

УДК 539.3:534.1:629.7.02

С.А. ХАЛИЛОВ, В.Б. МИНТЮК

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина*

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОТСЕКА КРЫЛА МЕТОДОМ ИДЕНТИФИКАЦИИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ НА ОСНОВЕ ДВУМЕРНОЙ УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛИ

Дано дальнейшее развитие метода идентификации краевых условий путем постановки и решения нетривиальной задачи устойчивости отсека силового кессона крыла.

**упругая устойчивость, сложная пластинчатая система, метод идентификации краевых условий**

Метод идентификации краевых условий (МИКУ), предложенный первым из авторов [1 - 3], позволяет решать задачи устойчивости сложных систем, благодаря процедуре учета взаимодействия их отдельных блоков (подконструкций). Данная работа является частью исследований по развитию метода и расширения области его приложений, она выполнена в рамках научно-исследовательской работы, которая ведется в университете по тематическому плану Министерства образования и науки Украины<sup>1)</sup>.

Силовой кессон крыла выбран в качестве объекта исследования не случайно: именно его элементы (панели, лонжероны, нервюры), наиболее ответственные за разрушение планера самолета [4].

Цель работы: на основе упрощенной, но двумерной модели отсека силового кессона крыла исследовать влияние параметров панелей и нервюр на критические нагрузки. Эта цель достигается с помощью МИКУ. Полученные результаты являются носителями как нового качества – расширение границ познания в данной области, так и нового количества – численные данные могут быть непосредственно использованы в практике проектирования современных самолетов.

Упрощения приняты с целью проведения точного анализа принятой модели и заключаются в следующем:

- кессон рассматривается как периодическая система, составленная из панелей, нагруженных сжатием и растяжением, и нервюр, свободных в исходном состоянии от нагрузок (рис.1);
- панели и нервюры – одномерные и изотропные прямоугольные пластины;
- лонжероны абсолютно жесткие в своей плоскости и абсолютно податливые из нее;
- взаимодействие панелей и нервюр осуществляется по прямым линиям, лежащим в их срединных плоскостях;
- учитывается лишь изгибная жесткость нервюры, а ее мембранные жесткости предполагаются бесконечно большими.

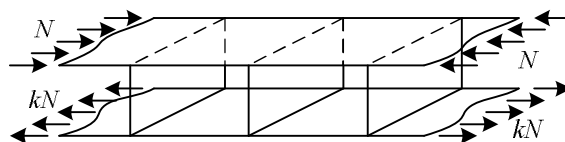


Рис. 1. Двумерная модель кессона крыла

Принятые упрощения позволяют рассмотреть какой-либо представительный элемент системы (рис. 2). Задачу устойчивости этого представительного элемента согласно МИКУ сведем к задаче устойчивости какой-либо его части, например, нервюры.

<sup>1)</sup> Научно-исследовательская работа Г403-21/03 “Теоретические основы метода идентификации граничных условий для исследования упругой устойчивости силовой конструкции аэрокосмической техники”

В соответствии с идеологией МИКУ поставленная задача решается в три этапа.

На первом этапе необходимо определить основное (исходное) напряженное состояние. Здесь оно тривиально: верхняя панель находится в условиях однородного сжатия  $N_x = -N$ ; нижняя – однородного растяжения  $N_x = kN$  ( $k$  – положительная постоянная), нервюра свободна от нагрузок в срединной плоскости.

На втором этапе ставятся и решаются так называемые промежуточные краевые задачи (в соответствии с терминологией МИКУ). Решение этих задач позволяет установить (идентифицировать) краевые условия на линиях взаимодействия (здесь – прямых) выделенного элемента системы (здесь – нервюры) с элементами ”соседями“ (здесь – панелями).

