $\lambda \in (\lambda_{\min}, \dots, \lambda_{\max})$ сигнал $s(t, \lambda_i)$. Невизначеність, обумовлена наявністю перешкод і спотворень, складається в тому, що невідомо, яке значення з множини Λ має величина λ в спостереженні u . Математично ця

невизначеність виражається умовної ПВ $p(u|\lambda)$ яка задається апіорними даними завдання. Система зі спостереження u приймає рішення $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}(u)$ про те, чому дорівнює величина λ . Внаслідок випадковості u і свідомо неможливо знайти безпомилкове рішення $\hat{\lambda}(u)$ для обґрунтованого вибору показника якості рішення $\hat{\lambda}(u)$ використовується статистичний підхід, згідно з яким параметр λ є випадковою змінною з відомою апіорною щільністю ймовірностей $p(\lambda)$, а для дискретного параметра – ймовірністю $P(\lambda_i) = P_i$. Далі на основі оцінки умов функціонування конкретної системи встановлюється значимість всіх можливих пар подій $(\hat{\lambda}, \lambda)$: приймається рішення про те, що має місце ситуація $S(\lambda)$, коли насправді істинна $S(\hat{\lambda})$, і вводиться функція втрат $r[\hat{\lambda}(u), \lambda]$. Функція втрат приписує втрати $r[\hat{\lambda}(u), \lambda]$, які мають місце, або штраф, який слід сплатити, при ухваленні рішення $\hat{\lambda}$, коли істинно λ . Внаслідок того, що спостереження u , рішення $\hat{\lambda}(u)$ і подія λ випадкові, також випадковою є функція втрат $r[\hat{\lambda}(u), \lambda]$. Відповідно якість рішення $\hat{\lambda}(u)$ визначається не самою функцією втрат, а її статистичною характеристикою - математичним очікуванням ρ . Усереднення ведеться за всіма можливими $\hat{\lambda}(u) \in \Lambda$ (або $u \in U$) $\lambda \in \Lambda$ і називається середнім (Байєсовим) ризиком:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \int \int_{U \Lambda} r[\hat{\lambda}, \lambda] p(\lambda) p(\hat{\lambda} | \lambda) d\hat{\lambda} d\lambda, \\ \rho &= \int \int_{U \Lambda} r[\hat{\lambda}(u), \lambda] p(\lambda) p(u | \lambda) du d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Тотожність (2.11) і (2.12) обумовлена функціональним зв'язком $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}(u)$ - рішення $\hat{\lambda}$ з наглядом u і відповідно рівністю диференціалів щільності ймовірності $p_\lambda(\hat{\lambda} | \lambda) d\hat{\lambda} = p_u(u | \lambda) du$. В (2.11) і (2.12) одним і тим же символом r позначені різні ПВ p_λ і p_u . Оптимальним рішенням $\lambda_{opt}(u)$ є таке, яке мінімізує середній ризик ρ . $\lambda_{opt}(u)$, $\rho = \min$.

Загальна теорія статистичних рішень дає інженеру та іншим фахівцям загальний метод, що дозволяє найкращим чином синтезувати будь-які пристрої, призначені для обробки інформації, коли за спостереженнями потрібно приймати будь-які рішення.

У дискретному випадку, коли $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. При розрізненні сигналів зазвичай використовується проста функція втрат, що приписує однакові втрати, рівні нулю, всім правильним рішенням і однакові ненульові втрати всім неправильним рішенням. Оптимальна система розрізнення при використанні простої функції втрат вибирає рішення, яке мінімізує середню ймовірність помилкових рішень. У разі необхідності можна визначити функцію втрат, що враховує відносну важливість різних помилок. У системах оцінки параметрів сигналу основної є квадратична функція втрат:

$$r(\hat{\lambda} - \lambda) = (\hat{\lambda} - \lambda)^2. \quad (2.14)$$

При якій середній ризик дорівнює (безумовному) середнього квадрату помилки δ^2 :

$$\rho = \left\langle (\hat{\lambda}_i - \lambda_i)^2 \lambda \right\rangle = \int \int_U [\hat{\lambda}(u) - \lambda]^2 p(\lambda) p(u | \lambda) du d\lambda = \delta^2. \quad (2.15)$$

Оптимальна система мінімізує δ^2 .

При векторному параметрі $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ квадратична функція втрат має вигляд:

$$r(\lambda, \lambda) = \sum_{i=1}^n C_i (\hat{\lambda}_i - \lambda_i)^2, \quad (2.16)$$

де C_i – коефіцієнти, що враховують значимість помилок ε_i для різних складових вектора λ .

Середній ризик виходить рівним:

$$\rho = \sum_{i=1}^n C_i \delta_i^2, \quad \delta_i^2 = \left\langle (\hat{\lambda}_i - \lambda_i)^2 \right\rangle_{u, \lambda}. \quad (2.17)$$

Використовується також проста функція втрат, яка приймає значення 0 при $|\hat{\lambda} - \lambda| \leq \Delta$ і 1 для оцінок, що лежать поза цим інтервалом.

$$\left. \begin{aligned} r(\hat{\lambda}, \lambda) &= 1, |\hat{\lambda} - \lambda| > \Delta = 1 - \prod \left[\frac{\hat{\lambda} - \lambda}{2\Delta} \right], \\ r(\hat{\lambda}, \lambda) &= 0, |\hat{\lambda} - \lambda| \leq \Delta = 1 - \prod \left[\frac{\hat{\lambda} - \lambda}{2\Delta} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Інакше кажучи, втрати, пов'язані з помилками, переважаючими малу величину Δ , покладаються однаково небажаними і їм приписуються однакові втрати, рівні 1. Рішення з малими помилками $|\hat{\lambda} - \lambda| < \Delta$ вважаються правильними і їм приписуються нульові втрати. Іноді просту функцію втрат представляють у вигляді: $r(\hat{\lambda}, \lambda) = C - \delta(\hat{\lambda} - \lambda)$ що призводить до того ж алгоритму оптимального оцінювання, що і (2.18), де довільна постійна $C > 0$.

Визначення оптимального алгоритму оцінювання.

Уявімо середній ризик у вигляді:

$$\rho = \int_U p(u) du \int_A r[\hat{\lambda}(u), \lambda] p(\lambda | u) d\lambda. \quad (2.19)$$

Умовою, що визначає оптимальну оцінку λ_{opt} , $\rho = \min$. Згідно (2.18) це означає, що оптимальна система при кожній конкретній реалізації u повинна вибирати оцінку $\hat{\lambda}$ так, щоб мінімізувати внутрішній інтеграл в (1), званий умовним (по u) ризиком $\rho(u)$:

$$\lambda_{opt} : \rho(u) = \int_A r[\hat{\lambda}(u), \lambda] p(\lambda | u) d\lambda = \min. \quad (2.20)$$

Застосуємо це правило до системи, якість якої визначається квадратичною функцією втрат:

$$\lambda_{onm} : \rho(u) = \int_{\Lambda} (\hat{\lambda} - \lambda)^2 p(\lambda | u) d\lambda = \min . \quad (2.21)$$

Диференціюючи інтеграл (2.21) по $\hat{\lambda}$ і прирівнюючи результат нулю, отримуємо алгоритм оцінювання, оптимальний за критерієм мінімуму середнього квадрата помилки (переконуємося, що друга похідна $\frac{\partial}{\partial \hat{\lambda}^2} \rho(u) > 0$):

$$\lambda_{onm} = \hat{\lambda}_{onm}(u) = \int_{\Lambda} \lambda p(\lambda | u) d\lambda = \lambda_{cp} . \quad (2.22)$$

Оптимальна оцінка (2.22) являє собою математичне очікування ("центр тяжкості ") апостеріорного розподілу $p(\lambda | u)$ і називається апостеріорного середнім λ_{cp} .

У разі векторного інформаційного параметра $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ використання квадратичної функції втрат призводить до необхідності для визначення $\lambda_{onm} = (\lambda_{1onm}, \dots, \lambda_{nonm})$ мінімізувати:

$$\rho(u) = \int_{\Lambda} \left\{ \sum_{i=1}^n C_i (\hat{\lambda}_i - \lambda_i)^2 \right\} p(\lambda | u) d\lambda = \min . \quad (2.23)$$

Для цього потрібно вирішити систему з n рівнянь:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \hat{\lambda}_1} \rho(u) = 2C_1 \int_{\Lambda} (\hat{\lambda}_1 - \lambda_1) p(\lambda | u) d\lambda = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial \hat{\lambda}_n} \rho(u) = 2C_n \int_{\Lambda} (\hat{\lambda}_n - \lambda_n) p(\lambda | u) d\lambda = 0. \end{array} \right\} \quad (2.24)$$

яка призводить до системи n незалежних оцінок при $i = 1, \dots, n$:

$$\hat{\lambda}_{ionm} = \int_{\Lambda} \lambda_i p(\lambda | u) d\lambda = \int_{\Lambda} \lambda_i p(\lambda_i | u) d\lambda_i, \quad (2.25)$$

або

$$\lambda_{onm} = \int_{\Lambda} \lambda p(\lambda | u) d\lambda = \lambda_{cp} . \quad (2.26)$$

Таким чином, оптимальна оцінка λ_{onm} векторного параметра при використанні квадратичної функції втрат незалежно від вибору вагових коефіцієнтів C_1, \dots, C_n так же є математичне очікування апостеріорного розподілу $p(\lambda | u)$. При цьому оцінка $\lambda_{onm} = (\lambda_{1onm}, \dots, \lambda_{nonm})$ виходить однієї і тієї ж як при спільному визначенні всіх складових вектора оптимальних оцінок (2.26) $\hat{\lambda}_{onm}$ по апостеріорного розподілу $p(\lambda | u)$, так і при незалежній оцінці (2.25) кожної складової $\hat{\lambda}_{ionm}$ вектора по математичному очікуванню індивідуальних розподілів $\lambda_i p(\lambda_i | u)$, одержуваних розподілених $p(\lambda | u)$ на решті складових $\lambda_k, k = 1, \dots, n; k \neq i$.

При детерміністському підході якість оцінки визначається середнім квадратом помилки при даному фіксованому, заздалегідь відомому значенні

вимірюваного параметра λ . Пряма оптимізація якісного показника за оцінкою $\hat{\lambda}$, використана при статистичному підході, дає природний, але даремний результат: найкращою оцінкою є λ - обумовлене (відоме) значення параметра. Тому визначення оптимального алгоритму оцінювання при детерміністському підході потрібно буде обговорити окремо.

При використанні простої функції втрат умова оптимізації рішення шляхом вибору $\hat{\lambda}$ таким, що $\rho(u) = \min$ або $1 - \rho(u) = \max$, дає:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\lambda}_{opt} &= \int_{|\lambda_{opt} - \lambda| > \Lambda} p(\lambda | u) d\lambda = \min, \\ \int_{|\lambda_{opt} - \lambda| \leq \Lambda} p(\lambda | u) d\lambda &= \max. \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Другий інтеграл має найбільшу величину коли в якості оптимальної оцінки вибирається аргумент точки абсолютного максимуму (моди) λ_m апостеріорної щільності ймовірності $p(\lambda | u)$ [2].

2.2 Оцінка частоти методом максимальної правдоподібності

Метод максимальної правдоподібності в математичній статистиці - це метод оцінювання невідомого параметра шляхом максимізації функції правдоподібності.

Нехай маємо гаусовий випадковий вектор Y , випадкова незалежна вибірки якого $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$. Тоді функцією правдоподібності вибірки y за умови $y_i = S(t_i, a_1, a_2, \dots, a_k) + n(t_i)$ називають функцію L , що залежить від аргументів (параметрів сигналу $S(t)$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)^T$), яка визначається рівністю:

$$L(a_1, a_2, \dots, a_k, y_1, y_2, \dots, y_n) = P_y(y_1 | a) P_y(y_2 | a) \dots P_y(y_n | a). \quad (2.28)$$

Основні властивості функції правдоподібності:

– правило частина рівності має сенс значення закону розподілу вибірки при випадкових значеннях аргументів $\xi_1 = y_1, \xi_2 = y_2, \dots, \xi_n = y_n$. Отже, функція правдоподібності L також випадкова величина при будь-яких значеннях аргументів $a = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$;

– всі значення функції правдоподібності $L \geq 0$.

Оцінка максимальної правдоподібності параметра $a = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ може бути обчислена за формулою:

$$\hat{a}_{МП} = \hat{a}_{МП}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \arg \max L(a_1, a_2, \dots, a_k, y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (2.29)$$

Таким чином оцінка максимальної правдоподібності - це така оцінка, яка максимізує функцію правдоподібності при фіксованій реалізації вибірки.

Часто замість функції правдоподібності L використовують логарифмічну функцію правдоподібності $l = \ln L$. Якщо функція правдоподібності диференційована, то необхідна умова екстремуму - рівність нулю її градієнта:

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial a_i} = 0. \quad (2.30)$$

Рішення завдання за допомогою МП буде таким при $i = 1, 2, 3, \dots, k$:

- складається функція правдоподібності;
- обчислюється логарифм функції правдоподібності;
- оцінки параметрів виходять в результаті рішення системи рівнянь виду

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial a_i} = 0;$$

- перевіряється умова максимуму функції правдоподібності;

При спостереженні при $t \in (0, T)$:

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= s(t, w) + n(t), \\ s(t, w) &= A \cos(\omega t + \phi). \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

де $s(t, w)$ - корисний сигнал, В.

Передбачається, що амплітуда A - постійна величина, ϕ - початкова фаза - випадкова величина з законом рівномірного розподілу з $[0, 2\pi]$ і частота w - випадкова величина. $n(t)$ - білий гаусовий шум з рівномірним спектром $\Omega_n(f) = N_0 / 2$.

Функція правдоподібності дорівнює:

$$L(w) = P_u(u | w) = \int_0^{2\pi} C \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [u(t) - s(t, \omega)]^2 dt \right\} \frac{d\phi}{2\pi} = k I_0 \left(\frac{2A}{N_0} M \right) \quad (2.32)$$

Складові виразу (2.56) мають вигляд:

$$k = C \exp \left(-\frac{1}{N_0} \int_0^T u^2(t) dt \right) \times \exp \left(-\frac{A^2 T}{2N_0} \right), \quad (2.33)$$

$$M = \left| \int_0^T u(t) \exp(-j\omega t) dt \right|, \quad (2.34)$$

$$I_0(x) = \int_0^{2\pi} \exp[x \cos(\phi - \phi_0)] \frac{d\phi}{2\pi}, \quad (2.35)$$

де $I_0(x)$ - Функція називається модифікованою функцією Бесселя нульового порядку.

Вираз (2.59) ϕ_0 , буде мати наступний вигляд:

$$\phi_0 = \operatorname{arctg} \left(\frac{\int_0^T u(t) \cos \omega t dt}{\int_0^T u(t) \sin \omega t dt} \right). \quad (2.36)$$

З урахуванням фактів, що:

- k - постійна, яка не впливає на статистичну величину;

- $I_0(x)$ - функція, значення якої збільшується зі збільшенням x .

Тому функція правдоподібності досягає максимум, коли досягає максимум:

$$\hat{w} = \arg \max(M(w)), \quad (2.37)$$

де $M(w)$ - це модуль перетворення Фур'є спостереження $u(t)$.

Часто замість максимум модуля перетворення Фур'є використовують максимум квадрата модуля перетворення Фур'є.

Таким чином рішення задачі на основі МП буде таким:

- виконаємо моделювання спостереження $u(t)$ на ЕОМ;
- обчислюється ДПФ $G(f)$ спостереження $u(t)$;
- обчислюється квадрат модуля ДПФ $|G(f)|^2$ спостереження $u(t)$;
- отримаємо МП-оцінку частоти коли квадрат модуля ДПФ спостереження $u(t)$ досягає максимум.

