

Научное наследие профессора И.Г. Немана (1903 – 1952)

Предисловие редколлегии журнала

Журнал продолжает публикации по материалам докторской диссертации И.Г. Немана «Устойчивость бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости», защите которой помешала преждевременная смерть автора.

Как и в предыдущих сообщениях, ниже изложены научные результаты И.Г. Немана, полученные им в 1946-48 гг. и ранее не публиковавшиеся, практически без правок авторского текста.

Редколлегия предполагает знакомство читателя с предыдущими сообщениями автора^{)}, что исключает необходимость расшифровки в данной статье символов, уже встречавшихся ранее.*

Кроме того, во избежание многочисленных повторений выкладок и формул, содержащихся в третьей публикации автора, редколлегия сочла возможным ввести в публикуемую ниже статью ссылки на соответствующие формулы этой публикации.

^{*)} 1. Неман И.Г. Устойчивость бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости. Часть 1. Приближенный метод. Устойчивость пластины при одностороннем сжатии // *Авиационно-космическая техника и технология* – 2005. – № 5 (21). – С. 87-95.

2. Неман И.Г. Устойчивость бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости. Часть II. Приближенный метод. Устойчивость пластины при сдвиге и совместном действии сжатия и сдвига // *Авиационно-космическая техника и технология*.-2005. – № 6 (22). – С. 95-103.

3. Неман И.Г. Устойчивость бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости. Точный метод. Часть I. Вывод общих уравнений для коэффициентов критической нагрузки. Устойчивость пластины при совместном действии двухстороннего сжатия и сдвига // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2006. – № 1 (27). – С. 96-103.

УДК 629.7: 534.1

И.Г. Неман

Харьковский авиационный институт, Украина

УСТОЙЧИВОСТЬ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С НАКЛОННЫМИ ГЛАВНЫМИ НАПРАВЛЕНИЯМИ УПРУГОСТИ. ТОЧНЫЙ МЕТОД. ЧАСТЬ 2. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ НАГРУЖЕНИЯ ПЛАСТИНЫ

Дана реализация точного метода исследования устойчивости бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости для частных случаев ее нагружения. Результаты получены автором до 1946 года и ранее не публиковались.

устойчивость, бесконечно длинная ортотропная пластина, точный метод, коэффициенты критических нагрузок, частные случаи

1. Сжатие пластины в поперечном направлении

В случае поперечного сжатия пластины без усилий сдвига $m = n = 0$, полученные в [1] уравнения (40), (43) и (44) значительно упрощаются:

$$\xi^2 = \mu^2 \left\{ \frac{A^2}{16} (z-1)^2 - \frac{c - \sqrt{(-c)^2 - DA^2(1-z^2)}}{A(1+z)} \right\}; \quad (1)$$

$$\eta^2 = \mu^2 \left\{ \frac{A^2}{16}(z+1)^2 - \frac{c + \sqrt{(-c)^2 - DA^2(1-z^2)}}{A(1-z)} \right\}; \quad (2)$$

$$K_{q1} = \frac{\mu^2}{E} \left\{ B + \frac{A^2}{4}(z^2 - 1) - \frac{2c + 2z\sqrt{(-c)^2 - DA^2(1-z^2)}}{A(1-z^2)} \right\}. \quad (3)$$

При изолированном поперечном сжатии обычно предполагается потеря устойчивости Эйлераевского типа. При этом не должно быть волн, параллельных длинной стороне. Это возможно только при $\mu = 0$.

Для того, чтобы при этом K_{q1} имел конечное значение, необходимо либо $z = \infty$, либо знаменатель $A(1-z^2) = 0$, давая одновременно положительное значение всей дроби, равное $+\infty$.

1. Случай $z = \infty$.

Уравнения (1), (2) и (3) можно записать так:

$$\xi^2 = \mu^2 \left[\frac{A^2}{16}(z-1)^2 + \sqrt{D} \right]; \quad (4)$$

$$\eta^2 = \mu^2 \left[\frac{A^2}{16}(z+1)^2 - \sqrt{D} \right],$$

откуда после преобразований (с учетом $z = \infty$):

$$\xi = \mu \left[\frac{A^2}{4}(z-1) + \frac{\sqrt{D}}{2}(z-1) \right] \text{ или}$$

$$\xi = \frac{Az\mu}{4} + \frac{\varepsilon_1}{2}; \quad (5)$$

$$\eta = \mu \left[\frac{A}{4}(z+1) - \frac{\sqrt{D}}{2}(z+1) \right] \text{ или}$$

$$\eta = \frac{Az\mu}{4} + \frac{\varepsilon_2}{2}; \quad (6)$$

$$K_{q1} = \frac{\mu^2}{E} \left[B + \frac{A^2}{4}(z^2 - 1) - 2\sqrt{D} \right] \text{ или}$$

$$K_{q1} = \frac{A^2 z^2 \mu^2}{4E} + \varepsilon^3, \quad (7)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – бесконечно малые величины.