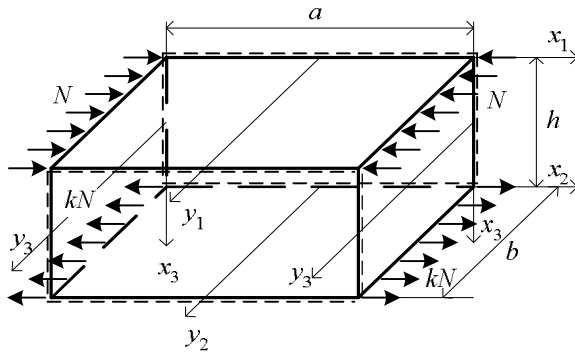


Рис. 2. Представительный элемент системы

В соответствии с принятыми допущениями необходимо решить две краевые задачи ( $i = 1$  – верхняя панель,  $i = 2$  – нижняя панель):

$$\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + \frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\lambda^4}{16} \frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} - (-1)^i \lambda^2 \pi^2 \alpha_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

$$\text{В } \Omega_i = \{(x, y) : -1 < x < 1; 0 < y < 1\};$$

$$w_i = \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = 1; \quad (2)$$

$$w_i = 0, \frac{\partial w_i}{\partial x} = -\mathcal{G}_i(y) \quad \text{при } x = 1; \quad (3)$$

$$w_i = 0, \frac{\partial w_i}{\partial x} = \mathcal{G}_i(y) \quad \text{при } x = -1. \quad (4)$$

Здесь  $x, y$  – безразмерные координаты,  $\lambda = \frac{a}{b}$  –

удлинение пластины;  $\alpha_1 = \alpha = \frac{Nb^2}{4\pi^2 D_1}$  – безразмер-

ный параметр нагрузки, показывающий во сколько раз усилие  $N$  превышает минимальное критическое усилие сжатой шарнирно опертой пластины;

$\alpha_2 = k\alpha \frac{D_1}{D_2} \equiv \beta$   $D_i$  – цилиндрическая жесткость

панелей;  $\mathcal{G}_i(y)$  – функции углов поворота:

$$\mathcal{G}_i(y) = \frac{a}{2} \theta_i(y), \quad \theta_i – \text{углы поворота.}$$

Граничные условия (2) будут удовлетворены, если функции прогиба искать в виде

$$w_i(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{in}(x) \sin(n\pi y). \quad (5)$$

Если теперь представить функции  $\mathcal{G}_i(y)$  в виде

$$\mathcal{G}_i(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_{in} \sin(n\pi y), \quad (6)$$

то получаем следующие решения:

– верхняя панель ( $i = 1$ )

$$w_{1n}(x) = \begin{cases} C_1 \cos(\delta_n x) + C_2 \cos(\gamma_n x), & \text{если } \alpha > n^2; \\ C_1 \cos\left(\frac{n\lambda\pi}{2} x\right) + C_2 x \sin\left(\frac{n\lambda\pi}{2} x\right), & \text{если } \alpha = n^2; \\ C_1 \text{sh}(\varphi_n x) \sin(\psi x) + \\ \quad + C_2 \text{ch}(\varphi_n x) \cos(\psi x), & \text{если } \alpha < n^2, \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{где } \delta_n = \frac{\lambda\pi}{2} \sqrt{2\alpha - n^2 + 2\sqrt{\alpha^2 - an^2}},$$

$$\gamma_n = \frac{\lambda\pi}{2} \sqrt{2\alpha - n^2 - 2\sqrt{\alpha^2 - an^2}},$$

$$\varphi_n = \frac{\lambda\pi}{2} \sqrt{n^2 - \alpha}, \quad \psi = \frac{\pi\lambda}{2} \sqrt{\alpha};$$

– нижняя панель:

$$w_{2n}(x) = C_1 \text{ch}(\xi_n x) + C_2 \text{ch}(\zeta_n x) \quad (8)$$

$$\text{где } \xi_n = \frac{\lambda\pi}{2} \sqrt{n^2 + 2\beta + 2\sqrt{\beta^2 + \beta n^2}},$$

$$\zeta_n = \frac{\lambda\pi}{2} \sqrt{n^2 + 2\beta - 2\sqrt{\beta^2 + \beta n^2}}.$$

Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  в решениях (7) и (8) определяются из условия (3), тогда как

условие (4) удовлетворяется автоматически в силу симметрии задач.

