УДК 539.3.001.24

П.Д. ДОЦЕНКО, В.Н. ДАНИЛОВ, С.В. ЛАДНИЧ

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Предлагается расчет статики тонкостенных сферических оболочек вращения. В качестве объекта исследования взяты некоторые тестовые задачи. Для расчета авторы пользуются новым методом рекуррентных соотношений. Показаны преимущества данного подхода по сравнению с другими известными аналитическими и численными методами.

асимптотический метод, метод Ньютона–Канторовича, метод конечных элементов, метод рекуррентных соотношений, общая моментная теория, простая задача, конструкция

Введение

Математические модели напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочек вращения в общем случае нелинейные и довольно громоздкие. В связи с этим проблема получения надежных решений для оболочек произвольной формы и достаточно общего вида нагружения до сих пор остается актуальной. Проблемы построения и сходимости численных решений усугубляются и наличием быстро возрастающих и быстро убывающих решений, что существенно влияет на точность результатов.

В статье для анализа НДС сферических оболочек в линейной постановке предлагается использовать численный метод рекуррентных соотношений, позволивший существенно повысить точность, быстродействие и надежность получения результатов. Эти и некоторые другие особенности данного подхода являются несомненным преимуществом при проектировании элементов конструкций летательных аппаратов.

1. Некоторые методы исследования задач статики сферических оболочек

Аналитический расчет статики сферической оболочки можно реализовать, например, расчленением общего НДС на безмоментное состояние и простой краевой эффект. Решение для осесимметричной и обратносимметричной деформаций сферической оболочки этим способом можно найти, например, в работе [1]. Для интегрирования однородного дифференциального уравнения, которое в свою очередь получено методом комплексных усилий, используется асимптотический метод, согласно которому введением новой искомой функции Z однородное уравнение приводится к виду

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z}{d\theta^2} - \Lambda^2 Z = 0 . \qquad (1)$$

В уравнении (1) параметр Λ является в свою очередь сложной функцией, содержащей целый ряд слагаемых. При этом в работе [1] оговаривается, что приближенное решение ищется с точностью до слагаемых порядка $1/\Lambda$ по сравнению с единицей. Это упрощение в частности для сферических оболочек подразумевает, что

$$-\frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{2+\cos^2\theta}{4\sin^2\theta} = 0 . \qquad (2)$$

Упрощения в работе [1] продолжены и при получении конечных формул для расчета НДС. Например, в формуле (4.87) работы [1] пренебрегают рядом подчеркнутых слагаемых и т. д.

В данном случае, понятно, что подобного рода упрощения вынужденные, иначе получить аналитический расчет сферической оболочки невозможно. Тем не менее, несмотря на существенные упрощения при построении решения для сферической оболочки, в некоторых случаях оно приводит к вполне приемлемым результатам. Сравнение этого расчета с расчетом по методу рекуррентных соотношений показано несколько ниже.

В связи с трудностями, возникающими при аналитическом решении задач подобного рода, естественным является привлечение численных методов.

Так, например, в работе [2] целый ряд комбинированных задач, в том числе содержащих и сферические элементы, решается при помощи процесса последовательных приближений на основе метода Ньютона – Канторовича. Однако, применение этого подхода нельзя считать универсальным. Изменение формы, исходных данных, граничных условий задачи требует существенных корректировок и изменений в алгоритме и программе расчета.

Наиболее общим методом решения задач статики деформируемого тела является метод конечных элементов (МКЭ). Но, как известно, предпроцессорная подготовка к расчету и сам процесс расчета по МКЭ является индивидуальным для каждой задачи, занимает продолжительное время и требует достаточно высокой подготовки пользователя, а результаты расчета не всегда оказываются адекватны.

