

УДК 539.3:534.1

С.А. ХАЛИЛОВ, С.Г. КРАВЧЕНКО

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ТРАПЕЦИЕВИДНОЙ ОБЛАСТИ

В замкнутом виде получено полное решение плоской задачи теории упругости в трапецевидной области при произвольном нагружении сторон трапеции. Решение построено с помощью метода расширения области до канонической в сочетании с методом наименьших квадратов по границе. Выполнено численное исследование полученного решения. Показана эффективность предложенных методов с точки зрения сходимости и точности. Подход работы является весьма общим для решения плоской задачи теории упругости в неканонических областях.

Ключевые слова: плоская задача теории упругости, функция напряжений, трапецевидная область, расширение области, метод наименьших квадратов.

Введение

При выборе оптимальных параметров силового набора крыла одним из основных ограничений является устойчивость его панелей. Об этом свидетельствуют экспериментальные данные, полученные ЦАГИ [1]: разрушение несущих поверхностей планера серийных и опытных образцов при статических испытаниях происходили в результате потери устойчивости в более чем 60% случаев. Тонкостенные панели крыльев летательных аппаратов редко имеют в плане форму прямоугольника, в основном это – трапеция, параллелограмм и т.п. К настоящему времени задача исследования плоского напряженного состояния прямоугольной области не решена в полной мере, не говоря уже об областях, отличных от прямоугольника. Публикации, относящиеся к рассмотрению подобных областей, посвящены решению весьма частных задач, и поэтому не претендуют на общность. В данной работе построено решение плоской задачи теории упругости (ПЗТУ) в трапецевидной области при заданной на границе произвольной уравновешенной системе нормальных и касательных напряжений. В статье предложен достаточно общий подход для решения ПЗТУ в неканонической области: задача решается в терминах функции напряжений с привлечением метода расширения области до канонической и метода наименьших квадратов на границе.

Данная работа, имея самостоятельное значение в определении плоского поля, приобретает еще большее значение при анализе устойчивости, поскольку точность определения критического параметра устойчивости во многом зависит от точности определения исходного напряженного состояния.

1. Постановка задачи и условия разрешимости

В трапецевидной области Ω с липшицевой границей $\Gamma = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i$ (рис. 1) требуется отыскать функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую бигармоническому уравнению и краевым условиям на контуре Γ , заданным в напряжениях.

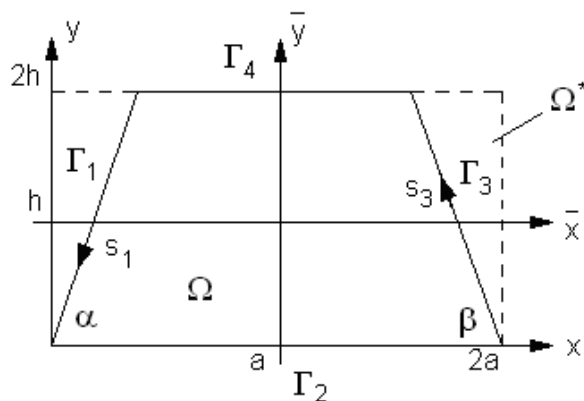


Рис. 1. Расширение исходной области Ω до прямоугольной Ω^*

Для однозначной разрешимости поставленной краевой задачи необходимо, чтобы система напряжений, действующая на границе области, находилась в равновесии, и выполнялись условия согласования в угловых точках. Согласованность напряжений в непрямом угле означает следующее: сумма проекций вектора напряжений в угловой точке одной стороны на нормаль второй стороны должна быть равной сумме проекций вектора напряжений в

той же точке, принадлежащей второй стороне, на нормаль первой. Если угол прямой, то эти условия обращаются в условия парности касательных напряжений.

2. Метод решения задачи. Специальное представление краевых функций

Краевая задача решается методом расширения заданной области до канонической (при этом удовлетворяется уравнение задачи) с последующей ортогонализацией решения по границе (удовлетворение краевых условий). В качестве канонической области принимается прямоугольник.

Выполнив замену переменных $\bar{x} = (x-a)/a$, $\bar{y} = (y-h)/h$ ($2a, 2h$ – основание и высота трапеции), впишем трапециевидную область Ω в безразмерный прямоугольник $\Omega^* = \{\bar{x}, \bar{y} : |\bar{x}| < 1, |\bar{y}| < 1\}$ так, как показано на рис. 1.

