

УДК 621.3:681.34

Д.А. КУРКИН, А.А. РОЕНКО, В.В. ЛУКИН

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина***ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕРИДИАННОЙ  
ОЦЕНКИ ДЛЯ ВЫБОРОК ДАННЫХ С НЕГАУССОВЫМИ  
ПЛОТНОСТЯМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ**

*Проанализированы статистические характеристики недавно предложенной меридианной оценки параметра сдвига для симметричных распределений с тяжелыми хвостами. Установлено, что дисперсия оценки зависит от настроенного параметра, масштаба данных, степени тяжести хвостов и остроты пика плотности распределения вероятности (ПРВ). Показано, что существуют негауссовы распределения, для которых меридианная оценка с квазиоптимальным значением настроенного параметра способна обеспечивать более точные оценки параметра сдвига, чем одни из наиболее устойчивых оценок – медиана и мириада выборки. Для ряда процессов с негауссовыми ПРВ, обладающими неколоколообразными (острыми) пиками, определены оптимальные значения настроенного параметра.*

**Ключевые слова:** негауссовы симметричные распределения, меридианная оценка, статистические характеристики.

**Введение**

На протяжении многих десятилетий в следящих и измерительных аэрокосмических системах, радиотехнике, метрологии и ряде других областей исследователями рассматривались, в основном, гауссовы модели помех и распределений многократных измерений [1, 2]. В частности, такие модели использовались при разработке многих систем траекторных измерений [1].

Вместе с тем, начиная с конца 70-х годов прошлого столетия, появляется все большее количество работ, посвященных уточнению моделей помех, использованию для этого негауссовых распределений с тяжелыми хвостами [3, 4], разработке методов устранения аномальных измерений и импульсных помех [5, 6]. Все шире применяются различные устойчивые (робастные) оценки и связанные с ними процедуры обработки данных и фильтрации сигналов [7, 8].

В практических ситуациях решение о применении тех или иных устойчивых оценок принимают с учетом ряда факторов – их оптимальности для заданной плотности распределения вероятности (ПРВ), если она априорно известна, степени устойчивости, возможности адаптироваться к характеристикам наблюдаемой ПРВ, быстродействия алгоритмов, реализующих вычисление оценки для рассматриваемого приложения [6, 7, 8] и т.д. Существуют неадаптивные устойчивые оценки: медиана и  $\alpha$ -урезанное среднее, оценки Вилкоксона и Ходжеса-Лемана [6, 8], которые эффективны (оптимальны) для одного вида ПРВ или просто обладают непло-

хой робастностью. В последние годы большое внимание уделяется разработке адаптивных устойчивых оценок – L-оценок с оптимизируемыми весами [8, 9], адаптивных оценок на основе  $\alpha$ -урезанного среднего [10], адаптивной мириадной оценки [11, 12]. Отметим, что мириадная оценка является квазиоптимальной для широкого класса симметричных  $\alpha$ -стабильных распределений [13] при условии соответствующего выбора значения настроенного параметра  $k$ , которое, как показано в [12], может быть определено адаптивно путем анализа ряда статистических параметров для выборки данных.

Недавно была предложена меридианная оценка [14], обладающая рядом практически полезных достоинств. Во-первых, эта оценка также имеет настроенный параметр  $\delta$ , наличие которого потенциально позволяет адаптировать ее свойства к виду и параметрам ПРВ. Во-вторых, алгоритм получения оценки сравнительно прост и обладает более высоким быстродействием по сравнению, например, с алгоритмами определения мириадной оценки или оценки Вилкоксона. В-третьих, при  $\delta \rightarrow \infty$  свойства меридианной оценки идентичны со свойствами медианы, а при малых  $\delta$  меридианная оценка обладает более высокой робастностью к выбросам, чем медиана, что может быть полезно для ряда практических приложений [15]. Наконец, меридианной выборки данных является одно из значений выборки, что часто важно при фильтрации сигналов и изображений [16].

Вместе с тем, для практического применения той или иной оценки необходимо дать ответы на ряд

вопросов, в частности, в каких ситуациях применение данной оценки по тем или иным причинам целесообразно (например, она позволяет получить оценки с меньшей дисперсией, чем другие оценки), какие параметры оценок следует использовать в той или иной ситуации (для данной ПРВ или выборки данных), как практически подстраивать эти параметры (например, параметры усечения выборки для  $\alpha$ -урезанного среднего, значения параметров  $k$  для мириадной оценки или  $\delta$  для меридианной оценки).

В работе [14] проведен лишь первичный анализ основных свойств меридианной оценки. Поэтому цель данной работы – дать ответы, по крайней мере, на первые два вопроса. Для этого ниже проводится статистический анализ меридианных оценок для разных типов и параметров негауссовых ПРВ, размеров выборок данных, значений  $\delta$ .

### 1. Меридианная оценка и ее основные свойства

Меридианная оценка [14] относится к классу М-оценок (т.е. оценок максимального правдоподобия). Аналитически меридианная оценка определяется следующим образом:

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta} \left[ \sum_{i=1}^N \ln(\delta + |x_i - \beta|) \right], \quad (1)$$

$$= \text{meridian}\{x_i, i = \overline{1, N}; \delta\}$$

где  $\hat{\beta}$  – значение меридианной оценки выборки размером  $N$ ;

$x_i$  –  $i$ -й элемент выборки;

$\delta$  – настроечный параметр меридианной оценки (т.н. параметр «меридианности» [14]).

Перечислим основные свойства меридианы:

1. Целевая функция меридианной оценки выглядит следующим образом:

$$\varphi(\beta) = \sum_{i=1}^N \ln(\delta + |x_i - \beta|). \quad (2)$$

2. Функция  $\varphi(\beta)$  строго возрастает при значениях  $\beta$  больших, чем значение максимального элемента оцениваемой выборки  $x_{\max}$ .