Для свободно опертой пластины условное уравнение, полученное в [1], если учесть, что множитель в квадратных скобках (3) (с точностью до малых второго порядка) равен единице, принимает вид:

$$\cos\left(\frac{Az\mu}{2} + \varepsilon_1\right)\cos\left(\frac{Az\mu}{2} + \varepsilon_2\right) - \cos Az\mu - \sin\left(\frac{Az\mu}{2} + \varepsilon_1\right)\sin\left(\frac{Az\mu}{2} + \varepsilon_2\right) = 0 \quad (8)$$

или

$$\cos(Az\mu + \varepsilon) - \cos Az\mu = 0, \quad (9)$$

откуда

$$Az\mu = k\pi - \frac{\varepsilon}{2}, \quad (10)$$

где ε – также бесконечно малая величина.

Минимальное значение K_{q1} получим при $K = 1$.

Тогда

$$Az\mu = k\pi - \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } K_{q1} = \frac{\pi^2}{4E}. \quad (11)$$

При этом $\xi = \eta = \frac{\pi}{4}$; $\delta_1 = \frac{\pi}{4}$; $\delta_2 = -\frac{\pi}{4}$ *) и корни

характеристического уравнения (7) в [1] равны:

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{2}; \lambda_2 = \lambda_3 = 0; \lambda_4 = -\frac{\pi}{2}.$$

Подставляя полученные данные в уравнение (23) работы [1] для граничных условий, получим:

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 Pe^{i\frac{\pi}{2}} + \left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 Se^{-i\frac{\pi}{2}} = 0;$$

$$Pe^{i\pi} + S = 0; \quad (12)$$

$$e^{i\pi} = -1, \text{ отсюда } P = S.$$

Воспользуемся теперь уравнением (21) работы [1]:

$$Pe^{i\frac{\pi}{2}} + Q + R + Pe^{-i\frac{\pi}{2}} = 0; e^{i\frac{\pi}{2}} = i; e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i.$$

Следовательно

$$Q + R = 0. \quad (13)$$

Поверхность прогибов принимает вид:

$$W = P \left(e^{i\frac{\pi x'}{2\sigma}} + e^{-i\frac{\pi x'}{2\sigma}} \right) + Q + R =$$

$$= 2P \cos \frac{\pi x'}{2\sigma}. \quad (14)$$

*) δ_1, δ_2 – вещественные составляющие корней характеристического уравнения (7) работы [1] (прим. редколлегии).

Это подтверждает предположение о чисто Эйлеровой деформации при принятом значении $\mu = 0$, но не доказывает, что этот случай является критическим.

Для жестко заделанной пластины условное уравнение (33) из работы [1] принимает такой же точно вид, как и для случая свободно опертой пластины, так как множитель в квадратных скобках в этом случае тоже равен единице, если пренебречь бесконечно малыми второго порядка.

Рассмотрим снова равенство (10):

$$Az\mu = k\pi.$$

Положим $k = 1$. Значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ для этого случая уже получены выше. Подставляя эти значения в уравнение (27) работы [1] для граничных условий, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2}Pe^{i\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}Se^{-i\frac{\pi}{2}} = 0 \text{ или} \\ Pe^{i\pi} - S = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

откуда $P = -S$.

Воспользуемся уравнением (25) работы [1]:

$$\begin{aligned} Pe^{i\frac{\pi}{2}} + Q + R - Pe^{-i\frac{\pi}{2}} = 0; \\ 2Pi + Q + R = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Сумма $Q + R$ должна быть вещественной.

Поэтому случай $k = 1$ здесь невозможен.

Положим $k = 2$. Тогда уравнение (10) примет вид:

$$\begin{aligned} Az\mu = 2\pi, \text{ откуда} \\ K_{q1} = \frac{\pi^2}{E}. \end{aligned} \quad (17)$$

При этом

$$\begin{aligned} \xi = \eta = \frac{\pi}{2}; \quad \delta_1 = \frac{\pi}{2}; \quad \delta_2 = -\frac{\pi}{2}; \\ \lambda_1 = \pi; \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0; \quad \lambda_4 = -\pi. \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнение (27) работы [1] дает:

$$\pi Pe^{i\pi} - \pi Se^{-i\pi} = 0 \text{ или } Pe^{2\pi i} - S = 0, \quad (19)$$

откуда

$$P = S. \quad (20)$$

Воспользовавшись снова уравнением (27) работы [1], получим:

$$\begin{aligned} Pe^{i\pi} + Q + R + Se^{-i\pi} = 0; \\ e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1, \end{aligned} \quad (20)$$

откуда

$$Q + R = 2P. \quad (21)$$

Поверхность прогибов принимает вид

$$\begin{aligned} W = P \left(e^{i\pi \frac{x'}{\epsilon}} + e^{-i\pi \frac{x'}{\epsilon}} \right) + 2P = \\ = 2P \left(\cos \pi \frac{x'}{\epsilon} + 1 \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом в этом случае тоже получается Эйлерова деформация.

