

УДК 539.3 : 620.22-419

**Л.В. ШАШКОВА, М.А. ШЕВЦОВА**

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”, Украина*

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ**

Разработан аналитический метод расчета анизотропной пластины ступенчато-переменной толщины, изготовленной из композиционного материала. Для исследования напряженно-деформированного состояния была использована уточненная теория пластин, учитывающая деформации поперечного сдвига. Преимущество предложенного метода заключается в возможности исследования концентрации напряжений, возникающей в зоне ступенчатого изменения толщины конструкции. Качественное сравнение приведенных численных результатов с уже известными доказывает эффективность метода.

**пластина переменной толщины, напряженно-деформированное состояние, подкрепляющие элементы, послойная теория, композиционный материал, метод Ритца**

### **Введение**

Для моделирования конструктивных элементов летательных аппаратов (ЛА), изготовленных из композиционных материалов (КМ), широко используют расчетные схемы многослойных пластин и оболочек. Постоянное внимание к исследованию напряженно-деформированного состояния (НДС) таких конструкций привело к наличию в литературе большого количества уточненных теорий, учитывающих физическую и геометрическую нелинейность, наличие сдвиговых деформаций слоев, а также ряд других факторов [1 – 3], предназначенных для расчета пластин и оболочек постоянной толщины.

Гораздо реже встречаются публикации, посвященные проблемам расчета элементов ступенчато-переменной толщины, широко распространенные в конструкции ЛА в виде стрингерных панелей крыла и фюзеляжа.

До недавнего времени для исследования подкрепленных конструкций наиболее часто использовался метод “размазывания”, применимый в случаях, когда дискретные элементы имеют одинаковую геометрию и расположены по длине конструкции с равномерным малым шагом [4]. Однако такой метод не дает возможности исследовать возникновение

концентрации напряжений в районе соединения панели с ребром жесткости. В настоящее же время исследования в этой области сконцентрированы на местном поведении подкрепленных оболочек и пластин.

В работах [5, 6] методом конечного элемента (МКЭ) проведено исследование концентрации напряжений в зоне присоединения ребер жесткости в оболочках, находящихся под действием равномерного давления. Определение оптимальной формы поперечного сечения ребер жесткости, выполненное в работе [7], также основано на расчетных схемах конечно-элементного моделирования.

Хотя сравнение с экспериментальными результатами тензометрических измерений и подтверждает целесообразность использования МКЭ, главным его недостатком является то, что расчетная модель создается для строго определенной конструкции и не может быть произвольно распространена на подобные элементы.

Исходя из этого, актуальной задачей в настоящее время является разработка аналитического метода расчета НДС многослойной пластины ступенчато-переменной толщины.

**Постановка задачи.** Объектом исследования данной задачи является плоская пластина, образо-

ванная совокупностью различным образом ориентированных в плоскости слоев КМ, обладающих произвольными физико-механическими характеристиками, усиленная накладкой или ослабленная вырезом. Пластина имеет прямоугольную форму в плане, а ее геометрические параметры представлены на рис. 1.

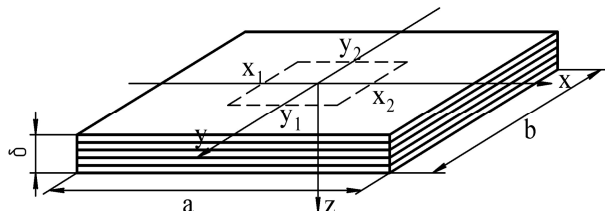


Рис. 1. Геометрические параметры пластины ступенчато-переменной толщины

Пунктирная линия на рис. 1 соответствует границе, на которой толщина пластины ступенчато изменяется на величину  $\bar{\delta}$ , соответствующую толщине накладки или глубине выреза.