3. Функция  $\varphi(\beta)$  строго убывает при значениях  $\beta$  меньших, чем значение минимального элемента оцениваемой выборки  $x_{\min}$ .

4. Функция  $\varphi(\beta)$  имеет конечное число локальных минимумов, координаты которых лежат между значениями  $x_{\min}$  и  $x_{\max}$ ; поэтому  $\hat{\beta}$  всегда принадлежит интервалу от  $x_{\min}$  до  $x_{\max}$ .

5. Аргументами локальных минимумов могут быть только значения элементов оцениваемой вы-

борки, причем число минимумов возрастает при уменьшении  $\delta$  (примеры свойств и поведения  $\varphi(\beta)$  показаны на рис. 1).

Перечисленные выше свойства и их доказательства приведены в [14]. Эти свойства позволяют легко и быстро рассчитывать меридиану для выборки данных. Для этого достаточно рассчитать значения  $\varphi(x_i)$  для всех элементов выборки и найти такое  $x_i$ , при котором (2) минимально. В этом плане алгоритм определения меридианы выборки выгодно отличается от алгоритма расчета мириады [17], для которой целевая функция имеет вид

$$\varphi(\beta) = \sum_{i=1}^N \ln(k^2 + (x_i - \beta)^2), \quad (3)$$

где  $k$  – настроечный параметр мириадной оценки.

Для определения мириады выборки необходим достаточно большой объем вычислений, поскольку мириада, как правило, не совпадает ни с одним из элементов выборки данных [17].

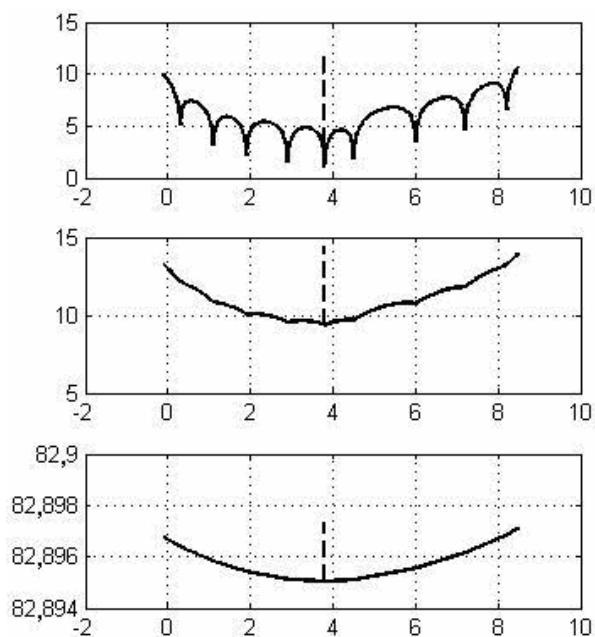


Рис. 1. Графики целевой функции меридианной оценки для выборки  $x = \{1, 1; 0, 3; 7, 2; 4, 5; 3, 8; 2, 9; 6, 0; 8, 2; 1, 9\}$  при  $\delta = 0,01; 1$  и  $10^4$ , соответственно

Отметим, что для получения меридианной оценки в отличие от медианы [5, 6] нет необходимости сортировать данные, что позволяет обеспечить достаточно высокое быстродействие соответствующего алгоритма. В этом случае скорость расчета меридианы, в основном, определяется скоростью выполнения операции расчета логарифма в (2).

В [14] указаны еще два важных свойства меридианной оценки. Если параметр  $\delta$  устремить к бесконечности, то свойства меридианной оценки неог-

раниченно приближаются к свойствам медианной оценки. В то же время, при  $\delta \rightarrow \infty$  меридианная оценка стремится к моде распределения. В связи с этим меридиана обладает прекрасными робастными свойствами, которые регулируются выбором значения  $\delta$ .

Важным для последующего анализа также является свойство инвариантности меридианы к сдвигу. Если  $z_i = x_i + b, i = 1, \dots, N$ , где  $b$  – некоторая константа, то  $\hat{\beta}(z_i, i = 1, \dots, N) = \hat{\beta}(x_i, i = 1, \dots, N) + b$  для любых  $\delta$ . Кроме того, в [14] доказано, что для симметричных распределений меридианная оценка является несмещенной.

Эти свойства позволяют ограничить анализ статистических характеристик меридианной оценки случаем распределений с нулевым математическим ожиданием. При этом для практических приложений желательно иметь более конкретные рекомендации по выбору параметра  $\delta$ , чтобы обеспечивать наилучшие или, по крайней мере, приемлемые точностные характеристики меридианной оценки.

## 2. Исследуемые законы распределения и методика проведения анализа

Естественно, что особый интерес представляют распределения, имеющие более тяжелые хвосты, чем гауссова ПРВ. Поэтому в качестве первых двух распределений рассмотрим гауссову ПРВ с дисперсией  $\sigma_G^2$  и ПРВ Коши (которое является частным случаем симметричного  $\alpha$ -стабильного распределения) вида  $f(\gamma; x) = \gamma / (\pi [\gamma^2 + x^2])$ , где  $\gamma$  – параметр, характеризующий масштаб распределения. Для обоих случаев ПРВ в окрестностях их максимум имеют колоколообразную форму и, следовательно, не имеют разрывов.

Кроме того, проведем анализ ПРВ следующих трех случайных величин:

1.  $Y_1 = X_1 X_2$  (*dgauss*);
2.  $Y_2 = X_1 X_2 X_3$  (*tgauss*);
3.  $Y_3 = (X_1)^3$  (*gauss3*).