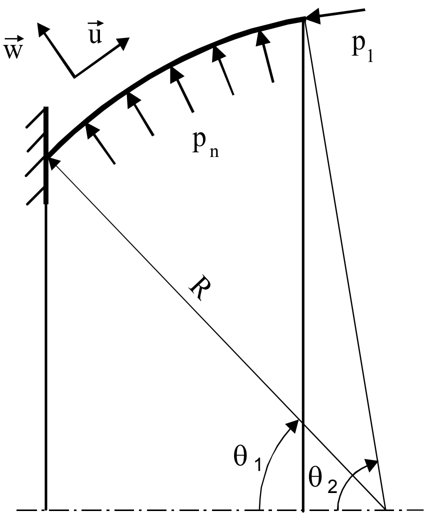
2. Метод рекуррентных соотношений

В связи с недостатками, присущими разным методам, в работе предлагается реализация расчета относительно новым подходом – методом рекуррентных соотношений (МРС). Этот метод лишен многих недостатков, присущих другим методам, и обладает рядом существенных преимуществ. МРС позволяет в общей моментной постановке, вести расчет произвольной комбинации элементов оболочек вращения с произвольным видом распределения нагрузок и любыми сочетаниями граничных и промежуточных условий связи.

В МРС без затруднений реализуется учет жестких промежуточных или упругих вставок, фланцев, шпангоутов и т. п. Без каких-либо принципиальных перестроек и изменений алгоритма и программы выполняется расчет как простых, так и составных оболочечных конструкций. При этом метод рекуррентных соотношений показывает высокую точность, надежность и скорость расчета.

Целью данной работы является показать на тестовых задачах работоспособность МРС при расчете тонкостенных сферических оболочек и сравнить эти результаты с результатами расчета по методам, изложенным в п.1 данной работы.

Не углубляясь в детали и особенности метода рекуррентных соотношений, с которыми можно ознакомится в работах [3] и [4], в качестве первого примера рассмотрим сравнительно простую задачу – сферический сегмент, изображенный на рис. 1. Оболочка нагружена касательной p_1 и нормальной p_n распределенными нагрузками.



$p_1 = 10^3$ Н/м²;

$p_n = 10^4$ Н/м²;

$R = 0{,}5$ м;

$\theta_1 = 45^\circ$;

$\theta_2 = 80^\circ$.

Рис. 1. Сферический сегмент

Эту задачу можно решить по приближенной методике изложенной в работе [1]. Упрощения при решении системы уравнений, о которых говорилось выше, естественно, приводят к заметным погрешностям в результатах, что и отражает более точный расчет по методу рекуррентных соотношений.

На рис. 2 приводятся расчетные кривые для угла поворота ϑ_1, перерезывающей силы Q_1 и изгибающего момента M_1, полученные аналитическим путем и по методу рекуррентных соотношений.