При расчете пластины, нагруженной равномерно распределенной поперечной нагрузкой, условия закрепления кромок соответствуют граничным условиям шарнирного закрепления, которые предполагают отсутствие прогиба и смещения вдоль края и свободное перемещение поперек края и могут быть записаны в виде совокупности статических и геометрических граничных условий в следующем виде: при  $x = \pm a$ :

$$\omega = 0, \nu = 0, \theta_y = 0, N_x = 0, M_x = 0;$$

при  $y = \pm b$ :

$$\omega = 0, u = 0, \theta_x = 0, N_y = 0, M_y = 0. \quad (1)$$

Преимущество таких граничных условий заключается в достаточно точном описании распространенных схем закрепления панелей в реальных конструкциях ЛА [4].

Для моделирования ступенчатого изменения толщины пластины введем дополнительные функции  $H'$  и  $H''$ , соответствующие накладке и вырезу:

$$H' = Heviside(x - x_1) \cdot Heviside(x - x_2) \times \\ \times Heviside(y - y_1) \cdot Heviside(y - y_2), \quad (2)$$

$$H'' = 1 - Heviside(x - x_1) \cdot Heviside(x - x_2) \times \\ \times Heviside(y - y_1) \cdot Heviside(y - y_2). \quad (3)$$

Используя функции  $H'$  и  $H''$ , можно смоделировать ступенчатое изменение толщины пластины с любыми геометрическими и физико-механическими характеристиками путем задания коэффициентов матрицы жесткости слоев, относящихся к накладке или вырезу,  $\bar{b}_{ij}$  в следующем виде:

$$\bar{b}_{ij} = H'(H'') \cdot b_{ij}, \quad (4)$$

где  $b_{ij}$  – коэффициенты матрицы жесткости целого слоя.

## Метод решения

Для расчета напряженно-деформированного состояния будем использовать послойную теорию, которая сводит трехмерную задачу к двумерной, путем задания трехмерного поля перемещений как функции поля перемещений на поверхности и ее линейной интерполяции по толщине пластины [5]. В отличие от классической теории слоистых пластин [4] в расчете также будем учитывать деформации поперечного сдвига.

**Исходные положения и гипотезы.** Пусть пластина состоит из  $k$  ортотропных слоев (слои с углами укладки  $+\varphi$  и  $-\varphi$  будем считать одним слоем), для каждого из которых известны физико-механические характеристики материала и угол ориентации волокон относительно осей общей системы координат  $(x, y, z)$ .

Примем, что координатная плоскость  $(x, y)$  совпадает с нижней поверхностью пластины, а координатная ось  $z$  направлена вверх.

В основе рассматриваемой теории лежат следующие допущения:

1. В каждом слое пластины нормальное перемещение  $\omega_i$  не зависит от координаты  $z$ , следовательно:

$$\varepsilon_z = 0; \quad \omega_i = \omega(x, y).$$

2. Нормальные напряжения  $\sigma_z$ , действующие в сечениях, параллельных срединной плоскости, пренебрежимо малы по сравнению с основными напряжениями и в расчете учитываться не будут.

3. Деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$  аппроксимируются линейными функциями в пределах слоя.

**Основные уравнения.** Будем задавать перемещения  $u_i$ ,  $v_i$ ,  $w_i$  некоторой точки  $i$ -й поверхности пластины в направлениях  $(x, y, z)$  в виде функции переменных  $(x, y)$ , помня, что вследствие принятия гипотезы нерастяжимых нормалей, перемещение  $w_i$  одинаково для всех слоев пластины. Перемещения точек  $i$ -й поверхности задаем так, чтобы удовлетворить граничным условиям на краях пластины, соответствующим формуле (1). Под  $i$ -й поверхностью пластины будем понимать поверхность раздела " $i-1$ "-го и " $i$ "-го слоев.

Если в пластине содержатся слои с одинаковыми геометрическими размерами и свойствами материала, объем расчета может быть уменьшен путем группировки одинаковых слоев в один "математический" слой.