Здесь  $X_1, X_2$  и  $X_3$  – независимые гауссовы случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и заданными СКО  $\sigma_{X1}, \sigma_{X2}, \sigma_{X3}$ .

Все три ПРВ *dgauss*, *tgauss*, *gauss3* имеют более тяжелые хвосты, чем нормальное распределение. Об этом свидетельствуют приведенные на рис. 2 графики ПРВ. Сравнительный анализ проведен при равных СКО всех четырех распределений, т.к.  $\sigma_G = \sigma_{X1} = \sigma_{X2} = \sigma_{X3} = 1$  и поэтому для всех трех ПРВ *dgauss*, *tgauss*, *gauss3* значения дисперсий рав-

ны единице. Еще одной особенностью исследуемых ПРВ *dgauss*, *tgauss*, *gauss3* является тот факт, что все они имеют пикообразные (неколоколообразные) формы максимумов [18], [19] (см. рис. 2).

Случайные величины  $Y_1$  и  $Y_2$  возникают при сложных преобразованиях данных, в частности, они имеют место при биспектральной обработке сигналов [18], а шумы с ПРВ *gauss3* рассматривались как модель негауссовых помех в работе [19].

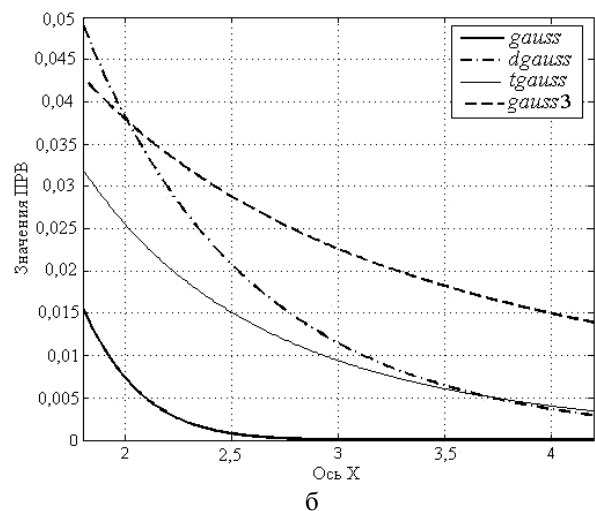
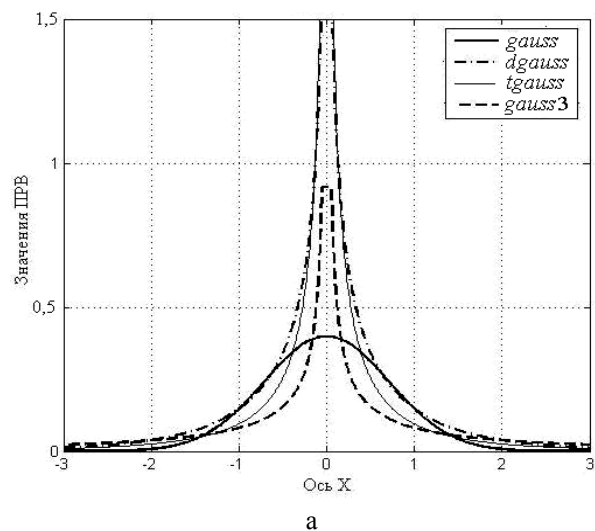


Рис. 2. ПРВ исследуемых случайных величин (*gauss*, *dgauss*, *tgauss*, *gauss3*), полученные на основе гистограмм

Точность меридианной оценки зависит от закона распределения, размера выборки, масштаба данных и параметра  $\delta$  [14]. Поэтому исследования проведем для каждой из указанных ПРВ для различных значений  $N$  и СКО исследуемых случайных величин, варьируя в определенных пределах значения параметра  $\delta$ . В большинстве исследованных случаев значения  $\sigma_G = \sigma_{X1} = \sigma_{X2} = \sigma_{X3} = 1$ . Исключением является случай анализа характеристик меридианной оценки от масштаба выборки данных.

Для анализа точности меридианной оценки проводился расчет СКО  $\sigma_\beta$  оценок параметра сдвига. Так как априорно сложно предсказать, при каких  $\delta$  будет наблюдаться минимум  $\sigma_\beta$ , значения параметра  $\delta$  изменялись в широких пределах. Кроме того, будем характеризовать точность оценивания параметра сдвига для всех исследуемых ПРВ и робастной оценкой, рассчитываемой как:

$$MAD_\beta = \text{med} \left\{ \left| \hat{\beta}_j - \text{med} \{ \hat{\beta}_j \} \right|, j = 1, N_{\text{exp}} \right\}, \quad (4)$$

где  $\text{med}\{\dots\}$  – операция нахождения медианы;

$\hat{\beta}_j$  – меридианная оценка, полученная для  $j$ -й реализации выборки с заданным законом распределения;

$N_{\text{exp}}$  – число независимых реализаций, используемых при проведении статистических экспериментов.

Целесообразность использования и анализа оценки  $MAD_\beta$  обусловлена тем, что, как показали исследования, закон распределения меридианных оценок при обработке выборок с ПРВ *dgauss*, *tgauss*, *gauss3* не является гауссовым. Для гауссовой ПРВ и распределения Коши распределение меридианных оценок можно приближенно считать гауссовым, особенно для выборок данных достаточно большого размера.

