

УДК 621.833

Ю.В. КОВЕЗА, С.И. ПШЕНИЧНЫХ

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Украина***ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В ВОЛНОВОЙ ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧЕ С ДВУМЯ ГИБКИМИ КОЛЕСАМИ**

Предложен усовершенствованный метод, который основан на использовании энергии деформации системы, для определения сил, действующих в зацеплении и на тела качения гибких подшипников, применительно к волновой зубчатой передаче с двумя гибкими колесами.

**привод, волновая зубчатая передача, два гибких колеса, кулачковый генератор качения, зацепление, форма, силы**

**Введение**

Благодаря большому передаточному отношению, малым габаритным размерам и массе, возможности передачи движения через сплошную стенку волновые зубчатые передачи (ВЗП) эффективно применяются в вакуумной технике и авиационно-космических приводах различных следящих систем (приводы антенн, радаров, систем наведения).

Улучшения массогабаритных характеристик и повышения нагрузочной способности ВЗП можно достичь включением в одновременную работу двух параллельных гибких колес, связанных с тихоходным валом, за счет передачи мощности по двум потокам.

**Формулирование проблемы.** Определение сил, действующих на звенья ВЗП, является важной задачей, без решения которой невозможно рассчитать форму гибкого колеса (ГК), работоспособность подшипников генератора волн и качественные характеристики передачи. ВЗП многократно статически неопределимые системы. Сложность определения сил в отличие от аналогичных задач строительной механики заключается в том, что здесь неизвестны не только величины сил, но и место их приложения по местам контакта упругих звеньев, изменяющих форму под нагрузкой.

В работе [1] используется энергетический метод строительной механики, что позволяет упростить алгоритм расчета и уточнить определение силовых факторов, однако рассмотрена передача с одним ГК. Также вводимый условный коэффициент суммарной податливости для определения сил в зацеплении не учитывает крутильную жесткость передачи.

**Цель данной работы.** Целью данной работы является определение сил, действующих в волновой передаче с двумя гибкими колесами.

**Решение проблемы**

Для определения сил, действующих в передаче, применим метод, основанный на использовании энергии деформации системы внешними силами. Использование данного метода позволяет учесть пространственность зацепления, ошибки изготовления звеньев, силы трения и инерции. Приведенные ниже формулы справедливы для внешних и внутренних гибких и соответствующих им жестких зубчатых колес, поэтому все решения представлены без указания индексов внешнего или внутреннего зацепления колес.

В физической модели ВЗП (рис. 1) на ГК  $z_1$  действуют силы: от кулачкового генератора  $P_R$  и трения  $P_T$ ; от зацепления (нормальные  $F_R$  и касательные  $F_T$

к профилю зуба, замененные результирующей  $F$ ); инерции массы ГК  $g_R$  и тел качения  $g_T$ . После приведения сил к срединной поверхности зубчатого венца разложим силу  $F$  на  $F_R, F_T$ , добавим моменты  $T_P, T_F$  и получим вращающий момент на ГК [1]:

$$T_1 = \sum_{i=1}^z [(F_{Ti} + g_{Ti})\rho_m \cos(\mu_m) + (F_{Ri} + g_{Ri})\rho_m \sin(\mu_m) + T_{Fi}] - \sum_{j=1}^n [P_{Tj} \rho_k \cos(\mu_k) + P_{Rj} \rho_k \sin(\mu_k) - T_{Pj}] \quad (1)$$

где  $F, g, P, T$  – модули векторов сил и моментов в сечениях  $B, m$ ;  $\rho_m = \overline{Om}$ ,  $\rho_k = \overline{Ok}$  – радиусы срединной поверхности зубчатого венца;  $\mu_m, \mu_k$  – углы между нормалью к срединной поверхности и радиусом.