2. Случай $(1 - z^2) = 0$.

Покажем, что в этом случае мы придем к тем же результатам, что и в случае $z = \infty$.

Пусть $(1 + z) \rightarrow 0$. Уравнения (1) – (3) можно написать так:

$$\begin{aligned} \xi^2 = -\mu^2 \frac{2c}{A(1+z)}; \quad \eta^2 = \mu^2 \frac{A^2}{16}(z+1)^2; \\ K_{q1} = -\frac{\mu^2}{E} \frac{2c}{A(1+z)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Заметим, что $\xi^2 = EK_{q1}^*$. Так как K_{q1} ожидаем конечным, то ξ^2 тоже имеет конечное значение, а $\eta^2 \rightarrow 0$ и $\mu \rightarrow 0$.

Для свободно опертой пластины можно условное уравнение (33) работы [1] написать в следующей форме

$$\begin{aligned} \cos 2\xi \cos 0 - \cos 0 - \left[\xi - \frac{\xi^3}{\left(\frac{Az\mu}{2}\right)^2} \right] \times \\ \times \sin 2\xi \frac{\sin 2\eta}{2\eta} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Множитель в квадратных скобках стремится к

*) Это следует из [1] при поставленных здесь условиях (прим. редколлегии).

бесконечности. Поэтому можно это уравнение переписать в следующем виде:

$$\cos 2\xi - 1 + \infty \sin 2\xi = 0 \quad (25)$$

или

$$\sin 2\xi(\infty - \operatorname{tg} \xi) = 0, \quad (26)$$

отсюда либо $\sin 2\xi$, либо $\operatorname{tg} \xi = \infty$.

Оба решения дают $\xi = \frac{\pi}{2}$ (минимальное не тривиальное решение).

$$\text{При } \xi^2 = EK_{q1} \text{ и } \xi = \frac{\pi}{2} \quad K_{q1} = \frac{\pi^2}{4E}.$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\pi}{2}; \quad \eta = 0; \quad \delta_1 = \delta_2 = 0; \\ \lambda_1 &= \frac{\pi}{2}; \quad \lambda_2 = -\frac{\pi}{2}; \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Из (27) следует, что форма волнообразования пластины та же самая, как и при $z = \infty$.

Для жестко заделанной пластины можно условное уравнение (34) работы [1] написать следующим образом:

$$\begin{aligned} \cos 2\xi \cos 0 - \cos 0 - \left[\frac{\left(\frac{Az\mu}{2}\right)^2 - (\xi^2 + 0)}{\xi} \right]; \\ \sin 2\xi \frac{\sin 2\eta}{2\eta} = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

или

$$-2\sin^2 \xi + 2\xi \sin \xi \cos \xi = 0. \quad (29)$$

Отсюда следует, что

$$\xi \cos \xi = \sin \xi \quad (30)$$

$$\text{или } \sin \xi = 0. \quad (31)$$

Первое уравнение (30) дает большие значения ξ , чем второе (31).

В последнем случае $\xi = k\pi$.

Положим $K = 1$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} \xi &= \pi; \quad \eta = 0; \quad \delta_1 = \delta_2 = 0; \\ \lambda_1 &= \pi; \quad \lambda_2 = -\pi; \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0. \end{aligned}$$

$$K_{q1} = \frac{\xi^2}{E}, \text{ следовательно } K_{q1} = \frac{\pi^2}{E}.$$

Таким образом, получим тот же результат, что и в случае $z = \infty$.

Покажем, что Эйлера форма не всегда дает минимальное значение K_{q1} .

Пусть $z = -(1 + \varepsilon)$, где ε – малая величина, имеющая знак такой же, как и дробь $\frac{A}{C}$.