### 3. Анализ статистических характеристик меридианной оценки

#### 3.1. Случаи обработки выборок случайных величин с нормальным распределением и ПРВ Коши

Прежде всего, рассмотрим зависимости  $\sigma_\beta(\delta)$  для гауссова распределения и ПРВ Коши. Для удобства анализа (в связи с широкими пределами варьирования  $\delta$ ) эти зависимости представлены в виде  $\sigma_\beta(\delta)$  (см. рис. 3). Как видно из графиков на рис. 3, зависимость  $\sigma_\beta(\delta)$  имеет монотонно убывающий характер, что подтверждает указанное в разделе 1 свойство меридианной оценки приближаться по своим характеристикам к медиане выборки при  $\delta \rightarrow \infty$ . Об этом же свидетельствует и полученное при больших  $\delta$  отношение  $\sigma_\beta / \sigma_{\text{mean}}$  (где  $\sigma_{\text{mean}}$  – СКО среднего выборки), которое примерно равно 1,25, что совпадает с отношением  $\sigma_{\text{med}} / \sigma_{\text{mean}}$ , где  $\sigma_{\text{med}}$  – СКО медианной оценки параметра сдвига для гауссова распределения.

Зависимости  $MAD_\beta(\delta)$  имеют аналогичный вид с той лишь разницей, что при одних и тех же  $N$

и  $\sigma_G$  при  $\delta \gg \sigma_G$  выполняется приближенное равенство  $1,48 \cdot MAD_\beta(\delta) \approx \sigma_\beta(\delta)$  [8], что свидетельствует о гауссовой ПРВ получаемых меридианных оценок. Анализ приведенных на рис. 3 зависимостей также показывает, что уже при  $\delta \geq 10\sigma_G$  значения  $MAD_\beta$  и  $\sigma_\beta$  практически достигают минимума.

Данное свойство может быть использовано для выбора значения  $\delta$  при применении меридианной оценки на практике к выборкам данных, для которых ПРВ близка к гауссовой, но в то же время с небольшой вероятностью могут иметь место аномальные выбросы. Если  $\sigma_G$  заранее неизвестно, то для определения масштаба данных могут быть использованы устойчивые оценки, например, оценка  $MAD_X = \text{med} \{ |x_i - \text{med} \{ x_i \} | \}$ . Тогда  $\delta$  можно выбрать адаптивно как  $\delta = (15 \dots 30)MAD_X$ .

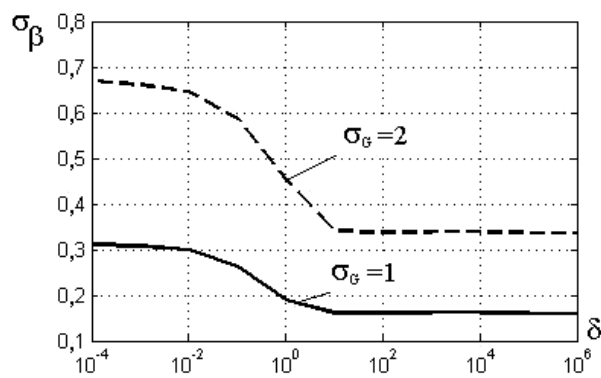


Рис. 3. Зависимости  $\sigma_\beta(\delta)$  для случая обработки случайных величин с гауссовой ПРВ при  $\sigma_G = 1$  и  $\sigma_G = 2$ ,  $N=64$

Из анализа зависимостей на рис. 3 также следует, что  $\sigma_\beta(\delta, \sigma_G) = (1/s)\sigma_\beta(s\delta, s\sigma_G)$ , где  $s$  – некоторая константа. Кроме того, выполняется следующее равенство  $\sigma_\beta(\delta, \sigma_G, sN) \approx \sqrt{1/s}\sigma_\beta(\delta, \sigma_G, N)$ , что свидетельствует о состоятельности меридианы.

Далее проведем анализ результатов, полученных при обработке случайных величин с распределением Коши. Они представлены в виде зависимостей  $\sigma_\beta(\delta)$  и  $MAD_\beta(\delta)$  для двух значений  $\gamma$  на рис. 4.

Как видно, в случае распределения Коши, оптимальной оценкой для которого является медиана [15, 17], наблюдается похожий результат – чем ближе свойства меридианы оценки к свойствам медианы (чем выше  $\delta$ ), тем меньше СКО меридианной оценки вне зависимости от масштаба выборки. Для обеспечения близкой к наилучшей точности меридианной оценки достаточно выбрать  $\delta$  как  $\delta = (10 \dots 20)MAD_X$ .

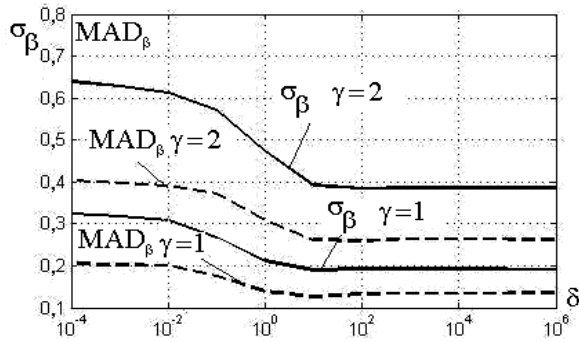


Рис. 4. Зависимости  $\sigma_{\beta}(\delta)$  и  $MAD_{\beta}(\delta)$  для случая обработки случайных величин с ПРВ Коши при  $\gamma=1$  и  $\gamma=2$ ,  $N=64$

Полученные результаты свидетельствуют о нецелесообразности применения меридианы для обработки выборок с законами распределения колоколообразной формы, даже если они имеют тяжелые хвосты. Можно сделать предположение, что эффективность меридианы будет выше при обработке выборок случайных величин с ПРВ, имеющими пикообразные формы максимумов и тяжелыми хвостами. В таких случаях можно надеяться на наличие глобального минимума в зависимостях  $\sigma_{\beta}(\delta)$  и  $MAD_{\beta}(\delta)$ .