2.3 Атестаційні характеристики метода максимальної правдоподібності

Атестаційні характеристики отримані на рівні цифрового статистичного моделювання. В якості вихідних даних задавали наступне:

- послідовність даних спостережень $\vec{X} = (x_0, x_1, \dots, x_{L-1})$ містить $L = 16, 32, 64$, еквідистантних тимчасових відліків комплексної синусоїди;
- частота $f=10\text{Гц}$
- $\Delta t=0,0125\text{с}$;
- комплексний некорельований гаусовий шум з нульовим математичним очікуванням і дисперсією з заданим діапазоном $2\sigma_0^2$.
- амплітуда сигналу дорівнювала 1;
- фаза дорівнює 0.

На першому етапі цифрового моделюванні атестації було зроблена традиційна обробка з використанням дискретного перетворення Фур'є. Вона включала в себе: моделювання послідовності $u(t)$, обчислення ДПФ $x_k = \sum_{n=0}^{L-1} x_n [\cos(2\pi kn/L) - j \sin(2\pi kn/L)]$, $k = 0, \dots, L-1$ спостереження $u(t)$, обчислення квадрата модуля ДПФ спостереження $u(t)$, оцінку частоти матимемо коли квадрат модуля ДПФ, спостереження $u(t)$, досягає максимум.

За 100 реалізацій вектора шуму були отримані оцінки частоти $\langle f \rangle$ при різних значеннях відношенні сигнал/шум $g = |E|^2 / 2\sigma_0^2$. Результати представлені в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Оцінки частоти комплексної синусоїди при різних значеннях відношенні сигнал/шум (g) та кількості відліків (L)

L	16		32		64	
	оцінка $\langle f \rangle$, Гц	дисперсія σ^2	оцінка $\langle f \rangle$, Гц	дисперсія σ^2	оцінка $\langle f \rangle$, Гц	дисперсія σ^2
0,01	37.45	580.12	38.1	586.35	39	512.44
0,02	38.35	518.04	34.975	576.31	36.9	569.74
0,04	34.85	504.61	36.125	606.32	32.5125	525.51
0,06	33.7	500.33	30.25	534.4	26	430.32
0,08	27.95	433.58	26.05	561.09	23.2625	437.31
0,1	32.3	466.2	24.475	511.67	19.0375	273.14
0,2	22.8	134.6	15.4	309.45	10.4375	50.14
0,4	15.85	14.39	11.575	2.4848	10	0
0,6	10.85	0	10	0	10	0
0,8	10	0	10	0	10	0
1	10	0	10	0	10	0
2	10	0	10	0	10	0
3	10	0	10	0	10	0
4	10	0	10	0	10	0
5	10	0	10	0	10	0
6	10	0	10	0	10	0
7	10	0	10	0	10	0
8	10	0	10	0	10	0
9	10	0	10	0	10	0
10	10	0	10	0	10	0
20	10	0	10	0	10	0
30	10	0	10	0	10	0
40	10	0	10	0	10	0
50	10	0	10	0	10	0
60	10	0	10	0	10	0
70	10	0	10	0	10	0
80	10	0	10	0	10	0
90	10	0	10	0	10	0
100	10	0	10	0	10	0

Аналізуючи цей метод, можна сказати, що швидке перетворення Фур'є дає велике зміщення оцінки частоти для невеликої кількості відліків ($L=16$) та невеликих співвідношень сигнал/шум. Нижче для наглядності представлений вид спектру сигналу для різної кількості відліків, залежність оцінки частоти від відношення сигнал/шум, та залежність дисперсії оцінки частоти від сигнал/шум.

Рисунок 2.1, рисунок 2.2 та рисунок 2.3 характеризують вказану залежність, коли $L=16$, частота $f=10$ Гц.

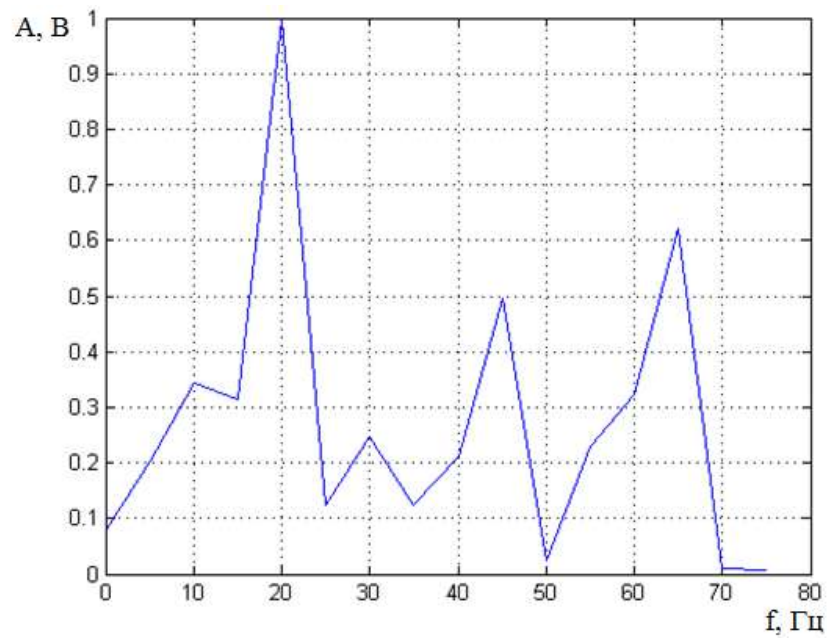


Рисунок 2.1- Спектр сигналу при відношенні сигнал/шум 0.4

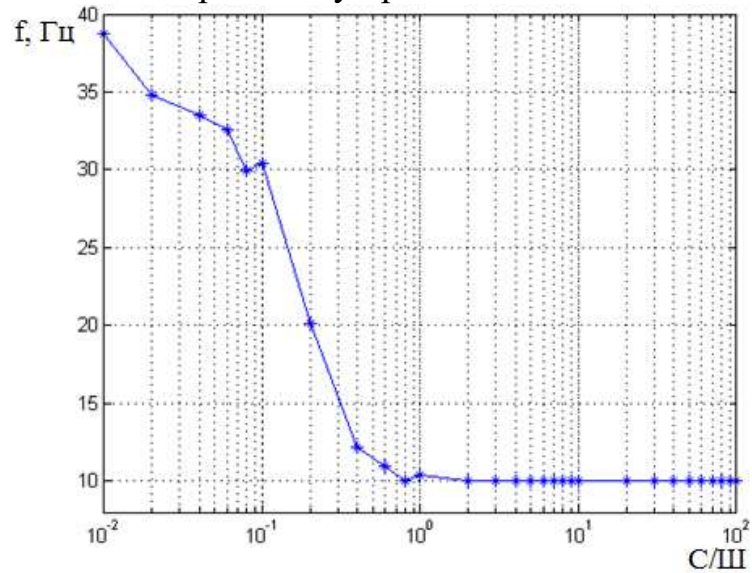


Рисунок 2.2 - Залежність оцінки частоти від сигнал/шум

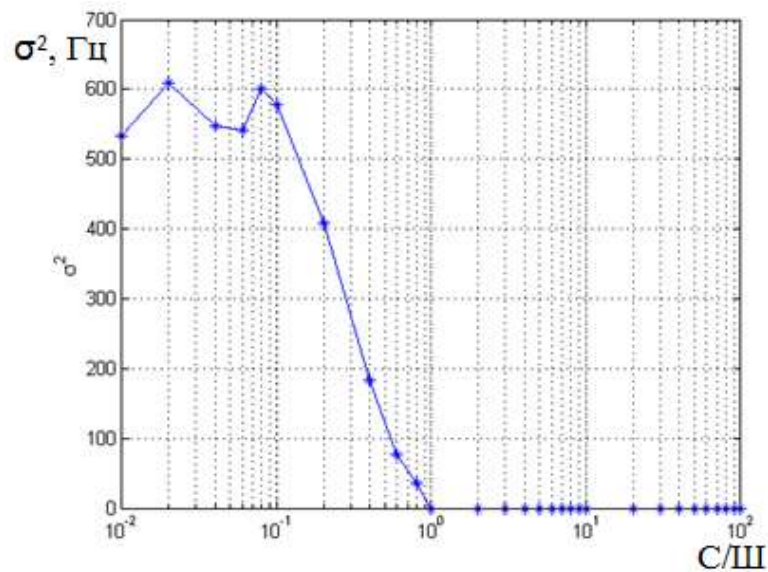


Рисунок 2.3 - Залежність дисперсії від сигнал/шуму

Рисунок 2.4, рисунок 2.5 та рисунок 2.6 характеризують вказану залежність, коли $L=32$, частота $f=10\text{Гц}$.

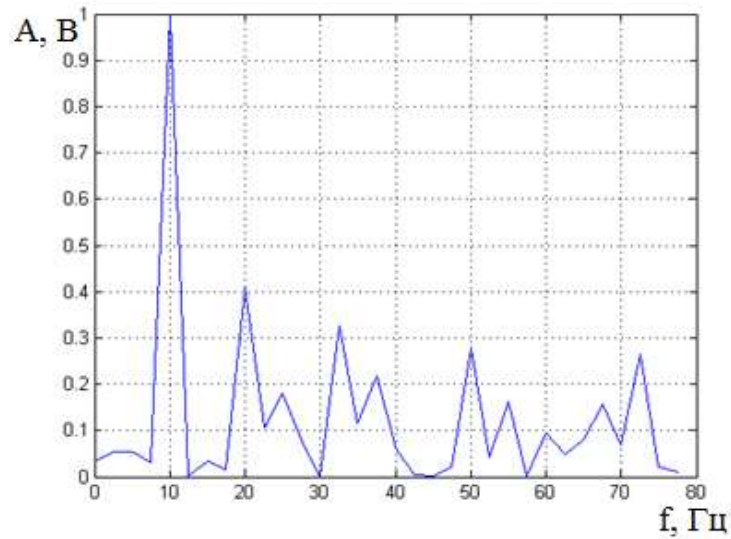


Рисунок 2.4 - Спектр сигналу при відношенні сигнал/шум 0.4

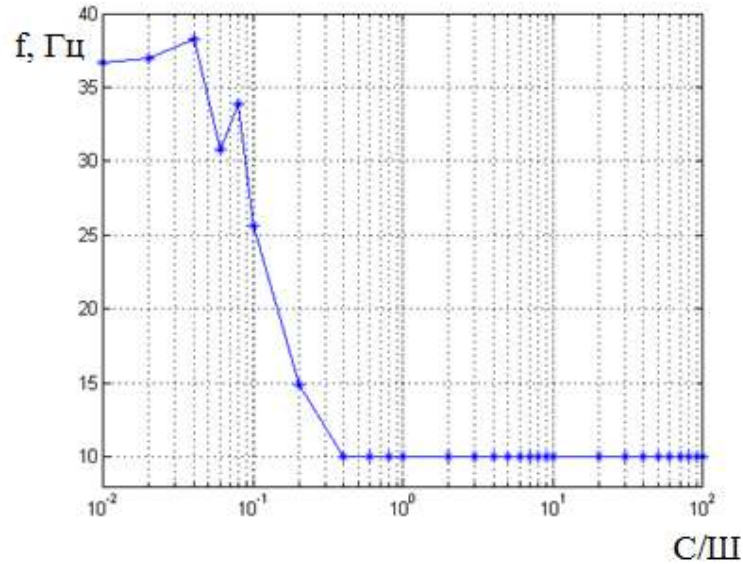


Рисунок 2.5 - Залежність оцінки частоти від сигнал/шум

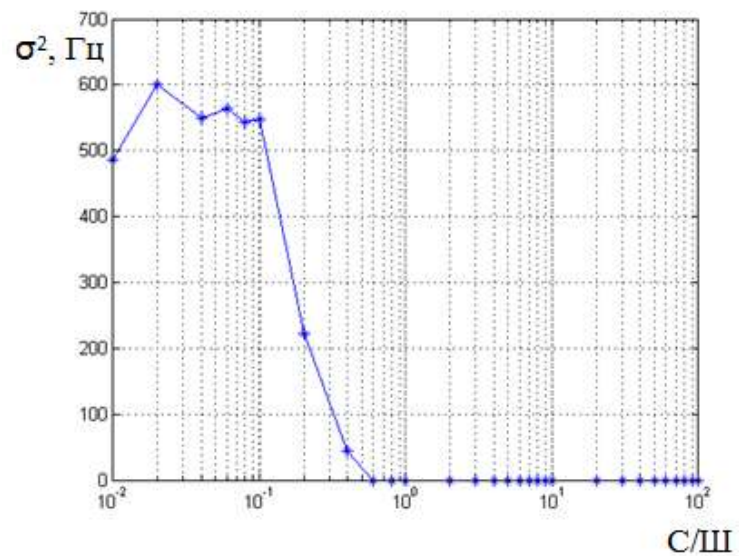


Рисунок 2.6 - Залежність дисперсії від сигнал/шуму

Рисунок 2.7, рисунок 2.8 та рисунок 2.9 характеризують вказану залежність, коли $L=64$, частота $f=10\text{Гц}$.

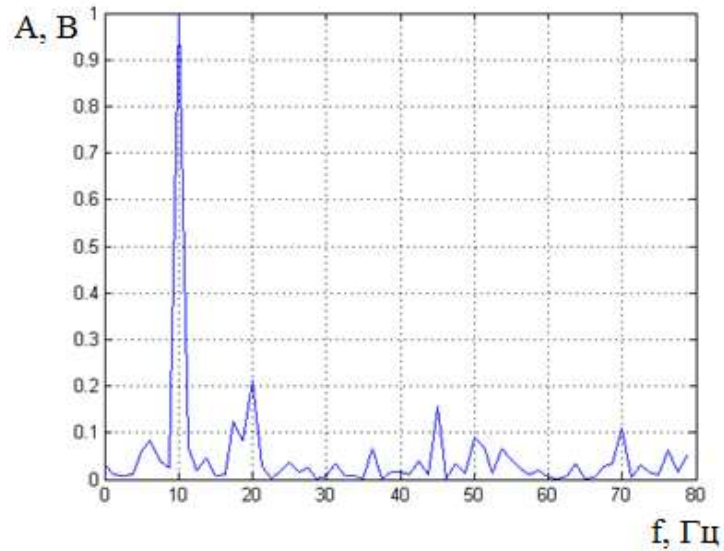


Рисунок 2.7 - Спектр сигналу при відношенні сигнал/шум 0.4

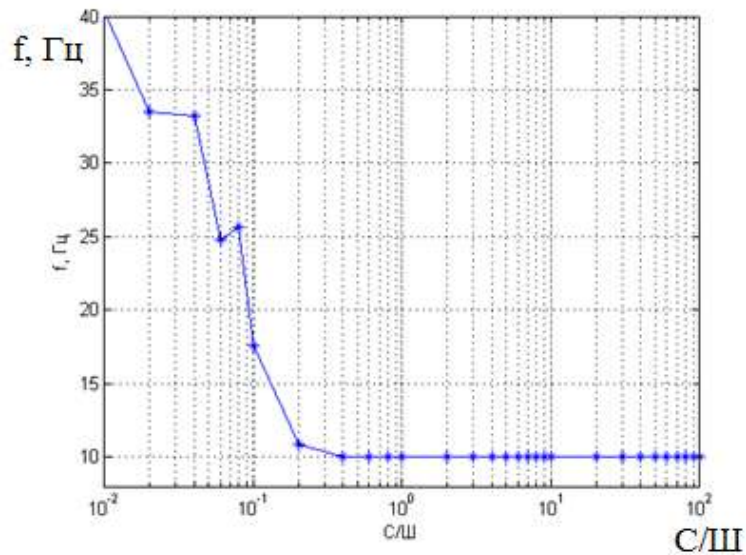


Рисунок 2.8 - Залежність оцінки частоти від сигнал/шум

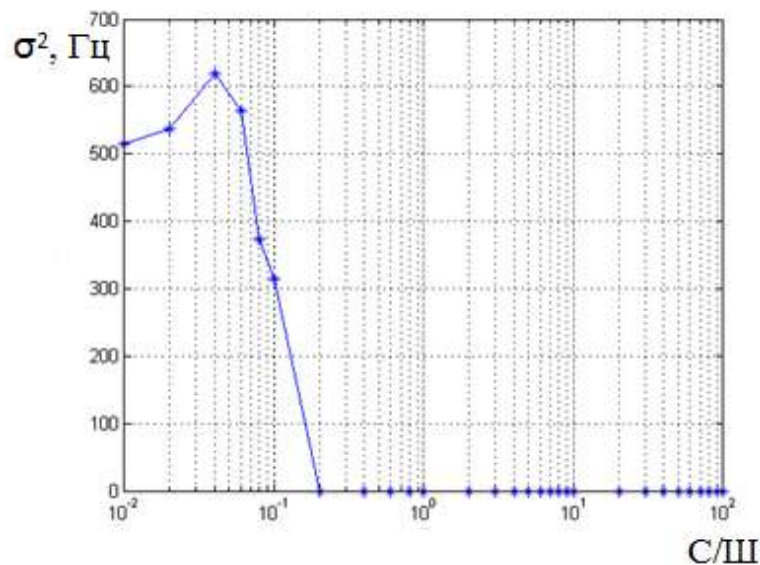


Рисунок 2.9 - Залежність дисперсії від сигнал/шуму

2.4 Синтез алгоритму оцінювання частоти з використанням сегментації даних спостережень

Нехай на інтервалі спостереження T задана послідовність відліків \dot{U}_n ($n = 1, 2, \dots, L$):

$$\dot{U}_n = \dot{S}_n + \dot{\varepsilon}_n, \quad (2.38)$$

тимчасового процесу $\dot{U}(t)$, при $t \in (0, T)$:

$$\dot{S}_n = \dot{E}_0 \exp(j2\pi f_0 n \Delta t), \quad (2.39)$$

сигнальна складова спостереження (2.63) з невідомою амплітудою

$$\dot{E} = |\dot{E}| \exp(j\varphi_0)$$

і частотою f_0 – із заданого діапазону $|f_0| \leq F$, $|\dot{E}|$ і φ_0 – інтенсивність та початкова фаза комплексної амплітуди \dot{E} , $\dot{\varepsilon}_n$ – n -й відлік гаусового комплексного випадкового процесу $\dot{\varepsilon}(t)$ з нульовим середнім та дисперсією

$$2\sigma_0^2 = 2FN_0,$$

де N_0 – постійна в заданій смузі частот спектральна інтенсивність, Гц.

$$\Delta t = \frac{1}{2F},$$

де Δt – крок дискретизації.

