УДК 658.2

В.Ф. ШМЫРЕВ[1], В.Н. ТОРЧИЛО[2], Н.М. ФЕДОРЕНКО[3]

[1]АНТК «Антонов», Украина
[2]АО «Авионика», Украина
[3]Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ АВИАРЕМОНТНЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

Рассмотрено общее решение задачи оптимальной организации работы авиаремонтного предприятия на основе теории очередей. На базе аналитических моделей получены соотношения, определяющие оптимальные характеристики производственной деятельности.

система массового обслуживания, аналитическая модель, оптимизация, обратная задача, вариация, интервальный полином

Линеаризация задач оценок пропускной способности многоканальных и многофазных систем позволяет исключить проблемы нелинейности и с помощью упрощенных расчетов обосновать ее структуру, близкую к оптимальной с некоторой допустимой погрешностью.

Рассмотрим трехканальную трехфазную систему массового обслуживания где все каналы автономны, не связанны между собою, и каждая заявка, которая поступает по i-му каналу, последовательно обслуживается в трех фазах, причем общее время обслуживания для j-го канала определяется формулой:

$$a_i = \sum_{j=1}^{3} t_{ij}, \qquad (1)$$

где t_{ij} – время обслуживания заявки на j-ой фазе i-ого канала.

Как правило, заявки на обслуживание поступают случайно в соответствии с пуассновым законом распределения и вероятность p_{noij} необслуженных заявок i-го канала на j-ой фазе определяется зависимостью:

$$p_{noij} = 1 - e^{-x_{ij} t_{ij}}, \qquad (2)$$

где x_{ij} – интенсивность поступления заявок на j-в фазу по i-оме канала.

Поскольку заявки на j-ю фазу по i-ому каналу поступают с ($j-1$)-ой фазы, то их интенсивность x_{ij} будет снижена за счет потерь заявок на ($j-1$)-ой фазе и определяется зависимостью:

$$x_{ij} = x_{ij-1} e^{-x_{ij-1} t_{ij-1}}. \qquad (3)$$

Таким образом, при определении вероятности p_{noij} требуется учитывать снижение интенсивности на предшествующих фазах в соответствии с выражением (3). Поэтому задача оценки пропускной способности в общем случае является нелинейной а ее решение требует сложного и громоздкого математического аппарата.

Как правило, в соответствии с требованиями на обслуживание вероятность p_{noij} не должна быть большой, например

$$p_{noij} < 0.1. \qquad (4)$$

Тогда в соответствии с требованием (4) функцию (2) с учетом (1) и (3) можно разложить в ряд Тейлора:

$$p_{noij} = x_i a_i + \xi(x_i, a_i) \qquad (5)$$

где $\xi(x_i, a_i)$ – погрешность метода.

Чем выше требование на пропускную возможность, тем более точно она оценивается с помощью формулы (5).

В общем случае для всех каналов многоканальной СМО вероятность $p_{ноij}$ не обслуживания можно представить вектором и оценить матричным выражением:

$\boldsymbol{P_{но}} = \boldsymbol{AX},$

где $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{P_{но}}$ – векторы-столбцы интенсивности поступление заявок и вероятностей их не обслуживания по всем каналам; A – квадратная матрица, элементы a_{ij} которой определяют время обслуживания заявок по i-ому каналу на j-ой фазе. Поскольку в трехканальной и трехфазной СМО каналы не зависимы между собою, то матрица A имеет вид:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Общая интенсивность X_i не обслуженных заявок по всем каналам многоканальной СМО может быть определена матричным уравнением:

$$X_i = X^T AX, \qquad (7)$$

где X^T и X соответственно вектор-строка и вектор-столбец интенсивностей x_i заявок, которые поступают на обслуживание многоканальной и многофазной СМО.

В соответствии с (7) общую интенсивность X_0 обслуженных заявок можно оценить формулой:

$$X_0 = \sum_{i=11}^{n} x_i - X^T AX, \qquad (8)$$

где x_i – интенсивность поступления заявок на i-ому каналу.