### 3.2. Зависимости характеристик меридианной оценки от параметра $\delta$ для негауссовых ПРВ

Рассмотрим теперь результаты моделирования для ПРВ *dgauss*, *tgauss*, *gauss3*. Для случайных величин с ПРВ *dgauss* зависимости  $\sigma_{\beta}(\delta)$  и  $MAD_{\beta}(\delta)$  приведены на рис. 5. Обе кривые имеют минимумы, наблюдаемые, соответственно, при  $\delta \approx 1$  и  $\delta \approx 0,1$ . Эти минимумы выражены очень неявно и, в принципе, можно считать, что в очень широких пределах от  $\delta/\sigma_{Y1} = 0,01$  до  $\delta/\sigma_{Y1} = 10$  значения  $\sigma_{\beta}$  и  $MAD_{\beta}$  практически не зависят от  $\delta$ . Еще одним интересным фактом является то, что отношение  $MAD_{\beta}/\sigma_{\beta} < 0,5$ , то есть заметно меньше, чем аналогичное отношение в случае применения меридианной оценки к данным с гауссовой ПРВ. Это свидетельствует о негауссовости закона распределения меридианных оценок, что было подтверждено и при анализе гистограмм  $\hat{\beta}_j, j=1, \dots, N_{\text{exp}}$ . Аналогичные эффекты наблюдались для меридианной оценки при обработке выборок данных с ПРВ Лапласа [16].

Для выборок с ПРВ *tgauss* графики зависимостей  $\sigma_{\beta}(\delta)$  и  $MAD_{\beta}(\lg \delta)$  даны на рис. 6. Их анализ позволяет сделать следующие выводы. Во-первых, вновь имеют место минимумы как для  $\sigma_{\beta}$ , так и для  $MAD_{\beta}$ , которые наблюдаются соответственно при  $\delta \approx 0,1$  и  $\delta \approx 0,003$ . Эти минимумы выражены более явно, чем для графиков на рис. 5.

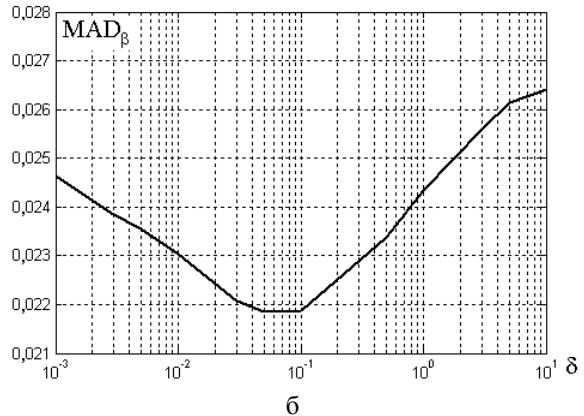
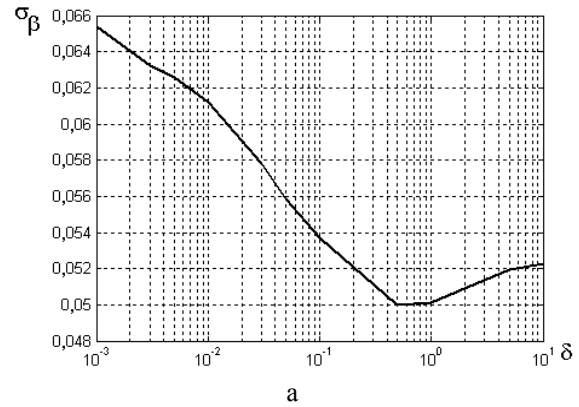


Рис. 5. Зависимости  $\sigma_{\beta}(\delta)$  (а) и  $MAD_{\beta}(\lg \delta)$  (б) для меридианной оценки для выборок с ПРВ *dgauss*,  $N=64$ ,  $\sigma_{X1} = \sigma_{X2} = 1$

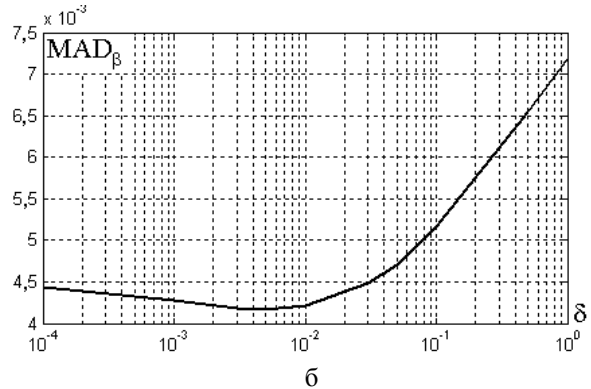
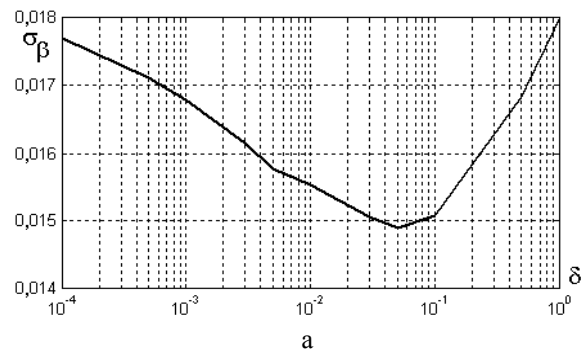


Рис. 6. Зависимости  $\sigma_{\beta}(\delta)$  (а) и  $MAD_{\beta}(\lg \delta)$  (б) меридианной оценки для выборок с ПРВ *tgauss*,  $N=64$ ,  $\sigma_{X1} = \sigma_{X2} = \sigma_{X3} = 1$

Вместе с тем, существует интервал значений  $\delta$ , которые можно рекомендовать для практического использования:  $\delta/\sigma_{Y2} \in [0,001; 0,1]$ . Интересно, что отношение  $MAD_{\beta}/\sigma_{\beta}$  для данного интервала значений  $\delta/\sigma_{Y2}$  становится еще меньше, порядка 0,3, то есть ПРВ меридианных оценок имеет явно негауссов характер.