Равенства (1) – (3) можно написать так:

$$\xi^2 = \mu^2 \left[\frac{A^2}{16}(2 + \varepsilon)^2 + \frac{c - \sqrt{(-c)^2 + 2DA^2\varepsilon}}{A\varepsilon} \right]; \quad (32)$$

$$\eta^2 = \mu^2 \left[\frac{A^2}{16}\varepsilon^2 - \frac{c + \sqrt{(-c)^2 + 2DA^2\varepsilon}}{A(2 + \varepsilon)} \right]; \quad (33)$$

$$\begin{aligned} K_{q1} &= \frac{\mu^2}{E} \left[B + \frac{A^2}{4} 2\varepsilon - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{c - (1 + \varepsilon)\sqrt{(-c)^2 + 2DA^2\varepsilon}}{-A\varepsilon(2 + \varepsilon)} \right] = \\ &= \frac{\mu^2}{E} \left[B + \frac{c - (1 + \varepsilon)\sqrt{(-c)^2 + 2DA^2\varepsilon}}{A\varepsilon} \times \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Пренебрегая малыми второго порядка, получим:

$$\xi^2 = \mu^2 \left[\frac{A^2}{4} + \frac{2c}{A\varepsilon} + \frac{DA}{c} \right];$$

$$\eta^2 = \mu^2 \left[\frac{A^2}{16}\varepsilon^2 + \frac{DA\varepsilon}{2c} - \frac{DA}{4c}\varepsilon^2 \right] \mu^2; \quad (35)$$

$$\begin{aligned} K_{q1} &= \frac{\mu^2}{E} \left[B + \frac{2c}{A\varepsilon} + \frac{DA}{c} + \frac{c}{A} - \frac{c}{A} \right] = \\ &= \frac{\mu^2}{E} \left[B + \frac{2c}{A\varepsilon} + \frac{DA}{c} \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

Для свободно опертой пластинки при $z = -1$ выше было получено: $\xi = \frac{\pi}{2}$ и $\eta = 0$.

При $z_\varepsilon = -(1 + \varepsilon)$ η – исчезающе мало по сравнению с ξ .

Ожидаем, что ξ будет мало отлично от $\frac{\pi}{2}$.

Пусть $\xi = \frac{\pi}{2} - \delta$, где δ – бесконечно малая величина.

Учитывая, что $\cos 2\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = -\cos 2\delta$ и $\sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = -\sin 2\delta$, можно условное уравнение

(33) работы [1] написать в следующем виде:

$$-\cos 2\delta \cos 2\eta - \cos z_\varepsilon A\mu - \left[\frac{\xi^2 + \eta^2}{2\xi\eta} - \frac{(\xi^2 - \eta^2)^2}{2\xi\eta \frac{z_\varepsilon^2 A^2 \mu^2}{4}} \right] \times \quad (37)$$

$$\times \sin 2\delta \sin 2\eta = 0 \times \sin 2\delta \sin 2\eta = 0.$$

С учетом же того, что η – бесконечно малое, можно последнее уравнение переписать так:

$$-(1 - 2\delta^2)(1 - 2\eta^2) - \left[1 - \frac{z_\varepsilon^2 A^2 \mu^2}{2!} + \dots \right] - \left[\xi - \frac{\xi^3}{\frac{z_\varepsilon^2 A^2 \mu^2}{4}} \right] 2\delta = 0. \quad (38)$$

Опустив члены высшего порядка малости, получим:

$$-2 + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{\frac{z_\varepsilon^2 A^2 \mu^2}{4}} 2\delta = 0, \quad (39)$$

отсюда

$$\delta = \frac{2z_\varepsilon^2 A^2 \mu^2}{\pi^3} \approx \frac{2A^2 \mu^2}{\pi^3} = 0(\mu^2). \quad (40)$$

Из соотношения $\xi^2 = \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \pi\delta$ получим

$$\mu^2 \left[\frac{A^2}{4} + \frac{2c}{A\varepsilon} + \frac{DA}{c} \right] = \frac{\pi^2}{4} - \frac{2A^2}{\pi^2} \mu^2. \quad (41)$$

Отсюда

$$\mu^2 = \frac{\frac{\pi^2}{4}}{\frac{A^2}{4} + \frac{2c}{A\varepsilon} + \frac{DA}{c} + \frac{2}{\pi^2} A^2} = \frac{\frac{\pi^2}{4}}{\frac{9}{20} A^2 + \frac{2c}{A\varepsilon} + \frac{DA}{c}} 0(\varepsilon). \quad (42)$$

Вставим это значение μ^2 в уравнение (36):

$$K_{q1} = \frac{B + \frac{2c}{\varepsilon} + \frac{AD}{c}}{\frac{9}{20} A^2 + \frac{2c}{A\varepsilon} + \frac{DA}{c}} \frac{\pi^2}{4E} = \left[1 + \left(B - \frac{9}{20} A^2 \right) \frac{A}{2c} \right] \frac{\pi^2}{4E}. \quad (43)$$

