

**А.И. Сабакарь**

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского  
«Харьковский авиационный институт», Украина*

## **ПРИМЕНЕНИЕ ГЛ-ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ МЕТАЛЛОВ СТАТИЧЕСКИМ И/ИЛИ ДИНАМИЧЕСКИМ НАГРУЖЕНИЯМИ**

Теория R-функций позволяет находить решения краевых задач о формоизменении металлов при статической и/или динамической нагрузками с границами любой геометрии, кроме границ с «особыми» точками. Использование ГЛ-функций обеспечивает получение структур решений их без указанной проблемы.

**функция, структура решений, технологический процесс, обработка давлением, область, граница, конъюнкция, дизъюнкция, отрицание**

Обработка металлов давлением является основой современного заготовительно-штамповочного производства любого крупного машиностроительного предприятия. Вопросы экономии черных, цветных металлов, легированных и жаропрочных сталей и сплавов решаются, прежде всего, в кузнечно-штамповочных цехах заводов. Службы главного металлурга и технолога призваны обеспечить получение заготовок деталей машин с максимальным коэффициентом использования материалов, минимальными трудовыми и энергетическими затратами при использовании совершенных инструментов и кузнечно-штамповочных машин. Все это требует поиска новых технологических решений, всестороннего анализа и выбора оптимальных режимов обработки заготовок.

Однако в сфере теоретического анализа технологических процессов заготовительно-штамповочного производства и отыскания оптимальных режимов их осуществления, за редким исключением, работы практически отсутствуют.

Несмотря на это, используя труды ученых в области теории пластичности и обработки металлов давлением таких, как А.А. Ильюшина, Л.М. Качанова, В.П. Колмогорова, Г.Я. Гунна, Ю.Н. Алексеева и др., а также в области прикладной математики в части создания R-функций В.Л. Рвачева,

В.С. Проценко, В.Л. Курпа, Н.С. Синекопа и др., появляется возможность разрешить все указанные проблемы.

Использование теории R-функций предполагает получение полной информации о решении краевой задачи с организации его поиска [1]. Это, например, может быть поиск о симметрии решения, если постановка задачи инвариантна относительно некоторых типов преобразований симметрии, о законах малых градиентов и значений кривизны, о характере решения в окрестности угловых и других «особых» точек и т.д.

Метод R-функций, являясь аналитическим, содержит в себе конструктивные возможности для того, чтобы уже на уровне структурных формул полнее учесть информацию об искомом решении. В точках, которые являются для границы  $\partial\Omega$  рассматриваемой области  $\Omega$  особыми (угловые точки, ребра, точки стыка граничных условий), необходимо специально выбирать функцию  $\omega(x)$ , где  $\omega(x) = 0$  – уравнение границы  $\partial\Omega$ , а также и уравнения  $\omega_i(x) = 0$  для границ  $\partial\Omega_i \subset \partial\Omega$ . В действительности этот вопрос более сложен и необходимо учитывать поведение в окрестностях «особых» точек не только функций  $\omega$  и  $\omega_i$ , но и характер структурных зависимостей, в которые эти функции входят.

Следовательно, построенные структуры решений могут оказаться мало пригодными для краевых задач с «особыми» точками. Возможны случаи, когда структурные формулы теряют свойство полноты и приводят к большим погрешностям в случае, когда граница области имеет узкие врезы, щели и т.п.

Иногда особый характер поведения решения в угловых точках границы можно устранить в результате такого видоизменения краевой задачи, которое не искажало бы основных физических соотношений, было простым с математической точки зрения [2].

Однако искусственное изменение границы краевой задачи для некоторых технологических процессов, а именно, вырубки-пробивки, просечки и др. приводит, в конце концов, к снижению коэффициента использования материалов.

Поэтому предлагаем решать краевые задачи для этих случаев с помощью ГЛ-функций [3], свободных от изменения структуры решений в «особых» точках.

Далее, напомним определение ГЛ-функций. Пусть в пространстве  $R^n$  заданы функции  $f_1 = f_1(x), f_2 = f_2(x)$ , при  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Эти функции, определенные всюду в пространстве  $R^n$  и на множествах  $\bar{\Omega}_1$  и  $\bar{\Omega}_2$  таковы, что:

$$\begin{aligned} f_1 > 0 \text{ на } \Omega_1, \quad f_1|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad f_1 < 0 \text{ на } R^n \setminus \bar{\Omega}_1; \\ f_2 > 0 \text{ на } \Omega_2, \quad f_2|_{\partial\Omega_2} = 0, \quad f_2 < 0 \text{ на } R^n \setminus \bar{\Omega}_2. \end{aligned} \quad (1)$$

По определению систему множеств

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_1 \cup \Omega_2, \Omega_1 \cap \Omega_2, \Omega_1 \setminus \Omega_2, \Omega_2 \setminus \Omega_1, R^n \setminus \Omega_1 \cup \Omega_2, R^n \setminus \Omega_1 \cap \Omega_2,$  (2)  
а также подмножеств  $\Omega^1$  и  $\Omega^{11}$  этих множеств, на которых  $|f_1| \leq |f_2|, |f_2| \leq |f_1|$ , соответственно, называем основной системой множеств для функций  $f_1$  и  $f_2$ , и обозначаем  $M = \{ \Omega: f_1, f_2 \}$ .