Потрібно на основі спостережень U_n ($n \in 1, L$) отримати оцінку \hat{f}_0 частоти f_0 при невідомих параметрах: $|\dot{E}|, \varphi_0, \sigma_E^2 = 2\sigma_0^2$.

Цю задачу можливо вирішити наступним чином. Використовуючи основи методологічних положень ESPRIT [3, 4], представимо спостереження в виді сукупності непересічних (сегментованих) векторів \vec{U}_0 і \vec{U}_1 :

$$\vec{U}_K = \begin{bmatrix} \vec{U}_0 \\ \vec{U}_1 \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{U}_0^T &= (\vec{U}_1, \vec{U}_2, \dots, \vec{U}_{L-K}), \\ \vec{U}_1^T &= (\vec{U}_{K+1}, \vec{U}_{K+2}, \dots, \vec{U}_L). \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

де «Т» - над символом в (2.41) означає операцію транспонування;

K – коефіцієнт прорідження.

Будемо вважати, що:

$$\lambda = \exp(j2\pi f_0 \Delta t), \quad (2.42)$$

являється коренем рівняння:

$$x(\lambda^K) = C_0 + C_K \lambda^K = 0. \quad (2.43)$$

Оскільки вектор спостереження \vec{U} містить сигнальну та шумову компоненту, то можна записати:

$$\tilde{H}_K \vec{U} = \vec{\eta}_K. \quad (2.43)$$

Тут матриця перетворення \tilde{H}_K розмірністю $\dim \tilde{H}_K = (L-K) \times L$ виглядає так:

$$\tilde{H}_K = \begin{bmatrix} C_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C_K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C_K & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & C_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & C_K \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

Не важко показати, що гаусова шумова компонента $\vec{\eta}$:

$$\vec{\eta}_1^T = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{L-K}),$$

в має нульове математичне очікування і кореляційну матрицю $\tilde{R}_K = \sigma^2 \tilde{I}_K$, зв'язана з квадратом $\|\vec{C}\|^2$ норми $\|\vec{C}\|$ вектора $\vec{C}^T = (C_0, C_K)$ рівністю:

$$\tilde{R}_K = 2\sigma_0^2 \|\vec{C}\|^2 \tilde{I}_K = 2\sigma_0^2 \tilde{H}_K \tilde{H}_K^+. \quad (2.45)$$

де «+» - означає операцію сполучення по Ерміту відповідної матриці;

\tilde{I}_K - одинична діагональна матриця.

Одинична матриця має розмір $\dim \tilde{I}_K = (L-K) \times (L-K)$.

Визначення (2.68) і (2.70) дозволяють записати функцію правдоподібності $W(\vec{U}/\vec{C})$ вектора спостереження \vec{U} відносно \vec{C} при заданому K у вигляді:

$$W(\vec{U}/\vec{C}) = \left(\frac{1}{(2\pi)^{(L-K)} |\hat{R}_K|} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\tilde{H}_K \vec{C})^+ \hat{R}_K^{-1} (\tilde{H}_K \vec{C}) \right\}. \quad (2.46)$$

Оскільки

$$\tilde{H}_K \vec{U} = \tilde{N}_K \vec{C}, \quad (2.47)$$

$$\tilde{N}_K = \begin{pmatrix} \dot{U}_1 & \dot{U}_2 & \cdots & \dot{U}_{L-K} \\ \dot{U}_{K+1} & \dot{U}_{K+2} & \cdots & \dot{U}_L \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

Параметр \hat{R}_K (2.46) діагональна матриця, мінімум $\inf[(\tilde{H}_K \vec{U})^+ \hat{R}_K^{-1} (\tilde{H}_K \vec{U})]$ при фіксованому $\|\vec{C}\|^2$ досягається, якщо вектор \vec{C} дорівнює власному вектору \vec{V}_1 матриці T_K :

$$\tilde{T}_K = \tilde{N}_K^+ \tilde{N}_K = \begin{bmatrix} \vec{U}_0^+ \vec{U}_0 & \vec{U}_0^+ \vec{U}_1 \\ \vec{U}_1^+ \vec{U}_0 & \vec{U}_1^+ \vec{U}_1 \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

який відповідає її мінімальному власному числу ν_1 .

Враховуючи відомий зв'язок між власними значеннями та власними векторами матриці приходимо до висновку: складові власного вектора \vec{V}_1 являються максимально правдоподібними оцінками \hat{C}_0 і \hat{C}_K складових вектора \vec{C} .

Знаючи \hat{C}_0 і \hat{C}_K дозволяють вирішити відносно $\hat{\lambda}^K$ поліном (2.43), а потім на підставі рівності (2.50) отримати оцінку \hat{f}_0 при $m=1,2,\dots$:

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi k \Delta t} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \hat{\lambda}^K}{\operatorname{Re} \hat{\lambda}^K} + m\pi \right\}. \quad (2.50)$$

Значення \hat{f}_0 може визначатися неоднозначно. Для отримання однозначного результату потрібно знати додаткові «грубі» значення \hat{f}_0 . Це можливо досягти, вважаючи, що $K = 1, 2, \dots, t$ та відповідно вираховуючи $\hat{\lambda}^1, \hat{\lambda}^2, \dots, \hat{\lambda}^t$.

В обчислювальному плані процедура прийняття рішення допускає спрощення. Зокрема, вважаючи $C_0 = 1$, числовим значенням $\hat{\lambda}^K$, що витікає із вище наведеного, може слугувати нормована величина $\vec{U}_0^+ + \vec{U}_1^+$:

$$\hat{\lambda}^K = \frac{\vec{U}_0^+ + \vec{U}_1^+}{|\vec{U}_0^+ + \vec{U}_1^+|}. \quad (2.51)$$

2.5 Атестаційні характеристики синтезованого алгоритму оцінювання частоти

Атестація алгоритму було виконано на рівні цифрового статистичного моделювання в середовищі програми Matlab для послідовності даних спостережень $\vec{X} = (x_0, x_1, \dots, x_{L-1})$, що містить з наступні вихідні дані:

- еквідистантні тимчасові відліки комплексної синусоїди:

$$L=16, 32, 64;$$

- частота комплексної синусоїди:

$$f=10 \text{ Гц};$$

- інтервал спостереження:

$$T=1 \text{ с};$$

- комплексного некорельованого гаусового шуму з нульовим математичним очікуванням і дисперсією з заданим діапазоном $2\sigma_0^2$;

- амплітуда сигналу дорівнювала 1 В;

- фаза дорівнює 0 рад.

Для 100 реалізацій вектора шуму були отримані оцінки частоти $\langle f \rangle$ при різних значеннях відношенні сигнал/шум

$$g = |E|^2 / 2\sigma_0^2.$$

В результаті атестації у формі залежності оцінки частоти та її дисперсії для 16, 32, 64 відліків як функції співвідношення сигнал/шум, отримано 100 реалізацій вектора шуму. Результати моделювання представлені в таблиці 2.2.

Таблиця 2.2 – Оцінки частоти комплексної синусоїди при різних значеннях відношенні сигнал/шум (g) та кількості відліків (L)

L	16		32		64	
	оцінка $\langle f \rangle$	дисперсія σ^2	оцінка $\langle f \rangle$	дисперсія σ^2	оцінка $\langle f \rangle$	дисперсія σ^2
0,01	10.0083	0.0897	10.022	0.0979	9.9573	0.0903
0,02	10.0224	0.0815	10.0002	0.0828	9.9361	0.0787
0,04	9,9857	0.0842	10.0455	0.0754	10.0081	0.0769
0,06	9,9654	0.0845	9.9971	0.0817	9.9856	0.0896
0,08	10.0063	0.0865	9.9673	0.0962	10.01	0.0759
0,1	9.9983	0.0849	10.0113	0.0673	10.0181	0.07
0,2	9.9582	0.0694	9.989	0.0648	9.9982	0.051
0,4	9.9880	0.059	9.9813	0.0389	10.0108	0.0208
0,6	10.0375	0.0353	9.9823	0.0234	10.0017	0.0103
0,8	10.0209	0.0319	9.9874	0.0188	10.0039	0.0062
1	9.9802	0.0191	10.0081	0.0099	9.9986	0.0048
2	10.0161	0.0087	9.9938	0.0034	10	0.0023
3	10.0058	0.0049	10.0083	0.0023	10.003	0.0014
4	9.9925	0.0045	9.9989	0.002	10.0003	8.47E-4
5	9.9983	0.0026	10.0015	0.0015	10.0023	7.05E-4
6	10.0015	0.0027	10.0016	0.0011	9.9984	5.41E-4
7	10.0011	0.0018	10.0015	0.001	9.998	4.72E-4
8	10.0044	0.0016	10.0011	9.2E-4	9.9982	4.78E-4
9	10.0011	0.0013	10.0040	7.89E-4	9.9967	2.23E-4
10	10.004	0.0013	10.0013	7.55E-4	10.0007	1.97E-4
20	10.0027	5.9E-4	9.9989	3.055E-4	9.9989	1.55E-4
30	9.999	6.04E-4	9.9999	2.093E-4	10.0001	1.34E-4
40	10.0011	3.17E-4	9.998	1.44E-4	10.000	8.3E-5
50	10.0031	2.43E-4	9.9991	1.11E-4	9.999	6.34E-5
60	9.999	2.65E-4	9.9997	1.04E-4	10.0002	6.86E-5
70	10.0024	1.96E-4	10.0007	8.5E-5	9.9996	4.53E-5
80	9.9982	1.28E-4	9.9988	8.27 E-5	9.9988	3.63E-5
90	9.9988	2.2E-4	9.9989	6.64E-5	9.9996	3.14E-5
100	9.999	1.19E-4	9.9993	6.19E-5	10.001	3E-5

Аналізуючи технологію, можна сказати, що алгоритм дає практично невелике зміщення оцінки частоти для невеликої кількості відліків та дає можливість достатньо точно оцінити частоту. Нижче представлені графіки залежності оцінки частоти від відношення сигнал/шум для різної кількості відліків, та залежність дисперсії частоти від відношення сигнал/шум.

Рисунок 2.10 та рисунок 2.11 характеризують вказану залежність, коли кількість відліків $L=16$ та частота $f=10$ Гц.

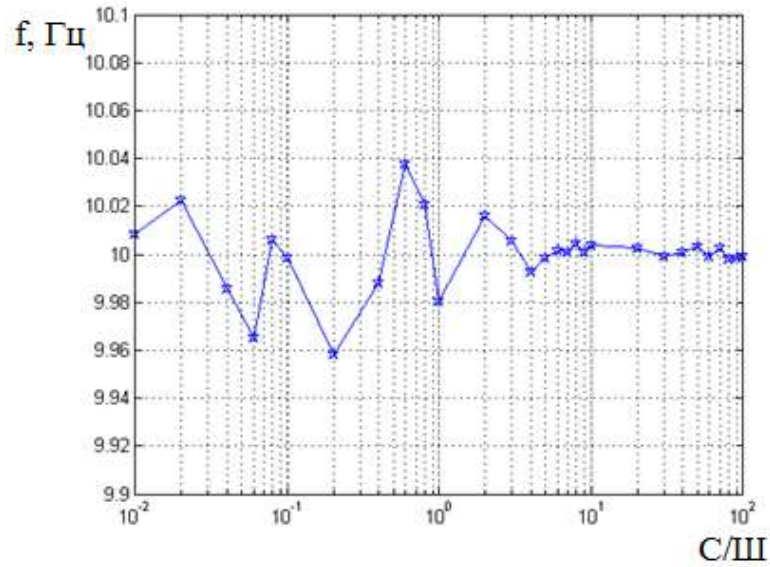


Рисунок 2.10 - Залежність оцінки частоти від сигнал/шуму

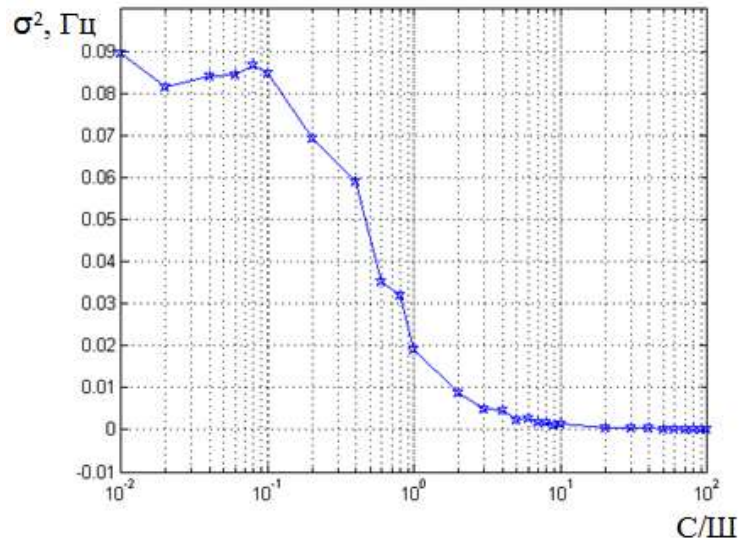


Рисунок 2.11 - Залежність дисперсії від сигнал/шуму

Рисунок 2.12 та рисунок 2.13 характеризують вказану залежність, коли $L=32$, $f=10$ Гц.