Моменты, действующие на нервюры по линиям взаимодействия, например при  $x = 1$ , определяются так:

$$M_{xi}(y) = -\sum_{n=1}^{\infty} C_{in}^{\theta} \theta_{in} \sin n\pi y, \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

где

$$C_{in}^{\theta} = \begin{cases} \frac{4D(\delta_n^2 - \gamma_n^2)}{a(\gamma_n \operatorname{tg} \gamma_n - \delta_n \operatorname{tg} \delta_n)}, & \text{если } \alpha > n^2; \\ \frac{4D\lambda n(\cos(n\pi\lambda) + 1)}{a(\sin(n\pi\lambda) + n\pi\lambda)}, & \text{если } \alpha = n^2; \\ \frac{8D\varphi_n \psi (\cos 2\psi + \operatorname{ch} 2\varphi_n)}{a(\varphi_n \sin 2\psi + \psi \operatorname{sh} 2\varphi_n)}, & \text{если } \alpha < n^2; \end{cases} \quad (10)$$

$$C_{2n}^{\theta} = \frac{4D(\xi_n^2 - \zeta_n^2)}{a(\zeta_n \operatorname{th} \zeta_n - \xi_n \operatorname{th} \xi_n)}. \quad (11)$$

В формуле (9) учтено, что к границам нервюры  $x = \pm 1$  передаются удвоенные моменты, действующие на панели. Отметим, что при  $b \rightarrow \infty$  ( $a$  – конечно) первая формула в  $C_{1n}$  и формула для  $C_{2n}$  переходят в соответствующие формулы работы [4].

Краевая задача устойчивости нервюры (на самом деле – задача устойчивости всей конструкции) формулируется как:

$$\frac{\partial^4 w_3}{\partial x^4} + \frac{\lambda_3^2}{2} \frac{\partial^4 w_3}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\lambda_3^4}{16} \frac{\partial^4 w_3}{\partial y^4} = 0 \quad (12)$$

$$\text{В } \Omega_3 = \{(x, y): -1 < x < 1; 0 < y < 1\};$$

$$w_3 = \frac{\partial^2 w_3}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = 1; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} w_3 = 0, M_{xн} = M_{x1} \quad \text{при } x = -1; \\ w_3 = 0, M_{xн} = M_{x2} \quad \text{при } x = 1, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\lambda_3 = \frac{h}{b}$  – удлинение нервюры;  $D_3$  – ее цилиндрическая жесткость.

Отметим, что параметр нагрузки входит лишь в краевые условия.

Граничные условия (13) будут удовлетворены, если функции прогиба искать в виде (5). Решение уравнения (12) имеет вид:

$$\begin{aligned} w_n(x) = C_1 \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi\lambda_3}{2} x\right) + C_2 \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi\lambda_3}{2} x\right) + \\ + C_3 x \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi\lambda_3}{2} x\right) + C_4 \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi\lambda_3}{2} x\right). \end{aligned}$$

Использование граничных условий (14) приводит к системе четырех алгебраических уравнений относительно постоянных  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Равенство нулю определителя этой системы приводит к трансцендентному уравнению (параметр устойчивости входит в коэффициенты  $C_{1n}^{\theta}$  и  $C_{2n}^{\theta}$ ):

$$\begin{aligned} (n^2 \pi^2 \lambda_3^2 - \operatorname{sh}^2(n\pi\lambda_3)) \frac{h^2 C_{1n}^{\theta} C_{2n}^{\theta}}{D_3^2} + \\ + n\pi\lambda_3 (\operatorname{sh}(2n\pi\lambda_3) - 2n\pi\lambda_3) \frac{h(C_{1n}^{\theta} + C_{2n}^{\theta})}{D_3} - \\ - (2n\pi\lambda_3 \operatorname{sh}(n\pi\lambda_3))^2 = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что в предложенном подходе исследования устойчивости сложной конструкции, состоящей из элементов (блоков), потеря устойчивости одним элементом (или одновременно несколькими) при достижении некоторого уровня нагрузки влечет за собой выпучивание всех остальных элементов, т.е. всей конструкции. Элемент, который первым теряет устойчивость, провоцирует выпучивание всей конструкции, все остальные элементы оказывают на конструкцию поддерживающее влияние. Понятно, что элементы, которые находятся в условиях чистого растяжения или ненагруженные вовсе, будут оказывать только поддерживающее влияние. Сжатый элемент может сам или одновременно с другими элементами спровоцировать потерю устойчивости конструкции, но, несмотря на то, что элемент сжат, он может все еще оказывать на конструкцию поддерживающее влияние, если потерю устойчивости провоцирует другой более слабый или более нагруженный элемент. Этим трем вариантам соответствуют три варианта значений коэффициента жесткости для сжатой панели  $C_{1n}^{\theta}$  (10).