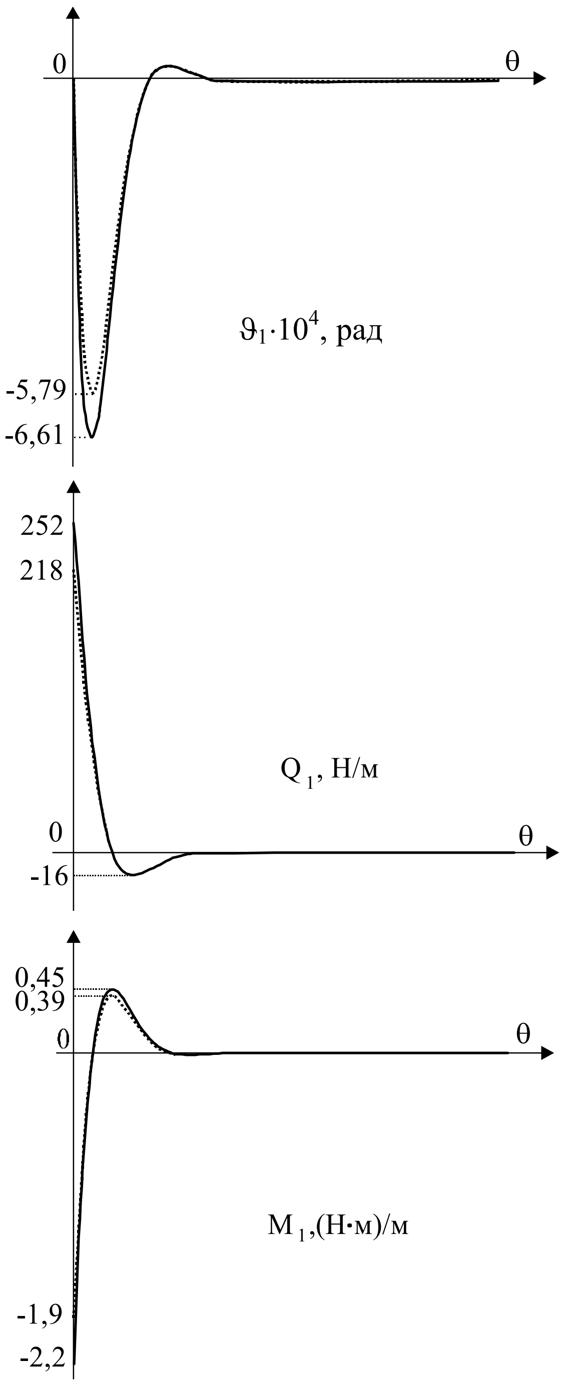


Рис. 2. Угол поворота, нормальная сила и изгибающий момент

На графиках результаты расчета по методу рекуррентных соотношений показаны сплошной линией, аналитического расчета по работе [1] – пунктирной. Для всех трех приведенных на рис. 2 параметров числа вблизи защемленного края расходятся примерно на 13% , что на наш взгляд соизмеримо с упрощениями, о которых говорилось выше.

Рассмотрим еще один пример, а именно, конструкцию, изображенную на рис. 3, аналитический расчет которой невозможен. В работе [2] предлагается численное решение этой задачи.

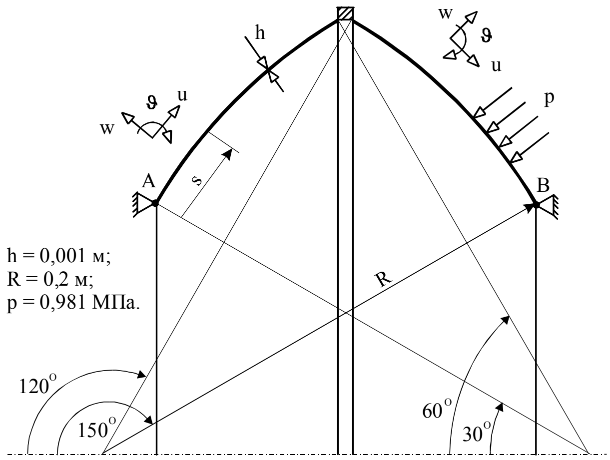


Рис. 3. Конструкция со сферическими сегментами

Численное сравнение результатов в точке A и B по работе [2] и по методу рекуррентных соотношений представлено в табл. 1.

Таблица 1

Сравнение МРС с методом Ньютона-Канторовича по результатам расчета

	Точка	По раб. [2]	По МРС
T_1, Н/м^2	*A*	–39251,09067	–45820,392001
	B	–39251,09067	–45820,392001
Q_1, Н/м^2	*A*	–3711,666082	–3895,170695
	B	3711,666082	3895,170695
$\vartheta_1 \cdot 10^2$, рад	*A*	1,394868924	1,283318630
	B	–1,394868922	–1,283318630

Из табл. 1 видно, что результаты несколько расходятся. Это связано с тем, что при расчете в работе [2] пользуются методом ортогонализации, точность расчета по которому зависит от оптимального разбиения на интервалы интегрирования. С одной стороны при увеличении дискретности коэффициенты матрицы уменьшаются и на отдельно взятом участке можно получить более точное решение, а с другой стороны возрастание числа участков вызывает постепенное накопление погрешностей.