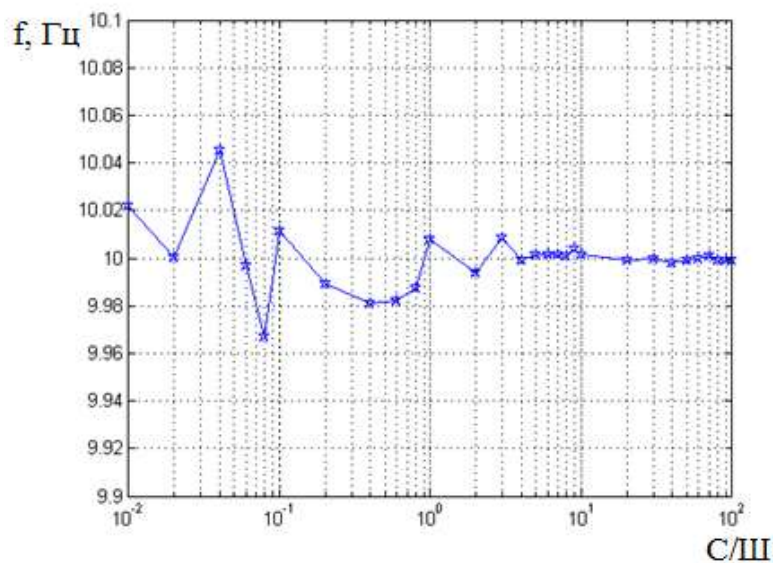


Рисунок 2.12 - Залежність оцінки частоти від сигнал/шуму

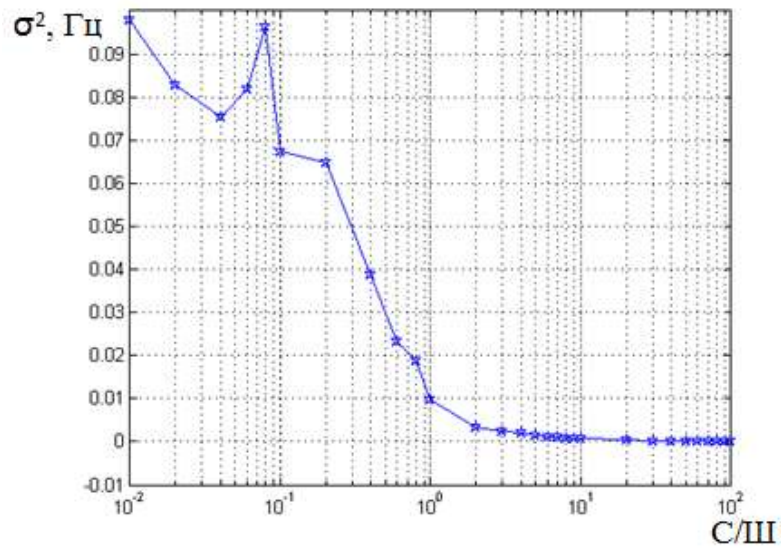


Рисунок 2.13 - Залежність дисперсії від сигнал/шуму

Рисунок 2.14 та рисунок 2.15 характеризують вказану залежність, коли $L=64$, $f=10$ Гц.

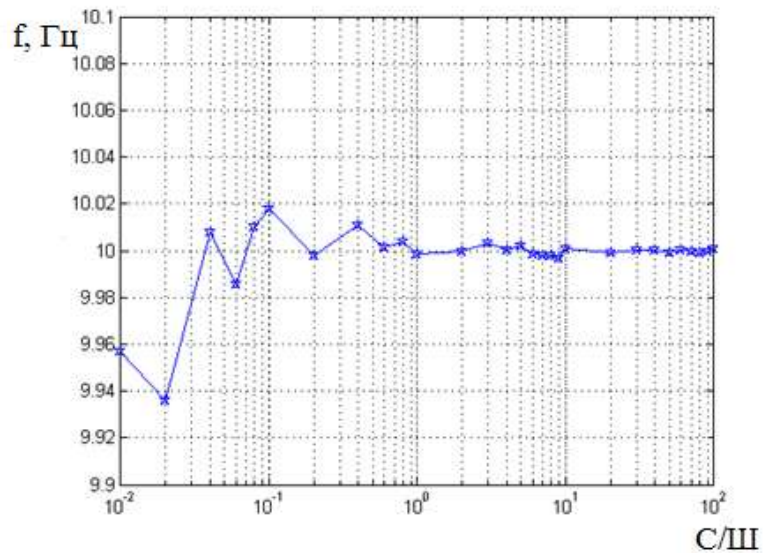


Рисунок 2.14 - Залежність оцінки частоти від сигнал/шуму

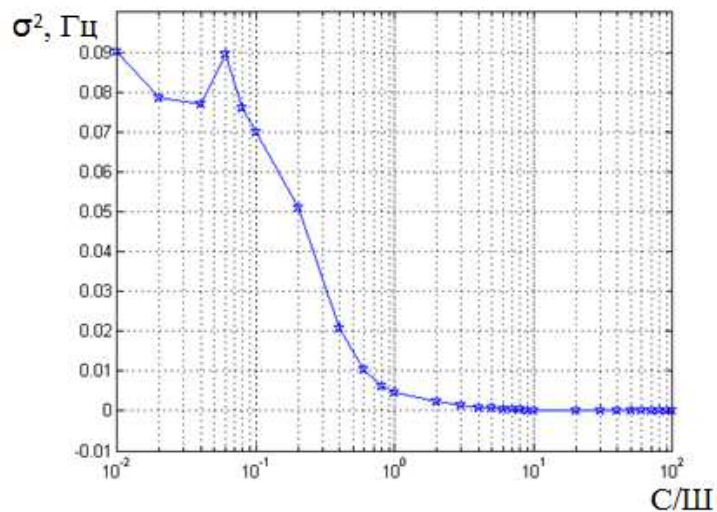


Рисунок 2.15 - Залежність дисперсії від сигнал/шуму

Аналізуючи отримані результати, можна зробити висновок, що обчислення оцінок частоти за синтезованим методом дозволяє отримувати досить точні оцінки при дуже малих співвідношеннях сигнал/шум - практично незміщені оцінки частоти. Проте оцінювання частоти сигналу по МП (з використанням перетворення Фур'є) отримуємо досить точні оцінки частоти тільки починаючи з співвідношеннях сигнал/шум $g=0,8$ для $L=16$, $g=0,6$ для $L=32$, $g=0,4$ для $L=64$.

Зіставимо теоретичне значення частоти з експериментальним та вирахуємо похибку оцінки частоти при використанні метода швидкого перетворення Фур'є.

Таблиця 2.3 – Порівняльний аналіз математичного очікування оцінки частоти для різної кількості відліків (L) при різному відношення сигнал/шум (g)

L	16	32	64
g	$ \hat{f}_{МП} - f_0 $	$ \hat{f}_{МП} - \hat{f} $	$ \hat{f}_{МП} - \hat{f} $
0,01	27.45	28.1	29
0,02	28.35	24.975	26.9
0,04	24.85	26.125	22.5125
0,06	23.7	20.25	16
0,08	17.95	16.05	13.2625
0,1	22.3	14.475	9.0375
0,2	12.8	5.4	0.4375
0,4	5.85	1.575	0
0,6	0.85	0	0
0,8	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	0	0
6	0	0	0
7	0	0	0
8	0	0	0
9	0	0	0
10	0	0	0
20	0	0	0
30	0	0	0
40	0	0	0
50	0	0	0
60	0	0	0
70	0	0	0
80	0	0	0
90	0	0	0
100	0	0	0

Також зіставимо теоретичне значення частоти з експериментальним та вирахуємо похибку оцінки частоти при використанні сегментації даних за методом максимальної правдоподібності.

Таблиця 2.4 – Порівняльний аналіз математичного очікування оцінки частоти для різної кількості відліків (L) при різному відношенні сигнал/шум (g)

L	16	32	64
g	$ \hat{f} - f_0 $	$ \hat{f} - f_0 $	$ \hat{f} - f_0 $
0,01	0.0083	0.022	0.0427
0,02	0.0224	0.0002	0.0639
0,04	0.0143	0.0455	0.0081
0,06	0.0346	0.0029	0.0144
0,08	0.0063	0.0327	0.01
0,1	0.0017	0.0113	0.0181
0,2	0.0418	0.011	0.0018
0,4	0.012	0.0187	0.0108
0,6	0.0375	0.0177	0.0017
0,8	0.0209	0.0126	0.0039
1	0.0198	0.0081	0.0014
2	0.0161	0.0062	0
3	0.0058	0.0083	0.003
4	0.0075	0.0011	0.0003
5	0.0017	0.0015	0.0023
6	0.0015	0.0016	0.0016
7	0.0011	0.0015	0.002
8	0.0044	0.0011	0.0018
9	0.0011	0.0040	0.0033
10	0.004	0.0013	0.0007
20	0.0027	0.0011	0.0011
30	0.001	0.0001	0.0001
40	0.0011	0.002	0
50	0.0031	0.0009	0.001
60	0.001	0.0003	0.0002
70	0.0024	0.0007	0,0004
80	0.0018	0.0012	0,0012
90	0.0012	0.0011	0,0004
100	0.001	0.0007	0.001

Нижче представлені графіки похибок двох методів: 1 – метод швидкого перетворення Фур'є; 2 – метод максимальної правдоподібності при сегментованих даних. З таблиці 2.3, таблиці 2.4 та з рисунка 2.16, рисунка 2.17, рисунка 2.18 видно, що метод швидкого перетворення Фур'є дає великі похибки на інтервалі сигнал/шум починаючи з 0,01 і закінчуючи співвідношенням 0,4. Далі на інтервалі сигнал/шум від співвідношення 0,4 до

100 похибка зменшується та прямує до 0. Проте на відміну першому методу, алгоритм правдоподібності при сегментації даних має на всьому інтервалі сигнал/шум дуже мале значення похибки. Максимальне значення якої складає 0.0418 Гц при співвідношенні сигнал/шум 0.02 на 16 відліках. Мінімальне значення на 16 відліках 0.001 Гц.

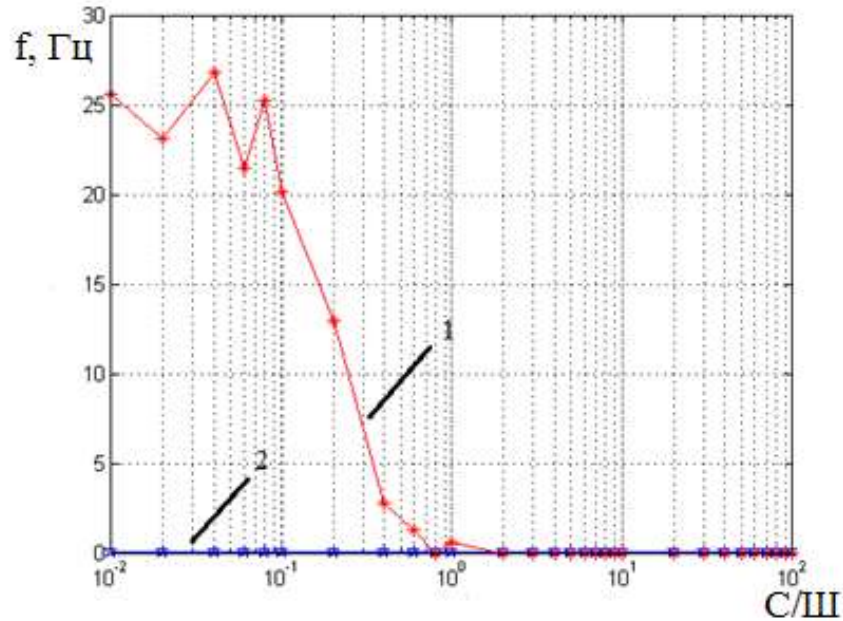


Рисунок 2.16 - Залежність похибки від співвідношення сигнал шум при $L=16$:

1 – метод швидкого перетворення Фур'є; 2 – метод максимальної правдоподібності при сегментованих даних

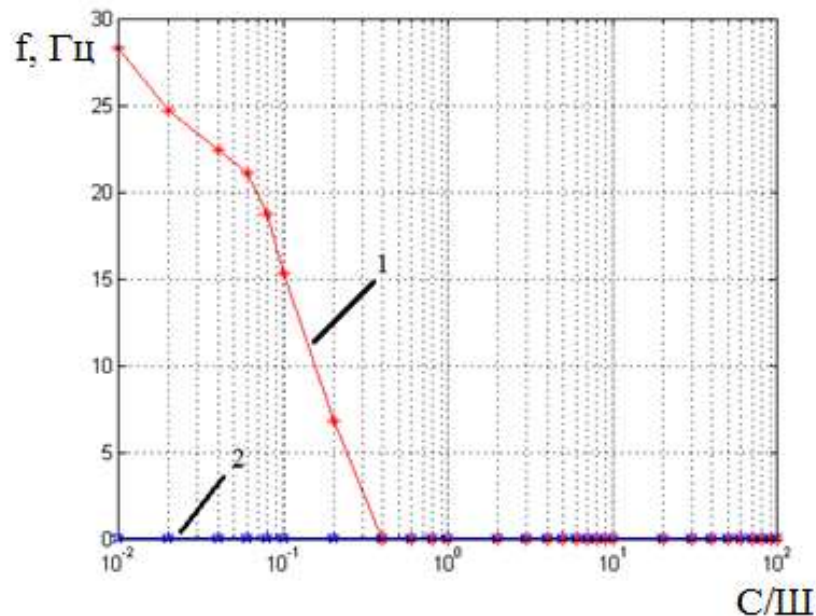


Рисунок 2.17 - Залежність похибки від співвідношення сигнал шум при $L=32$:

1 – метод швидкого перетворення Фур'є; 2 – метод максимальної правдоподібності при сегментованих даних

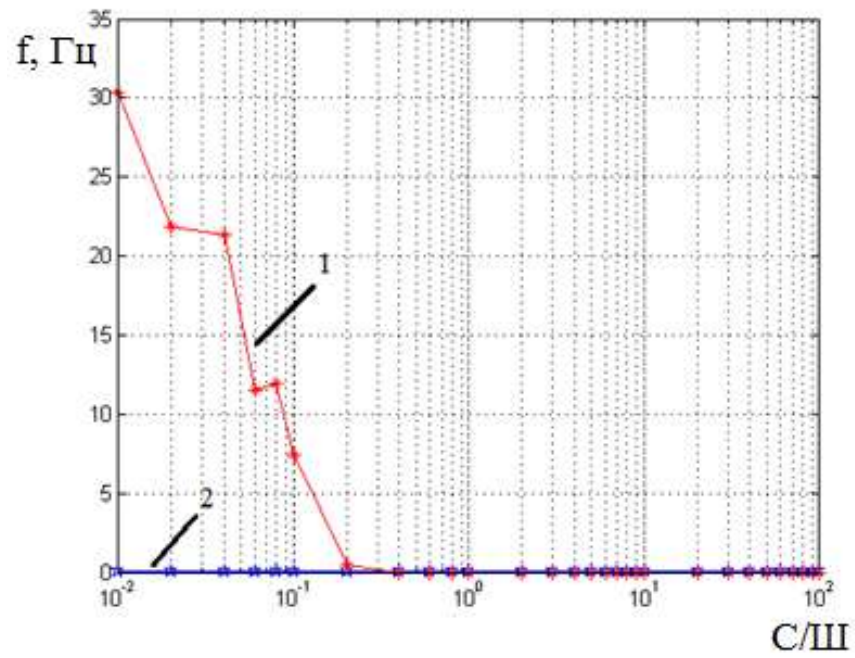


Рисунок 2.18 - Залежність похибки від співвідношення сигнал шум при $L=64$:
 1 – метод швидкого перетворення Фур'є; 2 – метод максимальної правдоподібності при сегментованих даних

3 СИНТЕЗ СТРУКТУРНОЇ СХЕМИ ПАНОРАМНОГО ВИМІРЮВАЧА ЧАСТОТИ

3.1 Структурна схему вимірювача частоти

Структурна схему вимірювача частоти представлена на рисунку .1, що реалізує процедуру оцінки параметрів спостережуваних гармонійних компонент, які синтезована в даній роботі.