Наконец, рассмотрим результаты для ПРВ  $f_4(x)$ . Зависимости  $\sigma_{\beta}(\delta)$  и  $MAD_{\beta}(\delta)$ , полученные для данного случая, показаны на рис. 7. Минимум  $\sigma_{\beta}(\delta)$  имеет место при  $\delta \approx 0,0003$ , но выражен неявно. Минимум  $MAD_{\beta}(\delta)$  выражен более явно, наблюдается при  $\delta \approx 0,00001$ , что соответствует модовому режиму работы меридианной оценки. В связи с таким существенным различием координат минимумов кривых  $\sigma_{\beta}(\delta)$  и  $MAD_{\beta}(\delta)$  сложно дать рекомендации по выбору  $\delta/\sigma_{Y3}$ , но очевидно, что это отношение должно быть гораздо меньше, чем в предыдущих рассмотренных случаях, порядка 0,00005. При выполнении данной рекомендации отношение  $MAD_{\beta}/\sigma_{\beta}$  оказывается меньше 0,02, то есть меридианные оценки характеризуются явно негауссовой ПРВ.

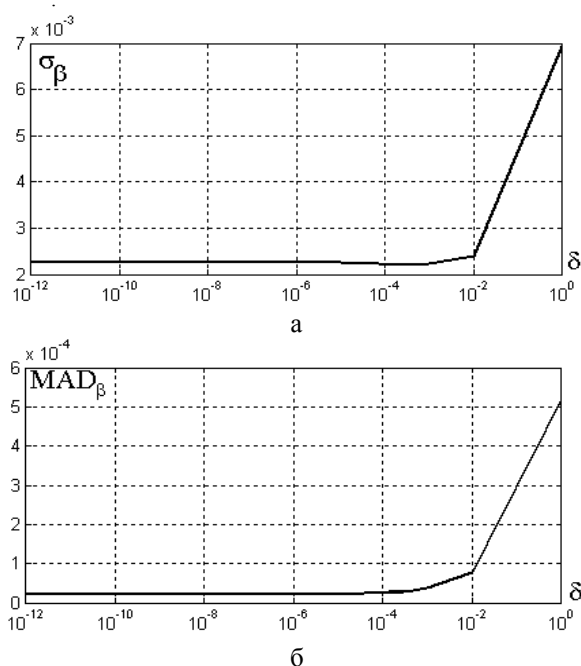


Рис. 7. Зависимости  $\sigma_{\beta}(\delta)$  (а) и  $MAD_{\beta}(\lg \delta)$  (б) для меридианной оценки параметра сдвига для выборок с ПРВ *gauss3*,  $N=64$ ,  $\sigma_{X1} = 1$

**3.3. Зависимость характеристик меридианной оценки от размера выборки**

Для большинства широко используемых распределений (гауссова, Рэлея, равномерного) и оце-

нок принято считать, что точность оценки сдвига, характеризуемая СКО, пропорциональна  $1/\sqrt{N}$  [5]. Для рассматриваемых негауссовых ПРВ с тяжелыми хвостами наблюдается несколько иная картина. В табл. 1 приведены результаты для выборок с ПРВ *dgauss*, *tgauss* и *gauss3* для трех размеров выборок данных: ( $N$  равных 32, 64 и 256). Результаты приведены для квазиоптимальных значений  $\delta_{qopt}$ , которые принадлежат интервалам квазипостоянства  $\sigma_{\beta}$  и  $MAD_{\beta}$

Таблица 1

Точностные характеристики меридианной оценки для разных размеров выборок  $N$

ПРВ	$N$	$\delta_{qopt}$	$\sigma_{\beta}$	$MAD_{\beta}$
<i>dgauss</i>	32	0,5	0,084	0,038
	64	0,3	0,050	0,023
	256	0,03	0,018	0,0074
<i>tgauss</i>	32	0,05	0,032	0,0080
	64	0,03	0,016	0,0044
	256	0,001	0,0036	0,0011
<i>gauss3</i>	32	$0,5 \cdot 10^{-4}$	0,012	$0,17 \cdot 10^{-3}$
	64	$0,3 \cdot 10^{-4}$	0,0015	$0,34 \cdot 10^{-4}$
	256	$10^{-8}$	$0,33 \cdot 10^{-4}$	$0,38 \cdot 10^{-6}$

Видно, что с ростом  $N$  значения  $\sigma_{\beta}$  и, особенно,  $MAD_{\beta}$  убывают гораздо быстрее, чем  $1/\sqrt{N}$ . Особенно быстрое уменьшение  $\sigma_{\beta}(\delta_{qopt})$  и  $MAD_{\beta}(\delta_{qopt})$  наблюдается при обработке выборок с ПРВ *gauss3*, которое среди рассматриваемых негауссовых распределений обладает наибольшей тяжестью хвостов.

Важно также то, что значения  $\delta_{qopt}$  с ростом  $N$  также уменьшаются, чего практически не наблюдалось для меридианной оценки [20]. Это свидетельствует о сложности выработки практических рекомендаций или разработки адаптивного алгоритма для определения  $\delta_{qopt}$  при ограниченных априорных сведениях о законе распределения.