В данной постановке задачи единственным «провокатором» является верхняя (сжатая) панель, т.е. для коэффициента  $C_{1n}^{\theta}$  всегда реализуется первая формула в (10). Нижняя панель и нервюра оказывают только поддерживающее влияние. Таким образом, параметр устойчивости всей системы не может быть меньше 1 (минимальный для шарнирно опертой сжатой панели), более того, он не может быть меньше, чем  $\frac{(m^2 + \lambda^2 n^2)^2}{(2\lambda n)^2}$  (реальный параметр устойчивости для шарнирно опертой сжатой панели), а также он не может превышать параметр устойчивости сжатой панели, жестко заделанной на нервюрах. Последний находится из трансцендентного уравнения  $\gamma_n \sin \gamma_n \cos \delta_n - \delta_n \sin \delta_n \cos \gamma_n = 0$ . Таким образом, определяются верхняя и нижняя границы искомого параметра. Кроме того, для дан-

ной конструкции и при таком нагружении в результате выпучивания между лонжеронами может образоваться только одна полуволна, т.е.  $n = 1$ .

В заключение приведем примеры некоторых вычислений. Для упрощения вычислений считается, что верхняя и нижняя панели имеют одинаковую изгибную жесткость ( $D_1 = D_2 = D$ ) и нагружены одинаковыми по значению нагрузками ( $k = 1$ ), т.е.  $\alpha = \beta$ .

На рис. 3 показано, как меняется параметр устойчивости  $\alpha$  в зависимости от относительной жесткости нервюры ( $d = \frac{D_3}{D}$ ) для различных удлинений нервюры и панелей. Как можно видеть, параметр устойчивости меняется в широких пределах и основное изменение происходит в диапазоне  $0 < d < 15$ , в который, несомненно, попадают реальные нервюры.

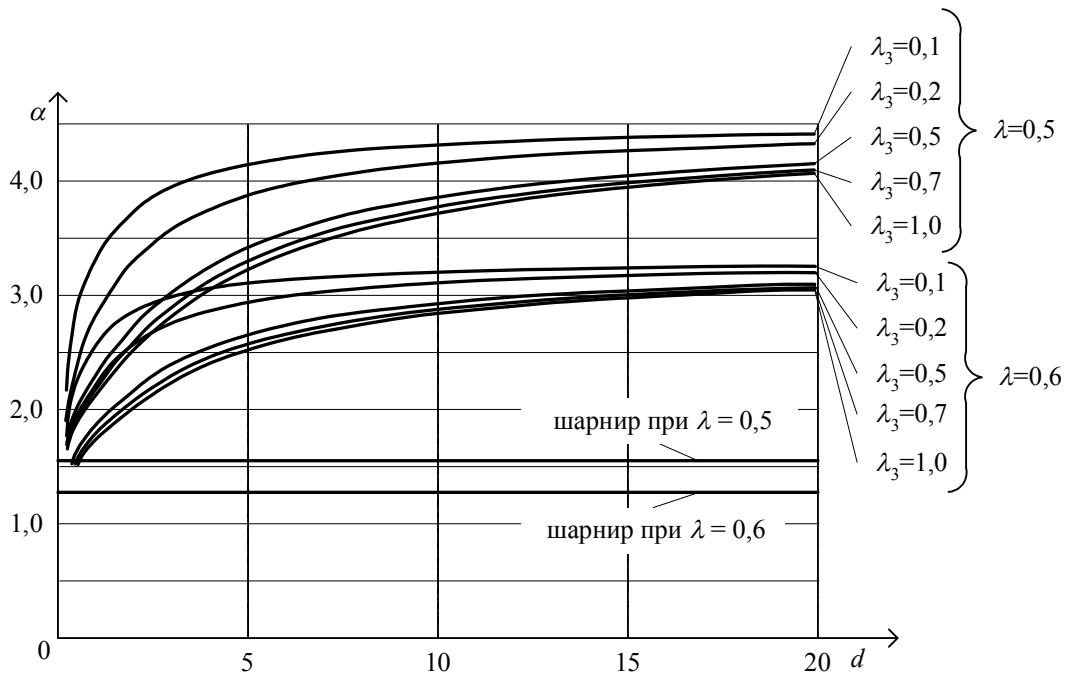


Рис. 3. Зависимость параметра устойчивости системы от относительной жесткости нервюры

На рис. 4 показана форма потери устойчивости верхней (сжатой) панели и относительный изгибающий момент в сечении  $y = 1/2$ . Максимальный прогиб наблюдается в середине панели. На нервюре

и возле нее (на расстоянии  $\rho$  по обе стороны от нервюры) функция прогиба меняет знак кривизны. Момент на нервюре претерпевает скачок. При свободном опирании панели на нервюру  $d = 0$  ( $\alpha = 1,56$  для

данной панели)  $\rho = 0$  и функция прогиба меняет знак кривизны только на нервюре.

