УДК 532.516

Ю.А. КРАШАНИЦА, Д.В. КИРИЧЕНКО

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

О НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА В КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В статье рассмотрено использование метода обобщенных аналитических функций для точного решения системы уравнений Навье-Стокса. Получен класс решений, которые не имеют аналогов, что показывает перспективность использования метода обобщенных аналитических функций для решения задач механики жидкости и газа.

вязкая несжимаемая жидкость, точное решение системы Навье-Стокса, обобщенные аналитические функции, поле скоростей, математическая модель, источник вязкой жидкости

Введение

Для описания движения вязкой жидкости используется система дифференциальных уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости Навье-Стокса:

$$(\nabla, \boldsymbol{V}) = 0\,, \tag{1}$$

$$(\boldsymbol{V}, \nabla)\boldsymbol{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \boldsymbol{V}\,, \tag{2}$$

где ρ - плотность среды,

$\boldsymbol{V}$ – вектор скорости жидкости,

p – скалярное давление,

λ и ν – коэффициенты вязкости.

Эта система впервые была построена в 1822 году. До настоящего времени не найден общий метод исследования и решения этой нелинейной системы [1], а известны лишь некоторые частные случаи, когда удавалось найти аналитические решения системы Навье-Стокса. Большинство из них получены более полувека назад [2].

Краевая задача для системы (1 – 2) входит в семь сложнейших задач тысячелетия, наряду с гипотезой Ходжа и проблемой Пуанкаре, её решение позволит существенно изменить способы проведения гидро- и аэродинамических расчетов.

Частные точные решения являются ценными для исследования течений вязкой жидкости, так как позволяют выяснить погрешность результатов при сделанных допущениях либо проверить очередной численный метод. Методическое значение таких решений также велико.

Двумерные течения вязкой жидкости

Элементарные трубки тока, каково бы ни было поле скоростей, допускают проведение нормальных к ним сечений, причем с точностью до малых величин высших порядков эти сечения можно рассматривать как плоские. Иначе обстоит дело с трубками тока конечных размеров. Для того, чтобы такие трубки имели нормальные сечения, необходимо существование нормальных к линиям тока поверхностей, а это накладывает на поле скоростей

$$\mathbf{V}(u, v, w) = \mathbf{V}(\mathbf{r}) \tag{3}$$

некоторое ограничение. В самом деле, пересечем линии тока семейством поверхностей

$$\varphi(x, y, z) = const$$

и потребуем, чтобы эти поверхности были ортогональны к линиям тока. Для этого нормаль в любой точке поверхности должна совпадать по направлению со скоростью $\mathbf{V}$ в этой точке, т.е. требуется выполнение равенства

$$\mathbf{V} = \lambda \nabla \varphi . \tag{4}$$

Взяв от обеих частей этого равенства операцию вихря, будем иметь по известным формулам векторного анализа

$$\mathbf{\Omega} = [\nabla, \mathbf{V}] = [\nabla\lambda, \nabla\varphi] , \tag{5}$$

а затем по (4):

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{\lambda}[\nabla\lambda, \mathbf{V}] . \tag{6}$$

Отсюда в силу перпендикулярности векторного произведения своим сомножителям сразу вытекает ортогональность векторов завихренности и скорости

$$(\mathbf{V}, \mathbf{\Omega}) = 0 . \tag{7}$$

Условие (7) существования нормальных сечений у трубок тока в применении к потокам жидкости было впервые указано И.С. Громека. Примерами выполнения условия (7) могут служить плоское и осесимметричное движение жидкости.

Вязкий источник

Для выполнения условия несжимаемости (1) в классе обобщенных аналитических функций (4) требуется, чтобы

$$(\nabla, \mathbf{V}) = (\nabla\lambda, \nabla\varphi) + \lambda\Delta\varphi = 0 . \tag{8}$$

Если представить решение системы (1 – 2) в виде произведения функций радиус-вектора r и полярного угла ε:

$$\mathbf{V} = f(\varepsilon)\nabla \ln r = \mathbf{e}_r \frac{f(\varepsilon)}{r} , \tag{9}$$

то уравнение (8) удовлетворяется.

Тогда решение уравнения Навье-Стокса в форме

$$[\nabla, [\mathbf{\Omega}, \mathbf{V}]] = -\nu[\nabla, [\nabla, \mathbf{\Omega}]] \tag{10}$$

сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения:

$$2f'(\varepsilon)f(\varepsilon) + \nu\{4f'(\varepsilon) + f'''(\varepsilon)\} = 0 . \tag{11}$$

Уравнение (11) допускает понижение порядка с помощью замены искомой функции:

$$\begin{gathered} f'(\varepsilon) = y(f); \quad f''(\varepsilon) = yy'(f); \\ f'''(\varepsilon) = (yy'' + y'^2)y. \end{gathered} \tag{12}$$