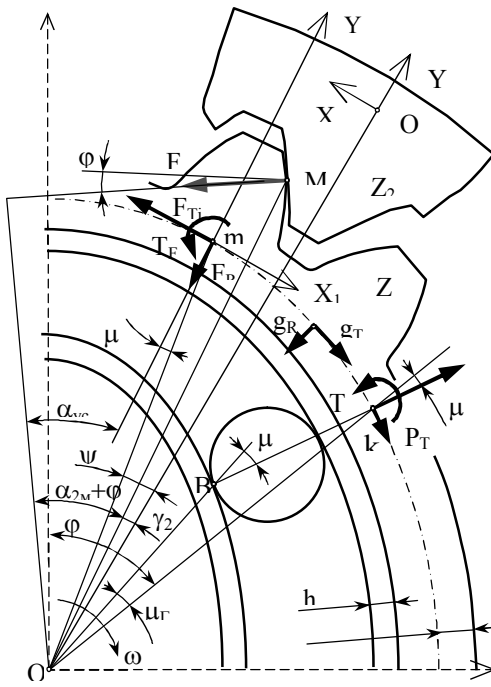


Рис. 1. Силы, действующие на гибкое ко-

Величины, входящие в уравнение (1), определяются по зависимостям:

$$\rho = R + w(\varphi), \quad \mu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \quad F_T = F \cos(\alpha_{ycl}),$$

$$\alpha_{ycl} = \alpha_2 + \varphi' + \gamma_2 - \psi_1 + \mu_m, \quad P_T = f_1 P_R,$$

$$F_R = F \sin(\alpha_{ycl}), \quad T_P = f_1 P_R (h_k + 0,5h_1),$$

$$T_F = T_P (\overline{OM} \cos(\alpha_2 + \varphi') / \rho - \cos(\alpha_{ycl})),$$

где  $R$  – радиус срединной поверхности недеформированного обода ГК;  $w(\varphi)$  – радиальные перемещения точек срединной поверхности обода;  $\alpha_2$  – угол профиля зуба в точке контакта;  $\varphi'$  – угол трения в зацеплении;  $\gamma_2$  – угол, соответствующий половине толщины зуба колеса  $z_2$ ;  $\psi_1$  – угол между радиусами, проведенными из начала координат  $X_1 Y_1, X_2 Y_2$  связанными с зубом колес  $z_1$  и  $z_2$ ;  $\overline{OM}$  – радиус точки контакта;  $f_1$  – условный коэффициент трения в подшипнике генератора;  $h_k$  – толщина кольца подшипника;  $h_1$  – толщина кольца колеса.

Силы инерции вычисляются по зависимости:

$$g_R = M \omega_h^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}, \quad g_F = M \omega_h^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2},$$

где  $\omega_h$  – угловая скорость генератора;  $M$  – суммарная масса тел качения ГК и подкладного кольца, соответствующая окружному шагу зубьев.

Перемещение точек срединной поверхности обода ГК от внешних сил находим по зависимостям [2]:

$$w(\varphi) = \frac{R^3}{\pi EJ} \sum_{i=1}^z F_{Ti} \sum_{k=2.4.6...}^{\infty} \frac{\sin k(\varphi - \varphi_i)}{k(k^2 - 1)^2 B} + \frac{R^3}{\pi EJ} \sum_{j=1}^z F_{Ri} \sum_{k=2.4.6...}^{\infty} \frac{\cos k(\varphi - \varphi_j)}{(k^2 - 1)^2 B} + \frac{R^3}{\pi EJ} \sum_{j=1}^n P_{Rj} \sum_{k=2.4.6...}^{\infty} \frac{\cos k(\varphi - \varphi_j)}{(k^2 - 1)^2 B} + \frac{R^3}{\pi EJ} \sum_{i=1}^n P_{Tj} \sum_{k=2.4.6...}^{\infty} \frac{\sin k(\varphi - \varphi_i)}{k(k^2 - 1)^2 B}, \quad (2)$$

где  $B = 1 + \nu \frac{1}{2\lambda_k} \frac{sh2\lambda_k - \sin 2\lambda_k}{ch2\lambda_k - \cos 2\lambda_k}$ ;  $\nu$  – отношение

цилиндрической жесткости стенки оболочки на всей ее длине к жесткости кольца на изгиб

$$\nu = \frac{Lh^3}{12(1 - \mu^2)J},$$

где  $L$  – длина,  $h$  – толщина колеса;  $J$  – момент инерции в плоскости кривизны;



Если в некоторых сечениях, где отсутствует контакт между генератором и ГК, получим отрицательные силы, то они принимаются равными нулю, поскольку генератор не может притягивать ГК.