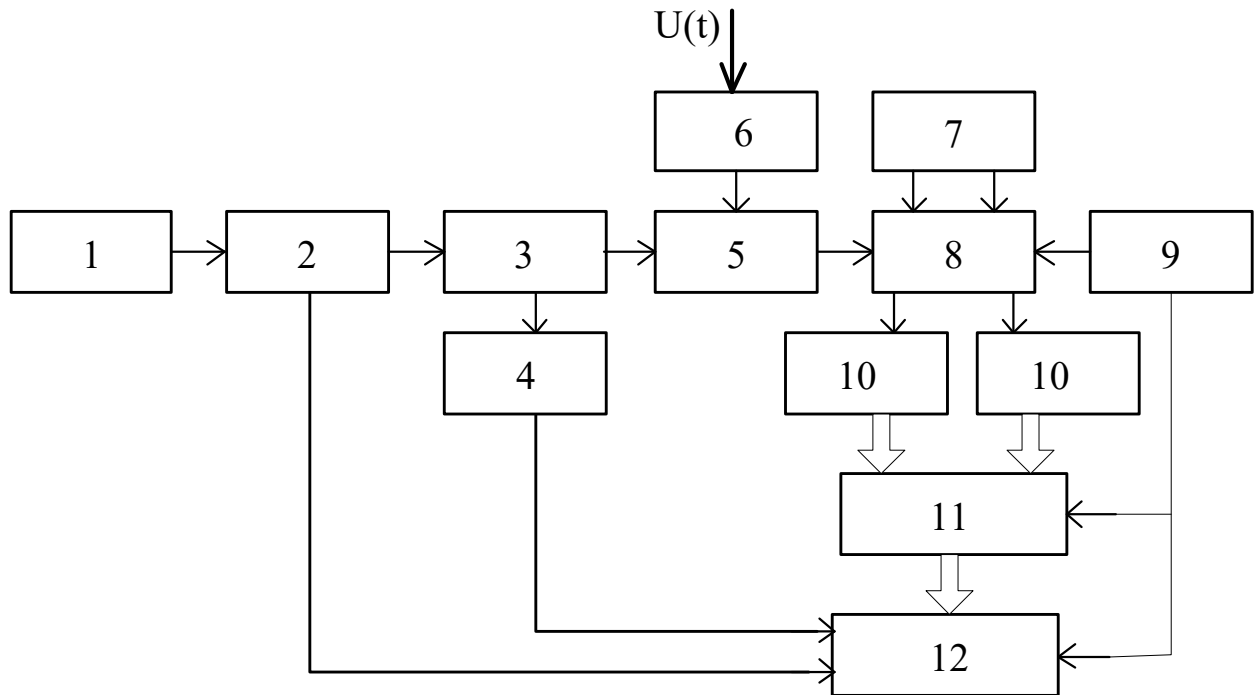


Рисунок 3.1 – Структурна схема вимірювача частоти

До складу вимірювача частоти входять наступні блоки:

- блок живлення (БЖ) (блок 1);
- диференціюючий підсилювач (ДП) (блок 2);
- одно вібратор (ОВ) (блок 3);
- блок виділення заднього фронту імпульсу (ВЗФ) (блок 4);
- ключ (Кл) (блок 5);
- вхідний пристрій (Вх. Пр.) (блок 6);
- квадратура генератор (Кв. Г) (блок 7);
- квадратурний перетворювач (Кв. П) (блок 8);
- генератор дискретизації, (задаючий генератор) (ГД) (блок 9);
- аналого-цифровий перетворювач (АЦП) (блок 10);
- буферно запам'ятовуючий пристрій (БЗУ) (блок 11);
- вирішальний блок (ВБ) (блок 12).

На вхід подається сигнал виду:

$$U(t) = \text{Re}\{\dot{E} \exp[j2\pi ft]\} + \varepsilon(t),$$

де \dot{E} – амплітуда в межах інтервалу спостереження T , В.

Комплексна амплітуда гармонічного сигналу i -го джерела невідомої частоти f_x подають на вхідного пристрою. Останнє містить дискретний атенюатор, підсилювач з автоматичним регулюванням рівня сигналу. Для вимірювань в умовах завод на вході іноді передбачають комутований фільтр. Частотомір, як правило, має високий вхідний опір (1 МОм). Вхідний пристрій передбачає захист приладу від перевантажень, а також режим «закритого» входу, при якому сигнал подається через конденсатор, що не пропускає постійну складову (наприклад, напруга живлення).

Позитивний перепад напруги з виходу джерела постійної напруги (блок 1) надходить через ДП (на виході якого виділяється прямокутний імпульс, відповідний передньому фронту перепаду напруги) на вхід одновібратора (ОВ). На виході одновібратора (блок 3) формується прямокутний імпульс тривалості T , який по керуючому входу відкриває ключ, а також надходить на вхід блоку виділення заднього фронту імпульса.

В результаті суперпозиція сигналів $U(t)$ протягом часу T надходить на вхід квадратурного перетворювача частоти (блок 8), на входи якого подають гармонійні сигнали з виходів генератора квадратурних сигналів (блок 7) частоти f_r , зсунуті по фазі на $\pi/2$, а на інший вхід - сигнали дискретизації з виходу генератора (блок 9), що задає сигналів дискретизації. В результаті під впливом опорних гармонійних сигналів перетворювач здійснює перенесення спектра роздільних сигналів в область низьких частот і формування відеосигналу - синфазну і квадратурну складові низькочастотного коливання (аналітичного сигналу), і під впливом сигналів дискретизації і їх дискретизацію з інтервалом

$$\Delta t = 1/2F_m.$$

Таким чином, на виходах квадратурний перетворювача формується набір з $m = 2F_m T$ відліків амплітуд синфазних і квадратурної $U(t_n)$, $\hat{U}(t_n)$ складових комплексної обвідної прийнятої суперпозиції сигналів для всіх моментів часу $t = n\Delta t$, $n = \overline{1, m}$.

Відліки $U(t_n)$ і $\hat{U}(t_n)$ подають на входи відповідних АЦП. В результаті, з виходу перетворювача знімається в цифровій формі код амплітуди відповідного (синфазного або квадратурного) відліку, який надходить на інформаційні входи БЗУ. Одночасно на його керуючий вхід в моменти часу $t_n = n\Delta t$ подаються імпульси з виходу генератора дискретизації. При надходженні, на керуючий вхід БЗУ, імпульсу управління, відбувається запис інформації, що надійшла на його інформаційні входи. БЗУ забезпечує запам'ятовування поточного відліку (амплітуди поточного відліку, перетвореної в цифровий код) комплексної огинаючої прийнятої суперпозиції сигналів і попередніх йому відліків, тобто протягом інтервалу часу $[t_i + E, t_i]$ в осередках БЗУ зберігаються в цифровій формі коди амплітуд відліків:

$$U(t_i), U(t_r), \dots, U(t_{l-c}), \hat{U}(t_i), \hat{U}(t_{i-1}), \dots, \hat{U}(t_{i-l}). \quad (3.1)$$

Коди амплітуди відліків синфазної $U(t_k)$ і квадратурної $\hat{U}(t_k)$ ($k = i - 1, i - 1 + 1, \dots, i$) складових комплексної огибаючої прийнятої суперпозиції сигналів, що зберігаються в БЗУ надходять з інформаційних виходів БЗУ на соответствующие входы решающего блока, на третий управляющий вход которого в моменты времени $t_n = n\Delta t$, $n = \overline{1, m}$ поступают импульсы с выхода задающего генератора сигналов дискретизации. На первый и второй керуючі входи вирішального блоку надходять відповідні імпульси з виходу ДПФ і з виходу блоку виділення заднього фронту імпульсу. Ці імпульси відповідають початку і кінця інтервалу спостереження.

Структурна схема БЗУ представлена на рисунку 3.2, що містить генератор (блок 1), який просуває імпульси і дві ідентичні ланцюжка (блок 3) і (блок 4), що складаються з послідовно з'єднаних здвигаючих регістрів – (блок 2).

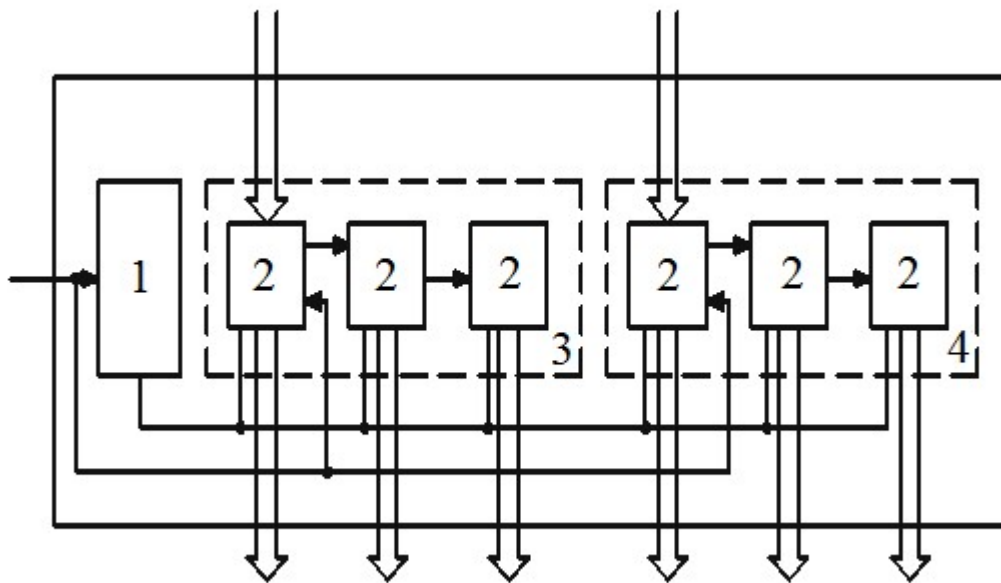


Рисунок 3.2 – Структурна схема буферного пристрою, що запам'ятовує відліки

Кожен ланцюжок складається з $(l+1)$ послідовно з'єднаних зі здвигаючих регістрів (рисунок 3.2), при цьому вихід перенесення одиниці зі старшого розряду в кожний зі здвигаючих регістрів, за винятком $(l+1)$ -го регістра кожної зі згаданих ланцюжків, підключені до входу перенесення в молодший розряд наступного (блок 3) здвигаючого регістру, керуючий вхід БЗУ підключений до однойменного входу генератора (блок 1) і входів управління записом перших здвигаючих регістрів кожної з ланцюжків, вихід генератора (блок 1) з'єднаний з входами управління зрушенням кожного з регістрів, інформаційні входи яких з'єднані з однойменними виходами БЗУ, інформаційні входи перших здвигаючих регістрів кожної з ланцюжків підключені до інформаційних входів БЗУ.

Нехай, на інтервалі часу $[0, T]$ спостерігається коливання виду:

$$U(t) = \operatorname{Re}\{A \exp[-j2\pi ft]\} + \varepsilon(t), \quad (3.2)$$

де A - постійна в межах інтервалу спостереження комплексна амплітуда джерела монохроматичного коливання з частотою f .

Квадратурна складова $\hat{U}(t)$ коливання $U(t)$ визначається виразом:

$$\hat{U}(t) = \operatorname{Im}\{A \exp[-j2\pi ft]\} + \varepsilon(t). \quad (3.3)$$

Аналітичний сигнал визначається виразом:

$$\dot{V}(t) = U(t) + j\hat{U}(t) + \gamma(t). \quad (3.4)$$

З урахуванням (3.2) і (3.3) вираз (3.4) може бути представлено у вигляді:

$$\dot{V}(t) = A \exp[-j2\pi ft] + \dot{\varepsilon}(t). \quad (3.5)$$

Послідовність $\{B_k, k = \overline{1, 2FT}\}$ відліків аналітичного сигналу $\dot{V}(t)$ визначається виразом:

$$\left. \begin{aligned} B_k &= A\lambda k, \\ \lambda &= \exp(-j2\pi f\Delta t). \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Вирішальний пристрій виробляє операції оцінки параметрів одночасно спостережуваних гармонійних компонент відповідно до методики, запропонованої в даній дипломній роботі, яка передбачає знаходження невідомих параметрів λ_n як коренів поліномів, максимізацію функції правдоподібності, відшукування власного вектора матриці і отримання максимально правдоподібних оцінок частот і амплітуд.

БЗУ служить для зберігання кодів амплітуди поточних і попередніх їм 1 відліків синфазної $U(t)$ і квадратурної $\hat{U}(t)$ складових сигналу, а також для паралельного виводу зазначених кодів у вирішальний блок.

БЗУ працює наступним чином. Імпульси з виходу пристрою, що запам'ятовує генератора сигналів дискретизації надходять на керуючий вхід БЗУ в моменти часу $t_i = i\Delta t$ і подаються на входи управління записом інформації перших здвигаючих регістрів (блок 2) кожної з ланцюжків (блок 3) і (блок 4), а також на керуючий вхід генератора імпульсів (блок 1). При цьому відбувається запис інформації, що надходить в момент часу t_i на інформаційні входи БЗУ, в перші здвигаючі регістри (блок 2), що входять до складу ланцюжків (блок 3) і (блок 4), в моменти часу на інформаційні входи БЗУ надходять коди амплітуд відліків синфазної $U(t_i)$ і квадратурної $\hat{U}(t_i)$ складових прийнятого коливання, які відповідно записуються в перші зсувні регістри (блок 2) ланцюжків (блок 3) і (блок 4). Через деякий час $\Delta t \ll T_p$ після надходження чергового імпульсу на керуючий вхід генератора 1. Останній генерує послідовність з p (p - розрядність регістрів) імпульсів, причому, тривалість T_p цієї послідовності задовольняє співвідношенню $T_p - \Delta t - \Delta t$ (проміжок часу Δt вибирається рівним часу, необхідному для запису інформації і зчитування її у вирішальний блок).

Послідовність з p імпульсів з виходу генератора (блок 1) надходить на входи управління здвигаючих всіх регістрів (блок 2). При надходженні кожного з імпульсів зазначеній послідовності на входи управління здвигаючих регістрів (блок 2) відбувається зсув інформації на один розряд в бік старших розрядів (вправо). При цьому вміст старших розрядів здвигаючих регістрів (блок 2) переписується в молодші розряди наступних регістрів. Таким чином, після

закінчення останнього імпульсу зазначеній послідовності, інформація, записана в зсувних регістрах (блок 2) кожної з ланцюжків (блок 3) і (блок 4), виявляється здвинутою на один регістр вправо (при цьому зміст останніх здвигаючих регістрів (блок 2) кожної з ланцюжків (блок 3) і (блок 4) втрачається). При надходженні чергового імпульсу на керуючий вхід БЗУ вказаний процес повторюється.

Протягом інтервалу часу $[t_i + E, t_i + \Delta\tau]$ в зсувних регістрах (блок 2), що входять до складу (блок 3) і (блок 4), зберігаються коди амплітуд відліків $U(t_i), U(t_{i-1}), \dots, U(t_{i-l})$ синфазної (блок 3) і відліків $\hat{U}(t_i), \hat{U}(t_{i-1}), \dots, \hat{U}(t_{i-l})$ квадратурної (блок 4) складових прийнятої суперпозиції сигналів. Так як інформаційні виходи здвигаючих регістрів (блок 2) підключені до інформаційних виходів БЗУ, коди амплітуди вказаних відліків, що зберігаються в зсувних регістрах (блок 2), протягом інтервалу часу $[t_i + E, t_i + \Delta\tau]$ надходять на інформаційні виходи БЗУ і вводяться в вирішальний блок.

На наступному рисунку 3.3 представлена базова структурна схема квадратурного перетворювача.

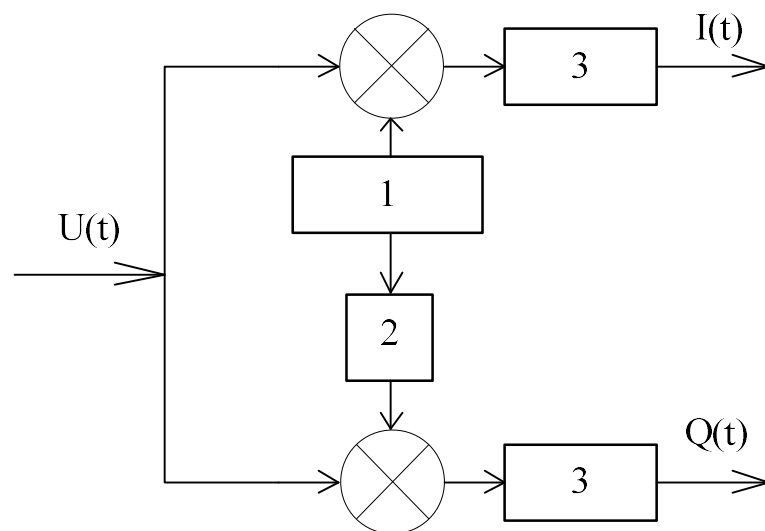


Рисунок 3.3 – Структурна схема блоків квадратурного перетворювача та квадратурного генератора:

- 1 - гетеродин;
- 2 - обертач фази;
- 3 - фільтр нижніх частот

Вхідний сигнал множиться на сигнал гетеродина (для каналу I) і на сигнал гетеродина, зрушений на 90° (для каналу Q). Результат (після фільтрації нижніх частот) представляє собою сигнали I і Q, які готові для подальшої обробки. Фільтри нижніх частот необхідні, тому що квадратурного множення, що застосовується до прийнятого сигналу, нічим не відрізняється від множення, використовуваного, наприклад, в звичайному амплітудном демодуляторі. Спектр прийнятого сигналу буде зміщений вниз і вгору на значення частоти

несучої ($f_{\text{нес}}$); таким чином, фільтр нижніх частот необхідний для придушення високочастотних складових, пов'язаних зі спектром, центрованих навколо $2f_{\text{нес}}$.