Формула (8) определяет реальную пропускную способность многоканальной и многофазной СМО.

Предположим, что каждая заявка по i-му каналу, поступающая с интенсивностью x_i, влечет за собой плату за обслуживание d_i. Интенсивность y_i заявок с учетом оплаты, очевидно, можно оценить формулой:

$$y_i = x_i d_i. \qquad (9)$$

С учетом (9) и (8) реальный общий доход D СМО можно оценить в соответствии с выражением:

$$D = \sum_{i=1}^{n} y_i - Y^T AX, \qquad (10)$$

где Y^T – вектор-строка интенсивностей y_i поступление заявок с учетом их оплаты за обслуживание.

Обеспечение максимального допустимого значения вероятности $\boldsymbol{P_{но}}$ при увеличении их интенсивности x_i можно достичь путем уменьшения a_i времени обслуживания заявок, которые связаны с наращиванием производственных мощностей и дополнительными экономическими затратами на расширение производства.

Введем производственную матрицу N:

$$N = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix}. \qquad (11)$$

Целочисленные элементы матрицы (11) определяют количество рабочих мест в i-ому каналу на j-ой фазе.

Введем вектор R стоимости работ, составные r_i которого определяют стоимость работы на j-ой фазе. Тогда общая стоимость R_c может быть определена матричной зависимостью

$$R_c = R_I^T NR, \qquad (12)$$

где R_1^T – единичный транспонированный вектор.

Это выражение определяет экономические затраты, направленные на повышение пропускной способности СМО путем уменьшения времени обслуживание заявок.

Разность $V = D - R_c$ между доходом D и затратами R_c выражает прибыль СМО и может быть определена с учетом (3) и (12) расчетной формулой:

$$V = \sum y_i - Y^T AX - R_1^T NR \qquad (13)$$

Выбор оптимальной численности рабочих мест, обеспечивающих максимальную прибыльность

Рассмотрим задачу достижения прибыли V при условии, согласно которому снижение времени обслуживание a_{ij} в e раз обеспечивается увеличением числа рабочих мест n_{ij} во столько же раз.

Пусть:

$$N=\begin{bmatrix}4+\Delta n_1 & 3+\Delta n_2 & 2\\ 4 & 3 & 2\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix},\ R=\begin{bmatrix}2.5\\ 5.\\ 3.5\end{bmatrix},$$

$$A=\begin{bmatrix}\frac{0.002}{4+\Delta n_1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{0.004}{3+\Delta n_2} & 0\\ 0 & 0 & 0.003\end{bmatrix},$$

$$X=\begin{bmatrix}50\\ 100\\ 150\end{bmatrix},Y=\begin{bmatrix}50.\\ 120.\\ 210.\end{bmatrix}. \qquad (14)$$

Составу r_i и d_i векторов R и D определяют соответственно стоимость работы и оплату за обслуживание в условных единицах по i-ому каналу СМО. Составные y_i вектора Y определяют предвиденную прибыль за обслуживание по i-ому каналу с учетом интенсивности x_i заявок, которые поступают на обслуживание.

В соответствии с исходными данными прибыль определяется соотношением

$$V=189.5-\frac{5}{4+\Delta n_1}-\frac{48}{3+\Delta n_2}-2.5\Delta n_1-5\Delta n_2. \qquad (15)$$

График функции представлен на рис. 1

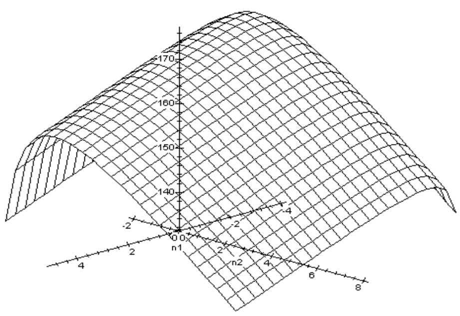

Рис. 1. Зависимость прибыли от числа работающих на участках

Полученный функционал имеет явно выраженный экстремум. Для определения оптимальных значений первичных параметров удобней рассматривать плоские сечения в общем случае многомерной поверхности функции прибыли. Так для $\Delta n_2=0$

$$V=173.5-\frac{5}{4+\Delta n_1}-2.5\Delta n_1.$$

Зависимость прибыли от вариации числа работающих на втором участке представлена на рис. 2.