**3.4. Зависимость дисперсии меридианной оценки параметра сдвига от масштаба данных**

Очевидно, что точность меридианной оценки, характеризуемая  $\sigma_{\beta}$ , должна также зависеть от масштаба данных. Для анализа такой зависимости были проведены исследования для всех анализируемых законов распределения. Результаты численного моделирования представлены в табл. 2 для выборок с ПРВ *dgauss*,  $N=64$  (для остальных ПРВ и  $N$  основные тенденции и выводы аналогичны).

Как следует из приведенных результатов, как  $\delta_{\text{qopt}}$ , так и  $\sigma_{\beta}$  прямо пропорциональны  $\sigma_{Y1}$ . Таким образом, при выборе  $\delta_{\text{qopt}}$  меридианной оценки необходимо учитывать масштаб данных. Аналогичные рекомендации справедливы и для мириадной оценки [20].

Таблица 2

Точностные характеристики меридианной оценки в зависимости от масштаба данных

$\sigma_{X1} = \sigma_{X2}$	$\sigma_{Y1}$	$\delta_{\text{qopt}}$	$\sigma_{\beta}$
1	1	1	0,054
10	100	100	5,07
0,1	0,01	0,01	$0,52 \cdot 10^{-3}$
20	400	400	20,24

Проведем сравнение точностных характеристик меридианной оценки с  $\delta_{\text{qopt}}$  (см. табл. 1) с оценками среднего и медианой выборки. Две последние оценки будем характеризовать СКО  $\sigma_{\text{mean}}$  и  $\sigma_{\text{med}}$  соответственно.

Согласно результатам моделирования, применение меридианы целесообразно для выборок данных с ПРВ *tgauss* и *gauss3*, то есть в тех случаях, когда воздействующие помехи обладают большой тяжестью хвостов. Кроме того, целесообразным также является применение меридианной оценки для обработки выборок большого размера.

Таблица 3

Сравнительный анализ точностных характеристик меридианной оценки, среднего и медианы выборок

ПРВ	N	$\sigma_{\text{mean}}$	$\sigma_{\beta}$	$\sigma_{\text{med}}$
<i>dgauss</i>	32	0,177	0,084	0,083
	64	0,130	0,050	0,055
	256	0,062	0,018	0,021
<i>tgauss</i>	32	0,173	0,032	0,042
	64	0,122	0,016	0,023
	256	0,063	0,0036	0,0070
<i>gauss3</i>	32	0,71	0,012	0,045
	64	0,46	0,0015	0,015
	256	0,24	$0,33 \cdot 10^{-4}$	0,0018

Согласно полученным результатам, выигрыш меридианы для ПРВ *dgauss* по сравнению с медианной оценкой невелик. Однако он становится существенным для выборок с ПРВ *tgauss* и, особенно, *gauss3* (в последнем случае  $\sigma_{\beta}$  и  $\sigma_{\text{med}}$  отличаются более чем на порядок). Отметим, что для ПРВ *dgauss*, *tgauss* и *gauss3* меридианная оценка параметра сдвига обеспечивает более высокую точность, чем мириадная оценка с оптимально выбранным  $k$  [22].

## Заключение

Проведенные исследования показали, что существуют негауссовы распределения, для которых меридианная оценка с  $\delta_{\text{qopt}}$  способна обеспечивать более точные оценки параметра сдвига, чем одни из наиболее устойчивых оценок – медиана и мириада выборки. Все три ПРВ, для которых меридианная оценка оказалась эффективной, характеризуются пикообразной формой максимума, что связано с видом функции (2). Чем больше тяжесть хвостов негауссовой ПРВ и больше размер выборки данных, тем меньшим следует выбирать  $\delta_{\text{qopt}}$ . В будущем планируется разработать адаптивный алгоритм выбора (определения) настроечного параметра  $\delta$  меридианной оценки.

## Литература

1. Жданюк Б.Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений / Б.Ф. Жданюк. – М.: Сов. радио, 1978. – 384 с.
2. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга 2 / Б.Р. Левин. – М.: Сов. радио, 1975. – 392 с.
3. Spaulding A. Optimum reception in an impulsive interference environment. Part I: Coherent Detection / A. Spaulding, D. Middleton // IEEE Trans. Commun. – 1977. – Vol. 25, No 9. – P. 910-923.
4. Ольшевский В.В. Статистические методы в гидролокации / В.В. Ольшевский. – Л.: Судостроение, 1983. – 280 с.
5. Хьюбер Дж.П. Робастность в статистике / Дж. П. Хьюбер: пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 304 с.
6. Хуанг Т.С. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений / Т.С. Хуанг, Дж.О. Эклунд, Г.Дж. Нуссбаумер. – М.: Радио и связь, 1984. – 224 с.
7. Корнильев Э. Устойчивые алгоритмы в автоматизированных системах обработки информации / Э. Корнильев, И. Прокопенко, В. Чуприн. – К.: Техника, 1989. – 224 с.
8. Astola J. Fundamentals of nonlinear digital filtering / J. Astola, P. Kuosmanen. – Boca Raton (USA): CRC Press LLC, 1997. – 276 p.
9. Шелухин О.И. Негауссовские процессы в радиотехнике. / О.И. Шелухин. – М.: Радио и связь, 1999. – 287 с.
10. Taguchi A. Adaptive  $\alpha$ -Trimmed Mean Filter with Excellent-Detail Preserving / A. Taguchi // Proceedings of ICASSP, September 1994. – 1994. – P. 61-64.
11. Kalluri S. Adaptive Weighted Myriad Filter Algorithms for Robust Signal Processing in  $\alpha$ -stable Noise Environments / S. Kalluri, G. Arce // IEEE Trans. on Signal Processing. – 1998. – Vol. 46, No. 2. – P. 322-334.
12. Roenko A. Adaptation of Sample Myriad Tunable Parameter to Characteristics of SaS Distribution /