Теперь видно, что если $B > \frac{9}{20} A^2$, то варьируя z , получаем значение K_{q1} , большее, чем в случае $z = -1$. Но если $B < \frac{9}{20} A^2$, то Эйлерова форма не является критической, а существует другая форма, дающая меньшее значение K_{q1} . Для жестко заделанной пластины, из тех же соображений, что и выше, примем

$$\xi = \pi - \delta. \quad (44)$$

Здесь условное уравнение (34) работы [1] напишется в следующем виде:

$$\cos 2\delta \cos 2\eta - \cos z_\varepsilon A\mu + \frac{\frac{z_\varepsilon^2 A^2 \mu^2}{4} - (\xi^2 + \eta^2)}{2\varepsilon\eta} \sin 2\delta \sin 2\eta = 0. \quad (44)$$

Далее,

$$(1 - 2\delta^2)(1 - 2\eta^2) - \left[1 - \frac{z_\varepsilon^2 A^2 \mu^2}{2} + \dots \right] - (\pi - \delta) 2\delta = 0;$$

или $\frac{z_\varepsilon^2 A^2 \mu^2}{2} = \pi 2\delta$, отсюда

$$\delta = \frac{A^2 \mu^2}{4\pi}. \quad (45)$$

Здесь $\xi^2 = \pi^2 - 2\pi\delta$ и значит

$$\left[\frac{A^2}{4} + \frac{2c}{A\varepsilon} + \frac{DA}{c} \right] \mu^2 = \pi^2 - \frac{A^2}{2} \mu^2. \quad (46)$$

Окончательно:

$$\mu^2 = \frac{\pi^2}{\frac{3}{4}A^2 + \frac{2c}{A\varepsilon} + \frac{DA}{c}}; \quad (47)$$

$$K_{q1} = \frac{B + \left(\frac{2c}{A\varepsilon} + \frac{AD}{c} \right) \pi^2}{\left(\frac{3}{4}A^2 + \frac{2c}{A\varepsilon} + \frac{DA}{c} \right) E} = \quad (48)$$

$$= \left[1 + \left(B - \frac{3}{4}A^2 \right) \frac{A}{2c} \varepsilon \right] \frac{\pi^2}{E}.$$

Видно, что если $B > \frac{3}{4}A^2$, то с изменением z K_{q1} растет, а при $B < \frac{3}{4}A^2$ K_{q1} будет снижаться. Эйлера форма в последнем случае также не дает минимального значения K_{q1} .

Из полученных выше результатов можно сделать такие выводы:

1. Коэффициент критической нагрузки поперечного сжатия K_{q1} не может быть выше значения Элерова коэффициента.

2. При некотором соотношении жесткостей пластины и угла наклона главных направлений упругости K_{q1} ниже Элерова коэффициента:

– для свободно опертой пластины при соотношении $B > \frac{9}{20}A^2$;

– для жестко заделанной пластины при $B > \frac{3}{4}A^2$.

2. Границы Элеровой формы потери устойчивости при совместном действии K_{q1} , K_{q2} , Kt

Для этого общего случая формулы K_{q1} , ξ^2 и η^2 (40), (43) – (44) приведены в [1].

Про анализируем поведение коэффициентов критической нагрузки в зависимости от жесткостей

и наклона главного направления упругости пластины.

Принимаем некоторое значение z_ε , определяемое следующим уравнением:

$$4m - A - Az_\varepsilon = A\varepsilon, \quad (49)$$

где ε – малая величина.

Напишем следующее соотношения:

$$4m - A - Az_\varepsilon = 8m - 2A - A\varepsilon;$$

$$(4m - A)^2 - A^2 z_\varepsilon^2 = A\varepsilon(8m - 2A - A\varepsilon); \quad (50)$$

$$A^2 z_\varepsilon^2 = (4m - A)^2 - A\varepsilon(8m - 2A - A\varepsilon);$$

$$A^2 \left(z_\varepsilon^2 - 1 \right) = 16m^2 - 8Am - A\varepsilon(8m - 2A - A\varepsilon);$$

$$Az_\varepsilon = 4m - A - A\varepsilon.$$

При данном значении z_ε под радикалом $\sqrt{\Omega}$ зависимости (39) работа [1] стоит сумма конечных чисел, сумма малых величин порядка ε и сумма высших его порядков (последнюю можем отбросить).

Представим $\sqrt{\Omega}$ в следующем виде:

$$\sqrt{\Omega} = \sqrt{K_0 + 2AK_1\varepsilon} = \sqrt{K_0} + \frac{AK_1}{\sqrt{K_0}}\varepsilon. \quad (51)$$

Здесь K_0 – подкоренное значение при $z = z_0$.