В дальнейшем для упрощения обозначений верхнюю черту над безразмерными координатами будем всюду опускать. В работе [2] построено решение ПЗТУ в прямоугольной области. Воспользуемся им для решения нашей задачи. Для этого зададим на кусочно-непрерывной границе $\Gamma^* = \partial\Omega^*$ краевые условия следующим образом. Для нижнего основания прямоугольника краевые условия остаются идентичными краевым условиям на нижнем основании трапеции. Краевые условия на верхнем основании прямоугольника получаются продлением по непрерывности (или каким-либо другим способом) заданных на верхнем основании трапеции функций нормальных и касательных напряжений на интервале $x \in [-1; 1]$. При этом, в соответствии с методом [2], известные краевые функции на основаниях прямоугольника (трапеции) представляются в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, -1) &= \frac{f_{10}(x) + f_{11}(x)}{a^2} = \\ &= \frac{1}{a^2} \left\{ B_1 \cdot \frac{1-x}{2} + B_3 \cdot \frac{1+x}{2} + f_{11}(x) \right\}, \\ \tau_{xy}(x, -1) &= -\frac{f_{30}(x) + f_{31}(x)}{a^2 \lambda} = \\ &= \frac{-1}{a^2 \lambda} \left\{ C_1 \cdot \frac{x^2-x}{2} + C_3 \cdot \frac{x^2+x}{2} + C_6 \cdot (1-x^2) + f_{31}(x) \right\}, \\ \sigma_y(x, 1) &= \frac{f_{20}(x) + f_{21}(x)}{a^2} = \\ &= \frac{1}{a^2} \left\{ B_2 \cdot \frac{1-x}{2} + B_4 \cdot \frac{1+x}{2} + f_{21}(x) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, 1) &= -\frac{f_{40}(x) + f_{41}(x)}{a^2 \lambda} = \\ &= \frac{-1}{a^2 \lambda} \left\{ C_2 \cdot \frac{x^2-x}{2} + C_4 \cdot \frac{x^2+x}{2} + C_8 \cdot (1-x^2) + f_{41}(x) \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\lambda = h/a$ – параметр удлинения; B_k, C_k – некоторые постоянные, определяемые таким образом, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^n f_{k1}(x) dx &= 0, \quad n = 0, 1; \quad k = 1, 2; \\ f_{k1}(\pm 1) &= \int_{-1}^1 f_{k1}(x) dx = 0, \quad k = 3, 4. \end{aligned} \quad (2)$$

Подобным же образом на боковых сторонах прямоугольника вводятся функции эквивалентных краевых нормальных и касательных напряжений (эквивалентность здесь понимается в том смысле, что действие вводимых нагрузок порождает те же поля напряжений, что и действие нагрузок, заданных на боковых сторонах трапеции):

$$\begin{aligned} \sigma_x(-1, y) &= \frac{\varphi_{10}(y) + \varphi_{11}(y)}{a^2 \lambda^2} = \\ &= \frac{1}{a^2 \lambda^2} \left\{ A_1 \cdot \frac{1-y}{2} + A_2 \cdot \frac{1+y}{2} + \sum_{k=0} \widetilde{A}_k \cdot H_k''(y) \right\}, \\ \tau_{xy}(-1, y) &= -\frac{\varphi_{30}(y) + \varphi_{31}(y)}{a^2 \lambda} = \frac{-1}{a^2 \lambda} \left\{ C_1 \cdot \frac{y^2-y}{2} + \right. \\ &\quad \left. + C_2 \cdot \frac{y^2+y}{2} + C_5 \cdot (1-y^2) + \sum_{k=0} \widetilde{B}_k \cdot H_k'(y) \right\}, \\ \sigma_x(1, y) &= \frac{\varphi_{20}(y) + \varphi_{30}(y)}{a^2 \lambda^2} = \\ &= \frac{1}{a^2 \lambda^2} \left\{ A_3 \cdot \frac{1-y}{2} + A_4 \cdot \frac{1+y}{2} + \sum_{k=0} \widetilde{C}_k \cdot H_k''(y) \right\}, \\ \sigma_x(1, y) &= \frac{\varphi_{20}(y) + \varphi_{30}(y)}{a^2 \lambda^2} = \\ &= \frac{1}{a^2 \lambda^2} \left\{ A_3 \cdot \frac{1-y}{2} + A_4 \cdot \frac{1+y}{2} + \sum_{k=0} \widetilde{C}_k \cdot H_k''(y) \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $A_k (k = \overline{1, 4}), C_5, C_7, \widetilde{A}_k, \widetilde{B}_k, \widetilde{C}_k, \widetilde{D}_k$, – неизвестные коэффициенты; $\{H_k(y)\}_{k=0}^{\infty}$ – полная система ортонормированных в пространстве $L_2(-1; 1)$ многочленов [3]:

$$H_n(x) = (1-x^2)^{\frac{r}{2}} \cdot \sum_{m=0}^r A_{nm} \cdot x^{n-2m},$$

r – целая часть числа $n/2$,

$$A_{nm} = \frac{(-1)^m}{2^{n+3}} \sqrt{\frac{n!(2n+9)}{2(n+8)!}} \times \frac{(2n-2m+7)!}{(n-m+3)!m!(n-2m)!} \quad (4)$$

