УДК 629.7.062

АЛЬ ДАХЕРИ АЛИ МОХАМЕД, В.М. ВАРТАНЯН

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

ОБЕСПЕЧЕНИЕ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НА ЭТАПЕ ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОНФИГУРАЦИИ БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Рассматриваются варианты выбора компоновки беспилотного летательного аппарата, обеспечивающие статическую устойчивость в различных режимах полета с учетом изменения отдельных аэродинамических характеристик в ходе выполнения летного задания. Методологическая основа исследования сложных систем в работе – теория управления. Математический аппарат исследования включает анализ характеристического полинома, учитывающего различные режимы за счет интервальности его коэффициентов, полученных путем линеаризации системы нелинейных дифференциальных уравнений динамики беспилотного летательного аппарата.

Ключевые слова: *беспилотный летательный аппарат, летные исследования, математическое моделирование режимов полета, робастная устойчивость.*

Введение

При моделировании систем управления учет неопределенности всегда являлся одной из основных задач. Одна из первых моделей неопределенности была предложена в работах А.П. Лурье, М.А. Айзермана, Ф.Р. Гантмахера. Модели параметрической неопределенности в линейных системах появились позднее. Их систематическое изучение начал И. Горовиц. Важное направление в анализе неопределенности связано с моделью неизвестных, но ограниченных возмущений. Большой вклад в это направление внесли А.Б. Куржанский и Ф. Л. Черноусько.

Задачу об устойчивости интервального семейства полиномов впервые подробно рассмотрел S. Faedo. Однако он получил только достаточные условия робастной устойчивости, основанные на интервальном аналоге алгоритма Рауса. Более ранний результат по робастной устойчивости получили Л. Заде и Ч. Дезоер. Затем В.Л. Харитонов доказал критерий устойчивости интервального семейства полиномов, что являлось большим продвижением в этой области. Далее в этом направлении, в качестве наиболее известных результатов можно отметить графический критерий робастной устойчивости полиномов, доказанный в 1990 г. (Б.Т. Поляк, Я.З. Цыпкин).

Основными задачами робастной устойчивости, с одной стороны, являлось определение границ устойчивости в пространстве параметров системы (И.А. Вышнеградский), а с другой - получение оценок области асимптотической устойчивости расчетных режимов исходных систем.

Исследование устойчивости систем управления при наличии неопределенности в пространстве параметров является весьма важным и актуальным направлением научных исследований, т.к. позволяет на этапе проектирования определить, является ли устойчивым весь класс рассматриваемых систем. Это позволяет обеспечить безопасное функционирование управляемого объекта, несмотря на то, что в процессе изготовления и эксплуатации его параметры хотя и могут отличаться от расчетных, но гарантировано будут отвечать устойчивому поведению этого объекта, т.к. они принадлежат области робастной устойчивости.

Постановка задачи

При принятии решений по управлению процессами часто возникает необходимость обеспечения попадания некоторых итоговых характеристик в заданный коридор с учетом возможных отклонений исходных параметров от заданных номинальных значений .

Классическая задача непосредственной проверки соответствия обычно недостаточна для анализа полиномиальных моделей, содержащих неопределенности. Диаграммы Вышеградского, а позже подход, предложенный в работах Ю.И. Неймарка, привели к построению D-разбиения пространства параметров – выделению областей, отвечающих заданным требованиям [1]. Однако возможности подобного подхода ограничены двумерными сечениями пространства параметров. С другой стороны, возникла современная теория робастной устойчивости ,базирующаяся на теореме Харитонова [2]. Она исходит из представления о заданной области в пространстве параметров; задача заключается в проверке на соответствие всех моделей, соответствующим этим значениям параметров. Для простых областей (например, параллелепипеда или шара) существуют легко проверяемые критерии робастной устойчивости. Так, если параметры – коэффициенты полинома, а область - параллелепипед, то достаточно проверить гурвицевость четырех полиномов [2].

Учет возможности изменения первичных параметров под воздействием различных факторов при условии допустимости использования для анализа и синтеза полиномиальных моделей приводит к необходимости решения следующих задач:

1. Выбор значений параметров, обеспечивающих устойчивость в наиболее широком диапазоне изменения независимых параметров.

2. Определение максимальных значений допусков на независимые параметры управляемого процесса (интервалов изменения параметров), при произвольных значениях которых система сохраняла бы устойчивость.

