УДК 517.958:519.6

В.Б. МИНТЮК

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина,

ОРТОНОРМИРОВАННЫЙ БАЗИС ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Предложенным ранее в статье [1] способом построены ортонормированные базисные функции для ряда краевых задач в одномерной области. Базисы представляют собой линейную комбинацию полиномов Лежандра.

ортонормированный базис, полиномы Лежандра, краевая задача

Введение

Большая часть задач прочностного расчета конструкций аэрокосмической техники решается приближенными численными методами, эффективность которых во многом зависит от качества используемых базисных функций. Наилучшими свойствами обладает ортонормированный базис, который построен для ряда одномерных краевых задач [1]. Построение базиса предполагается на основе некоторой полной последовательности достаточно гладких, линейно независимых функций, имеющих ненулевой след, но, возможно, не удовлетворяющих главным граничным условиям краевой задачи. Идея построения базисных функций заключается в специальном подборе линейной комбинации функций исходной последовательности таким образом, чтобы удовлетворить главным граничным условиям.

Понятно, что свойства получаемого базиса во многом зависят от свойств функций исходной последовательности. В примере работы [1] в качестве исходной взята последовательность $x^n, n = 0,1,\dots$, которая ввиду почти линейной зависимости (в терминах [2] – "неминимальности") не может быть использована в численной реализации какого-либо приближенного метода.

В работе [1] речь шла о базисе для метода Рэлея-Ритца, поэтому достаточно было удовлетворить только главным граничным условиям, но в одномерных краевых задачах ничто не мешает удовлетворить и естественным граничным условиям, что при использовании метода Рэлея-Ритца значительно повышает точность и сходимость получаемого приближенного решения, а для метода Бубнова-Галеркина и вовсе является обязательным условием.

В данной работе в качестве исходной последовательности функций взяты полиномы Лежандра $P_n, n = 0,1,\dots$. Рассмотрены свойства получаемого базиса в энергетической метрике дифференциальных операторов в обыкновенных производных $-u''$ и u^{IV} на интервале $x = -1..1$.

1. Ортонормированные базисы для оператора $-u''$

Энергетическое скалярное произведение и квадрат нормы определяются формулами

$$(u,v) = \int_{-1}^{1} u'v'dx\,, \tag{1}$$

$$\|u\|^2 = \int_{-1}^{1} u'^2 dx\,. \tag{2}$$

Рассмотрим три типа возможных граничных условий для этого оператора.

1.1. Задача Дирихле. Задача Дирихле для оператора $-u''$ описывается условиями

$$\varphi(-1) = \varphi(1) = 0. \tag{3}$$

Если базис строить в виде линейной комбинации

$$\varphi_n = P_{n+1} + a_1 P_n + a_2 P_{n-1}, n = 1,2,\dots, \tag{4}$$

© В.Б. Минтюк

где a_1, a_2 – некоторые постоянные, то выполнение граничных условий (3) с учетом значений полиномов Лежандра

$$P_n(\pm 1) = (\pm 1)^n \quad (5)$$

приводит к значениям коэффициентов

$a_1 = 0, a_2 = -1$ и

$$\varphi_n = P_{n+1} - P_{n-1}, n = 1, 2, \ldots . \quad (6)$$

Вычислим скалярное произведение (1) этих функций. Для этого рассмотрим производную $\varphi_n' = P_{n+1}' - P_{n-1}'$.

Применяя известную формулу [3] $P_n' = \frac{1}{1-x^2} \frac{n(n+1)}{2n+1}(P_{n-1} - P_{n+1})$ и рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра, можно получить $\varphi_n' = \frac{n}{n+2} P_n$, откуда немедленно следует ортогональность базиса (6) и нормировочный коэффициент $\sqrt{2(2n+1)}$.

1.2. Смешанные граничные условия. Аналогичная процедура по отношению к линейной комбинации (4) с использованием граничных условий

$$\varphi'(-1) = \varphi(1) = 0 \quad (7)$$

проводит к базису

$$\varphi_n = P_{n+1} - \frac{2n+1}{n^2} P_n - \frac{(n+1)^2}{n^2} P_{n-1}, n = 1, 2, \ldots . \quad (8)$$

Рассмотрим скалярное произведение (1) данных функций. Проведя интегрирование по частям, получим $\varphi_n' \varphi_m \big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \varphi_n'' \varphi_m dx$. Заметим, что внеинтегральный член равен нулю при любых значениях *m* и *n* в силу выполнения условий (7), а $\int_{-1}^{1} \varphi_n'' \varphi_m dx = 0$ при *m*>*n* ввиду свойства сильной ортогональности полиномов Лежандра, откуда следует ортогональность системы (8). Далее при *m*=*n* и с учетом значений полиномов Лежандра (5) и их производных

$$P_n'(\pm 1) = (\mp 1)^n \frac{n(n+1)}{2} \quad (9)$$

получим

$$-\int_{-1}^{1} \varphi_n'' \varphi_n dx = -a_2 - \int_{-1}^{1} P_{n+1}'' P_{n-1} dx =$$

$$= a_2 \left(P_{n+1} P_{n-1}' - P_{n+1}' P_{n-1} \right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2(n+1)^2 (2n+1)}{n^2},$$

т.е. нормировочный множитель $\frac{n}{(n+1)\sqrt{2(2n+1)}}$.