Расчет зависимости между прибылью и числом рабочих мест 2-го участка при недопущении сокращений на 1-м с интервальными значениями показателей стоимости выполняемых работ.

Для общего вида матрицы $R=[r_1\ r_2\ r_3]^T$, полиномиальная модель, связывающая прибыль с производственными характеристиками системы обслуживания имеет вид:

$$\begin{aligned}&(r_1\,\Delta n_2 + 3\,r_1)\,\Delta n_1^2 + (48\,r_1 + 6\,r_3\,\Delta n_2 - 1092. +\\ &+ 18\,r_3 + 16\,r_1\,\Delta n_2 + 3V + V\,\Delta n_2 + 12\,r_2\,\Delta n_2 +\\ &+ r_2\,\Delta n_2^2 - 380.\,\Delta n_2 + 27\,r_2)\,\Delta n_1 + 12\,V + 72\,r_3 +\\ &+ 144\,r_1 + 48\,r_2\,\Delta n_2 + 4\,V\,\Delta n_2 - 1515.\,\Delta n_2 +\\ &+ 48\,r_1\,\Delta n_2 + 4\,r_2\,\Delta n_2^2 + 24\,r_3\,\Delta n_2 + 108\,r_2 -\\ &- 4353. = 0. \qquad (16)\end{aligned}$$

С учетом интервальности значений показателей стоимости выполняемых работ:

$$R=\begin{bmatrix}[\underline{r_1},\overline{r_1}]\\ [\underline{r_2},\overline{r_2}]\\ [\underline{r_3},\overline{r_3}]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[2.5, & 3.\\ [5., & 6.]\\ [3.5, & 4.5]\end{bmatrix}. \qquad (17)$$

Следовательно, получаем интервальный полином вида:

$$\begin{aligned}&([2.5, 3.]\,\Delta n_2 + 3\,[2.5, 3.])\,\Delta n_1^2 + (48\,[2.5, 3.] +\\ &+ 6\,[3.5, 4.5]\,\Delta n_2 - 1092. + 18\,[3.5, 4.5] +\\ &+16\,[2.5, 3.]\,\Delta n_2 + 3V + V\,\Delta n_2 + 12\,[5., 6.]\,\Delta n_2 +\\ &+ [5., 6.]\,\Delta n_2^2 - 380.\,\Delta n_2 + 27\,[5., 6.])\,\Delta n_1 + 12\,V +\\ &+ 72\,[3.5, 4.5] + 144\,[2.5, 3.] + 48\,[5., 6.]\,\Delta n_2 +\\ &+ 4\,V\,\Delta n_2 - 1515.\,\Delta n_2 + 48\,[2.5, 3.]\,\Delta n_2 +\\ &+ 4\,[5., 6.]\,\Delta n_2^2 + 24\,[3.5, 4.5]\,\Delta n_2 + 108\,[5., 6.] -\\ &- 4353. = 0 \qquad (18)\end{aligned}$$