А также по определению множества

$$\partial\Omega_1, \partial\Omega_2, \partial\Omega_1^1, \partial\Omega_1^{11}, \partial\Omega_2^1, \partial\Omega_2^{11} \quad (3)$$

называем ядрами функций  $f_1$  и  $f_2$  и систему этих множеств обозначают  $K_{er}(f_1, f_2)$ .

Тогда функция

$$F(x) = \Phi [f_1(x), f_2(x)], \quad x \in R^n \quad (4)$$

называется ГЛ-функцией, когда она

а) определена и неотрицательна хотя бы на одном из множеств системы  $M = \{ \Omega: f_1, f_2 \}$ ;

б) имеет непустое ядро и обращается в нуль только на одном из множеств системы  $K_{er}(f_1, f_2)$  или на одном из множеств  $\Omega^1$  и  $\Omega^{11}$ .

Здесь системы множества по дизъюнкции  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  (рис. 1) записываются как

$$\partial\Omega_1^1 \cup \partial\Omega_1^{11} = \partial\Omega_1; \quad \partial\Omega_2^1 \cup \partial\Omega_2^{11} = \partial\Omega_2, \quad (5)$$

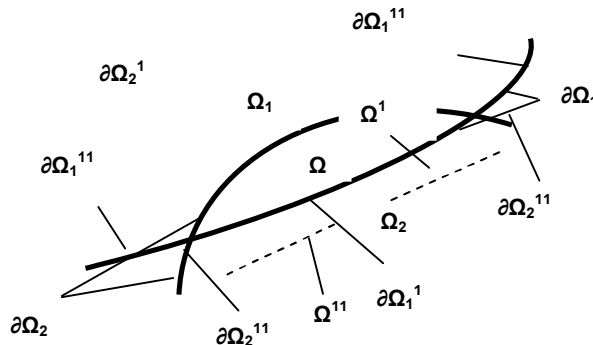


Рис. 1. Системы множеств и подмножеств

До настоящего времени рассмотрено семь ГЛ- систем.

Наибольший интерес представляют системы  $\Gamma_0 L_0$ - и  $\Gamma_e L_e$ -функций:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad f_1 \Gamma_0 f_2 &= ((f_1^2 + f_2^2)^{1/2} - f_2) / 2; \\ f_2 \Gamma_0 f_1 &= ((f_1^2 + f_2^2)^{1/2} - f_1) / 2; \\ f_1 L_0 f_2 &= ((f_1^2 + f_2^2)^{1/2} + f_2) / 2; \\ f_2 L_0 f_1 &= ((f_1^2 + f_2^2)^{1/2} + f_1) / 2; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad f_1 \Gamma_e f_2 &= (((e^{f_1} f_2)^2 + f_1^2)^{1/2} - f_2) / 2; \\ f_2 \Gamma_e f_1 &= (((e^{f_2} f_1)^2 + f_2^2)^{1/2} - f_1) / 2; \\ f_1 L_e f_2 &= (((e^{f_1} f_2)^2 + f_1^2)^{1/2} + f_2) / 2; \\ f_2 L_e f_1 &= (((e^{f_2} f_1)^2 + f_2^2)^{1/2} + f_1) / 2. \end{aligned} \quad (7)$$

Из определения ГЛ-функций следует, что их свойства существенно образом связаны со свойствами функций  $f_1$  и  $f_2$ , входящих в систему множеств, а также с теми множествами, на которых они рассматриваются.

Системы ГЛ-функций определены, суммируемы, сохраняют знак и обращаются в нуль.

Представим некоторые свойства  $\Gamma_0 L_0$ - и  $\Gamma_e L_e$ -функций, сведенных в табл. 1 – 4.

Таблица 1

	$f_1 \Gamma_0 f_2$	$f_2 \Gamma_0 f_1$	$f_1 L_0 f_2$	$f_2 L_0 f_1$
$\partial \Omega_1^1$	0	$f_2 / 2$	$f_2$	$f_2 / 2$
$\partial \Omega_1^{11}$	$- f_2$	$- f_2 / 2$	0	$- f_2 / 2$
$\partial \Omega_2^1$	$f_1 / 2$	0	$f_1 / 2$	$f_1$
$\partial \Omega_2^{11}$	$- f_1 / 2$	$- f_1$	$- f_1 / 2$	0