Спрощена структурна схема обробки інформації для оцінювання частоти сигналу показано на рисунку 3.4.

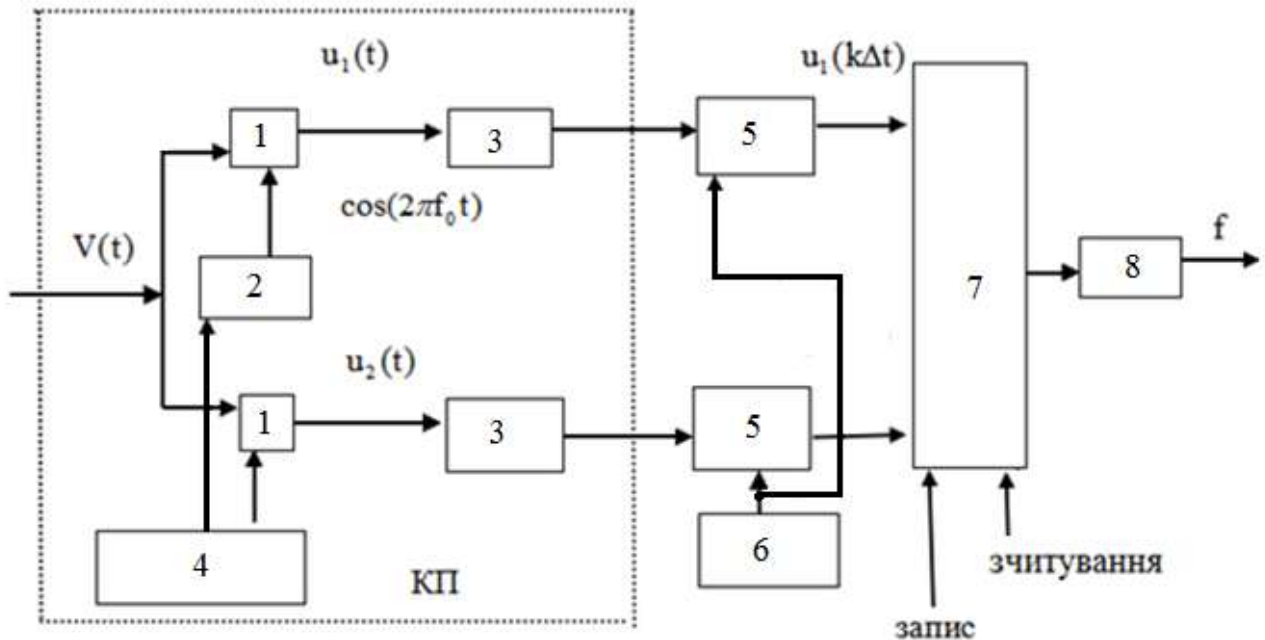


Рисунок 3.4 - Спрощена структурна схема вимірювача частоти:

- 1 - перемножувач;
- 2 - обертач фази;
- 3 - фільтр;
- 4 - генератор сигналу;
- 5 - аналого-цифровий перетворювач;
- 6 - генератор тактових імпульсів;
- 7 - оперативно запам'ятовуючий пристрій;
- 8 - вирішуючий пристрій

Схема працює наступним чином: на вхід подається коливання:

$$\left. \begin{aligned} V(t) &= \operatorname{Re}\{\dot{u}(t)\}, \\ \dot{u}(t) &= \dot{s}(t, f_c) + \varepsilon(t), \\ \dot{s}(t, f_c) &= \dot{E}e^{j2\pi f_c t}, \\ \dot{E} &= |\dot{E}|e^{j\phi} = a + jb. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

де \dot{E} - постійна (в межах інтервалу спостереження T) комплексна амплітуда гармонічного сигналу з невідомою частотою f_c , B .

Якщо $\varepsilon(t) = 0$, $\dot{E} = 1$ то на виході першого каналу отримуємо коливання:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= V(t) \times \cos(2\pi f_r t) = \cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_r t) = \\ &= \cos(2\pi(f_c - f_r)t) + \cos(2\pi(f_c + f_r)t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Після фільтрації:

$$u_1(t) = \cos(2\pi(f_C - f_T)t). \quad (3.9)$$

На виході другого каналу отримуємо коливання:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= V(t) \times \sin(2\pi f_T t) = \cos(2\pi f_C t) \sin(2\pi f_T t) = \\ &= -\sin(2\pi(f_C - f_T)t) + \sin(2\pi(f_C + f_T)t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Після фільтрації:

$$u_2(t) = -\sin(2\pi(f_C - f_T)t). \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} u_1(t) + ju_2(t) &= \cos(2\pi(f_C - f_T)t) - j\sin(2\pi(f_C - f_T)t) = \\ &= \exp(j2\pi(f_T - f_C)t) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Таким чином, на виходах першого і другого каналів формуємо аналітичний сигнал.

3.2 Розрахунок електричних параметрів вхідного пристрою частотоміра

На вхід приладу (рисунок 3.5) подається змінна напруга, значення якої може бути від 0,5 до 10 вольт, а діапазон частот від 1Гц до 1 МГц. Сигнал надходить на розділові конденсатори С1 – С2, які відсікають постійну складову вимірюваного сигналу. При цьому змінна складова залишається без зміни. Цей сигнал подається на вхід аналогового компаратора, виконаного на операційному підсилювачі DA2. ОП включений без ланцюгів зворотного зв'язку, що забезпечує його роботу в якості компаратора. Якщо рівень сигналу, що надходить на його неінвертуючий вхід, перевищує величину напруги, присутньої на його інвертуючому вході, то напруга на виході ОП стрибком збільшиться до максимально можливої. Ця напруга не набагато менше величини його джерела живлення позитивної полярності. І, навпаки, за умови якщо рівень сигналу, що надходить на його неінвертуючий вхід, менше величини напруги, присутньої на його інвертуючому вході, то напруга на виході ОП стрибком зменшиться до мінімального. Мінімальне значення напруги на виході визначається величиною його джерела живлення негативної полярності.

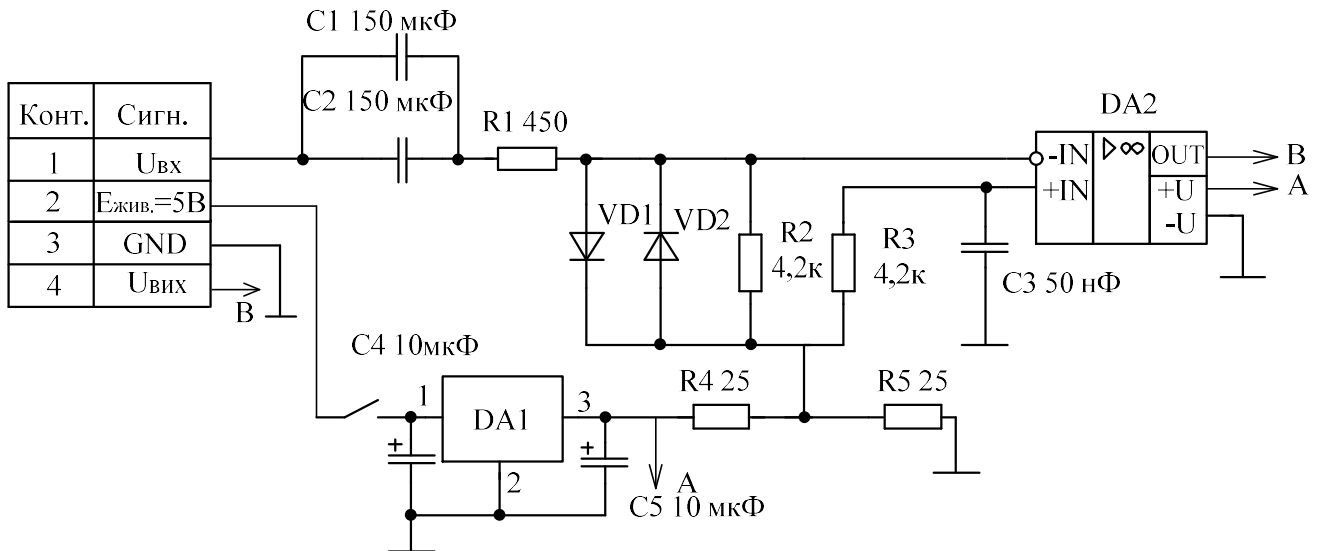


Рисунок 3.5 – Принципова схема вхідного пристрою

В даній схемі використовується прецизійний швидкодіючий операційний підсилювач AD8055-SOT-23-5 фірми Analog Devices. Це недорога мікросхема, яка може працювати як з двополярним, так і з однополярним живленням. Його основні характеристики:

- гранична частота - 300 МГц;
- швидкість наростання вихідного сигналу - 1400 В/мкс;
- шуми - 6 нВ / Гц;
- напруга зсуву нуля (помилки) - 5 мВ;
- вхідні струми - 1,2 мкА.

Живлення ОП здійснюється однополярним джерелом +5 вольт. Досліджуваний сигнал подається на неінвертуючий вхід ОП. Для того, щоб він міг порівнювати як негативну, так і позитивну напівхвилі вхідного сигналу, необхідно встановити на обох входах мікросхеми постійний потенціал, рівний половині напруги живлення. Для цього служить ділник напруги на резисторах R4 і R5. Ця ж напруга подається на анод і катод відповідного обмежувального діода. Вхідні струми операційного підсилювача протікають через резистори R2 і R3. Падіння напруги на цих діодах в результаті протікання вхідних струмів має бути менше напруги помилки. Конденсатор C3 зменшує високочастотні наведення.

Максимальна вхідна напруга ОП не повинно перевищувати напруга живлення +5 вольт, а мінімальне - не менш потенціалу землі. Для обмеження подається вхідного сигналу служать діоди VD1, VD2. Якщо прикладена до діодів напруга перевищить пороговий рівень, він відкривається і підтримує цю напругу на постійному рівні. В якості діодів обраний імпульсний діод КД521Г з параметрами:

- максимальна зворотна напруга - 30 вольт;
- падіння напруги на відкритому діоді - 1,0 вольт;

- максимальний прямий струм - 50 мА;
- зворотний струм - 1 мкА;
- час відновлення - 4 нс.

Таким чином, змінна складова вхідного сигналу обмежена напругою пробою (відкривання) обмежувальних діодів, тобто не перевищує по абсолютній величині 1 вольт. Для обмеження прямого струму через діоди в межах допустимого служить струмообмежуючий резистор R1. З виходу ОП отримуємо імпульсну послідовність вимірюваної частоти і ТТЛ-рівнями.

Висока точність частотоміра забезпечується стабільністю передавальних характеристик всіх ланок апаратури, які в першу чергу залежать від стабільності напруги живлення. Для фіксації напруги живлення даного апаратурного блоку застосовується інтегральний стабілізатор напруги. В даний час для побудови радіоелектронної апаратури знаходять застосування універсальні стабілізатори і стабілізатори з фіксованою вихідною напругою. Стабілізатори з фіксованою вихідною напругою (їх іноді називають трьохвивідними) мають внутрішню схему дільника і налаштовуються на стандартний ряд живлять напруг в процесі виготовлення мікросхеми. У серію К142 входять стабілізатори з фіксованим поруч вихідних напруг, наприклад К142ЕН5 - на 5 вольт. Вхідна напруга подається на вивід 1, а вихідна знімається з вивода 3. У схемі є захист від перевантаження по виходу.

Вибір конденсаторів групової розв'язки по живленню. Через кидки струму в системі живлення можуть виникати «повільні» коливання напруги. При правильно спроектованій ланцюга живлення (включення великих електролітичних конденсаторів) ці коливання носять затухаючий характер. Для зниження низькочастотних пульсацій в шинах живлення застосовують блокуючі конденсатори, що включаються між виводом «живлення» і «земля». Якщо ж ємність обрана неправильно. У ланцюзі можуть досить довго йти коливання. З метою запобігання таких явищ включають електролітичні конденсатори великої ємності. С4 і С5 - алюмінієві електролітичні К53-16, призначені для придушення завад в ланцюгах постійного і пульсуючого струму. Їх ємність - 10 мкФ.

Вхідна ланка пристрою повинна забезпечувати вільне проходження змінної складової вимірюваного сигналу і при цьому забезпечувати необхідний режим роботи.

Постійний резистор R1 на вході приладу служить для завдання струмів, що протікають через обмежують діоди VD1 і VD2, тобто значення номіналу цього резистора визначає струми діодів у відкритому стані. У вибраних діодів КД521Г максимально можлива величина що протікає через них струму в прямому напрямку повинна складати не більше 20 мА. Тоді максимальний струм через діод:

$$I_{np} = \frac{U_{max} - U_{np}}{R1}, \quad (3.13)$$

де I_{np} – струм, що протікає через діод у відкритому стані, А;

U_{max} – максимальне значення максимальної величини вхідної напруги, В;

U_{np} – падіння напруги на відкритому діоді, В;

$R1$ - необхідне значення номіналу обмежувального резистора, Ом.

Можна обчислити $R1$:

$$R1 = \frac{U_{max} - U_{np}}{I_{np}} = \frac{10 - 1}{20 \cdot 10^{-3}} = 450(\text{Ом}). \quad (3.14)$$

Значення резистора зі стандартного ряду $R1 = 500$ Ом. Потужність, що розсіюється резистором P_{R1} :

$$P_{R1} = I_{np}^2 \cdot R1 = (20 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 500 = 0,2(\text{Вт}). \quad (3.15)$$

В якості $R1$ береться металевий плівковий резистор С2-33И, застосування якого допускається на частотах, заданих в технічному завданні.

$R1$: С2-33и - 0,25 - 500 ± 5%

Резистори $R4$ та $R5$ утворюють простий дільник, напруга в середній точці якого має дорівнювати 2,5 вольт. З одного боку, для зменшення споживаної потужності необхідно, щоб значення цих резисторів були якомога більше. З іншого боку, висока напруга, яка через дільник, повинна бути набагато більшим, ніж струми через відкриті діоди для забезпечення їх необхідною величиною. Зазвичай задають струм подільника в 5-10 разів більше струму відкритого діода. Нехай струм дільника $I_{дел} = 100$ мА, тоді:

$$R4 = R5 = \frac{5}{2 \cdot 100 \cdot 10^{-3}} = 25(\text{Ом}). \quad (3.16)$$

Потужність, що розсіюється кожним резистором:

$$P_{R4} = P_{R5} = I_{дел}^2 \cdot R = (100 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 25 = 0,25(\text{Вт}). \quad (3.17)$$

Резистори необхідно взяти з запасом по потужності, а їх номінал - зі стандартного ряду:

$R4$ типу С2-33и – 0,5 – 27 ± 5%;

$R5$ типу С2-33и – 0,5 – 27 ± 5%.