Такие процессы в определенном смысле являются оптимальными по запасам устойчивости или робастными и могут быть классифицированы в зависимости от вида критерия оптимальности, использованного при синтезе на:

– оптимальные по запасу устойчивости,

– оптимальные по запасам на абсолютные изменения переменных параметров,

– оптимальные по запасам на относительные изменения переменных параметров.

Выбор критерия связан с причинами и характером изменения первичных параметров системы, что в свою очередь приводит к детерминированной или стохастической постановкам задач.

В первом случае предполагается, что рассматриваемые параметры могут быть любыми из диапазона их изменения, но фиксированными.

Во втором случае допускается, что при рассмотрении задачи обеспечения устойчивости исследуемые параметры могут одновременно принимать любые значения из некоторого диапазона и, в связи с этим, рассматриваются как интервальные числа.

Решение этих задач связано с получением областей устойчивости как всей совокупности возможных решений. Независимость изменений параметров друг от друга достигается аппроксимацией области устойчивости в m-мерном пространстве гиперпараллелепипедом, грани которого параллельны ортогональным сечениям пространственной области.

Существующие подходы к решению задачи для фиксированных параметров предполагают использование нелинейного программирования, а для интервальных параметров - теоремы Харитонова [4, 5]. И в том и другом случае существенные трудности решения связаны со сложным характером зависимости между рассматриваемыми параметрами, что ограничивает возможности этих методов как в отношении числа рассматриваемых параметров, так и размерности задачи. Использование символьных уравнений границ области устойчивости позволяет получить новые эффективные решения поставленных задач.

В качестве методологической основы исследования сложных систем в работе используется классическая теория управления, которая включает в себя достаточно большое число методов анализа и синтеза различного класса. В современном состоянии она содержит ряд общих принципов, справедливых для любых управляемых систем и процессов.

Вопрос о возможности и целесообразности применения того или иного метода решается отдельно в каждом конкретном случае. В последнее время теория управления достигла уровня, когда вычислительные средства являются совершенно необходимым инструментом для исследования сложных систем.

Использование вычислительной техники дает возможность существенно расширить возможности и область применения существующих методов анализа и синтеза систем управления. Использование ЭВМ для выполнения символьных преобразований может существенно упростить проведение анализа и синтеза по линейным математическим моделям.

Выяснение зависимости устойчивости процессов от параметров линейной стационарной математической модели производится в два этапа. Первый заключается в получении условий устойчивости в аналитическом виде. Второй состоит в том, что на базе аналитического решения задач линейной алгебры выполняется символьно-численный расчет для разбиения пространства параметров линейной модели на области допустимого изменения первичных параметров.

Метод решения

В качестве математической модели динамики полета БЛА (беспилотного летательного аппарата) используется математическая модель движения, представленная в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений, наиболее полно описывающая его динамику при углах тангажа $\vartheta \neq 90°$ [3].

Записанная для подвижной системы координат, связанной с БЛА, система нелинейных дифференциальных уравнений имеет следующий вид

$$m(\frac{dV_x}{dt}+\omega_x V_z-\omega_x V_y)=P\cos\varphi_{\partial в.}-X-mg\sin\vartheta;$$

$$m(\frac{dV_z}{dt}+\omega_z V_x-\omega_x V_z)=P\sin\varphi_{\partial в.}+Y-mg\cos\vartheta\cos\gamma;$$

$$m(\frac{dV_z}{dt}+\omega_x V_y-\omega_y V_x)=Z=mg\cos\vartheta\sin\gamma;$$

$$I_x\frac{d\omega_x}{dt}-I_{xy}\frac{d\omega_y}{dt}+(I_z-I_y)\omega_x\omega_y+I_{xy}\omega_x\omega_z=M_x;$$

$$I_y\frac{d\omega_y}{dt}-I_{xy}\frac{d\omega_x}{dt}+(I_x-I_z)\omega_x\omega_z+I_{xy}\omega_y\omega_z=M_y;$$

$$I_z\frac{d\omega_z}{dt}+\left(I_y-I_x\right)\omega_y\omega_x+I_{xy}\left(\omega_y^2-\omega_x^2\right)=M_z;$$

$$\frac{d\gamma}{dt}=\omega_x-\left(\omega_y\cos\gamma-\omega_z\sin\gamma\right)\mathrm{tg}\vartheta; \qquad (1)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt}=\omega_z\cos\gamma+\omega_y\sin\gamma;$$