1.3. Задача Неймана. Для оператора $-u''$ в задаче Неймана

$$\varphi'(-1) = \varphi'(1) = 0 . \quad (10)$$

На правую часть краевой задачи ($f(x)$) необходимо наложить дополнительное условие (условие разрешимости) $\int_{-1}^{1} f(x) dx = 0$.

Это условие будет выполняться каждой базисной функцией

$$\varphi_n = P_{n+1} - \frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)} P_n, n = 1, 2, \ldots . \quad (11)$$

Доказательство ортогональности и определение нормировочного множителя аналогично приведенному в п.1.2.

Полученные результаты сведены в табл. 2.

2. Ортонормированные базисы для оператора u^{IV}

Для данного оператора ставятся четыре граничных условия, поэтому базис можно построить в виде

$$\varphi_n = P_{n+3} + a_1 P_{n+2} + a_2 P_{n+1} + a_3 P_n + a_4 P_{n-1}, n = 1, 2, \ldots . (12)$$

Дважды интегрируя по частям порожденное данным оператором энергетическое скалярное произведение функций (12), получим

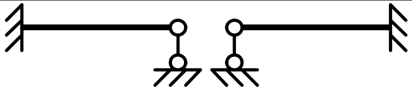
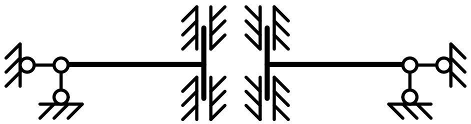
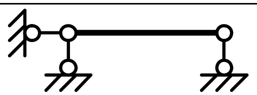
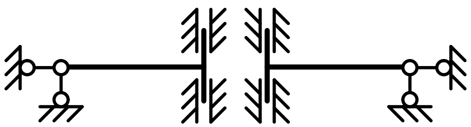
$$\int_{-1}^{1} \varphi_n'' \varphi_m'' dx = \left(\varphi_n'' \varphi_m' - \varphi_n''' \varphi_m \right)\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \varphi_n^{IV} \varphi_m dx .$$

Внеинтегральные члены в случае задачи Дирихле, Неймана или задачи со смешанными граничными условиями равны нулю при любых *m* и *n*, если функциями (12) выполнены граничные условия.

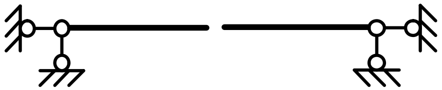
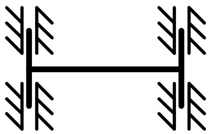
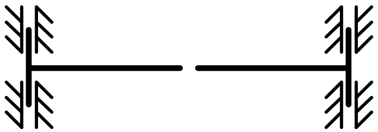
Используя свойства сильной ортогональности,

Таблица 1

Ортогональный базис и нормировочный множитель для оператора u^{IV} на интервале (-1,1), n=1, 2, 3, …