Вставив последнее в выражение K_0 , получаем

$$K_0 = \left(4Bm - 2c + 16m^3 - 8Am^2 \right)^2 - \quad (52)$$

$$- n \left(16m^2 - 4Am \right) \left(4B + 16m^2 - 8Am \right) +$$

$$+ 4 \left(4m - A \right)^2 n^2 + 32Cmn - 8ACn =$$

$$\left[m \left(4B + 16m^2 - 8Am \right) - 2n \left(4m - A \right) - 2c \right]^2.$$

Теперь можем $\sqrt{\Omega}$ представить в следующем виде:

$$\sqrt{\Omega} = m \left(4B + 16m^2 - 8Am \right) - \quad (53)$$

$$- 2n \left(4m - A \right) - 2c + \frac{AK_1}{\sqrt{K_0}}\varepsilon.$$

Последнее слагаемое мы не разворачиваем, ибо, как увидим в дальнейшем, оно нам не будет нужно.

Вставим полученные выше соотношения в уравнения (40), (43) – (44) работы [1], а затем отбрасываем малые высших порядков, окончательно получим:

$$K_{q1} = \left\{ B + 8m^2 - 3Am - 2n - \frac{K_1}{2\sqrt{K_0}} - \right. \\ \left. -(4Bm - 2c + 16m^3 - 8Am^2 - \right. \\ \left. - 8mn + 2An) / A\varepsilon \right\} \frac{\mu^2}{E}; \quad (54)$$

$$\xi^2 = \left[5m^2 - 2Am + \frac{A^2}{4} - n - \right. \\ \left. - \frac{K_1}{\sqrt{K_0}} - (4Bm - 2c + 16m^3 - \right. \\ \left. - 8Am^2 - 8mn + 2An) / A\varepsilon \right] \mu^2; \quad (55)$$

$$\eta^2 = \left\{ \frac{(4m)^2}{16} - ((4B - A^2)m - 2c + \right. \\ \left. + m[(4m - A)^2 - A\varepsilon(8m - 2A - A\varepsilon)] + \right. \\ \left. + (4m - A - A\varepsilon)2n) / (2(8m - 2A - A\varepsilon)) + \right. \\ \left. + (m(4B + 16m^2 - 8Am) - 2n(4m - A) - \right. \\ \left. - 2c + \frac{AK_1}{\sqrt{K_0}}\varepsilon) / (2(8m - 2A - A\varepsilon)) \right\} \mu^2 = \\ = [m^2 - n^2 + (\dots)\varepsilon] \mu^2.$$

Докажем, что при $4m - A - Az_0 = 0$ получается Эйлера нагрузка.

Выражение K_{q1} , ξ^2 , и η^2 получим из уравнений (54) – (56), приняв в них $\varepsilon = 0$.

Так как K_{q1} должно быть конечной величиной, то:

$$K_{q1} = \left[-(4Bm - 2c + 16m^3 - 8Am^2 - \right. \\ \left. - 8mn + 2An) / A\varepsilon \right] \frac{\mu^2}{E}; \quad (57)$$

$$\xi^2 = \left[-(4Bm - 2c + 16m^3 - 8Am^2 - \right. \\ \left. - 8mn + 2An) / A\varepsilon \right] \mu^2; \quad (58)$$

$$\eta^2 = [m^2 - n^2] \mu^2. \quad (59)$$

Величина, стоящая в квадратных скобках (57), равна бесконечности. Отсюда следует, что $\mu = 0$.

Из (57) и (58) имеем

$$\xi^2 = EK_{q1}. \quad (60)$$

Отсюда следует, что ξ величина тоже конечная, а $\eta = 0$.

Уравнение связи (33) работы [1] для свободно опертой пластины запишется следующим образом:

$$\cos 2\xi \cos 0 - \cos 0 - \left[\xi - \frac{\xi^3}{\left(\frac{zA\mu}{2}\right)^2} \right] \times \sin 2\xi \frac{\sin 2\eta}{2\eta} = 0. \quad (61)$$

Так же, как и в разделе 1, случай 2, для свободно опертой пластины, получаем $\xi = \frac{\pi}{2}$ и $K_{q1} = \frac{\pi^2}{4E}$.

Форма потери устойчивости – Эйлера.

Уравнение связи (34) работы [1] для жестко заделанной пластины запишется следующим образом:

$$\cos 2\xi \cos 0 - \cos 0 - \left[\frac{\left(\frac{Az\mu}{2}\right)^2 - (\xi^2 + 0)}{\xi} \right] \times \\ \times \sin 2\xi \frac{\sin 2\eta}{2\eta} = 0. \quad (62)$$

Как и в разделе 1, случай 2, получаем:

$$\xi = \pi \text{ и } K_{q1} = \frac{\pi^2}{E}.$$

Теперь будем искать условия, при которых критическая нагрузка снижается по отношению к Эйлеровой.