И вместо выражения (11) получаем неоднородное обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение:

$$\left(y''y + y'^2\right)y + \frac{2}{\nu}yf + 4y = 0 . \tag{13}$$

Так как функция $f'(\varepsilon) = y$ не обращается в нуль, то приходим к уравнению, которое интегрируется в квадратурах

$$ydy = \left(C_1 - \frac{f^2}{\nu} - 4f\right)df , \tag{14}$$

из которого следует, что

$$y^2 = -\frac{f^3}{3\cdot\nu} - 2f^2 + C_1 f + C_2 . \tag{15}$$

Не прибегая к обратным эллиптическим функциям, изучим простейший случай, когда

$$\begin{gathered} -f^3 - 6\cdot\nu\cdot f^2 + 3\cdot\nu\cdot C_1 f + 3\cdot\nu\cdot C_2 = \\ = (\alpha - f)(f^2 - 2af + a^2), \end{gathered} \tag{16}$$

где постоянные α и а подлежат определению:

$$a_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - C_1\cdot\nu} , \tag{17}$$

$$\alpha = -(6\nu + 2a) . \tag{18}$$

Зная коэффициенты a и α, найдем функцию $f(\varepsilon)$:

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{15}(\varepsilon - \alpha)^{\frac{3}{2}}(2\alpha + 3\varepsilon - 5a)\frac{|\varepsilon - a|}{(\varepsilon - a)} , \tag{19}$$

а затем и скорость (9).

На рисунке показана зависимость скорости жидкости от радиуса и полярного угла ε (рис. 1).

Подсчитаем расход жидкости в простейшем случае через окружность произвольного радиуса R с центром в начале координат по формуле

$$q = \oint_L V_r dl = \int_0^{2\pi} \frac{f(\varepsilon)}{r}\cdot r\cdot d\varepsilon = F(2\pi) - F(0) , \tag{20}$$

где $F(\varepsilon)$ – какая-либо первообразная функции $f(\varepsilon)$.

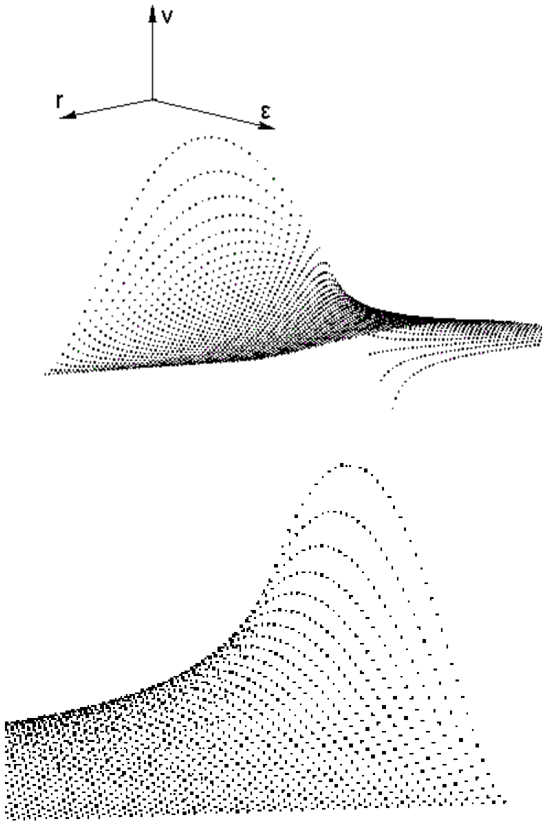

Рис. 1. Зависимость скорости жидкости от радиуса и полярного угла ε

$$q = \int_0^{2\pi} f(\varepsilon)d\varepsilon =$$

$$= \frac{2}{15}\Big\{\sqrt{2\pi-\alpha}\left(\frac{4}{7}\alpha 4\pi^2 + \frac{10}{7}\alpha^2 2\pi + \right.$$

$$\left. + 8a\pi^2 + 8a\alpha\pi - \frac{48}{7}\pi^3\right) \; (\varepsilon \le a);$$

$$q = \int_0^{2\pi} f(\varepsilon)d\varepsilon =$$

$$= \sqrt{2\pi-\alpha}\left(\frac{48}{7}\pi^3 + 8a\alpha\pi - 8a\pi^2 + \right.$$

$$\left. - \frac{20}{7}\alpha^2\pi - \frac{16}{7}\alpha\pi^2\right) \; (\varepsilon > a)$$

Так как интеграл не зависит от радиуса, то поле скоростей (17) создается источником вязкой жидкости.

В то же время циркуляция поля скоростей (9) по такому же контуру

$$\Gamma = \oint_L V_l dl = 0 . \qquad (21)$$

Заключение

Показанный метод показал свою эффективность для получения точных решений системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса. Использование этого метода позволяет получать новые спектры решений системы Навье-Стокса, исследовать ранее неизученные теоретически течения вязкой несжимаемой жидкости.

Литература

1. Темам Р. Уравнение Навье-Стокса. – М.: Мир, 1981. – 408 с.
2. Ландау Л.Д, Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие в 10 т. Т. VI. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
3. Крашаница Ю.А. О некоторых решениях обобщенной системы уравнений Коши-Римана // Математич. методы анализа динамич. систем.– Х. – 1978. – Вып. 2. – С. 52 – 54.

Поступила в редакцию 10.06.2005

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.П. Герасименко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.