Так як джерело вимірюваного сигналу і операційний підсилювач в даному випадку є розв'язаними по постійному струму, то необхідно передбачити заземлення входів. Резистори $R2$ і $R3$ служать тим шляхом, по якому течуть вхідні струми операційного підсилювача. Значення їх номіналів має бути таким, щоб падіння напруги на цих резисторах при протіканні вхідних струмів не викликало помилкового спрацьовування компаратора. Мінімальна чутливість даного інтегрального підсилювача складає $U_{см} = 5$ мВ, а вхідні струми $I_{вх}$ близько 1,2 мкА. Значить, для оцінки значення резисторів можна скористатися формулою:

$$R \leq \frac{U_{см}}{I_{вх}} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{1,2 \cdot 10^{-6}} \approx 4,3(\text{кОм}). \quad (3.18)$$

Номинали обох резисторів вибираються зі стандартного ряду:

R2 типу C2-33и – 0,125 – 4,2 кОм ± 5%;

R3 типу C2-33и – 0,125 – 4,2 кОм ± 5%.

Вхідні конденсатори C1 і C2 вибираємо такими, щоб постійна часу вхідного ланцюга $(C1 + C2) \times (R1 + R2)$ була більше половини періоду вхідного сигналу мінімальної частоти. З цих міркувань вибираємо C1 і C2 рівними 150 мкФ.

C1 типу K53-7– 15В – 150 мкФ ±20%;

C2 типу K53-7– 15В – 150 мкФ ±20%.

На неінвертуючому вході операційного підсилювача можуть спостерігатися стрибки напруги, імпульсні перешкоди, а це, в свою чергу, буде сприяти нестійкої роботи компаратора і може призводити до помилкових спрацьовувань. Всі ці явища носять випадковий характер і в сильній мірі залежать від умов експлуатації приладу і близькості побутових і промислових перешкод, але при цьому можуть надати досить сильний вплив на точність вимірювань і їх достовірність. Для усунення впливу цієї причини неінвертуючий вхід операційного підсилювача під'єднується до землі через конденсатор невеликої ємності C3. Цей конденсатор грає роль джерела постійної напруги при коротких стрибках струму. Номинал ємності цього конденсатора вибирається рівним 50 нФ.

C3 типу K10-9 – 16 В – 50 нФ ±20%.

3.3 Основні принципи моделювання вимірювача частоти в середовищі Simulink

У середовищі Simulink була змодельована система для вимірювання частоти гармонічного сигналу. На рисунку 3.6 представлена схема моделювання.

Почтакові значення для системи були такі:

Послідовність даних спостереження $\vec{X} = (x_0, x_1, \dots, x_{L-1})^T$ містила L=16, еквідистантних тимчасових відліків суми комплексної синусоїди з параметрами: E=1, f=10Гц і комплексного некорельованого гаусового шуму з нульовим математичним очікуванням і дисперсією $2\sigma_0^2=1$

Робота вимірювача частоти реалізується наступним чином: на вхід буферу надходить зашумлений сигнал з заданими значеннями. Він є комплексною функцією. Далі відбувається сегментація даних, тобто з матриці виділяються необхідні, за заданим алгоритмом, вектора блоком Submatrix. Після чого вони перемножуються між собою (Matrix Multiplu) та відокремлюються на дійсну та уявну частину, для цього використовується блок Complex to Real-Imag. Далі перемножується отриманий результат з вектором відліків. На наступному кроці знову виокремлюються дійсна та уявна частина та береться arctg від отриманого результату згідно формули 2.38.

При таких параметрах схеми на виході отримуємо оцінку частоти, яка дорівнює 9.8448 Гц.

Основні параметри блоків в схемі:

Блок генератор гаусового шуму – математичне очікування дорівнює 0, дисперсія 1.

Блок констант для формування сигналу (Math Function) - $j \times 2 \times \pi i \times 10$.

Блок буфер – для формування 16 відліків.

В блоці формувача підматриці ставимо індекси матриці для виділення векторів, для 16 відліків виділяємо перший вектор з індексами з 1 по 8, для другого вектора виділяємо індекси з 9 по 16.

- 1 – генератор 1 гаусового шуму;
- 2 – константа (уявна 1);
- 3 – генератор 2 гаусового шуму;
- 4 – константа (уявна 2);
- 5 – уявна експонента;
- 6 – перемножувач 1;
- 7 – суматор 1;
- 8 – суматор 2;
- 9 – буфер даних;
- 10 – формувач підматриці 1;
- 11 - формувач підматриці 2;
- 12 – формування комплексного зв'язаного числа;
- 13 – операція транспонування;
- 14 – перемножувач матриці;
- 15 – дільник 1 на уявну та реальну частину;
- 16 – константа 3;
- 17 – модуль реальної частини;
- 18 - модуль уявної частини;
- 19 – суматор 3;
- 20 – перемножувач 2;
- 21 – формування 1 оберненої величини;
- 22 – перемножувач 3;
- 23 – дільник 2 на уявну та реальну частину;
- 24 – формування 2 оберненої величини;
- 25 - перемножувач 4;
- 26 – формування значення тангенсу;
- 27 - формування значення арктангенсу;
- 28 – суматор 4;
- 29 - перемножувач 5;
- 30 – константа 4;
- 31 – константа π ;
- 32 - формування 3 оберненої величини;
- 33 – індикатор.

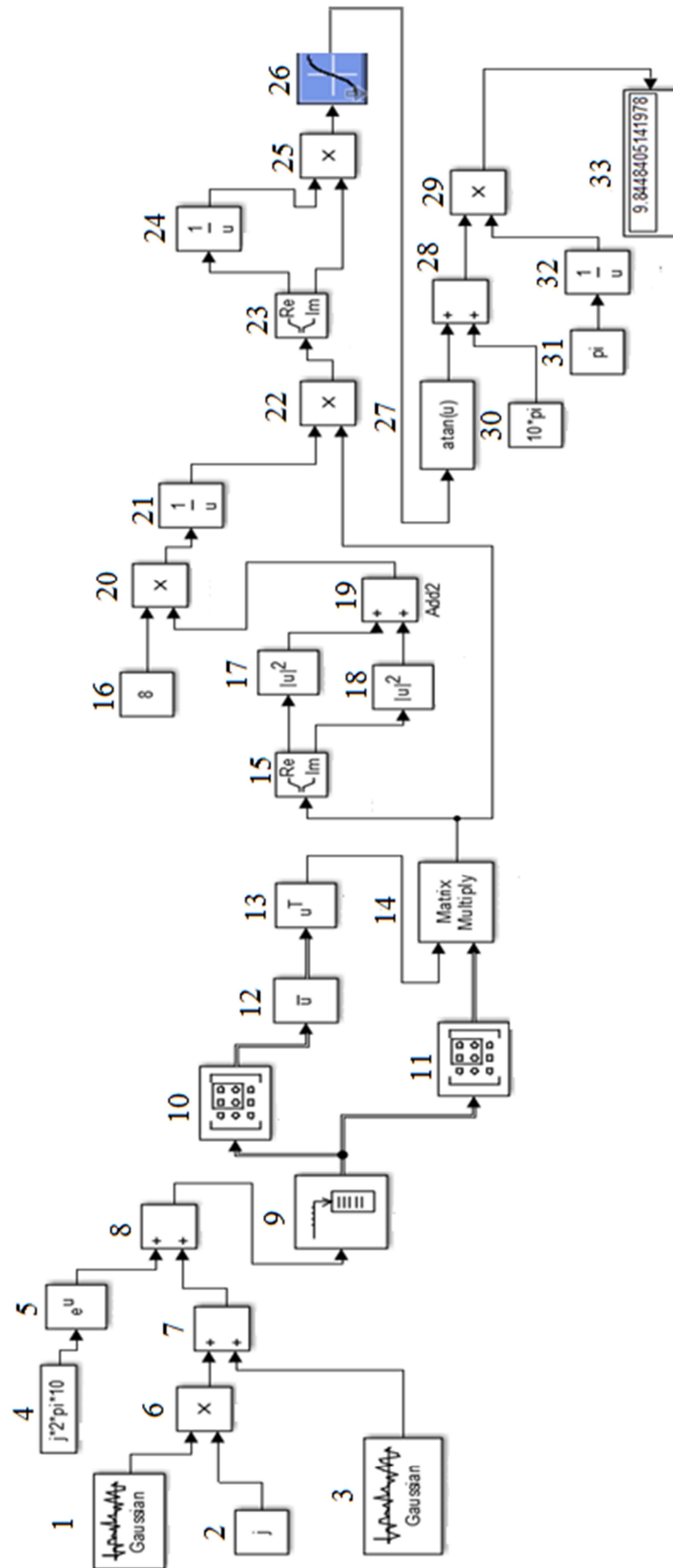


Рисунок 3.6 – Схема моделювання вимірювача частоти в Simulink

4 ЕКОНОМІЧНА ЧАСТНА. РОЗРАХУНОК СОБІВАРТОСТІ РОБОТИ

4.1 Мета економічного розділу

Метою даного розділу дипломної роботи є економічне обґрунтування розробки та впровадження програмного продукту. Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі завдання:

- розрахувати трудомісткість виконання робіт;
- скласти кошториси витрат на розробку програмного продукту;
- розрахувати собівартість додатку в залежності від різної команди розробників.

Розроблюваний продукт - це програма, за допомогою якої можна змодельовати алгоритм оцінки частоти гармонічного сигналу на обмеженому інтервалі спостереженні при малій кількості часових відліків.

4.2 Розрахунок собівартості

Витрати на науково-дослідницьку роботу (НДР) включають витрати з виконання НДР.

Кошторис витрат на НДР включає в себе:

- витрати на оплату праці;
- витрати на матеріали;
- амортизація обладнання;
- відрахування на соціальні заходи;
- інші витрати.

До витрат на оплату праці відносяться основна і додаткова заробітна плата персоналу, зайнятого безпосередньо при виконанні конкретної теми. Було визначено, що для ведення всього проекту в цілому і керівництва ходом робіт необхідна посада керівника, для проектування системи, її подальшого налагодження та введення в експлуатацію необхідна участь розробника.

У даній роботі розглянуто два варіанти складу групи розробників:

- інженер та молодший науковий керівник;
- старший науковий співробітник та науковий керівник.

Тривалість кожного етапу визначається за формулою:

$$T = \frac{t}{n}, \quad (4.1)$$

де T – тривалість етапу, дні;

t – трудомісткість етапу, чол.-дні;

n – прийнята кількість виконавців, одночасно зайнятих на певному етапі роботи.

Для розробки того додатка, потрібно наявність співробітників, які, власне, і будуть виконувати розробку програмного забезпечення.

Даний програмний продукт вимагає участі двох виконавців: керівник і молодший науковий співробітник. Результати розрахунку трудомісткості представлені в таблиці 4.1. Згідно з цими підрахунками, на дослідження буде потрібно 34 дні. Робочий місяць покладемо рівним 21 день.

Таблиця 4.1 – Перелік робіт

№ п/п	Етапи робіт	Трудомісткість, чол.-дн		Сумарна трудомісткість, чол.-дн	Тривалість, дні
		Керівник	Молодший науковий співробітник		
1	Розробка технічного завдання	2	2	4	2
2	Постановка завдання, виявлення ключових цілей проекту	2	2	4	2
3	Розробка алгоритму роботи програми	3	7	10	7
4	Розробка програмного коду	2	10	12	10
5	Тестування програми, проведення експериментів	2	5	7	5
6	Доопрацювання ПЗ	1	3	4	3
7	Остаточне тестування і проведення експериментів	2	2	4	2
8	Розробка документації	1	3	4	3
Разом		15	34	49	34

Для проектування і розробки програмного продукту знадобиться використовувати працю керівника (15 чол./днів), а також праця молодшого наукового співробітника (34 чол./днів).

В кінцевому підсумку ми отримали, що на розробку програмного забезпечення нам буде потрібно грипу, що складається з двох чоловік: керівник і молодший науковий співробітник, тривалість роботи виконання - 34 днів.

Вартість необхідного обладнання, інструментів і матеріалів, а також їх призначення і необхідну кількість представлені в таблиці 4.2 і таблиці 4.3.

Таблиця 4.2 - Вартість обладнання

№ п/п	Найменування матеріалу	Призначення	Кіл-ть, шт.	Ціна за одиницю, грн.	Сума, грн
1	Ноутбук HP Pavilion Notebook 15-cw1011ua (8RW14EA)	Робота з програмним середовищем	2	15000	30000
2	Принтер HP LaserJet P2035 (CE461A)	Роздрукування документації	1	6200	6200
3	Офісні меблі (комплект)	Забезпечення робочого місця	2	4500	9000
Разом				45200	

Таблиця 4.3 - Витрати на матеріали та інструменти

№	Найменування матеріалу	Ціна за одиницю, грн	Кількість, шт.	Сума, грн.
1	Папка для проекту	8	1	8
2	Бумага (пачка)	99	1	99
3	Ручка	3	2	6
4	Корректор	15	1	15
5	Маркер	6	2	12
6	Флеш-пам'ять USB 16 ГБ	199	1	199
7	Комп'ютерна миша GENIUS MN/DX-125	250	2	500
Разом				839

Таким чином, вартість обладнання для даного проекту складають ОС = 44394 грн, витрати на матеріали та інструменти - 839 грн.

Далі проводиться розрахунок амортизації (А) обладнання, в нашому випадку для ноутбука HP Pavilion Notebook 15-cw1011ua (8RW14EA) і принтера принтер HP LaserJet P2035 (CE461A).

При розрахунку амортизації враховувалося те, що основним критерієм визнання об'єкта основним засобом є часовий чинник і вартість критерій, згідно з яким основним засобом вважається об'єкт вартістю понад 6000 грн.

Амортизацію обладнання як елемент собівартості даної продукції пропонується розраховувати за такою формулою:

$$A = \frac{0,25 \times OB \times ДР}{РД}, \quad (4.2)$$

де А – річні амортизаційні відрахування по даному виду обладнання, грн;

ОБ - вартість обладнання, грн;

РД - кількість робочих днів у році;

ДР - кількість днів для розробки.

Отже, за формулою (4.2) величина амортизаційних відрахувань залежно від часу використання ноутбука та принтера:

$$A = (0,25 \times 36200 \times 34) / 250 = 1230,8(\text{грн}) \quad (4.3)$$

Вартість технологічної електроенергії обчислюється за формулою:

$$S_T = Tar \times T \times W, \quad (4.4)$$

де Tar – тариф електроенергії за один кВт, грн;

T – кількість годин роботи;

W – споживана потужність, Вт.

Отже, за формулою (4.4) вартість енергії двох ноутбуків, при потужності 0,032 кВт:

$$S_{e.\text{ноут.}} = 2,01 \times 272 \times 0,032 = 17,5(\text{грн}) \quad (4.5)$$

Вартість енергії принтера, при потужності 0,11 кВт:

$$S_{e.\text{прин.}} = 2,01 \times 10 \times 0,11 = 2,21(\text{грн}) \quad (4.6)$$

Отже, вартість технологічної електроенергії:

$$S_T = 17,5 + 2,21 = 19,71(\text{грн}) \quad (4.7)$$

Вартість освітлювальної електроенергії розраховується за формулою:

$$S = Tar \times T \times W, \quad (4.8)$$

де W – потужність, споживана освітлювальним, кВт;

T_{ар} – тарифна вартість 1 кВт електроенергії, грн.

$$S = 2,01 \times 272 \times 0,1 = 54,67(\text{грн}) \quad (4.9)$$

Вартість освітлювальної електроенергії дорівнює $S = 54,67$ грн.

Розрахунок основної та додаткової заробітної плати, нарахувань на заробітну плату.

Заробітна плата - винагорода за працю залежно від кваліфікації працівника, складності, кількості, якості та умов виконуваної роботи, а також компенсаційні виплати і стимулюючі виплати.

Заробітна плата керівника і молодшого наукового співробітника складається з основної та додаткової заробітної плати.

Для даного проекту розраховується заробітна плата керівника та молодшого наукового співробітника (таблиця 4.4).

Таблиця 4.4 – Середньомісячна і денна заробітна плат

Посади	Посадові оклади	
	Місячний, грн	Денний, грн
Керівник проекту	13200	628
Молодшого наукового співробітника	10000	476

Основна заробітна плата ($ЗП_{осн}$) складається з суми середньої денної заробітної плати керівника і молодшого наукового співробітника, помноженої на їх трудомісткість і розраховується за формулою:

$$ОЗП = ЗП_{к} \times T_{к} + ЗП_{мнс} \times T_{мнс}, \quad (4.10)$$

де $ЗП_{к}$ – заробітна плата керівника, грн.