С ростом жесткости нервюры  $\rho$  постепенно увеличивается и при  $d \rightarrow \infty$  ( $\alpha \rightarrow 4,55$  для данной панели)  $\rho \rightarrow 0,5$ , что изображено на рис 5. Вдоль оси  $OY$  параметр  $\rho$  изменяется по синусоиде.

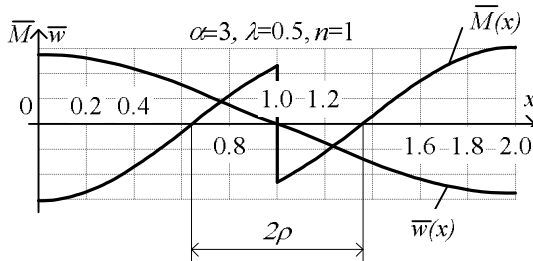


Рис. 4. Форма потери устойчивости и относительный изгибающий момент верхней панели

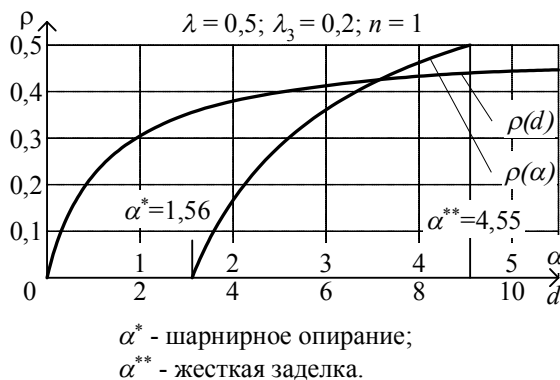


Рис. 5. Зависимость расстояния  $\rho$  от параметра устойчивости и относительной жесткости нервюры

## Заключение

1. Методом идентификации краевых условий дан точный анализ принятой модели отсека силового кессона крыла, в результате чего получены новые качественные и количественные результаты.

2. Показано, что неадекватный учет действительных условий взаимодействия блоков сложной системы приводит к значительным погрешностям (в несколько раз) в определении критических усилий.

3. Для кессонов с вытянутым сечением ( $b \rightarrow \infty$ ), можно пользоваться более простыми формулами для коэффициентов жесткости панелей.

4. Метод позволяет выявить так называемый элемент-“провокатор” потери устойчивости системы, что дает конструктору возможность рационального проектирования.

5. Полученные результаты могут быть распространены на другие пластинчатые системы.

6. Необходимо дальнейшее развитие работы с целью учета опущенных деталей (учет лонжеронов, поясов и стоек нервюры и т.д.).

## Литература

1. Халилов С.А. Проблема исследования устойчивости несущей конструкции большегрузных самолетов //Авиационно-космическая техника и технология: Труды ХАИ 1993 года. – X., 1994. – С. 358 - 369.

2. Халилов С.А. Развитие альтернативного подхода к решению проблемы устойчивости силовых элементов конструкции самолета //Авиационно-космическая техника и технология: Труды ХАИ 1994 года. – X., 1995. – С. 223 - 227.

3. Халилов С.А. Метод идентификации краевых условий в задачах упругой устойчивости. Идея метода // Авіаційно-космічна техніка і технологія. – X.: Нац. аерокосм. ун-т «Харк. авіац. ін-т». - 2003. – Вип. 1(36) - С. 15 - 21.

4. Халилов С.А., Минтюк В.Б. Исследование устойчивости отсека крыла методом идентификации краевых условий на основе упрощенной модели // Авіаційно-космічна техніка і технологія. – X.: Нац. аерокосм. ун-т «Харк. авіац. ін-т», - 2003. - Вип. 2(37). - С. 6 - 10.

Поступила в редакцию 22.01.2004

**Рецензенты:** д-р физ.-мат. наук, проф. Проценко В.С., Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков; канд. физ.-мат. наук, доцент Несвит М.И., ХГТУСА, г. Харьков.