Такое разложение единственно в силу теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций степенными полиномами и свойств многочленов (4):

$$\begin{aligned} H_n(\pm 1) = H_n'(\pm 1) = 0; \quad (4, a) \\ \int_{-1}^1 H_n'(x) dx = 0; \quad \int_{-1}^1 H_n''(x) dx = 0; \\ \int_{-1}^1 x \cdot H_n''(x) dx = 0. \quad (4, б) \end{aligned}$$

Как показывают многочисленные исследования [3], [4], функции (4), являясь ортогональными в метрике квадратично интегрируемых функций $L_2(-1,1)$, обладают почти ортогональными первыми и вторыми производными:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 H_n(x) H_m(x) dx = 0; \\ \int_{-1}^1 H_n'(x) H_m'(x) dx \approx 0; \quad (4, в) \\ \int_{-1}^1 H_n''(x) H_m''(x) dx \approx 0. \end{aligned}$$

Представление краевых функций (2), (3) соответствует выделению в явном виде компонент внешней нагрузки: равновесной ее части (линейный закон изменения вдоль стороны для нормальных напряжений и квадратичный закон – для касательных) и самоуравновешенных вдоль отдельно взятых сторон нагрузок, – описано в работе [2] и здесь подробно не обсуждается. Среди шестнадцати коэффициентов A_k, B_k, C_k линейно независимыми являются только 13 коэффициентов, а три оставшиеся выражаются через них в силу условий равновесия прямоугольной области как жесткого целого. Пусть среди неизвестных коэффициентов $A_k (k = \overline{1,4}), C_5, C_7$ линейно независимыми будут A_1, A_2, C_5 .

3. Построение решения в расширенной области

Решение в расширенной области носит многокомпонентный характер и строится последовательным удовлетворением выделенным в явном виде компонентам краевых условий и уравнению краевой задачи. При этом одна часть решения носит равновесный характер, а другая – самоуравновешенный.

3.1. Определение равновесной части функции напряжений

Равновесная часть решения, определяемая набором коэффициентов A_k, B_k, C_k , здесь представляется в виде:

$$u_{01}(x, y) = A_1 \cdot k_{A,1}(y) + A_2 \cdot k_{A,2}(y) + C_5 \cdot k_{C,5}(x, y) + \Psi_1(x, y), \quad (5)$$

$$\Psi_1(x, y) = \sum_{i=1}^4 B_i \cdot k_{B,i}(x, y) + \sum_{j=1,4,6,8} C_j \cdot k_{C,j}(x, y), \quad (6)$$

где $k_{A,z}(y)$, $k_{B,z}(y)$, $k_{C,z}(y)$ – явно выписываемые с помощью [2] полиномиальные функции.

Однако функция (5) не удовлетворяет бигармоническому уравнению краевой задачи. Для решения этой проблемы строится функция $u_{02}(x, y)$, являющаяся решением следующей краевой задачи:

$$A \{u_{01}(x, y) + u_{02}(x, y)\} = 0 \text{ в } \Omega^*; \quad (7)$$

$$u_{02} = 0 \text{ на } \Gamma^*, \quad (8)$$

где $A \equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{2}{\lambda^4} \cdot \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ – бигармонический оператор в безразмерных координатах.

Решение задачи (7) – (8) ищется методом Бубнова-Галеркина, в качестве координатных принимаются функции $\{H_i(y) \cdot H_j(y)\}_{i,j=0}^{\infty}$:

$$u_{02}(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \psi_{i,j}^{(1)} \cdot H_i(x) \cdot H_j(y). \quad (9)$$

При использовании свойства (в) полиномов (4) коэффициенты разложения $\psi_{i,j}^{(1)}$ из (9) определяются прямым счетом:

$$\psi_{i,j}^{(1)} = \frac{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (-A \Psi_1(x, y)) H_i(x) H_j(y) dx dy}{\|H_i^*(x)\|^2 + \frac{2}{\lambda^2} \|H_i'(x)\|^2 + \|H_j^*(y)\|^2 + \frac{1}{\lambda^4} \|H_j''(y)\|^2}. \quad (10)$$

3.2. Определение компонент решения, соответствующих краевым самоуравновешенным нагрузкам

Самоуравновешенные краевые условия на основаниях $y = \pm 1$ области Ω^* выполняет функция:

$$\begin{aligned} \Psi_2(x, y) = \frac{2-3y+y^3}{4} \int_{-1}^x (x-z) f_{11}(z) dz + \\ + \frac{2+3y-y^3}{4} \int_{-1}^x (x-z) f_{21}(z) dz + \frac{1-y-y^2+y^3}{4} \times \\ \times \int_{-1}^x f_{31}(z) dz + \frac{-1-y+y^2+y^3}{4} \int_{-1}^x f_{41}(z) dz. \quad (11) \end{aligned}$$

Функция $\Psi_2(x, y)$, также как и функция (5), не является бигармонической. До бигармонической функцию (11) дополняет функция, получаемая также, как и функция (9):

$$\widetilde{\Psi}_2(x, y) = \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 \psi_{i,j}^{(2)} \cdot H_i(x) \cdot H_j(y), \quad (12)$$