Для свободно опертой пластины выше получено, что при $z = z_0$ и $\xi = \frac{\pi}{2}$

$$\eta = 0 \text{ и } \mu = 0.$$

При $z = z_\varepsilon$ ожидаем, что η будет мало по сравнению с ξ , а ξ будет мало отличаться от $\frac{\pi}{2}$.

Пусть $\xi = \frac{\pi}{2} - \delta$, где δ – малая величина по отношению к $\frac{\pi}{2}$.

Соотношение между величинами, входящими в уравнение связи (33) работы [1], такое же, как и в случае изолированного действия K_{q1} (40):

$$\delta = \frac{2(z_\varepsilon A \mu)^2}{\pi^3}.$$

Из этого же соотношения получаем:

$$\xi^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \pi\delta = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{2(4m - A - A\varepsilon)^2 \mu^2}{\pi^2}, \quad (63)$$

откуда

$$\mu^2 = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\frac{F^2}{\mu^2} + \frac{2(4m - A)^2}{\pi^2}}. \quad (64)$$

Вставив в (54) данное выражение μ^2 с входящим в него в развернутом виде членом $\frac{\xi^2}{\mu^2}$ из уравнения (55), получаем:

$$\begin{aligned} K_{q1} = & [(-4Bm - 2c + 16m^3 - 8Am^2 - 8mn + \\ & + 2An) / A\varepsilon + B + 8m^2 - 3Am - 2n - \\ & - \frac{K_1}{2\sqrt{K_0}}] / (-4Bm - 2c + 16m^3 - 8Am^2 - \\ & - 8mn + 2An) / A\varepsilon + 5m^2 - 2Am + \frac{A^2}{4} - n - \\ & - \frac{K_1}{2\sqrt{K_0}} + \frac{32m^2 - 16Am + 2A^2}{\pi^2} \Big] \frac{\pi^2}{4E} = \quad (65) \\ = & [1 - ((B - \frac{A^2}{4} + 3m^2 - Am - n - \frac{32m^2}{\pi^2} + \\ & + \frac{16Am}{\pi^2} - \frac{2A^2}{\pi^2}) / (4Bm - 2c + 16m^2 - 8Am^2 - \\ & - 8mn + 2An)) A\varepsilon] \frac{\pi^2}{4E}. \end{aligned}$$

Из выражения (54) видим, что

$$\left(\frac{2A\varepsilon}{4Bm - 2c + 16m^3 - 8Am^2 - 8mn + 2An} \right)$$

должно быть всегда положительным. Значит, положительный числитель дроби определяет повышение K_{q1} , а отрицательный – его понижение.

Условие падения K_{q1} , выражается уравнением

$$B - \frac{A^2}{4} + 3m^2 - Am - n - \frac{32m^2}{\pi^2} + \frac{16Am}{\pi^2} - \frac{2A^2}{\pi^2} = 0. \quad (66)$$

В случае жестко заделанной пластины значение ξ близко к π .

Уравнение связи (34) работы [1] запишем в следующем виде:

$$\cos 2(\pi - \xi) \cos 2\eta - \cos z_\varepsilon A_\mu +$$

$$\frac{\left(\frac{z_\varepsilon A_\mu}{2}\right)^2 - (\xi^2 + \eta^2)}{2\xi\eta} \sin 2(\pi - \xi) \times \sin 2\eta = 0. \quad (67)$$

Отсюда можем с большой степенью точности записать:

$$\begin{aligned} & [1 - 2(\pi - \xi)^2 + \dots] (1 - 2\eta^2) - \\ & - \left[1 - \frac{(z_\varepsilon A_\mu)^2}{2} + \dots \right] + \frac{(z_\varepsilon A_\mu)^2 - (\xi^2 + \eta^2)}{2\xi\eta} \times \\ & \times 2(\pi - \xi) 2\eta = 0. \quad (68) \end{aligned}$$

Уравнение (68) можно переписать как

$$\begin{aligned} & -2\pi^2 + 4\pi\xi - 2\xi^2 - 2\eta^2 + \frac{(z_\varepsilon A_\mu)^2}{2} + \\ & + \frac{(z_\varepsilon A_\mu)^2}{2} \frac{\pi}{\xi} - \frac{(z_\varepsilon A_\mu)^2}{2} \frac{2\pi\eta^2}{\xi} - 2\pi\xi + 2\eta^2 + 2\xi^2 = 0 \end{aligned}$$