Граничные условия	Дополни-тельные условия	Функции	Квадрат нормировочного множителя
1	2	3	4
 $\varphi\vert_{-1}=0, \varphi\vert_{1}=0,$ $\varphi'\vert_{-1}=0, \varphi'\vert_{1}=0$	–	$P_{n+3}-\frac{2(2n+3)}{2n+1}P_{n+1}+\frac{2n+5}{2n+1}P_{n-1}$	$\frac{1}{2(2n+5)^2(2n+3)}$
 $\varphi\vert_{\mp1}=0, \varphi\vert_{\pm1}=0, \varphi'\vert_{\mp1}=0, \varphi''\vert_{\pm1}=0$	–	$P_{n+3}\mp\frac{2n+5}{(n+1)^2}P_{n+2}-\frac{(2n+3)(2n^2+6n+7)}{(2n+1)(n+1)^2}P_{n+1}\pm\frac{2n+5}{(n+1)^2}P_n+\frac{(2n+5)(n+2)^2}{(2n+1)(n+1)^2}P_{n-1}$	$\frac{(n+1)^2}{2(2n+3)(2n+5)^2(n+2)^2}$
 $\varphi\vert_{\mp1}=0, \varphi'\vert_{\pm1}=0, \varphi'\vert_{\mp1}=0, \varphi'''\vert_{\pm1}=0$	–	$P_{n+3}\mp\frac{3(2n+5)}{(n+2)n}P_{n+2}-\frac{(2n+3)(n+3)(2n^2+6n-5)}{(2n+1)(n+2)(n+1)n}P_{n+1}\pm$ $\pm\frac{3(n+3)(2n+5)}{(n+1)n^2}P_n+\frac{(2n+5)(n+3)^2}{(2n+1)n^2}P_{n-1}$	$\frac{n^2}{2(2n+3)(2n+5)^2(n+3)^2}$
 $\varphi\vert_{\mp1}=0, \varphi''\vert_{\pm1}=0, \varphi'\vert_{\mp1}=0, \varphi'''\vert_{\pm1}=0$	–	$P_{n+3}\mp\frac{4(2n+5)}{(n+1)^2}P_{n+2}-\frac{2(n-2)(2n+3)(n+3)(n+5)}{n(2n+1)(n+1)^2}P_{n+1}\pm$ $\pm\frac{4(2n+5)(n+3)^2}{n^2(n+1)^2}P_n+\frac{(2n+5)(n+3)^2(n+2)^2}{(2n+1)(n+1)^2n^2}P_{n-1}$	$\frac{n^2(n+1)^2}{2(2n+3)(2n+5)^2(n+2)^2(n+3)^2}$
 $\varphi\vert_{-1}=0, \varphi\vert_{1}=0,$ $\varphi''\vert_{-1}=0, \varphi''\vert_{1}=0$	–	$P_{n+3}-\frac{2(2n+3)(n^2+3n+5)}{n(2n+1)(n+1)}P_{n+1}+\frac{(2n+5)(n+3)(n+2)}{n(2n+1)(n+1)}P_{n-1}$	$\frac{n(n+1)}{2(2n+3)(2n+5)^2(n+2)(n+3)}$
 $\varphi\vert_{\mp1}=0, \varphi'\vert_{\pm1}=0, \varphi''\vert_{\mp1}=0, \varphi'''\vert_{\pm1}=0$	–	$P_{n+3}\mp\frac{(2n+5)(2n^2+4n-3)}{n(n+2)(n^2+2n-2)}P_{n+2}-\frac{(2n+3)(n+3)(2n^4+12n^3+20n^2+6n+5)}{n(2n+1)(n+2)(n+1)(n^2+2n-2)}P_{n+1}\pm$ $\pm\frac{(2n+5)(n+3)(2n^2+8n+3)}{(n+1)(n^2+2n-2)n^2}P_n+\frac{(2n+5)(n+3)^2(n^2+4n+1)}{(2n+1)(n^2+2n-2)n^2}P_{n-1}$	$\frac{n^2(n^2+2n-2)}{2(2n+3)(n+3)^2(2n+5)^2(n^2+4n+1)}$

Окончание табл. 1

1	2	3	4
 $\varphi\big\|_{\mp1}=0,\ \varphi''\big\|_{\pm1}=0,\ \varphi''\big\|_{\mp1}=0,\ \varphi'''\big\|_{\pm1}=0$	$\int_{-1}^{1}\varphi_n dx=0$	$P_{n+4}\mp\frac{3(2n+7)}{(n+2)^2}P_{n+3}-\frac{(2n+5)(n+5)(2n^2+10n+3)}{(2n+3)(n+1)(n+2)^2}P_{n+2}\pm$ $\pm\frac{3(n+5)(n+4)(2n+7)}{n(n+1)(n+2)^2}P_{n+1}+\frac{(n+5)(n+4)(2n+7)(n+3)^2}{n(2n+3)(n+1)(n+2)^2}P_n$	$\frac{n(n+1)}{2(n+4)(n+5)(2n+5)}\times$ $\times\frac{(n+2)^2}{(2n+7)^2(n+3)^2}$
 $\varphi'\big\|_{\mp1}=0,\ \varphi'\big\|_{\pm1}=0,$ $\varphi'''\big\|_{\mp1}=0,\ \varphi'''\big\|_{\pm1}=0$	$\int_{-1}^{1}\varphi_n dx=0$	$P_{n+4}-\frac{2(2n+5)(n+5)(n+4)}{(2n+3)(n^2+3n-1)}P_{n+2}+\frac{(n+5)(n+4)(2n+7)(n^2+7n+9)}{n(2n+3)(n+1)(n^2+3n-1)}P_n$	$\frac{n(n+1)}{2(n+4)(n+5)(2n+5)(2n+7)^2}\times$ $\times\frac{(n^2+3n-1)}{(n^2+7n+9)}$
 $\varphi'\big\|_{\mp1}=0,\ \varphi'''\big\|_{\mp1}=0,\ \varphi''\big\|_{\pm1}=0,\ \varphi'''\big\|_{\pm1}=0$	$\int_{-1}^{1}\varphi_n dx=0$	$P_{n+4}\mp\frac{n(n-1)(n+4)(n+5)(2n+7)}{(n+2)^2(n^2+4n+1)(n^2+4n-3)}P_{n+3}-$ $-\frac{(n+4)(n+5)(2n+5)(2n^4+20n^3+53n^2+15n-18)}{(2n+3)(n^2+4n+1)(n^2+4n-3)(n+2)^2}P_{n+2}\pm$ $\pm\frac{(n+4)(n+5)^2(n+6)(2n+7)}{(n^2+4n+1)(n^2+4n-3)(n+2)^2}P_{n+1}+$ $+\frac{(n+4)(n+5)(2n+7)(n+3)^2(n^2+6n+2)(n^2+6n+6)}{n(n+1)(2n+3)(n^2+4n+1)(n^2+4n-3)(n+2)^2}P_n$	$\frac{n(n+1)(n+2)^2}{2(n+4)(n+5)(2n+5)(2n+7)^2}\times$ $\times\frac{(n^2+4n-3)(n^2+4n+1)}{(n+3)^2(n^2+6n+6)(n^2+6n+2)}$
$\varphi''\big\|_{\mp1}=0,\ \varphi''\big\|_{\pm1}=0,$ $\varphi'''\big\|_{\mp1}=0,\ \varphi'''\big\|_{\pm1}=0$	$\int_{-1}^{1}\varphi_n dx=0,$ $\int_{-1}^{1}x\varphi_n dx=0$	$P_{n+5}-\frac{2(n+6)(n+7)(2n+7)}{(n+2)(n+3)(2n+5)}P_{n+3}-$ $+\frac{(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)(2n+9)}{n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+5)}P_{n+1}$	$\frac{n(n+1)}{2(n+4)(n+5)(n+6)}\times$ $\times\frac{(n+2)(n+3)}{(n+7)(2n+7)(2n+9)^2}$