где

$$\psi_{i,j}^{(2)} = \frac{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (-A\Psi_2(x, y)) H_i(x) H_j(y) dx dy}{\|H_i''(x)\|^2 + \frac{2}{\lambda^2} \|H_i'(x)\|^2 \|H_j'(y)\|^2 + \frac{1}{\lambda^4} \|H_j''(y)\|^2}. \quad (13)$$

Функция, которая является приближенно бигармонической в области Ω^* , полностью (точно) выполняет краевые условия на горизонтальных сторонах указанной области, а на вертикальных ее сторонах задает некоторую равновесную систему напряжений (что означает выполнение трех статических уравнений), определяемую тремя коэффициентами A_1, A_2, C_5 , имеет вид:

$$u_1(x, y) = A_1 \cdot k_{A,1}(y) + A_2 \cdot k_{A,2}(y) + C_5 \cdot k_{C,5}(x, y) + \Psi(x, y), \quad (14)$$

$$\Psi(x, y) = \Psi_1(x, y) + \Psi_2(x, y) + \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 (\psi_{i,j}^{(1)} + \psi_{i,j}^{(2)}) \cdot H_i(x) \cdot H_j(y). \quad (15)$$

Далее отыскивается бигармоническая в области Ω^* функция, которая удовлетворяет заданной на вертикальных сторонах прямоугольника системе самоуравновешенных нагрузок, не влияя при этом на прочие краевые условия, т.е. строится решение для следующей краевой задачи:

$$Au_2(x, y) = 0 \text{ в } \Omega^*; \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_2(x, y)}{\partial x \partial y} = 0 \text{ при } y = \pm 1; \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_2(-1, y) &= \sum_{k=0} \widetilde{A}_k H_k''(y); \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u_2(-1, y) &= \sum_{k=0} \widetilde{B}_k H_k'(y); \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_2(1, y) &= \sum_{k=0} \widetilde{C}_k H_k''(y); \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u_2(1, y) &= \sum_{k=0} \widetilde{D}_k H_k'(y). \end{aligned} \quad (18)$$

Решение задачи (16) – (18) отыскивается методом Власова-Канторовича:

$$u_2(x, y) = \sum_{n=0} F_n(x) \cdot H_n(y). \quad (19)$$

Таким образом, краевые условия на сторонах $y = \pm 1$ автоматически выполняются: каждый член

ряда (19) в силу свойств (а) удовлетворяет условиям (17). Переменные коэффициенты $F_n(x)$ определяются так, чтобы удовлетворялись уравнение краевой задачи и граничные условия (18). Подстановка (19) в уравнение (16) и ортогонализация возникающих невязок по координатным функциям $\{H_j(y)\}_{j=0}^n$ на интервале $y \in [-1; 1]$ дает для отыскания функций $F_n(x)$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая при использовании свойств (в) координатных функций распадается на отдельные уравнения, каждое из которых позволяет определить один из коэффициентов разложения $F_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$F_n^{IV}(x) - \frac{2 \|H_n'(y)\|^2}{\lambda^2} F_n''(x) + \frac{\|H_n''(y)\|^2}{\lambda^4} F_n(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

Комплексно-сопряженные корни $k_{1,2,3,4n} = \pm \mathfrak{N}_{1,n}(\lambda) \pm i \cdot \mathfrak{N}_{2,n}(\lambda)$ характеристического уравнения для обыкновенного дифференциального уравнения (20), где

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_{1,n}(\lambda) &= (\lambda\sqrt{2})^{-1} \sqrt{\|H_n''(y)\| + \|H_n'(y)\|^2}; \\ \mathfrak{N}_{2,n}(\lambda) &= (\lambda\sqrt{2})^{-1} \sqrt{\|H_n''(y)\| - \|H_n'(y)\|^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

определяют вид интеграла уравнения (20):

$$F_n(x) = \sum_{j=1}^4 C_{j,n} \widetilde{f}_{j,n}(x), \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{f}_{1,n}(x) &= \text{sh}(\mathfrak{N}_{1,n}(\lambda) \cdot x) \sin(\mathfrak{N}_{2,n}(\lambda) \cdot x); \\ \widetilde{f}_{2,n}(x) &= \text{sh}(\mathfrak{N}_{1,n}(\lambda) \cdot x) \cos(\mathfrak{N}_{2,n}(\lambda) \cdot x); \\ \widetilde{f}_{3,n}(x) &= \text{ch}(\mathfrak{N}_{1,n}(\lambda) \cdot x) \sin(\mathfrak{N}_{2,n}(\lambda) \cdot x); \\ \widetilde{f}_{4,n}(x) &= \text{ch}(\mathfrak{N}_{1,n}(\lambda) \cdot x) \cos(\mathfrak{N}_{2,n}(\lambda) \cdot x). \end{aligned} \quad (23)$$

