УДК 681.50

В.А. ПОПОВ

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

МОДЕЛИ СТРУКТУР СЛОЖНЫХ СИСТЕМ И ИХ КОМБИНАТОРНО-ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ

Рассматривается модель сложной системы, выделяются структуры – производственная, управленческая и структура компьютерной системы, являющейся информационной поддержкой для системы управления. На основе теории перечисления Пойа предложены комбинаторно – групповые описания типовых структур с использованием теории графов и отображений множеств вершин в заданную номенклатуру некоторых элементов, из которых строится система.

сложная система, структура, группа подстановок, группа графа, перечисление классов эквивалентности

1. Постановка задачи

Проблема исследования технических, экономических и других систем на основе применения моделей сложных систем является актуальной, так как в настоящее время производственные и другие системы настолько усложнились, что без использования средств современного моделирования их анализ является явно недостаточным. В связи с этим возникают новые сложные задачи по разработке таких системных моделей, которые позволили бы на их основе строить частные модели в условиях учета главных факторов, существенно влияющих на эффективность процесса анализа и получаемые практически полезные результаты. [1-4].

Целью данной работы является разработка комбинаторно – группового подхода к анализу и оптимизации структур сложных систем или их фрагментов на основе системного представления на концептуальном уровне.

2. Представление сложной системы

Сложной системой (СС) называют объект из нескольких частей и связей между ними. Кроме того, всякий сложный объект характеризуется некоторым входом и выходом [1]. Например, какая-либо производственная система может быть представлена следующим образом (рис.1.):

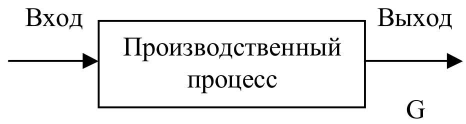

Рис. 1. Производственная система

Производственная система главным образом характеризуется основным производственным процессом, который реализуется с помощью основного производственного оборудования. На вход системы поступают сырье, материалы, полуфабрикаты, комплектующие, электроэнергия, газ, вода, деньги и т.п. Выходом такой системы является выпускаемая продукция, соответствующая потребителям существующего рынка. Таким образом, производственная система представляет собой систему, существующую в условиях окружающей среды G (государство, властные структуры, банки и др.).

Кроме этих двух составляющих, обязательной является и административная система управления (СУ) предприятием, которая предназначается для организации всех работ по переработке всех входных данных в выход системы. Эту систему управления можно разбить на две части: основной процесс управления и основные (или главные) исполнители (люди, персонал). Для осуществления поддержки этой СУ создается информационная управляющая система (ИУС), которая берет на себя определенную часть функций *административной системы управления.* Эту систему можно представить в виде двух процессов: основной информационный процесс и сетевое оборудование.

На основе вышеизложенного возникают важные задачи оптимального построения системы. Одним из методов решения данной задачи является применение *комбинаторно-группового анализа* (КГА) для структуры всей системы в целом или её отдельных фрагментов как основы альтернативного проектирования.

3. Алгоритм комбинаторно-группового анализа (КГА)

Представим алгоритм КГА в виде следующей последовательности действий.

анализ объекта, выявления наиболее важных его свойств и построение структуры объекта, его составных частей с учетом простейшего описания функционирования объекта (т.е. в нашем случае главное внимание уделяется структуре объекта или ее фрагментам);

представление обобщенного словесного описания структуры анализируемого объекта и затем описание ее в виде графа определенной конфигурации Г(N,L), где N – множество вершин, означающих соответствующие элементы анализируемого объекта, а L – множество ребер графа, означающих связи между элементами объекта;

формулирование общей постановки задачи на комбинаторно-групповой анализ;

выявление цели анализа, а так же условий и дополнительных требований для проведения КГА;

выделение двух основных задач КГА.

Первая задача – перечисление графов на основе исходного графа для выбранной структуры по некоторому принципу для выявления множества возможных способов построения объекта и обоснования наиболее рациональной структуры объекта (т.е. набора элементов и связей между ними).

Вторая задача КГА строится на основе заданного графа Г(N,L). В этом случае совокупность вершин графа представляет собой исходное множество элементов D, которые отображаются в некоторое другое множество R. На основе отображения множества D в R $(D \to R)$ можно находить классы эквивалентности (КЭ) (т.е. находить число Ккэ и проводить генерацию представителей этих классов).

Таким образом, задачу КГА сложной системы оказалось возможным свести к задаче определения классов эквивалентности при наличии исходного множества D (т.е. множества вершин графа) и заданного множества R, при этом множество D представляет собой множество мест системы, на которые могут быть выбраны элементы из множества R (т.е. множество R - множество возможных элементов для построения анализируемой системы).

Данная задача может решаться на основе первой модели Пойа, когда имеем группу подстановок на множестве D, для которой находим цикловой индекс и подставляем мощность множества R вместо переменных циклового индекса, что дает количество классов эквивалентности для однозначного отображения $D \to R$;

$K_{кэ} = Z\left(H_D, x_i = |R|\right)$ – число классов эквивалентности, $Z(H_D)$ – цикловой индекс группы H_D.