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{1}{\cos\vartheta}\left(\omega_y\cos\gamma-\omega_z\sin\gamma\right);$$

$$\frac{dX_g}{dt}=V_x\cos\vartheta\cos\psi-V_y\cdot(\cos\gamma\sin\vartheta\cos\psi-$$
$$-\sin\gamma\sin\psi)+V_z\left(\cos\gamma\sin\psi+\sin\gamma\sin\vartheta\cos\psi\right);$$

$$\frac{dH}{dt}=V_x\sin\vartheta+V_y\cos\gamma\cos\vartheta-V_z\sin\gamma\cos\vartheta;$$

$$\frac{dZ_g}{dt}=-V_x\cos\vartheta\sin\psi+V_y(\cos\gamma\sin\vartheta\sin\psi+$$
$$+\sin\gamma\cos\psi)+V_z\left(\cos\gamma\cos\psi-\sin\gamma\sin\vartheta\sin\psi\right).$$

Поскольку аэродинамические силы и моменты зависят от скорости полета, углов атаки и скольжения, то к системе уравнений следует добавить соотношения:

$$V=\sqrt{V_x^2+V_y^2+V_z^2};$$

$$\beta=\arcsin\frac{V_z}{V}; \qquad (2)$$

$$\alpha=\mathrm{arctg}\left(-\frac{V_y}{V_x}\right).$$

Входящие в правые части системы дифференциальных уравнений коэффициенты аэродинамических сил и моментов в общем случае являются сложными функциями конфигурации летательного аппарата (компоновки, положения средств механизации и рулевых органов) и условий полета:

$$m_i=f\left(\alpha,\beta,\dot{\alpha},\dot{\beta},\omega_x,\omega_y,\omega_z,\delta_{п.м.},\delta_{д.м.},...,M,Re\right), \qquad (3)$$

где $M=\frac{V}{a}$ – число Маха;

a - скорость звука на высоте полета;

$Re=\frac{Vb_a}{\nu}$ - число Рейнольдса;

ν - кинетический коэффициент вязкости воздуха.

Выражения для правых частей системы дифференциальных уравнений (1) определялись следующими зависимостями, полученными на основании стандартных методик расчета и испытаний модели БЛА на автостенде:

$$X=\begin{pmatrix}0{,}04+0{,}00011\cdot\alpha+0{,}00042\cdot\alpha^2+\\+0{,}000015\cdot\phi_в\end{pmatrix}\cdot q\cdot S;$$

$$Y=\left(0{,}34+0{,}0513\cdot\alpha+0{,}015\cdot\phi_в\right)\cdot q\cdot S;$$

$$Z=\left(-0{,}0118\cdot\beta\right)\cdot q\cdot S;$$

$$M_x=\begin{pmatrix}-0{,}014\cdot\beta-0{,}00344\cdot\phi_э-0{,}001\cdot\phi_н-\\-0{,}6608\cdot\overline{\omega}_x+0{,}0529\cdot\overline{\omega}_y\end{pmatrix}\cdot q\cdot S\cdot L;$$

$$M_y=\begin{pmatrix}-0{,}0048\cdot\beta-0{,}003\cdot\phi_н+0{,}0639\cdot\overline{\omega}_x-\\-0{,}0484\cdot\overline{\omega}_y\end{pmatrix}\cdot q\cdot S\cdot L;$$

$$M_z=\begin{pmatrix}-0{,}0015-0{,}000422\cdot\alpha+0{,}0007\cdot\phi_в-\\-4{,}507\cdot\overline{\omega}_z\end{pmatrix}\cdot q\cdot S\cdot b_a,$$

где $\overline{\omega}_x=\frac{\omega_x\cdot L}{2\cdot V},\overline{\omega}_y=\frac{\omega_y\cdot L}{2\cdot V},\overline{\omega}_z=\frac{\omega_z\cdot b_a}{V}$.

Анализ устойчивости, проводимый для различных режимов полета, приводит к рассмотрению большого комплекса линеаризованных моделей вида $x'=Ax+bu$, отличающийся значениями элементов матрицы A, имеющими достаточно сложную связь с конструктивными параметрами БЛА.