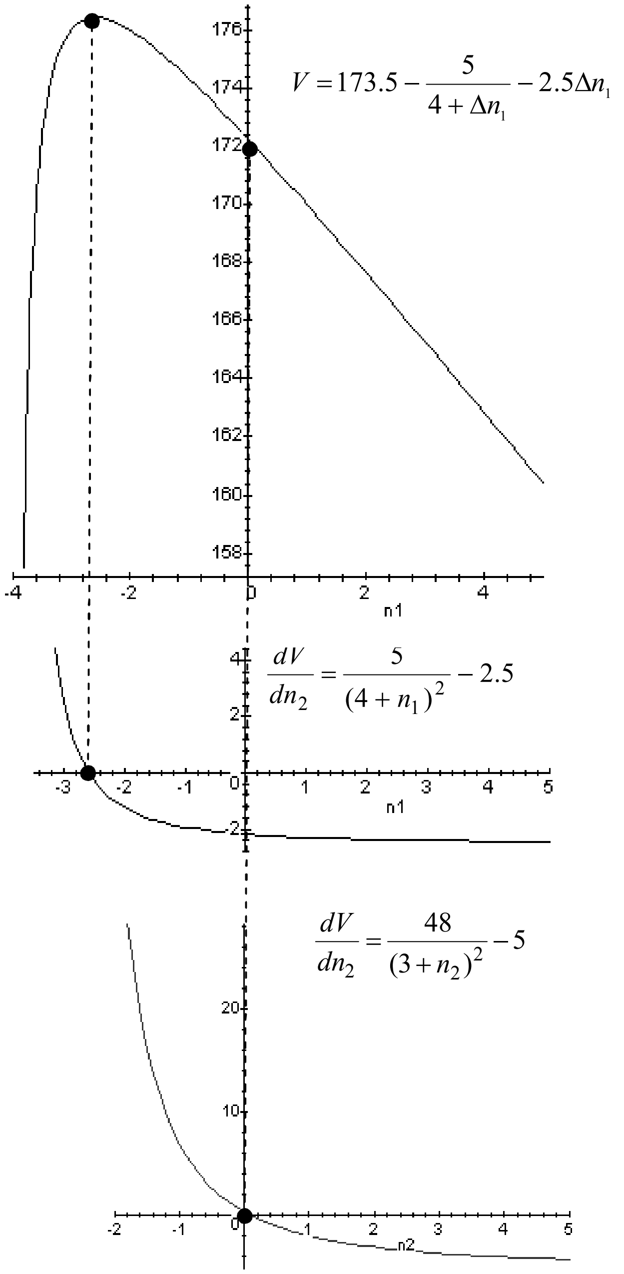

Рис. 2. Зависимость прибыли от вариации числа работающих

или в общей форме записи

$$a_2\Delta n_2^2 + a_1\Delta n_2 + a_0 = 0. \qquad (19)$$

Условия решения задачи, в соответствии с теоремой Харитонова, для интервальных полиномов и косвенным критерием Гурвица расположения корней степенного полинома справа от мнимой оси запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
&\overline{a}_0 \le 0, \overline{a}_1 \le 0, \underline{a}_2 \le 0;\\
&\overline{a}_0 \le 0, \underline{a}_1 \le 0, \underline{a}_2 \le 0;\\
&\underline{a}_0 \le 0, \underline{a}_1 \le 0, \overline{a}_2 \le 0;\\
&\underline{a}_0 \le 0, \overline{a}_1 \le 0, \overline{a}_2 \le 0;
\end{aligned} \qquad (20)$$

где верхние $\overline{a}_0$, $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ и нижние $\underline{a}_0$, $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ значения соответствующих коэффициентов принимают значения:

$$\begin{aligned}
&\overline{a}_0 = 12V - 2949. - 975.\ \Delta n_2 + 4V\ \Delta n_2 + 24.\ \Delta n_2^2;\\
&\underline{a}_0 = 12V - 3201. - 1071.\ \Delta n_2 + 4V\ \Delta n_2 + 20.\ \Delta n_2^2;\\
&\overline{a}_1 = 3V - 705. - 233.\ \Delta n_2 + V\ \Delta n_2 + 6.\ \Delta n_2^2;\\
&\underline{a}_1 = 3V - 774. - 259.\ \Delta n_2 + V\ \Delta n_2 + 5.\ \Delta n_2^2;\\
&\overline{a}_2 = 9. + 3.\ \Delta n_2;\\
&\underline{a}_2 = 7.5 + 2.5\ \Delta n_2.
\end{aligned} \qquad (21)$$

Условия (20) выполняются в рассматриваемом диапазоне изменения первичных параметров (рис. 3).