получим $\int_{-1}^{1}\varphi_n''\varphi_m dx=0$ и $\int_{-1}^{1}\varphi_n^{IV}\varphi_m dx=0$ при $m>n$,

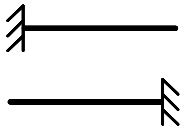
откуда следует ортогональность функций (12).

При $m=n$ получаем

$$\int_{-1}^{1}\varphi_n^{IV}\varphi_n dx = a_4\left(P_{n+3}P'''_{n-1}-P'_{n+3}P''_{n-1}+P''_{n+3}P'_{n-1}-P'''_{n+3}P_{n-1}\right)\Big|_{-1}^{1}.$$

Таблица 2

Ортогональный базис и нормировочный множитель для дифференциального оператора $-u''$ на интервале $(-1,1)$, n=1, 2, 3, …

Граничные условия	Дополнительные условия	Ортогональный многочлен	Квадрат нормировочного множителя
 $\varphi\|_{-1}=0, \varphi\|_{1}=0$	–	$P_{n+1}-P_{n-1}$	$\dfrac{1}{2(2n+1)}$
 $\varphi\|_{\mp 1}=0, \varphi'\|_{\pm 1}=0$	–	$P_{n+1}\mp\dfrac{2n+1}{n^2}P_n-\dfrac{(n+1)^2}{n^2}P_{n-1}$	$\dfrac{n^2}{2(n+1)^2(2n+1)}$
 $\varphi'\|_{-1}=0, \varphi'\|_{+1}=0$	$\int_{-1}^{1}\varphi dx=0$	$P_{n+2}-\dfrac{(n+2)(n+3)}{n(n+1)}P_n$	$\dfrac{n(n+1)}{2(n+2)(n+3)(2n+3)}$

С учетом (5), (9) и

$$P_n''(\pm 1)=(\pm 1)^n\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{8},$$

$$P_n'''(\pm 1)=(\mp 1)^n\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{48}$$

окончательно получим

$$\int_{-1}^{1}\varphi_m''\varphi_n''dx=\begin{cases}0 & при\ \ m\neq n;\\ a_4(2n+1)(2n+3)(2n+5) & при\ m=n.\end{cases}$$

Базисные функции и нормировочные множители для различных граничных условий приведены в табл. 1.

Заключение

1. С помощью предложенного в работе [1] способа на основе хорошо изученных полиномов Лежандра построены ортонормированные базисы для операторов $-u''$ и u^{IV} с различными граничными условиями.

2. Не составляет никакого труда с помощью данного способа построить ортонормированные системы для дифференциальных операторов более высоких порядков.

3. В дальнейшем представляет интерес построение базисов для разветвленных составных конструкций.

Литература

1. Минтюк В.Б. Способ построения базиса для решения краевых задач в обыкновенных производных вариационными методами // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т "ХАИ". – 2007. – Вып. 35. – С. 143-148.

2. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. – М.: Наука, 1966. – 432 с.

3. Сегё Г. Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.

Поступила в редакцию 6.09.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. П.А. Фомичев, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.