Для нахождения сил в зацеплении воспользуемся методом определения сил по возможным относительным перемещениям зубьев.

Зазор определяется в точке контакта вершины зуба ГК с зубом жесткого колеса:

$$F_{mi} = \delta_i / \lambda_f, \quad (8)$$

где  $\lambda_f$  – коэффициент податливости системы по нормали к профилю зубьев,  $\delta_i$  – суммарный зазор в зацеплении  $i$  пары зубьев гибкого и жесткого колес [4]:

$$\begin{aligned} \delta_i^{\Pi} &= j_i^{\Pi} - \delta_{zi} - \delta_{fi} - \delta_{pi}, \\ \delta_i^{\Pi} &= j_i^{\Pi} + \delta_{zi} + \delta_{fi} + \delta_{pi}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $j_i^{\Pi}$ ,  $j_i^{\Pi}$  – зазор с правой и левой стороны зуба зазор в зацеплении,  $\delta_{pi}$  – изменение зазоров за счет перекоса зубьев вследствие поворота образующих ГК;  $\delta_{zi}$  – изменение зазора в зацеплении за счет закрутки ГК от вращающего момента;  $\delta_{fi}$  – контактные перемещения зубьев. Силы, действующие в зацеплении, распределяются с учетом зазора, возникающего в каждой контактирующей паре зубьев на внешнем и внутреннем колесе с жесткими колесами при передаче вращающего момента.

Радиальные перемещения зубьев ГК ограничиваются шириной впадины, поэтому зазор определяется с правой  $j_i^{\Pi}$  и левой  $j_i^{\Pi}$  стороны зуба, измеренный по нормали к поверхности зуба жесткого колеса в заданной точке контакта  $M$  (рис. 1). Жесткое колесо считаем деформируемым. Координаты  $X_1, Y_1, Z_1$  связаны с зубьями гибких колес,  $X_2, Y_2, Z_2$  связаны с зубьями жестких колес, оси  $Z_1, Z_2$  направлены вдоль образующих.

$$j^{\Pi} = \left( x_2^{\Pi} - 0,5S_2^{\Pi} \right) \cos \alpha_2^{\Pi},$$

$$j^{\Pi} = \left( \frac{2\pi R_2^{\Pi}}{z_2} - x_2^{\Pi} - 0,5S_2^{\Pi} \right) \cos \alpha_2^{\Pi},$$

где  $x_2, R_2$  – абсцисса и радиус точки контакта соответственно;  $S_2$  – толщина зуба по хорде;  $z_2$  – число зубьев жесткого колеса.

При сборке передачи возникают нагрузки от деформированных гибких колес в сечениях, где колеса соприкасаются с генератором волн. Определив перемещения генератора волн с учетом формул геометрии кулачка (6), из системы линейных уравнений (7) находим радиальные силы  $P_R$ , действующие на шарики генератора волн. Полученные отрицательные силы приравниваем к нулю, потому что генератор не может притягивать.

Далее по зависимостям (2) определяем форму гибких колес под действием всех внешних сил. Нагрузка, действующая на зубья в зацеплении на первом этапе, равна нулю, так как вращающий момент отсутствует, далее – исходя из предыдущего шага.

Нагружение гибких колес осуществляем, задав необходимое приращение вращающего момента  $\Delta T$ . Силы в зацеплении должны быть приложены там, где есть натяг. Под действием сил натяг компенсируются возможными перемещениями зубьев гибких колес относительно зубьев жестких. Значения сил, действующих на зубья колес, пропорциональны величине зазора.

По формулам геометрии зацепления (9) определяем суммарный зазор для каждой пары зубьев гибкого и жесткого колес. Находим зазоры справа и слева от зубьев гибких колес во внешнем и внутреннем зацеплении передачи. Если зазоры положительные нагрузка на зубья равна нулю, контакт между зубьями отсутствует, в тех зубьях, где есть натяг, возникают силы  $F$  действующие на зубья в зацеплении. Они приложены в точках контакта между зубьями колес и направлены по нормали к поверхности зуба.