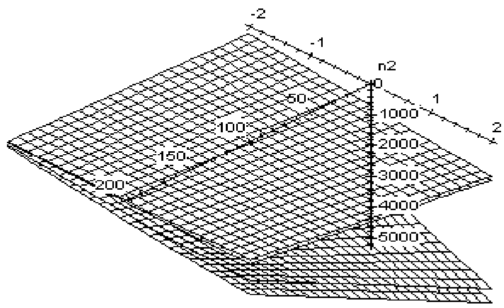

Рис. 3. Выполнение условий Гурвица для угловых полиномов

Исходя из зависимостей (21), граничные условия для первичных параметров определяются соотношениями:

$$V = 0.75\ \frac{983 + 325\ \Delta n_2 - 8\ \Delta n_2^2}{3 + \Delta n_2};$$

$$V = \frac{705 + 233\Delta n_2 - 6\Delta n_2^2}{3 + \Delta n_2};$$

$$V = 0.25\frac{3201 + 1071\Delta n_2 - 20\Delta n_2^2}{3 + \Delta n_2};$$

$$V = \frac{774 + 259\Delta n_2 - 5\Delta n_2^2}{3 + \Delta n_2}, \qquad (22)$$

среди которых условие $\overline{a_1} < 0$, граница которого определяется равенством $V = \frac{705 + 233\Delta n_2 - 6\Delta n_2^2}{3 + \Delta n_2}$, является наиболее жестким и включает в себя остальные.

Графическое изображение общей области выполнения приведенных условий представлено на рис. 4.

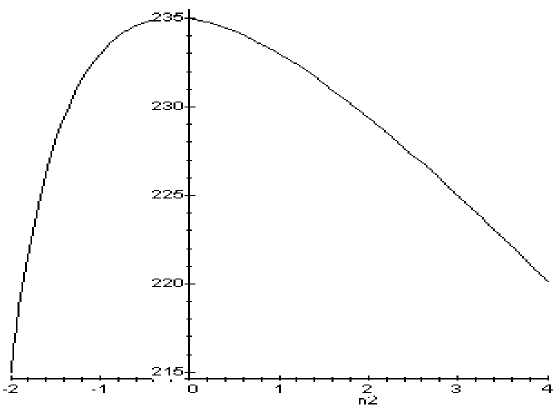

Рис. 4. Общая область выполнения условий

Предложенная методика оценок пропускной возможности СМО позволяет легко найти оптимальное число рабочих мест в ремонтных предприятиях.

Выводы

Рассмотрено символьно-численное решение задачи оптимальной организации работы предприятия сферы обслуживания на основе теории очередей. На базе аналитических моделей теории очередей, с использованием символьно-численных преобразований, получены соотношения, определяющие оптимальные характеристики производственной деятельности.

В общем виде получено решение обратной задачи – определения необходимой вариации средней скорости обслуживания канала при известной вариации числа клиентов (единиц) в очереди на обслуживание.

Литература

1. Михайлов В.Б., Гридин В.Н., Михайлов К.В., Храпонов А.Н. Полиномиальные матрицы и их применение к решению дифференциально-алгебраических систем уравнений m-го порядка для технических приложений. ИТПП, 2001/4. с. 27-33.

2. Вартанян В.М., Дмитришин Д.В., Лысенко А.И. и др. Экономико-математическое обеспечение управленческих решений в менеджменте. – Под ред. Вартаняна В.М. – Харьков: ХГЭУ, 2001. – 288 с.

3. Орлов А.И. Устойчивость в социально-экономических моделях. – М.: Наука, 1979. – 296 с.

4. Жабко А.П., Харитонов В.Л. Методы линейной алгебры в задачах управления. – СПб.: Изд. СПб. ун-та, 1993. – 320 с.

Поступила в редакцию 05.10.03

Рецензент: д.т.н., проф. Жихарев В.Я., Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "Харьковский авиационный институт"