Постоянные интегрирования $C_{j,n} (j = \overline{1,4})$ из (22) определяются так, чтобы выполнялись краевые условия (18):

$$\begin{aligned} F_n(-1) &= \widetilde{A}_n, \quad F_n'(-1) = \widetilde{B}_n, \\ F_n(1) &= \widetilde{C}_n, \quad F_n'(1) = \widetilde{D}_n. \end{aligned} \quad (24)$$

Решение системы (24) позволяет записать в явном виде соотношения:

$$\begin{aligned} C_{j,n} &= C_{j,n} (\widetilde{A}_n, \widetilde{B}_n, \widetilde{C}_n, \widetilde{D}_n) = \\ &= \xi_{A,j,n} \widetilde{A}_n + \xi_{B,j,n} \widetilde{B}_n + \xi_{C,j,n} \widetilde{C}_n + \xi_{D,j,n} \widetilde{D}_n, \\ & \quad j = \overline{1,4}. \end{aligned} \quad (25)$$

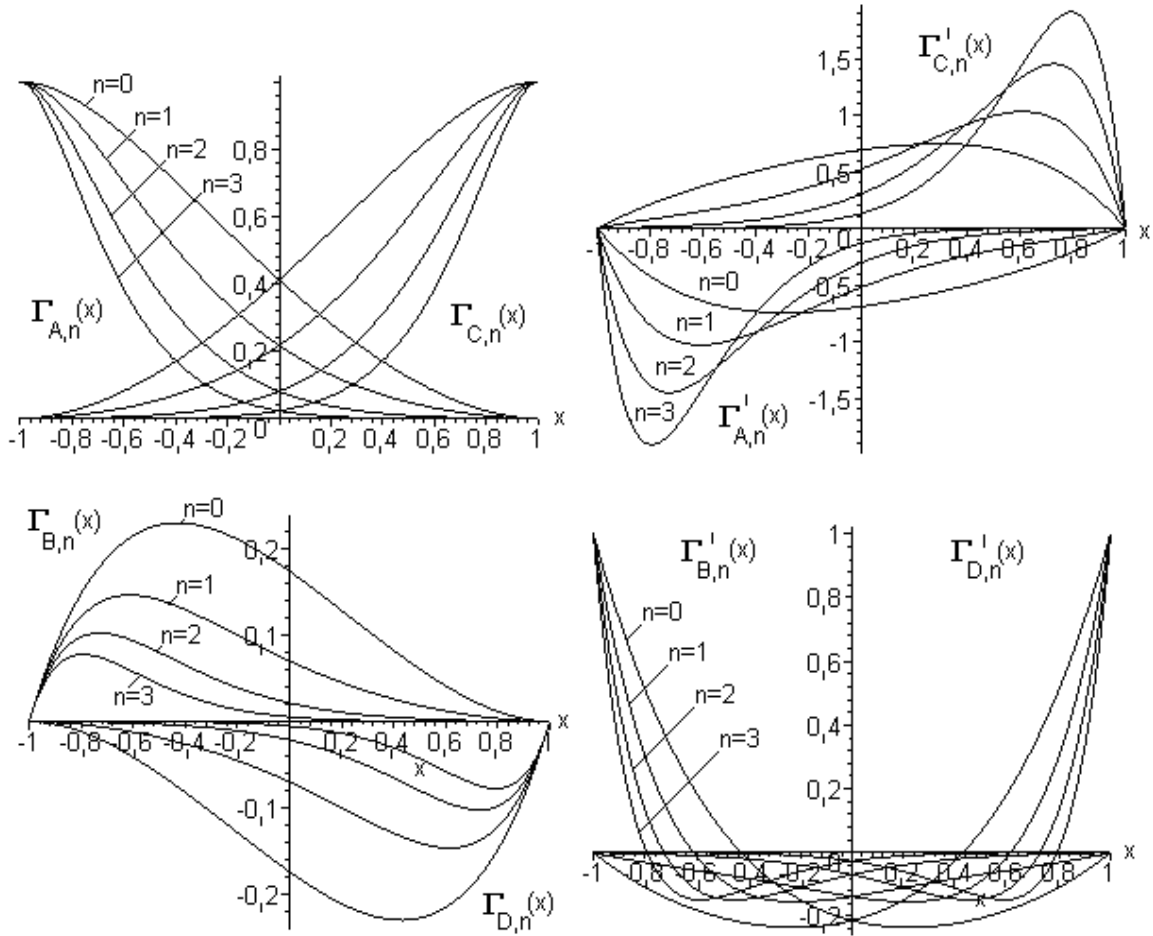


Рис. 1. Поведение функций $\Gamma_{A,n}(x)$, $\Gamma_{B,n}(x)$, $\Gamma_{C,n}(x)$, $\Gamma_{D,n}(x)$ и их первых производных на интервале $x \in [-1; 1]$ ($\lambda = 1.5$)