В пределах  $i$ -го слоя перемещения  $U_i$ ,  $V_i$  аппроксимируем линейными функциями. Перемещение  $W_i$  остается постоянным для всех слоев пластины и равно  $W$ . На рис. 2 представлено распределение перемещений в пределах  $i$ -го слоя.

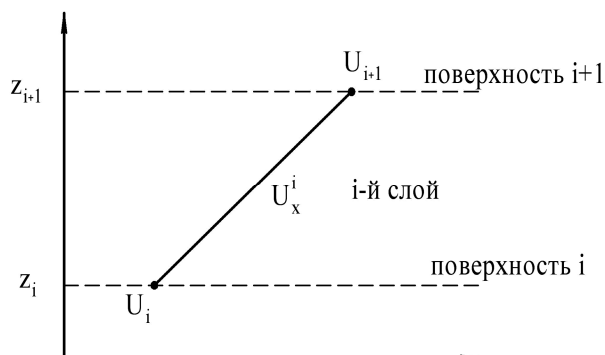


Рис. 2. Распределение перемещений в пределах  $i$ -го слоя

Согласно рис. 2 перемещение  $U_i$  определяем следующим образом:

$$U_i = u_i + \frac{1}{\delta_i} \cdot (u_{i+1} - u_i) \cdot (z - z_i). \quad (5)$$

Аналогично определяем перемещения  $V_i$ :

$$V_i = v_i + \frac{1}{\delta_i} \cdot (v_{i+1} - v_i) \cdot (z - z_i). \quad (6)$$

Определение НДС будем выполнять в рамках линейной теории, принимая, что возникающие деформации являются малыми и связаны с перемещениями линейными геометрическими соотношениями (7):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^i &= \frac{\partial U_i}{\partial x}; & \varepsilon_y^i &= \frac{\partial V_i}{\partial y}; \\ \gamma_{xy}^i &= \frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial x}; & \gamma_{xz}^i &= \frac{\partial U_i}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}; \\ \gamma_{yz}^i &= \frac{\partial V_i}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}. \end{aligned} \quad (7)$$

В соответствии с условиями ортотропности слоев решение уравнений обобщенного закона Гука относительно напряжений  $\sigma_x^i$ ,  $\sigma_y^i$ ,  $\tau_{xy}^i$ ,  $\tau_{xz}^i$ ,  $\tau_{yz}^i$  имеет известный вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x^i &= b_{11}^i \cdot \varepsilon_x^i + b_{12}^i \cdot \varepsilon_y^i; \\ \sigma_y^i &= b_{21}^i \cdot \varepsilon_x^i + b_{22}^i \cdot \varepsilon_y^i; \\ \tau_{xy}^i &= b_{33}^i \cdot \gamma_{xy}^i; \\ \tau_{xz}^i &= b_{44}^i \cdot \gamma_{xz}^i; \\ \tau_{yz}^i &= b_{55}^i \cdot \gamma_{yz}^i. \end{aligned} \quad (8)$$

Коэффициенты матрицы жесткости, входящие в уравнения (8), вычисляются по известным формулам [4].

Для решения задачи определим полную энергию деформации упругой системы, как разность между потенциальной энергией и работой внешних сил:

$$\mathcal{E} = \Pi + A, \quad (9)$$

где  $\Pi$  – потенциальная энергия деформации;

$A$  – работа внешних сил.

Потенциальную энергию деформации  $i$ -го слоя определим следующим образом:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \cdot \iint_S \int_{z_i}^{z_{i+1}} \{\sigma^i \cdot \varepsilon^i\} \cdot dx \cdot dy \cdot dz, \quad (10)$$

где  $z_i$  и  $z_{i+1}$  – координаты поверхностей, ограничивающих  $i$ -й слой (рис. 2).