Таблица 2

	$\partial(f_1 \Gamma_0 f_2) / \partial l$	$\partial(f_2 \Gamma_0 f_1) / \partial l$	$\partial(f_1 L_0 f_2) / \partial l$	$\partial(f_2 L_0 f_1) / \partial l$
$\partial \Omega_1^1$	0	$\partial(f_1 + f_2) / 2 \partial l$	$\partial f_2 / \partial l$	$\partial(f_2 + f_1) / 2 \partial l$
$\partial \Omega_1^{11}$	$- \partial f_2 / \partial l$	$- \partial(f_1 + f_2) / 2 \partial l$	0	$\partial(f_2 + f_1) / 2 \partial l$
$\partial \Omega_2^1$	$\partial(f_1 - f_2) / 2 \partial l$	0	$\partial(f_1 + f_2) / 2 \partial l$	$\partial f_1 / \partial l$
$\partial \Omega_2^{11}$	$- \partial(f_1 + f_2) / 2 \partial l$	$- \partial f_1 / \partial l$	$\partial(f_2 - f_1) / 2 \partial l$	0

Таблица 3

	$f_1 \Gamma_e f_2$	$f_2 \Gamma_e f_1$	$f_1 L_e f_2$	$f_2 L_e f_1$
$\partial\Omega_1^1$	0	$f_2$	$2 f_2$	$f_2$
$\partial\Omega_1^{11}$	$- 2 f_2$	$- f_2$	$f_2$	$- f_2$
$\partial\Omega_2^1$	$f_1$	$- f_1$	$f_1$	$f_1$
$\partial\Omega_2^{11}$	$- f_1$	$- f_1$	$- f_1$	$f_1$

Таблица 4

	$\partial(f_1 \Gamma_e f_2)/\partial l$	$\partial(f_2 \Gamma_e f_1)/\partial l$	$\partial(f_1 L_e f_2)/\partial l$	$\partial(f_2 L_e f_1)/\partial l$
$\partial\Omega_1^1$	0	$\partial(f_2 - f_1)/\partial l$	$2 \partial f_2 / \partial l$	$\partial(f_1 + f_2)/\partial l$
$\partial\Omega_1^{11}$	$- 2 \partial f_2 / \partial l$	$- \partial(f_1 + f_2)/\partial l$	0	$\partial(f_1 - f_2)/\partial l$
$\partial\Omega_2^1$	$\partial(f_1 - f_2)/\partial l$	0	$\partial(f_1 + f_2)/\partial l$	$2 \partial f_1 / \partial l$
$\partial\Omega_2^{11}$	$- \partial(f_1 + f_2)/\partial l$	$- 2 \partial f_1 / \partial l$	$\partial(f_2 - f_1)/\partial l$	0

Далее, отметим существенную связь между  $\Gamma_0 L_0$ -функциями и R-функциями, выражающуюся в наличии равенства между ними:

$$\begin{aligned}
 f_1 - f_1 \cap_0 f_2 &= 2 (f_1 \Gamma_0 f_2); \\
 f_2 - f_1 \cap_0 f_2 &= 2 (f_2 \Gamma_0 f_1); \\
 f_1 \cup_0 f_2 - f_1 &= 2 (f_1 L_0 f_2); \\
 f_1 \cup_0 f_2 - f_2 &= 2 (f_2 L_0 f_1).
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

При решении краевых задач возникает необходимость, как и при использовании R-функций, продолжить действие оператора дифференцирования с тех множеств, на которых он задан, на более широкое множество с непрерывностью на нем, что и отражено в труде [3].

Системы ГЛ-функций и операции с ними вводятся в структурные формулы для каждой краевой задачи. В эти структурные формулы также включены все основные характеристики по определению напряженно-деформированного состояния материала заготовок. При этом используется функция  $\mu$ , обеспечивающая использование для анализа процессов обработки металлов давлением общих закономерностей механики сплошных сред, то есть уравнений равновесия, непрерывности и теплообмена. Из них получается равенство направляющего тензора напряжений и направляющего тензора деформаций

$$\bar{D}_\sigma = \bar{D}_\epsilon. \quad (9)$$

Как показано в работе [4], исходя из принципа инвариантности внутренних сил в теле, находящемся под воздействием сил, основным физическим законом в области больших пластических деформаций является условие совпадения направляющего тензора напряжений и направляющего тензора скоростей деформаций

$$\bar{D}_\sigma = \bar{D}_\epsilon \quad (10)$$

При этом вводится специфическая характеристика, названная коэффициентом жесткости

$$\xi_i = \sigma_i / 3 \quad \epsilon_i = \sigma_s \delta / 3 \quad v_0, \quad (11)$$

где  $\sigma_s$  – предел текучести материала заготовки;  $v_0$  и  $\delta$  – скорость и характерный размер заготовки.

Таким образом, при решении краевых задач с учетом динамического нагружения в структурные формулы вводятся различные коэффициенты жесткости.

### Литература

1. Рвачев В.Л., Рвачев В.А. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. – К.: Наук. думка, 1979. – 196 с.
2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
3. Гончарюк И.В. Конструктивные и вычислительные методы математики, механики и кибернетики. Т. 1. Непрерывные функции с логическими и наследственными свойствами и некоторые их применения. – Х.: ХГУ, 1984. – 244 с.
4. Алексеев Ю.Н. Введение в теорию обработки металлов давлением, прокаткой и резанием. – Х.: ХГУ, 1969. – 108 с.

*Поступила в редакцию 1.06.2007*

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. С.В. Елифанов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”, Харьков.