Если учесть, что переход с одного режима на другой так же связан с изменением значений элементов матрицы A, то приходим к необходимости анализа устойчивости БЛА по еще большему множеству линеаризованных моделей. Решением этой проблемы может являться рассмотрение элементов матрицы заданных в виде интервалов.

Рассмотрим задачу стабилизации объекта в условиях неопределенности параметров, используя его интервальное представление.

Постановку задачи сформулируем следующим образом. Для интервальной управляемой системы $x'=([A]x+[B]K)x$, где x – вектор состояния, требуется найти:

– интервалы изменения первичных параметров для асимптотически устойчивого интервального полинома.

– диапазоны $\underline{a}_i<a_i<\overline{a}_i$ $(i=\overline{1,n})$ коэффициентов характеристического полинома эквивалентной дискретной системы для интервальной матрицы непрерывной системы, гарантирующие системе устойчивость.

Назовем m-мерным робастным разбиением те области в пространстве m параметров изменяемой части системы, для которых сохраняется заданное число корней полинома в левой полуплоскости (внутри круга единичного радиуса) при любых значениях остальных параметров из некоторой заданной области R.

Обозначим:

– $[a]=[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}],[a_{ij}]=[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]$ - интервальное число и элемент интервальной матрицы [A];

– $B \in [A]$ – числовая матрица B принадлежит интервальной матрице [A];

– $[b] \subseteq [a]$ – интервал [b] содержится в интервале [a];

– $\omega[a]=\overline{a}-\underline{a}, m[a]=(\underline{a}+\overline{a})/2$ - длина и центр интервала [a].

Рассмотрим объект управления с динамикой, описываемой системой линейных дифференциальных уравнений

$$x' = Ax + bu, \tag{4}$$

где u – вектор входов.

$A=|a_{ij}|, B=|b_{ik}|-(n\times n),(n\times r)$ – матрицы, элементы которых неизвестны и могут быть любыми числами из интервалов

$$a_{ij}\in[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]; b_{ik}\in[\underline{b}_{ik},\overline{b}_{ik}]; i,j=\overline{1,n}; k=\overline{1,r}. \tag{5}$$

Один из способов описания объекта с неопределенными параметрами – его символическая запись в виде линейной системы

$$x' = [A]x + [B]u \tag{6}$$

с интервальными матрицами [A] и [B]. Элементы матриц [A] и [B] - интервальные числа, удовлетворяющие условиям (5).

Будем пользоваться следующими определениями. Интервальной динамической системой называется множество линейных стационарных систем

$$\{x' = Ax + bu, A \in [A], B \in [B]\}. \tag{7}$$

Интервальная динамическая система устойчива, если устойчивой является каждая система из множества (4).

Интервальный полином

$$D(\lambda)=\lambda^n+\sum_{i=1}^{n}[\underline{a}_{n-i},\overline{a}_{n-i}]\lambda^{n-i}, \quad \underline{a}_i<a_i<\overline{a}_i (i=\overline{1,n}), \tag{8}$$

называется асимптотически устойчивым, если любой многочлен с числовыми коэффициентами $\underline{a}_i<a_i<\overline{a}_i (i=\overline{1,n})$ асимптотически устойчив.

Одной из наиболее часто используемых математических моделей является характеристический многочлен, который называется гурвицевым, если его корни принадлежат левой полуплоскости комплексной переменной s для непрерывных систем и кругу единичного радиуса комплексной переменной z для дискретных систем. Гурвицев многочлен наделен свойством асимптотической устойчивости, которое является грубым.

Количественный анализ грубости свойства асимптотической устойчивости гурвицева многочлена

$$d(\lambda)=\lambda^n+\sum_{i=1}^{n}a_{n-i}\lambda^{n-i}, a_i\in R^n \tag{9}$$

связан с конструированием интервального полинома

$$D(\lambda)=\lambda^n+\sum_{i=1}^{n}[\underline{a}_{n-i},\overline{a}_{n-i}]\lambda^{n-i} \tag{10}$$

или полинома с коэффициентами, удовлетворяющими неравенству

$$\underline{a}_i<a_i<\overline{a}_i (i=\overline{1,n}),$$

где $\underline{a}_i,\overline{a}_i$ обозначают соответственно нижнюю и верхнюю границы возможных вариаций коэффициента a_i.