Искомое решение задачи (16) – (18) имеет вид:

$$u_2(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ \widetilde{A}_n \cdot \Gamma_{A,n}(x) + \widetilde{B}_n \cdot \Gamma_{B,n}(x) + \widetilde{C}_n \cdot \Gamma_{C,n}(x) + \widetilde{D}_n \cdot \Gamma_{D,n}(x) \} \cdot H_n(y), \quad (26)$$

где $\Gamma_{A,n}(x) = \sum_{j=1}^4 \xi_{A,j,n} \cdot \widetilde{f}_{j,n}(x), \dots,$

$\Gamma_{D,n}(x) = \sum_{j=1}^4 \xi_{D,j,n} \cdot \widetilde{f}_{j,n}(x)$ – явно выписываемые функции класса $C^\infty(-1; 1)$, являющиеся комбинациями гиперболично-тригонометрических функций и характеризующие поведение вдоль координаты x (рис. 2) заданных на сторонах $x = \pm 1$ отдельных компонент краевых условий (18).

Решение статической задачи в расширенной области на этом считается завершенным.

Решение статической задачи в расширенной области на этом считается завершенным.

4. Удовлетворение краевым условиям на боковых сторонах трапеции методом наименьших квадратов

Построенное в расширенной области бигармоническое решение

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) \quad (27)$$

содержит необходимое число произвольных (коэффициентов), которые позволяют выполнить заданные краевые условия на боковых сторонах трапеции. При этом точно выполнены краевые условия на основаниях трапеции.

Неизвестные постоянные, содержащиеся в (27), определяются из условия наилучшего приближения краевых условий на боковых сторонах трапеции в смысле наименьших квадратов:

$$\begin{aligned}
 I = & \int_{\Gamma_1} \left\{ \left[\sigma_{n1}(s_1) - \sigma_{n1}^0(s_1) \right]^2 + \right. \\
 & \left. + \left[\tau_{n1}(s_1) - \tau_{n1}^0(s_1) \right]^2 \right\} ds_1 + \\
 & + \int_{\Gamma_3} \left\{ \left[\sigma_{n3}(s_3) - \sigma_{n3}^0(s_3) \right]^2 + \right. \\
 & \left. + \left[\tau_{n3}(s_3) - \tau_{n3}^0(s_3) \right]^2 \right\} ds_3 \rightarrow \min,
 \end{aligned} \tag{28}$$

где $\sigma_{n1}(s_1)$, $\tau_{n1}(s_1)$, $\sigma_{n3}(s_3)$, $\tau_{n3}(s_3)$ – определяемые функцией (27) нормальные и касательные напряжения на сторонах Γ_1 , Γ_3 ; $\sigma_{n1}^0(s_1)$, $\tau_{n1}^0(s_1)$, $\sigma_{n3}^0(s_3)$, $\tau_{n3}^0(s_3)$ – заданные на сторонах Γ_1 , Γ_3 краевые функции; $s_1 = [-1; 1]$, $s_3 = [-1; 1]$ – местные координаты на сторонах Γ_1 и Γ_3 соответственно, параметрические уравнения которых имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1 : \begin{cases} x = x(s_1) = \lambda \cdot c \operatorname{tg} \alpha (1 - s_1) - 1, \\ y = y(s_1) = -s_1; \end{cases} \\
 \Gamma_3 : \begin{cases} x = x(s_3) = 1 - \lambda \cdot c \operatorname{tg} \beta (s_3 + 1), \\ y = y(s_3) = s_3. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{29}$$

Учитывая связь компонент тензора напряжений с функцией (27):

$$\begin{aligned}
 \sigma_x(x, y) &= \frac{1}{a^2 \lambda^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}; \\
 \sigma_y(x, y) &= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}; \\
 \tau_{xy}(x, y) &= -\frac{1}{a^2 \lambda} \cdot \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \tag{30}$$

и соотношения между напряжениями (30) и составляющими полного напряжения на косых площадках, которыми являются стороны Γ_1 и Γ_3 , выражения для определения функций $\sigma_{n1}(s_1)$, $\tau_{n1}(s_1)$, $\sigma_{n3}(s_3)$, $\tau_{n3}(s_3)$ через функцию напряжений $u(x, y)$ выписываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{n1}(x, y) = & \frac{\sin^2 \alpha}{a^2 \lambda^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \\
 & + \frac{\sin 2\alpha}{a^2 \lambda} \cdot \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{n1}(x, y) = & \frac{\sin 2\alpha}{2 \cdot a^2 \lambda^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - \lambda^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \right) + \\
 & + \frac{\cos 2\alpha}{a^2 \lambda} \cdot \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{n3}(x, y) = & \frac{\sin^2 \beta}{a^2 \lambda^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\cos^2 \beta}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \\
 & - \frac{\sin 2\beta}{a^2 \lambda} \cdot \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{n3}(x, y) = & \frac{\sin 2\beta}{2 \cdot a^2 \lambda^2} \cdot \left(-\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \lambda^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \right) + \\
 & + \frac{\cos 2\beta}{a^2 \lambda} \cdot \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y},
 \end{aligned} \tag{31}$$

где α, β – углы при основаниях трапеции, а переменные x, y следует заменить зависимостями (29).