Кроме того, в работе [2] предлагаются результаты только лишь в граничных точках. Это скорее всего связано с проблемами получения результатов в промежуточных точках по методу Ньютона – Канторовича. Метод рекуррентных соотношений позволяет определить любой расчетный параметр в любой расчетной точке поверхности конструкции. Это продемонстрировано на рис. 4 кривыми для меридионального напряжения σ_1 и напряжения по параллели σ_2.

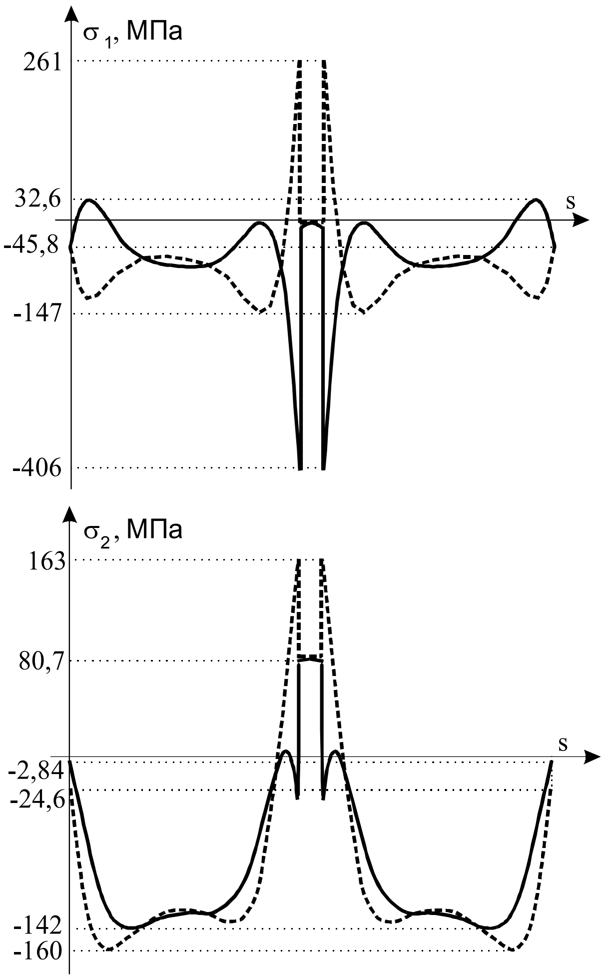


Рис. 4. Меридиональное напряжение
и напряжение по параллели

На рис. 4 показаны сплошной линией графики для напряжений на внутренней поверхности конструкции, пунктирной линией напряжения на внешней поверхности конструкции. Как видно из рис. 4, максимальные напряжения превышают допустимые для стали при таком виде нагружения, что не было учтено в работе [2].

Заключение

В заключение следует отметить целый ряд преимуществ, которыми обладает метод рекуррентных соотношений:

1) возможность решение задач в общей моментной постановке без каких-либо упрощений в системе дифференциальных уравнений;

2) возможность нахождения результата для расчетного параметра в любой точке поверхности исследуемого объекта;

3) высокая точность, надежность и скорость получения решения задачи;

4) возможность расчета конструкций, содержащих любые промежуточные включения, и имеющей любые граничные условия.

Литература

1. Новожилов В.В. Линейная теория тонких оболочек / В.В. Новожилов, К.Ф. Черных, Е.И. Михайловский. – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.

2. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций / А.В. Кармишин, В.А. Лясковец, В.И. Мяченков, А.Н. Фролов – М.: Машиностроение, 1975. – 376 с.

3. Черночуб И.П. Динамика трубопроводных систем / И.П. Черночуб, А.Е. Попов, П.Д. Доценко. – Х.: Основа, 1998. – 223 с.

4. Доценко П.Д. Метод рекуррентных соотношений в статике конических оболочек // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «ХАИ», 2003. – Вып. 34 (3). – С. 74 – 81.

Поступила в редакцию 2.09.2004

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. В.С. Проценко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”, Харьков.