Тогда потенциальная энергия деформации всей пластины равна сумме потенциальных энергий деформации всех слоев:

$$\Pi = \sum_{i=1}^k \Pi_i. \quad (11)$$

Для окончательного определения полной энергии упругой системы необходимо определить работу внешних сил, приложенных к пластине. В случае действия на пластину поперечного давления интенсивностью  $p$ , работа внешних сил определяется по формуле

$$A = - \iint_S p \cdot W_k \cdot dx \cdot dy. \quad (12)$$

**Выбор приближенного метода решения.** Для определения НДС пластины под действием приложенной нагрузки будем использовать метод Ритца-Тимошенко, позволяющий получить приближенное решение в перемещениях на основе вариационного принципа Лагранжа.

В соответствии с выбранным методом зададим перемещения  $u_i, v_i, w$   $i$ -й поверхности пластины в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_i(x, y) &= (y^2 - b^2) \cdot (\alpha_{1,i} + \alpha_{2,i}x + \alpha_{3,i}y + \dots + \alpha_{n,i}y^n); \\ v_i(x, y) &= (x^2 - a^2) \cdot (\beta_{1,i} + \beta_{2,i}x + \beta_{3,i}y + \dots + \beta_{n,i}y^n); \\ w(x, y) &= (x^2 - a^2) \cdot (y^2 - b^2) \cdot (\gamma_1 + \gamma_2x + \dots + \gamma_ny^n), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $n$  – степень полинома, определяющего перемещения пластины;  $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}, \gamma_i$  – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Вариационное уравнение получим, приравнявая нулю первую вариацию полной энергии системы, определяемой по формуле (9). Таким образом, разрешающая система уравнений будет иметь вид:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha_{i,j}} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \beta_{i,j}} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \gamma_i} = 0, \quad (i = 1 \dots n). \quad (14)$$

Поскольку полная энергия – квадратичная функция от перемещений, то уравнения (14) будут представлять собой полную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов. Решение этой системы дает возможность определить перемещения, деформации и напряжения, возникающие в пластине, т.е. окончательно определить ее НДС.

На основании численных результатов расчета параметров НДС квадратной ортотропной пластины, демонстрирующих хорошую сходимость, было определено достаточное для получения требуемой точности вычислений количество удерживаемых членов полинома, равное семи.

## Численные результаты

Для исследования была выбрана квадратная ортотропная пластина (усиленная накладкой или ослабленная вырезом) с симметричной схемой укладки слоев  $[0^\circ, 90^\circ]$  и геометрическими размерами  $100 \times 100 \times 2,8$  мм. Жесткостные характеристики материала, из которого изготовлена пластина, имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} E_1 = E_2 = 60 \text{ ГПа}; \quad G_{12} = 6 \text{ ГПа}; \quad \nu_{12} = 0,28; \\ G_{13} = G_{23} = 4 \text{ ГПа}; \quad \delta_0 = 0,35 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Накладка и вырез имеют в плане квадратную форму со стороной  $\bar{a} = 20$  мм и толщину  $\bar{\delta} = 0,7$  мм. Для наглядности на рис. 3 изображено сечение пластины в области ступенчатого изменения толщины, характеризующее его расположение.

Рассмотрим изменение распределения напряжений по толщине пластины при переходе от плоской конструкции к пластине со ступенчато-переменной толщиной.

Графики распределения нормальных напряжений  $\sigma_x$  и напряжений поперечного сдвига  $\tau_{xz}$  в сечении пластины  $y = 0$  представлены на рис. 4.