При использовании второй модели заданы группы (H_D, H_R) соответственно на множества 2-й D и R. Эта модель работает для взаимнооднозначных отображений D в R при $|D| < |R|$, где |D| и |R| – мощности множеств D и R соответственно. Третья модель работает так же, как и вторая модель, но для случая $|D| = |R|$. В случае четвертой модели величина $|D|$ имеет значение как большее, так и меньшее, чем $|R|$, а так же равное ему, т.е. $|D| \lesseqgtr |R|$ (здесь находится общее число классов эквивалентности).

При проведении КГА большое значение имеет правильное обоснование и постановка задачи с учетом особенностей предметной области. Это проявляется в использовании той или иной группы подстановок, группы графа или композиции групп. Особое значение имеет интерпретация получаемых результатов (классы эквивалентности, их представители, перечисляющие многочлен для графов и для отображения вершин графа D в некоторое множество R и др.). Полезным может оказаться проверка результатов КГА с помощью известных формул комбинаторики и приемов технической интерпретации.

Рассмотрим основные типы структур и их КГА.

4. Комбинаторно – групповые характеристики типовых структур

4.1. Радиальная структура (рис. 2)

Примером такой структуры можно считать клиент-серверную сеть, когда на первом (верхнем) уровне находится сервер, а на втором – ПК рабочих мест.

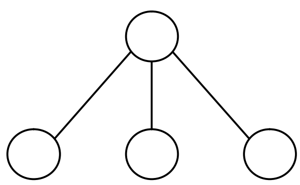

Рис. 2. Радиальная структура

Множество вершин данного графа представляет собой места для постановки в них определенных элементов, например:

$R_1 = (\bullet, \otimes, \oplus)$ – можно поставить один из трех серверов на первом уровне.

$R_2 = (\alpha, \beta, \gamma)$ – на второй уровень можно поставить один из трех разных компьютеров.

Для построения группы графа выберем **следующие условия**:

1) Сверху стоит элемент самостоятельного значения, который может иметь свои собственные модификации, характеризующиеся множеством R_1.

2) Нижний уровень характеризуется тем, что здесь вершины или элементы графа считаются равноправными, для чего используется симметрическая группа S_p, где p – число элементов нижнего ровня.

3) Два вышеуказанных условий позволяют нам записать следующую группу графа:

– тождественная группа E_1 – на первом уровне;

– симметрическая группа S_p – на втором уровне.

Тогда получим $H_Г = E_1(1) + S_p(2)$ – группу графа радиальной структуры, где p – число элементов на нижнем уровне, степень симметрической группы, $H_Г$ – полная группа графа, равная сумме отдельных групп подграфов.

Для решения задачи определения $K_{кэ}$ необходимо найти цикловой индекс графа, который в данном случае определяется так:

$$K_{КЭ} = Z(H_Г, x_i = (R)) = Z(E_1(1)) \cdot Z(S_p(2)),$$

где 1 и 2 являются указателями уровня, т.к. вместо них будут подставлены элементы множеств R_1 и R_2 соответственно.

По первой модели Пойа найдем $K_{кэ}$:

$$K_{КЭ} = Z(H_r) = Z(E_1(1)) \cdot Z(S_p(2)) = x_1(1) \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2) = 3 \cdot \frac{1}{2}(9+3) = 6 \cdot 3 = 18$$

Если на множество R ввести соответствующую группу H_R, то можно использовать *вторую, третью и четвертую модели перечисления* [2].

4.2. Древовидная структура (рис. 3.)

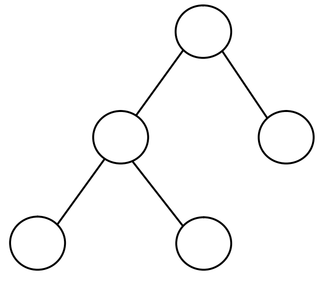

Рис. 3. Древовидная структура

Для заданного случая зададим группу графа в следующем виде:

$$\begin{cases} H_Г = S_1 + S_1 + S_1 + S_2 \text{ - группа графа, состоящая из композиции симметрических групп,} \\ H_R = E_5 \text{ - тождественная группа на множестве R,} \end{cases}$$

$Z(H_R) = x_1^5$ - цикловой индекс тождественной группы.

Цикловой индекс группы графа равен:

$Z(H_r) = x_1(1) \cdot x_1(2) \cdot x_1(2) \cdot \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2)$, так как сумма групп дает произведение их цикловых индексов.

Для получения ЦИ классов эквивалентности необходимо построить по *третьей модели* оператор дифференцирования на основе группы H_R и взять производную на основе циклового индекса $Z(H_R)$.

$$Z(H_Г) = \frac{1}{2}(x_1^5 + x_1^3 \cdot x_2),\ Z(H_R) = Z_1^5,$$

$K_{кэ} \frac{5!}{2} = 60$ (здесь взята пятая производная от функции $Z(H_Г)$).