Интервальный полином есть решение задачи определения вариаций коэффициентов характеристического многочлена, при которых он остается гурвицевым.

Необходимые и достаточные условия гурвицевости интервального полинома сформулированы В.Л. Харитоновым в виде гурвицевости следующих четырех полиномов:

$$\begin{aligned} d_1(\lambda)&=\overline{a}_0+\overline{a}_1\lambda+\underline{a}_2\lambda^2+\underline{a}_3\lambda^3+\overline{a}_4\lambda^4+...;\\ d_2(\lambda)&=\overline{a}_0+\underline{a}_1\lambda+\underline{a}_2\lambda^2+\overline{a}_3\lambda^3+\overline{a}_4\lambda^4+...;\\ d_3(\lambda)&=\underline{a}_0+\underline{a}_1\lambda+\overline{a}_2\lambda^2+\overline{a}_3\lambda^3+\underline{a}_4\lambda^4+...;\\ d_4(\lambda)&=\underline{a}_0+\overline{a}_1\lambda+\overline{a}_2\lambda^2+\underline{a}_3\lambda^3+\underline{a}_4\lambda^4+...; \end{aligned} \tag{11}$$

Нахождение значений интервальных коэффициентов неоднозначно и затруднено тем, что на самом деле они взаимозависимы, связанны между собой.

Определим выполнение условий робастной устойчивости для заданных интервалов изменения элементов исходных матриц с учетом того, что

$$a_i = \alpha_i k_1 + \beta_i k_2 + ... + \gamma_i, \tag{12}$$

$$\begin{aligned}&[\underline{a}_i,\overline{a}_i]=\\ &=[\underline{\alpha_i k_1+\beta_i k_2+...+\gamma_i},\overline{\alpha_i k_1+\beta_i k_2+...+\gamma_i}]=\\ &=[\underline{\alpha}_i k_1+\underline{\beta}_i k_2+...+\underline{\gamma}_i,\overline{\alpha}_i k_1+\overline{\beta}_i k_2+...+\overline{\gamma}_i].\end{aligned} \tag{13}$$

Для оценки меры робастной устойчивости зафиксируем все параметры k_i, кроме одного, например, для определенности k_1. При этом $k_i = k_{iн}$, $i \neq 1$.

С использованием алгебраических критериев устойчивости установим пределы изменения параметра k_1, $[k_{1н} - \Delta_н, k_{1н} + \Delta_в]$, для которых сохраняется устойчивость семейства интервальных полиномов. Тогда оценочные значения пределов изменения коэффициентов характеристического полинома находятся из следующих соотношений:

$$\overline{a}_i = \overline{\alpha}_i \overline{k}_1 + \beta_i k_{2H} + \ldots + \gamma_i, \underline{a}_i = \\ = \underline{\alpha}_i \underline{k}_1 + \beta_i k_{2H} + \ldots + \gamma_i. \qquad (14)$$

С учетом (6) перепишем (4) в таком виде:

$$d_1(\lambda) = \overline{\alpha_0 k_1} + \beta_0 k_{2i} + \ldots + \gamma_0 + \overline{\alpha_1 k_1} + \beta_1 k_{2i} + \\ + \ldots + \gamma_1 + \underline{\alpha_2 k_1}\lambda^2 + \beta_2 k_{2i}\lambda^2 + \ldots + \gamma_2\lambda^2 + \\ + \underline{\alpha_3 k_1}\lambda^3 + \beta_3 k_{2i}\lambda^3 + \ldots + \gamma_3\lambda^3 + \overline{\alpha_4 k_1}\lambda^4 + \\ + \beta_4 k_{2i}\lambda^4 + \ldots + \gamma_4\lambda^4 + \ldots;$$

$$d_2(\lambda) = \overline{\alpha_0 k_1} + \beta_0 k_{2i} + \ldots + \gamma_0 + \underline{\alpha_1 k_1}\lambda + \\ + \beta_1 k_{2i} + \ldots + \gamma_1 + \underline{\alpha_2 k_1}\lambda^2 + \beta_2 k_{2i}\lambda^2 + \ldots + \\ + \gamma_2\lambda^2 + \overline{\alpha_3 k_1}\lambda^3 + \beta_3 k_{2i}\lambda^3 + \ldots + \gamma_3\lambda^3 + \\ + \overline{\alpha_4 k_1}\lambda^4 + \beta_4 k_{2i}\lambda^4 + \ldots + \gamma_4\lambda^4 + \ldots;$$