или

$$-2\pi^2 + 2\pi\xi + \frac{(z_\varepsilon A_\mu)^2}{2} \frac{\pi}{\xi} - \frac{2\pi\eta^2}{\xi} = 0,$$

или

$$\pi\xi = \xi^2 + \frac{(z_\varepsilon A_\mu)^2}{4} - \eta^2. \quad (69)$$

Последнее уравнение представим в следующем виде

$$\pi \left(\frac{\xi}{\mu} \right) \mu = \left[\left(\frac{\xi}{\mu} \right)^2 + \frac{z_\varepsilon^2 A^2}{4} - \left(\frac{\eta}{\mu} \right)^2 \right] \mu^2. \quad (70)$$

Отсюда:

$$\mu^2 = \pi^2 \frac{\left(\frac{\xi}{\mu} \right)^2}{\left[\left(\frac{\xi}{\mu} \right)^2 + \frac{z_\varepsilon^2 A^2}{4} - \left(\frac{\eta}{\mu} \right)^2 \right]^2}; \quad (71)$$

$$K_{q1} = \frac{\frac{K_{q1}}{\mu^2} \left(\frac{\xi}{\mu} \right)^2}{\left[\left(\frac{\xi}{\mu} \right)^2 - \left(\frac{\eta}{\mu} \right)^2 + \frac{z_\varepsilon^2 A^2}{4} \right]^2} \pi^2. \quad (72)$$

Вставив в полученное выражение для K_{q1} вели-

чины $\frac{K_{q1}}{\mu^2}$, $\left(\frac{\xi}{\mu} \right)^2$, $\left(\frac{\eta}{\mu} \right)^2$ и $\frac{z_\varepsilon^2 A^2}{4}$ в развернутом виде из уравнений (54) – (56) и значение z_ε , получим

$$K_{q1} = \frac{\left[\left(1 - \frac{B + 8m^2 - 3Am - 2n - \frac{K_1}{2\sqrt{K_0}}}{4Bm - 2c + 16m^3 - 8Am^2 + 2An} A\varepsilon \right) \left(1 - \frac{5m^2 - 2Am + \frac{A^2}{4} - n - \frac{K_1}{2\sqrt{K_0}}}{4Bm - 2c + 16m^3 - 8Am^2 + 2An} A\varepsilon \right) \right] \frac{\pi^2}{4}}{\left[\left(1 - \frac{8m^2 - 4Am + \frac{A^2}{2} - \frac{K_1}{2\sqrt{K_0}}}{4Bm - 2c + 16m^3 - 8Am^2 + 2An} A\varepsilon \right)^2 \right]} \quad (73)$$

$$= \left[1 - \frac{B - \frac{3}{4}A^2 - 3m^2 + 3Am - 3n}{4Bm - 2c + 16m^3 - 8Am^2 + 2An} A\varepsilon \right] \frac{\pi^2}{4}.$$

Из уравнения (54) видим, что K_{q1} положительно при положительном значении дроби

$$\frac{4Bm - 2c + 16m^3 - 8Am^2 - 8mn + 2An}{A\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что падение K_{q1} по отношению к его Эйлеровому значению получаем при отрицательном числителе дроби, входящей в выражение K_{q1} .

Условие падение K_{q1} выражается уравнением

$$B - \frac{3}{4}A^2 - 3m^2 + 3Am - 3n = 0. \quad (74)$$

Уравнение (66) и (74) дают границы прямого участка диаграммы совместного действия.

Из полученных выше результатов можно сделать такие выводы:

1. При совместном действии трех нагрузок коэффициент критической нагрузки K_{q1} – постоянен и равен Эйлеровому значению в большом диапазоне действия сдвигающей и продольной сжимающей нагрузок.

2. Границы постоянного значения K_{q1} и точки начала его снижения получаются при значениях сдвигающей и продольной сжимающей нагрузок, определяемых соотношениями:

– для свободно опертой пластины

$$B - \frac{A^2}{4} + 3m^2 - Am - n - \frac{32m^2}{\pi^2} + \frac{16Am}{\pi^2} - \frac{2A^2}{\pi^2} = 0;$$

– для жестко заделанной пластины

$$B - \frac{3}{4}A^2 - 3m^2 + 3Am - 3n = 0.$$

Литература

1. Неман И.Г. Устойчивость бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости. Точный метод. Часть 1. Вывод общих уравнений для коэффициентов критической нагрузки. Устойчивость пластины при совместном действии двухстороннего сжатия и сдвига // Авиационно-космическая техника и технология. – 2006. – № 1 (27). – С.96-103.