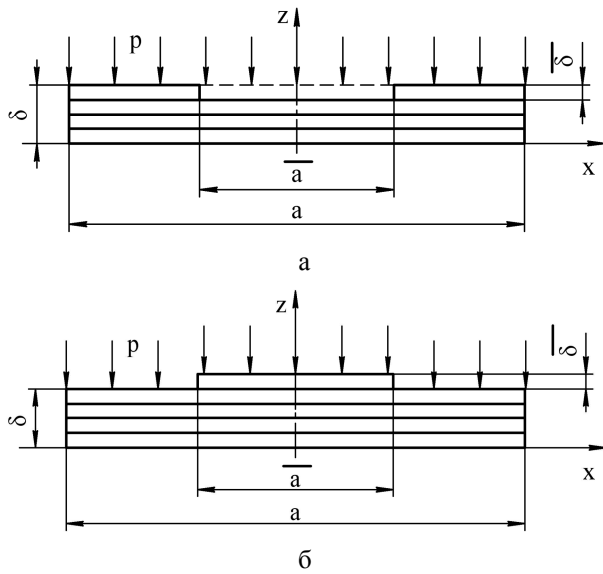


Рис. 3. Расположение выреза (а) и накладки (б) в исследуемой пластине

Распределение напряжений в пластине постоянной толщины изображено штриховой линией, в пластине с накладкой или вырезом – сплошной.

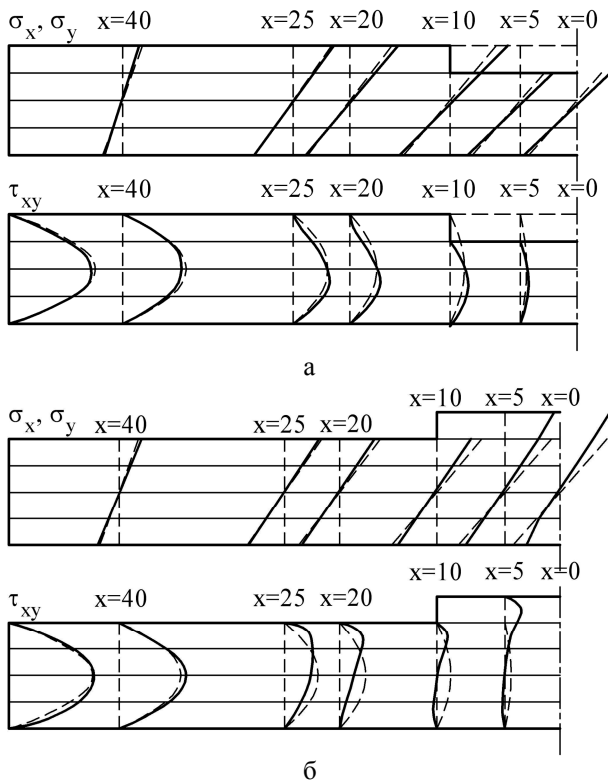


Рис. 4. Распределение нормальных напряжений и напряжений поперечного сдвига по толщине пластины с вырезом (а) и накладкой (б)

Как видно из рис. 4, распределение напряжений по толщине пластины, существенно изменяясь в зо-

не ступенчатого перехода и вблизи него, на удалении приближается к распределению напряжений в пластине постоянной толщины.

Графики, представленные на рис. 4, позволяют сделать следующие выводы:

1) при наличии в пластине выреза максимальный рост напряжений будет возникать в ослабленном слое, и именно с него начнется разрушение конструкции;

2) в случае накладки наиболее нагруженной, а значит, склонной к разрушению, оказывается противоположная усилению поверхность пластины.

Для оценки степени изменения напряжений, а также получения качественной картины их концентрации в зоне резкого изменения толщины конструкции, сравним максимальные нормальные напряжения на верхней и нижней поверхностях пластины постоянной толщины с напряжениями в пластинах, содержащих вырез или накладку.

Характер изменения распределения напряжений представлен на рис. 5 в виде графических зависимостей распределения безразмерных нормальных напряжений в исследуемой пластине, определяемых следующим образом:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma^{max}}, \quad (15)$$

где  $\sigma$  – напряжения, действующие в пластине переменной толщины;

$\sigma^{max}$  – максимальные напряжения в пластине постоянной толщины.

На рис. 5, как и ранее, распределение напряжений в пластине постоянной толщины изображено штриховой линией. Вертикальные штриховые линии на рисунке указывают границу изменения толщины.