$$d_3(\lambda) = \underline{\alpha_0 k_1} + \beta_0 k_{2i} + \ldots + \gamma_0 + \underline{\alpha_1 k_1}\lambda + \\ \beta_1 k_{2i}\lambda + \ldots + \gamma_1\lambda + \overline{\alpha_2 k_1}\lambda^2 + \beta_2 k_{2i}\lambda^2 + \ldots + \\ + \gamma_2\lambda^2 + \overline{\alpha_3 k_1}\lambda^3 + \beta_3 k_{2i}\lambda^3 + \ldots + \gamma_3\lambda^3 + \\ + \underline{\alpha_4 k_1}\lambda^4 + \beta_4 k_{2i}\lambda^4 + \ldots + \gamma_4\lambda^4 + \ldots; \qquad (15)$$

$$d_4(\lambda) = \underline{\alpha_0 k_1} + \beta_0 k_{2i} + \ldots + \gamma_0 + \overline{\alpha_1 k_1}\lambda + \\ + \beta_1 k_{2i}\lambda + \ldots + \gamma_1\lambda + \overline{\alpha_2 k_1}\lambda^2 + \beta_2 k_{2i}\lambda^2 + \ldots + \\ + \gamma_2\lambda^2 + \underline{\alpha_3 k_1}\lambda^3 + \beta_3 k_{2i}\lambda^3 + \ldots + \gamma_3\lambda^3 + \\ + \underline{\alpha_4 k_1}\lambda^4 + \beta_4 k_{2i}\lambda^4 + \ldots + \gamma_4\lambda^4 + \ldots.$$

Общая часть областей устойчивости, полученная по всем четырем полиномам, и составит границы изменения параметра k_1, используемые для оценки интервалов изменения коэффициентов характеристического полинома при сохранении их гурвицевости. Результатом расчетов является область в плоскости параметров $\Delta_н$ и $\Delta_в$, представляющих собой нижнее и верхнее значения интервала изменения k_i, внутри которого система сохраняет свойство устойчивости. Сама граница есть совокупность координат вершин касания, вписанного в *n*–мерную область коэффициентов характеристического полинома *n*–мерных параллелепипедов.

Неоднозначность решения может быть снята путем задания соотношения на параметры $\Delta_н$ и $\Delta_в$, или требованием обеспечения экстремума некоторой функции от этих параметров, например: $\max(\Delta_н \times \Delta_в)$, $\max(\Delta_н + \Delta_в)$.

В случае нелинейного вхождения параметров k_i в коэффициенты характеристического полинома, когда $a_i = \sum \alpha_i \Pi k_j^l$, $l = 0, 1, 2, 3 \ldots$,

$$\underline{a_i} = \min\{a_i(k_1, k_{2н}, \ldots);\ k_{1\min} < k_1 < k_{1\max};\\ \overline{a_i} = \max\{a_i(k_1, k_{2н}, \ldots);\ k_{1\min} < k_1 < k_{1\max}. \qquad (16)$$

Предложенный метод коэффициентной оценки меры робастности является косвенным и может быть реализован в тех случаях, когда не удается получить коэффициенты характеристического полинома системы как явные функции первичных параметров системы управления, а следовательно, применить непосредственно к ним методику определения интервала их изменения, гарантирующего сохранение устойчивости. Это связано, например, со спецификой вычислительной процедуры перехода от математической модели непрерывной системы к эквивалентной дискретной, допускающей только численное решение.

Методический пример 1

Для математической модели, заданной интервальными матрицами C и D, определим интервальную матрицу линейных стационарных обратных связей K, гарантирующую системе устойчивость:

$$[C] = \begin{vmatrix} [1] & [0{,}1;\ 1] \\ [0{,}1;\ 0{,}2] & [1] \end{vmatrix}, \quad [D] = \begin{vmatrix} [-0{,}02] \\ [-0{,}4] \end{vmatrix}.$$

Выражения для интервальных коэффициентов при $k_1 > 0$, $k_2 > 0$:

$$[a_1] = [-2] + [0{,}02k_1] + [0{,}4k_2],$$

$$[a_0] = [1{,}01;\ 1{,}02] + [0{,}02;\ 0{,}38]\,k_1 + [-0{,}398;\ -0{,}396]\,k_2.$$