4.3. Итеративная структура (рис. 4)

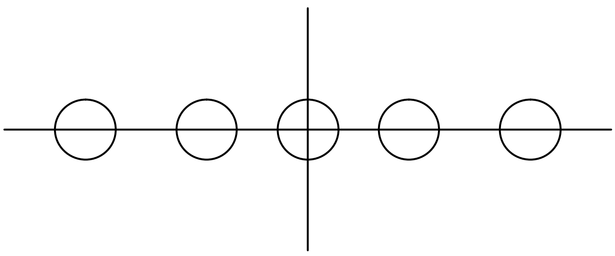

Рис. 4. Итеративная структура

Группа графа для структуры с центром:

$$H_r = E_1 + S_2\left[E_{\frac{p-1}{2}}\right],$$

где p – число всех элементов графа.

Например, для двух ветвей с центром $H_Г = E_1 + S_2[E_2]$, где $S_2[E_2]$ – группа Кранца (композиционная группа).

Распишем группу Кранца:

$$Z(E_2) = x_1^2;$$

$$Z(S_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2);$$

Сделаем замену переменных в $Z(S_2)$ («x» на «y»), вместо переменных «y_1» подставим все выражение циклового индекса группы справа, а для «y_2» сделаем подстановку всего выражения циклового индекса группы справа (в квадратных скобках), но с индексами переменных в два раза больше, что дает:

$$\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2) \Rightarrow Z(H_r) = x_1 \cdot \frac{1}{2}\left(\left(x_1^2\right)^2 + x_2^2\right)$$

Имея цикловой индекс для итеративной структуры, можно решать задачи с использованием моделей 1, 2, 3 и 4, только для моделей 2, 3 и 4 необходимо иметь соответствующую группу подстановок для множества элементов R.

При наличии центра можно записать общий вид группа графа $H_Г = E_1 + S_n[E_m]$ или без центра $H_Г=S_n[E_m]$, где n – число ветвей, m – число элементов на ветви.

4.4. Радиально-кольцевая структура (рис.5,6,7)

Для изображённой на Рис. 5 структуры группа графа без центра $H_Г = S_3[S_1 + S_2]$..

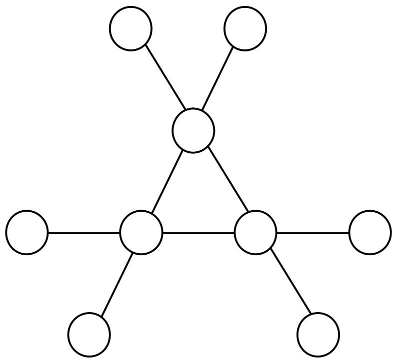

Рис. 5. Радиально – кольцевая структура первого типа

Для общего случая можно записать $H_Г = S_m[S_1 + S_2]$, где m – число локальных ветвей структуры.

При наличии центра получаем структуру второго типа (Рис. 6) $H_Г = E_1 + S_2[E_1 + S_2]$.

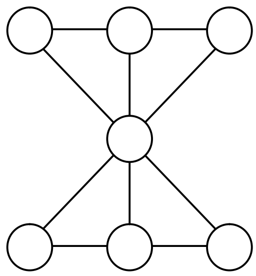

Рис. 6. Радиально – кольцевая структура второго типа

В общем случае для структуры с центром можно записать $H_Г = E_1 + S_m[E_1 + S_2]$, где m – число всех ветвей структуры (графа).

Для структуры третьего типа $H_Г = E_2 + S_2 + S_2$

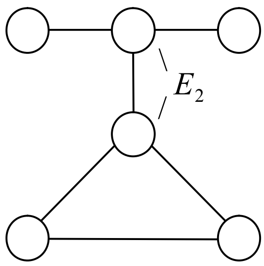

Рис. 7. Радиально – кольцевая структура третьего типа

В данном случае группа $H_Г$ строится как сумма (композиция) всех групп фрагментов системы.

5. Заключение

Таким образом, выделяя из сложной системы структурные описания в целом или для ее фрагментов, можно обосновано сформулировать задачу комбинаторно – группового анализа, что дает возможность выявить и построить варианты структур. Дальнейший анализ связан с привлечением методов выбора наиболее эффективных вариантов с позиции применяемого критерия.

Литература

1. Месарович М., Мако Д., Такахара И. Теория иерархических многоуровнеых систем. — М: Мир,1973. – 375с.
2. Н. Дж. Де Брейн. Теория перечисления Пойа // Прикладная комбинаторная математика. Под ред. Э. Беккенбаха. – М.:Мир, 1968. - С. 61–106.
3. Ф. Харари. Комбинаторные задачи перечисления графов // Прикладная комбинаторная математика. Под ред. Э. Беккенбаха. – М.:Мир, 1968. - С.107–140.
4. Харари Ф. Пальмер Э. Перечисление графов. – М., 1977. – 387 с.

Поступила в редакцию: 11.08.03

Рецензент: д-р техн. наук, профессор Жихарев В.Я., Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г.Харьков