Решением системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \delta_j} I = 0, \tag{32}$$

где $\delta_j = A_1, A_2, C_5$, \widetilde{A}_n , \widetilde{B}_n , \widetilde{C}_n , \widetilde{D}_n , $n = 0, 1, 2, \dots, N$ (размер системы $4 \cdot (N+1) + 3$), определяются все перечисленные неизвестные, входящие в выражение для функции напряжений (27). Полученная функция является решением поставленной задачи.

5. Пример решения ПЗТУ в трапециевидной области

Требуется определить поле напряжений в трапеции при следующих данных: $a = 0,1$ м, $\lambda = 1,5$, $\alpha = \beta = 4\pi/9$. На границе области задана следующая уравновешенная система напряжений:

$$\sigma_n(\Gamma_2) = 150 \text{ МПа}; \quad \sigma_n(\Gamma_4) = 100 \text{ МПа};$$

$$\tau_n(s_1)|_{\Gamma_1} = 36s_1^2 - 8s_1 + 1 + 10H_0'(s_1) - 5H_1'(s_1);$$

$$\tau_n(s_3)|_{\Gamma_3} = -\tau_n(s_1)|_{\Gamma_1}.$$

На рис. 3 показана сходимость (конечно, в среднем) касательных напряжений на боковой стороне трапеции в зависимости от числа N самоуравновешенных эквивалентных нагрузок. Как видно из рисунка, удовлетворительная точность соответствует $N = 25$. Этому числу соответствуют и результаты расчетов, приведенные на графиках рис. 4, 5 – распределение компонент тензора напряжений вдоль линий $y = 0, x = 0$.