Необходимо отметить, что как в случае накладки, так и в случае выреза, характер изменения напряжений на нижней поверхности пластины, свободной от резкого изменения толщины, является более плавным, чем на верхней.

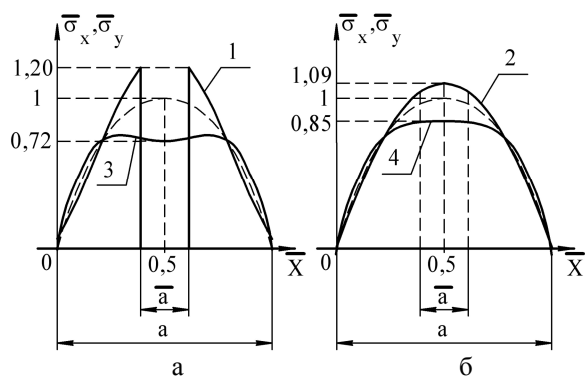


Рис. 5. Распределение нормальных напряжений в пластине с вырезом (1, 2) и накладкой (3, 4) на верхней (а) и нижней (б) поверхности

Распределение напряжений, представленное на рис. 5, можно лишь качественно сравнить с графиками, приведенными в работах [6] и [7], вследствие отсутствия в них начальных данных. Однако даже такое сравнение демонстрирует хорошее соответствие результатов.

Для пластины, ослабленной вырезом, должен быть учтен также рост касательных напряжений и напряжений поперечного сдвига, вследствие их влияния на прочность конструкции. Их распределение представлено на рис. 6.

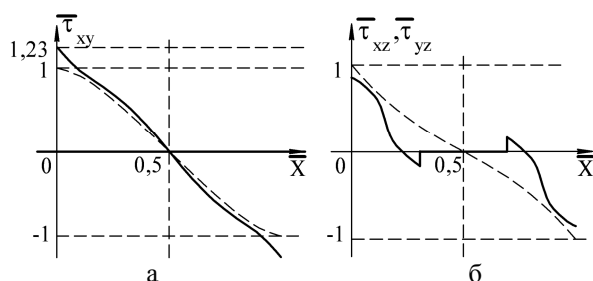


Рис. 6. Распределение касательных напряжений  $\bar{\tau}_{xy}$  на верхней поверхности пластины (а) и напряжений поперечного сдвига  $\bar{\tau}_{xz}$  в слое с вырезом (б)

### Заключение

Таким образом, на основании результатов проведенных численных исследований, их анализа и сравнения с данными, имеющимися в литературе, можно сделать вывод, что предложенный аналитический метод может успешно применяться для расчета напряженно-деформированного состояния пластин ступенчато-переменной толщины. Он позволяет не только определить степень концентрации на-

пряжений в зоне ступенчатого изменения толщины, но и определить наиболее опасную точку, в которой может начаться разрушение конструкции.

В дальнейшем при использовании предложенного метода могут быть решены задачи исследования снижения прочностных характеристик пластин и оболочек из КМ с расслоениями и определения оптимальных методик ремонта подобных дефектов.

### Литература

1. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. – 419 с.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. – М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1987. – 360 с.
3. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957. – 463 с.
4. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 271 с.
5. Samuel Kinde Kassegne, J.N. Reddy Local behavior of discretely stiffened composite plates and cylindrical shells // Reference Publication NASA PR-1351. – Texas A&M University, 1999. – P. 23-57.
6. Абраменко В.Э., Ганов Э.В. Исследование напряженного состояния в районе соединения оболочки с ребром жесткости при действии наружного давления // Механика композитных материалов. – 1988. – № 4. – С. 748-750.
7. Ганов Э.В., Попов В.Д., Пивненко О.А., Рынденкова Н.М. Влияние формы сечения ребер жесткости на напряженное состояние оболочки // Механика композитных материалов. – 1988. – № 3. – С. 554-557.

Поступила в редакцию 11.09.2006

**Рецензент:** канд. техн. наук, проф. В.В. Кириченко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”, Харьков.