$ЗП_{мнс}$ – денна заробітна плата молодшого наукового співробітника, грн;

$T_{к}$ - трудомісткість керівника, чол.-дн;

$T_{мнс}$ – трудомісткість молодшого наукового співробітника, чол.-дн.

Таким чином, основна заробітна плата, розрахована за формулою (4.10) дорівнює:

$$ОЗП = 628 \times 15 + 476 \times 34 = 9420 + 16184 = 25604(\text{грн}) \quad (4.11)$$

Невиробничі витрати:

$$НВ = ОЗП \times 12\% = 25604 \times 0,12 = 3072,48(\text{грн}) \quad (4.12)$$

Додаткова заробітна плата ($ЗП_{доп}$), яка становить у керівника 30%, у молодшого співробітника 30% від основної заробітної плати і розраховується:

$$ДЗП = ОЗП \times 30\% \quad (4.13)$$

Отже, за формулою (4.12) додаткова заробітна плата дорівнює:

$$ДЗП = 25604 \times 0,3 = 7681,2(\text{грн}) \quad (4.14)$$

Разом, загальний фонд заробітної плати становить:

$$ФЗП = ОЗП + ДЗП = 25604 + 7681,2 = 33285,2(\text{грн}) \quad (4.15)$$

Нарахування на заробітну плату складають 22% і розраховується за формулою:

$$ЄСВ = 22\% \times (ОЗП + ДЗП) \quad (4.16)$$

Отже, за формулою (4.15) нарахування на заробітну плату становлять:

$$ЄСВ = 22\% \times 33285,2 = 7322,74(\text{грн}) \quad (4.17)$$

Собівартість - це вартісна оцінка використовуваних в процесі виробництва продукції (робіт, послуг) природних ресурсів, сировини, матеріалів, палива, енергії, основних фондів, трудових ресурсів та інших витрат на її виробництво і

реалізацію. Собівартість дорівнює сумі всіх витрат на дослідження і розраховується за формулою:

$$C = \text{ОЗП} + \text{ДЗП} + \text{ЄСВ} + \text{НВ} + \text{А} + \text{М} + S_T + S + \text{Оренда} \quad (4.18)$$

Отже, з формули (4.17) собівартість становить:

$$C = 25604 + 7681,2 + 7322,74 + 3072,48 + 1230,8 + 839 + 19,71 + 54,67 + 7400 = 53224,6(\text{грн}) \quad (4.19)$$

Калькуляційні статті собівартості на розробку програмного подукту представлені в таблиці 4.5.

Таблиця 4.5 – Калькуляційні статті собівартості

№	Статті	Сума, грн	Примітка
1	Основна заробітна плата (ОЗП)	28 544	ОЗП
2	Додаткова заробітна плата (ДЗП)	5 708	20% від ОЗП
3	Єдиний соціальний внесок	7 535	22%× (ОЗП+ДЗП)
4	Матеріали та інструменти (М)	665	3 таблиці 7.3
5	Невиробничі витрати (НВ)	3425	12% від ОЗП
6	Оренда приміщення	7400	Оренда
7	Амортизація	1 542	25% від ОЗ×(ДР/РД)
8	Технологічна електроенергія (S_T)	19,71	$S_T = S_{e.ноут.} + S_{e.прин.}$
9	Освітлювальна електроенергія (S)	54,67	$S = Tar \times T \times W$
10	Собівартість (C)	53 224	п.1+п.2+...+п.9

Отже, при розрахунку першого варіанту складу групи розробників знадобиться 34 робочих дні, а собівартість дорівнює 53 224 грн.

Визначення розміру витрат при другому варіанті організації роботи.

Для оптимального вирішення даного завдання, розглянемо другий варіант. Для дослідження будуть задіяні старший науковий співробітник та керівник.

Результати розрахунку трудомісткості для цього варіанту, представлені в таблиці 4.6. Згідно з цими підрахунками, на дослідження буде потрібно 25 днів. Кількість робочих днів у місяці - 21.

Таблиця 4.6 – Перелік робіт

№ п/п	Етапи робіт	Трудомісткість, чол.-дн		Сумарна трудомісткість, чол.-дн	Тривалість, дні
		Керівник	Старший науковий співробітник		
1	Розробка технічного завдання	2	2	4	2
2	Постановка завдання, виявлення ключових цілей проекту	2	2	4	2
3	Розробка алгоритму роботи програми	3	5	8	5
4	Розробка програмного коду	2	7	10	7
5	Тестування програми, проведення експериментів	2	4	6	4
6	Доопрацювання ПЗ	1	2	3	2
7	Остаточне тестування і проведення експериментів	2	1	3	2
8	Розробка документації	1	2	3	2
Разом		15	25	49	26

Для програиноного продукту, знадобиться використовувати працю керівника (15 чол/дн), та працю старшого наукового співробітника (25 чол/дн).

На розробку та дослідження алгоритму оцінки частоти гармонічного шумоподобного сигналу нам буде потрібна команда, що складається з двох чоловік: керівника та старшого наукового співробітника, термін виконання – 25 дні. Робочий день – восьмигодинний.

Вартість необхідного обладнання, інструментів і матеріалів, а також їх призначення і необхідна кількість представлені в таблиці 4.2 та 4.3.

Витрати на матеріали і інструменти для даної роботи складають $M = 665$ грн.

Заробітна плата розробників складається з основної та додаткової заробітної плати.

Таблиця 4.7 – Середньомісячна і денна заробітна плат

№ п/п	Посада	Заробітна плата / місяць (21 день), грн.	Заробітна плата / день, грн.
1	Керівник проекту	13200	628
2	Старший науковий співробітник	12000	571

Основна заробітна плата за дослідження формулою (4.10) дорівнює:

$$ОЗП = 628 \times 15 + 571 \times 25 = 9420 + 14275 = 23695 \text{ (грн)}. \quad (4.19)$$

Отже, основна заробітна плата становить 23695 грн.

Додаткова заробітна плата дорівнює:

$$ДЗП = 23695 \times 0,3 = 7108,5 \text{ (грн)}. \quad (4.20)$$

Разом, загальний фонд заробітної плати становить:

$$ФЗП = ОЗП + ДЗП = 23695 + 7108,5 = 30803,5 \text{ (грн)}. \quad (4.21)$$

За формулою (4.16) нарахування на заробітну плату становлять:

$$ССВ = 30803,5 \times 0,22 = 6776,77 \text{ (грн)}. \quad (4.22)$$

Отже, за формулою (4.2) величина амортизаційних відрахувань залежно від часу використання ноутбука та принтера:

$$A = (0,25 \times 36200 \times 25) / 250 = 905 \text{ (грн)}. \quad (4.23)$$

Отже, за формулою (4.4) вартість енергії ноутбука, при потужності 0,032 кВт:

$$S_{\text{е.ноут.}} = 2,01 \times 200 \times 0,032 = 12,86 \text{ (грн)}. \quad (4.24)$$

Вартість енергії принтера, при потужності 0,11 кВт:

$$S_{\text{е.ноут.}} = 2,01 \times 10 \times 0,11 = 2,21 \text{ (грн)}. \quad (4.25)$$

Отже, вартість технологічної електроенергії:

$$S_T = 12,86 + 2,21 = 15,07 \text{ (грн)}. \quad (4.26)$$

Вартість освітлювальної електроенергії розраховується за формулою (4.8):

$$S = 2,01 \times 200 \times 0,1 = 40,2 \text{ (грн)}. \quad (4.27)$$

Невиробничі витрати:

$$НВ = ОЗП \times 12\% = 23695 \times 0,12 = 2843,4 \text{ (грн)}. \quad (4.28)$$

З формули (4.17) собівартість становить:

$$C = 23695 + 7108,5 + 6776,77 + 2843,4 + 905 + 665 + 15,07 + 40,2 + 7400 = 49448,54 \text{ (грн)}. \quad (4.29)$$

Калькуляційні статті собівартості на розробку програмного подукту представлені в таблиці 4.8.

Таблиця 4.8 – Калькуляційні статті собівартості

№	Статті	Сума, грн	Примітка
1	Основна заробітна плата (ОЗП)	23 695	ОЗП
2	Додаткова заробітна плата (ДЗП)	7 108,5	20% від ОЗП
3	Єдиний соціальний внесок	6 776,7	22%× (ОЗП+ДЗП)
4	Матеріали та інструменти (М)	665	3 таблиці 7.3
5	Невиробничі витрати (НВ)	2 843,4	12% від ОЗП
6	Оренда приміщення	7400	Оренда
7	Амортизація	905	25% від ОЗ×(ДР/РД)
8	Технологічна електроенергія (S_T)	15,07	$S_T = S_{e.ноут.} + S_{e.прин.}$
9	Освітлювальна електроенергія (S)	40,2	$S = Tar \times T \times W$
10	Собівартість (С)	49 448,54	п.1+п.2+...+п.9

Висновок: отже, при розрахунку першого варіанту складу групи розробників (керівник та молодший науковий співробітник) знадобиться 34 робочих дні, а собівартість дорівнює 53 224 грн. при розрахунку другого варіанту складу групи розробників (керівник та старший науковий співробітник) знадобиться 25 робочих днів, а собівартість дорівнює 49 448,54 грн.

Таким чином різниця собівартості складає 3776 грн. Звідси випливає, що з економічної точки зору доцільно використовувати 2-й варіант, тому що в цьому випадку витрати, пов'язані з виконанням роботи, менше.

ВИСНОВОК

В роботі було зроблено атестацію якісних характеристик, на рівні цифрового моделювання, швидкого перетворення Фур'є. Після чого було встановлено, що для малої кількості відліків (16, 32) сигналу цей метод дає велике зміщення оцінки частоти при невеликих співвідношень сигнал/шум. Тому був запропонований алгоритму оцінювання частоти гармонійного сигналу при сегментації даних за методом максимальної правдоподібності. Аналізуючи цю технологію, можна сказати, що алгоритм дає практично невелике зміщення оцінки частоти для невеликої кількості відліків (16, 32) та дає можливість достатньо точно оцінити частоту.

З таблиць 2.3, 2.4 та рисунків 2.16, 2.17, 2.18 видно, що метод швидкого перетворення Фур'є дає великі похибки на інтервалі сигнал/шум починаючи з 0,01 і закінчуючи співвідношенням 0,4, далі похибка зменшується та прямує до 0. Проте, алгоритм правдоподібності при сегментації даних має на всьому інтервалі сигнал/шум дуже мале значення похибки. Максимальне значення якої складає 0.0418 Гц при співвідношенні сигнал/шум 0.02 на 16 відліках, а мінімальне значення на 16 відліках 0.001 Гц.

Також у середовищі Simulink була змодельована система для вимірювання частоти гармонічного сигналу при сегментованих даних, яка підтверджує теоретичні розрахунки.

В роботі було проведено розрахунок собівартості розробки та було встановлено, що при розрахунку першого варіанту складу групи розробників (керівник та молодший науковий співробітник) знадобиться 34 робочих дні, а собівартість дорівнює 53 224 грн. при розрахунку другого варіанту складу групи розробників (керівник та старший науковий співробітник) знадобиться 25 робочих днів, а собівартість дорівнює 49 448,54 грн. Таким чином різниця собівартості складає 3776 грн. Звідси випливає, що з економічної точки зору доцільно використовувати 2-й варіант, тому що в цьому випадку витрати, пов'язані з виконанням роботи, менше.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 547 с.
2. Фалькович С. Е., Костенко П. Ю. Основы статистической теории радиотехнических систем. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т», 2005. – 390 с.
3. Василишин В.И. Повышение эффективности спектрального анализа методом esprit с использованием технологии суррогатных данных // Прикладная радиоэлектроника. – 2013. – Том 12, №3. – С. 400–407.
4. Василишин В.И. Спектральный анализ методом esprit при предварительной обработке данных методом SSA // Системи обробки інформації. – 2015. – Том 126, № 1. – С. 12–15.
5. Бортник Г.Г., Бортник О. Г., Стальченко О. В. Метод цифрового спектрального аналізу вузькосмугових сигналів // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2016. – №4. – С. 97–101.
6. Коваль О. А. Методи синтезу та аналізу вимірних сигналів: Конспект лекцій. – Харків: Харківський національний автомобільно-дорожній університет, 2018. – 365 с.
7. О применении параметрических методов спектрального оценивания в радиолокации — метод MUSIC [Электронный ресурс]. - Режим доступа до сайту: <https://habr.com/ru/post/455393/>
8. Оценка погрешности измерений [Электронный ресурс]. - Режим доступа до сайту: http://mido.kiev.ua/kpi/pe/slavutsky/glav2_1.htm
9. Мартынов В. А., Седлихов Ю.И. Панорамные приемники и анализаторы спектра. – М.: Советское радио, 1980. – 352 с.
10. Жлуктенко В. І. та ін. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч. посібник / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний, С. С. Савіна; КНЕУ. - К., 2001. – 336 с.

ДОДАТОК А

```

clc
clear all
f = 10; %Гц
Fs = 4*f; % частота дискретизації
L = [16, 32, 64]; %к-сть відліків
SNR = [0.01 0.02 0.04 0.06 0.08 0.1 0.2 0.4 0.6 0.8 1 2 3 4 5 6 7
8 9 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100];
SNR_0 = sqrt(2*SNR);%*2 для комплексного сигналу
T = 1/(2*Fs);
t = (0:L(1)-1)*T;
A = 1; %амплітуда
p = 100;
i = sqrt(-1);
S = A*(cos(2*pi*f*t)+i*sin(2*pi*f*t)); %сигнал
for m = 1:length(SNR)
for k = 1:p
Sn = SNR_0(m)*S+randn(size(t))+i*randn(size(t)); % сигнал з шумом
n = length(Sn);
X = fft(Sn);
fx = (0:n-1)*(2*Fs/n);
power = abs(X).^2/n;

Y = fftshift(X);
Y_ffts = (-n/2:n/2-1)*(Fs/n); % 2*Fs=80
power_sh = abs(Y).^2/n;

[y, x] = max(power); % значення у та його індекс
f0(k) = fx(x); % частота

end
f0_otcenka(m) = mean(f0);
dispers(m) = var(f0);
end
figure
semilogx(SNR,f0_otcenka,'-*')
grid on
xlabel('C/III');
ylabel('f, Гц');

figure
semilogx(SNR,dispers,'-*')
grid on
xlabel('C/III');

figure
plot(fx,power./max(power))
xlabel('f, Гц');
ylabel('A');
grid on

```

ДОДАТОК Б

```

clear
clc
f = 10;
L = 16;
A = 1; %амплітуда
p = 100;
i = sqrt(-1);
SNR = [0.01 0.02 0.04 0.06 0.08 0.1 0.2 0.4 0.6 0.8 1 2 3 4 5 6 7
8 9 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100];
%SNR = [5];
t = 1:L;
SNR_0 = sqrt(2*SNR);
phi=0;
k = 1:L;
T = 1;

F = L/(2*T);
f0 = f/T;
AA=A*exp(i*phi);
SS=((exp(i*2*pi*f/L)).^(k-1));
Sign=AA*SS;%signal

for m = 1:length(SNR)
for x = 1:100
S = SNR_0(m)*Sign+randn(size(t))+i*randn(size(t)); % СИГНАЛ З
ШУМОМ
    chisl =
conj(S(1:L/2))*S(L/2+1:L).';%/abs(S(1:r)*conj(S(1,[w:16]))');
    znamen = real(chisl)^2+imag(chisl)^2;
    q = chisl/0.5*L*znamen;
    tangens = imag(q)/real(q);
    f0(x) = (atan(tangens)+10*pi)/pi;
end
f_sredn(m) = mean(abs(f0));
dispers(m) = var(f0);
end

figure
semilogx(SNR,f_sredn,'p-')
grid on
xlabel('C/Ш')
ylabel('f, Гц')
ylim([9.9 10.1])
%
figure
semilogx(SNR, dispers, 'p-') %дисперсія
grid on
xlabel('C/Ш')
ylabel('\sigma^2')
ylim([-0.01 0.1])

```