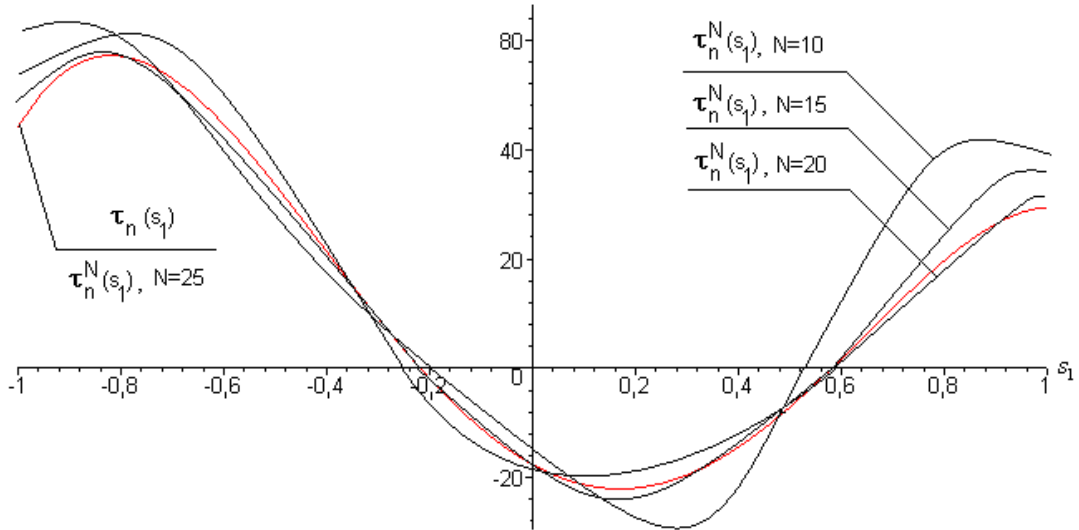


Рис. 3. Сходимость функции касательных напряжений на стороне Γ_1

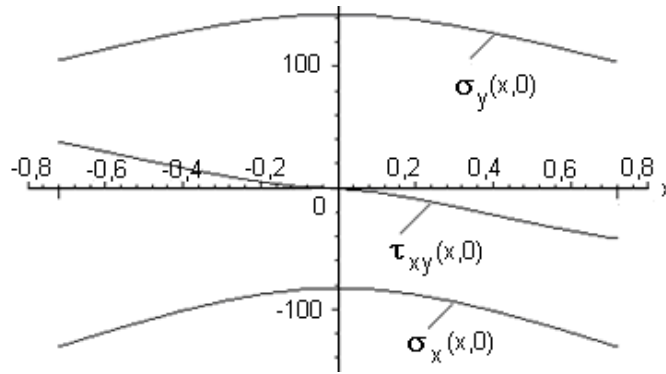


Рис. 4. Распределение компонент тензора напряжений вдоль линии $y=0$

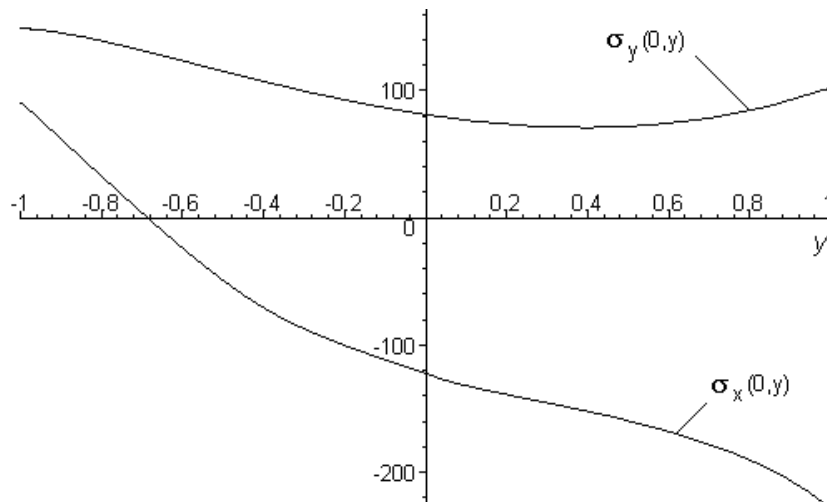


Рис. 5. Распределение нормальных напряжений вдоль линии $x=0$

Заключение

1. Построено полное решение плоской задачи теории упругости в трапециевидной области при

произвольном нагружении сторон трапеции.

2. Решение получено в замкнутом виде и выражено через произвольное число неизвестных, достаточное для обеспечения требуемой точности.

3. В работе получили дальнейшее развитие малоизвестные метод расширения области до канонической и метод ортогонализации по границе.

4. Показана эффективность метода расширения области до канонической в сочетании с методом наименьших квадратов по границе путем исследования сходимости решения, удовлетворяющего заданным краевым условиям.

5. Задачи дальнейших исследований заключаются в углублении данного подхода и расширения круга решаемых задач на его основе.

Литература

1. Кутыинов В.Ф. *Методология исследования разрушений авиационных конструкций при статических испытаниях* / В.Ф. Кутыинов, Г.Н. Замула, В.Ф. Мохов // *Расчет НДС и рациональное проекти-*

рование авиац. констр. Труды ЦАГИ. – 1992. – Вып. 2495. – С. 87-91.

2. Халилов С.А. *Решение в прямоугольнике статической задачи теории упругости при заданных на границе напряжениях* / С.А. Халилов // *Вопросы проектирования самолетных конструкций. Тематический сборник научных трудов.* – Х.: ХАИ, 1982. – Вып. 3. – С. 120-127.

3. Халилов С.А. *Новые системы ортонормированных многочленов, некоторые их свойства и приложения* / С.А. Халилов // *Прочность конструкций летательных аппаратов. Тематический сборник научных трудов.* – Х.: ХАИ, 1978. – Вып. 5. – С. 46-56.

4. Халилов С.А. *Вычисление некоторых определенных интегралов, содержащих присоединенные функции Лежандра второго и четвертого порядков* / С.А. Халилов // *Прочность конструкций летательных аппаратов. Тематический сборник научных трудов.* – Х.: ХАИ, 1984. – Вып. 7. – С. 158-165.

Поступила в редакцию 26.12.2008

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики М.И. Несвит, Харьковский государственный технический университет строительства и архитектуры, Харьков.

ПОБУДУВАННЯ НАБЛИЖЕНОГО АНАЛІТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ПЛАСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ У ТРАПЕЦІВІДНІЙ ОБЛАСТІ

С.А. Халілов, С.Г. Кравченко

У замкнутому вигляді набуто повного розв'язку плоскої задачі теорії пружності у трапецієвидній області при довільному навантаженні сторін трапеції. Розв'язок побудовано за допомогою методу розширення області до канонічної і методу найменших квадратів. Виконано чисельне дослідження набутого рішення. Показано ефективність запропонованих методів з точки зору збіжності та точності. Підхід роботи є вельми загальним для розв'язання плоскої задачі теорії пружності у неканонічних областях.

Ключові слова: плоска задача теорії пружності, функція напружень, трапецієвидна область, розширення області, метод найменших квадратів.

APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTION OF PLANE ELASTIC PROBLEM IN TRAPEZOID REGION DEFINITION

S.A. Khalilov, S.G. Kravchenko

Complete solution of plane elastic problem in trapezoid region under arbitrary loading is obtained. The solution is resulted with the method of region expansion and the least-squares method. Numerical investigation of solution is carried out. Efficiency in terms of convergence and accuracy of methods proposed is shown. Approach proposed in article is quite common for solution of plane elastic problem in non-canonical areas.

Key words: plane elastic problem, stress function, trapezoid region, method of region expansion, least-squares method.

Халилов Сиявуш Ахмедович – ст. научн. сотрудник, ст. преподаватель кафедры прочности летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

Кравченко Сергей Григорьевич – мл. научн. сотрудник, аспирант кафедры технологии производства летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.