A. Roenko, V. Lukin, I. Djurovic, S. Abramov // *Proceedings of the Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET), June 2008. – Odessa, Ukraine, 2008. – P. 418-420.*

13. Lim Heng Siong. *On the Optimal Alpha-k Curve of the Sample Myriad / Heng Siong Lim, Chuah Teong Chee, Chuah Hean Teik // IEEE Signal Processing Letters. – 2007. – Vol. 14, No. 8. – P. 545-548.*

14. Aysal T.C. *Meridian Filtering for Robust Signal Processing / T.C. Aysal, K.E. Barner // IEEE Transactions on Signal Processing – 2007. – Vol. 55, No. 8. – P. 3949-3962.*

15. Lukin V. *Myriad based shift parameter estimation method and its application to image filtering and processing / V. Lukin, S. Abramov, A. Zelensky, J. Astola // Proceedings of SPIE Conference “Mathematical Methods in Pattern and Image Analysis”, July-August 2005. – San Diego, USA, 2005. – Vol. 5916. – P. 1-12.*

16. Suoranta R. *Amplitude domain approach to digital filtering. Theory and applications: Thesis ... degree of Doctor of Technology / Risto Suoranta. – Tampere, Finland, 1995. – 199 p.*

17. Абрамов С.К. *Алгоритм реализации мирядной фильтрации / С.К. Абрамов // Авиационно-космическая техника и технология. – 2000. – № 21. – С. 143-147.*

18. Роенко А.А. *Применение робастных оценок при восстановлении формы сигнала на основе биспектральной обработки / А.А. Роенко, В.В. Лукин, А.В. Тоцкий // Радиоелектронні і комп'ютерні системи. – 2004. – № 4 (8). – С. 5-13.*

19. Katkovnik V. *Robust M-estimates of the frequency and amplitude of a complex-valued harmonic / V. Katkovnik // Signal Processing. – 1999. – Vol. 77. – P. 71-84.*

20. Роенко А.А. *Мирядная оценка параметра сдвига и особенности ее применения для процессов с CaC распределением / А.А. Роенко, В.В. Лукин, С.К. Абрамов // Системи управління, навігації та зв'язку. – К.: ЦНДІ навігації і управління, 2008. – Вип. 4 (8). – С. 178-185.*

21. Aysal T.C. *Second-Order Heavy-Tailed Distributions and Tail Analysis / T.C. Aysal, K.E. Barner // IEEE Trans. on Signal Proc. – 2006. – Vol. 54, No. 7. – P. 2827-2832.*

22. Роенко А.А. *Определение параметра сдвига выборки данных с симметричным негауссовым распределением на основе использования методов адаптивного робастного оценивания / А.А. Роенко, В.В. Лукин, А.А. Зеленский // Радиоелектронні і комп'ютерні системи. – 2005. – № 2 (10). – С. 78-87.*

Поступила в редакцію 29.04.2009

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф., проф. кафедри 501 В.К. Волосюк, Национальний аерокосмічний університет ім. Н.Е. Жуковського "ХАИ", г. Харків.

#### ДОСЛІДЖЕННЯ СТАТИСТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕРИДІАННОЇ ОЦІНКИ ВИБІРОК ДАНИХ З НЕГАУСОВИМИ ЩІЛЬНОСТЯМИ РОЗПОДІЛЕННЯ ЙМОВІРНІСТІ

*Д.О. Куркін, О.О. Роенко, В.В. Лукін*

Проаналізовані статистичні характеристики нещодавно запропонованої меридіанної оцінки параметра зсуву для симетричних розподілень за важкими хвостами. Показано, що дисперсія оцінки залежить від настроювального параметру, масштабу даних, ступеню важкості хвостів та гострості піку щільності розподілення ймовірності (ЩРІ). Виграш у точності оцінювання у порівнянні з медіаною та іншими стійкими оцінками спостерігається для ЩРІ з недзвоноподібними (гострими) піками. Для низки таких розподілень визначені оптимальні значення настроювального параметру.

**Ключові слова:** негаусові симетричні розподілення, меридіанна оцінка, статистичні характеристики.

#### INVESTIGATION OF STATISTICAL CHARACTERISTICS OF MERIDIAN ESTIMATOR FOR DATA SAMPLES WITH NON-GAUSSIAN PROBABILITY DENSITY

*D.A. Kurkin, A.A. Roenko, V.V. Lukin*

The statistical characteristics of recently introduced meridian estimator of location parameter are analyzed for symmetrical distributions with heavy tails. It is shown that the estimator variance depends upon tuning parameter value, data scale, tail heaviness and sharpness of PDF peaks. The benefit in estimation accuracy comparing to the median and other robust estimators is observed for PDFs with non-bell shaped (sharp) peaks. For a number of such distributions the optimal values of tuning parameter are defined.

**Key words:** non-Gaussian symmetrical distributions, meridian estimator, statistical characteristics.

**Куркін Дмитрій Александрович** – студент каф. 504 Национального аерокосмічного університета ім. Н.Е. Жуковського «ХАИ», Харків, Україна, e-mail: daemonius@ukr.net.

**Роенко Алексєй Александрович** – асистент каф. 504, Национальний аерокосмічний університет ім. Н.Е. Жуковського «ХАИ», e-mail: goenkomail@mail.ru.

**Лукін Владмир Васильєвич** – д-р техн. наук, професор каф. 504, Национальний аерокосмічний університет ім. Н.Е. Жуковського «ХАИ», Харків, Україна, e-mail: lukin@xai.kharkov.ua.