Для определения сил находим коэффициент податливости системы в направлении нормали к профилю зубьев, уточняя его после каждого шага:

$$\lambda_f = \frac{(R_{1em} + R_{1eui})}{2 \cdot \Delta T \cdot K_f} \sum_{i=1}^z (\delta_i^{em} + \delta_i^{eui}), \quad (10)$$

где  $\delta_i^{em}$  и  $\delta_i^{eui}$  – зазоры соответственно во внутреннем и внешнем зацеплении гибких колес справа и слева от зубьев, определенные по формулам (9) (суммируются только отрицательные значения);  $R_{1em}$  и  $R_{1eui}$  – радиусы срединных поверхностей внутреннего и внешнего гибких колес;  $K_f$  – условный коэффициент уточнения, который необходим для изменения величины нагрузки на зубья, в первом приближении  $K_f = 1$ . Далее по формуле (8) с использованием выражений (9), определяем силы  $F$ , действующие на зубья, для внешнего и внутреннего зацепления, с правой и левой стороны контактируемых зубьев:

$$\begin{aligned} F_{Ri}^{\Pi} &= \frac{\delta_i^{\Pi}}{\lambda_f}, & F_{Ti}^{\Pi} &= \frac{\delta_i^{\Pi}}{\lambda_f} \operatorname{tg}(\alpha_{ycl}); \\ F_{Ri}^{\Pi} &= \frac{\delta_i^{\Pi}}{\lambda_f}, & F_{Ti}^{\Pi} &= -\frac{\delta_i^{\Pi}}{\lambda_f} \operatorname{tg}(\alpha_{ycl}). \end{aligned} \quad (11)$$

Полученные значения суммируем алгебраически с найденными на предыдущем шаге силами, если зазор в зацеплении положительный, то силы равны нулю. Далее, определив перемещения колес от сил в зацеплении по (2) с учетом формул геометрии кулачка (6), решая систему линейных уравнений (7), уточняем радиальные силы  $P_R$ , действующие на шарики генератора волн.

Затем, с учетом полученных после суммирования сил  $F_R$  и  $F_T$  и уточненных сил  $P_R$  и  $P_T$ , включая силы инерции  $g_R$ ,  $g_T$  и местные моменты  $T_P$ ,  $T_F$ , по зависимости (1), находим вращающие моменты на гибких колесах, возникающие во внутреннем и внешнем контурах, и суммируем их, сравниваем полу-

ченный момент с нагружающим. Если суммарный передаваемый момент гибкими колесами больше нагружающего момента, то уменьшаем  $K_f$ , если наоборот, то увеличиваем  $K_f$  и производим перерасчет сил, начиная с определения условного коэффициента податливости системы  $\lambda_f$ . При совпадении значений с заданной величиной погрешности вычислений продолжаем нагружение передачи до требуемого вращающего момента.

## Заключение

Усовершенствован метод определения сил, действующих в зацеплении и на тела качения гибких подшипников применительно к ВЗП с двумя гибкими колесами.

Представлена методика определения сил  $P$ , действующих на гибкие колеса от кулачкового генератора, и сил  $F$ , возникающих во внутреннем и внешнем зацеплении гибких колес.

## Литература

1. Шувалов С.А. Расчет сил, действующих на звенья волновой передачи // Вестник машиностроения. – 1979. – № 10. – С. 5-9.
2. Полетучий А.И., Пшеничных С.И. Определение перемещений гибких колес волновой передачи // Авиационно-космическая техника и технология. – Х.: ХАИ, 1998. – Вып. 8. – С. 149-153.
3. Тимошенко С.П., Гере Д. Механика материалов. – М.: Мир, 1976. – 669 с.
4. Иванов М.Н. Волновые зубчатые передачи. – М.: Высш. шк., 1981. – 184 с.

Поступила в редакцию 13.03.2007

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Д.Ф. Симбирский, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”, Харьков.