Угловые Харитоновские полиномы:

$$d_1 = d_2 = z^2 + (-2 + 0{,}02k_1 + 0{,}4k_2)\,z + 1{,}02 + 0{,}38\,k_1 - \\ - 0{,}396\,k_2,$$

$$d_3 = d_4 = z^2 + (-2 + 0{,}02k_1 + 0{,}4k_2)\,z + 1{,}01 + 0{,}02\,k_1 - \\ - 0{,}398\,k_2.$$

Области устойчивости показаны на рис. 1.

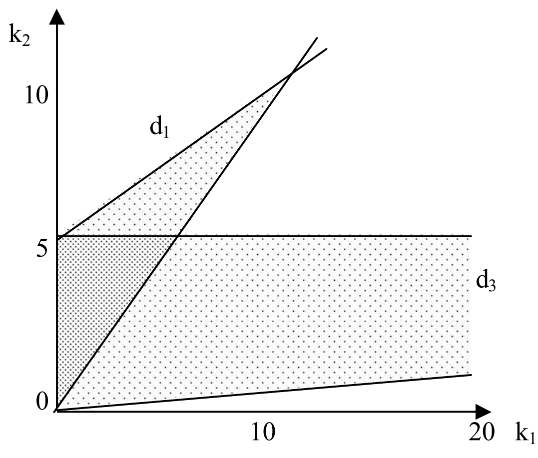


Рис. 1. Области устойчивости для полиномов d_1 и d_3

Интервальные значения матрицы $[K] = \|[k_1], [k_2]\|$ могут быть установлены путем вписания в общую область устойчивости, полученную для полиномов d_1, d_2 прямоугольника с заданным соотношением сторон.

Методический пример 2

В качестве исследуемых параметров рассмотрим коэффициент статической устойчивости и коэффициент эффективности рулевого органа, так как они оказывают наиболее существенное влияние на динамику летательного аппарата, а их величина на разных режимах изменяется в достаточно широком диапазоне.

Матрицы исходной системы дифференциальных уравнений, записанные в форме Коши с учетом симметричного допуска на параметры:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0{,}0054\pm\Delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ =30{,}6 & 0 & 0 & -0{,}0114 \end{bmatrix};$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 \\ -1{,}87\pm\Delta_2 \\ 0 \\ -23{,}44 \end{bmatrix};\ K=[k_1\quad k_2\quad k_3\quad k_4].$$

Коэффициенты матрицы обратных связей, найденные из условия обеспечения кратного корня характеристического полинома замкнутой системы $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = -1$ имеют значения:

$$K=[3{,}391\quad 2{,}995\quad -0{,}0175\quad -0{,}06879],$$

при этом характеристический полином системы принимает такой вид:

$$d(s)=s^4+(4-2{,}99521|\Delta_2|)s^3+$$
$$+(6-|\Delta_1|-3{,}4252089\cdot|\Delta_2|)s^2+$$
$$+(4+1{,}6|\Delta_1|-2{,}14366|\Delta_2|+1.$$

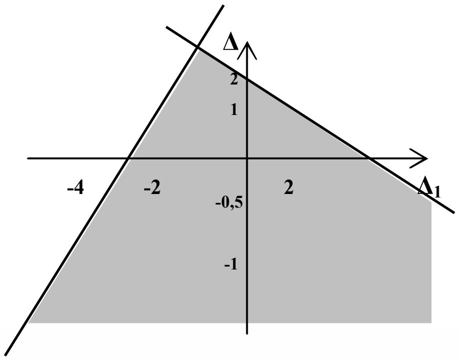
Граница области устойчивости в плоскости параметров Δ_1, Δ_2 и вид функций условий устойчивости представлены на рис. 2.

Условия устойчивости получены по алгебраическому критерию Льенара–Шипара для системы четвертого порядка в таком виде:

$$G_j=a_{j1}>0,\ j=1,...,4;$$

$$G_5=a_0a_1a_2-a_3^2a_2-a_1^2>0.$$

На рис. 3 показаны границы области устойчивости в плоскости параметров Δ_1, Δ_2 и вид функций условий устойчивости, полученные в предположении интервального задания исследуемых параметров.



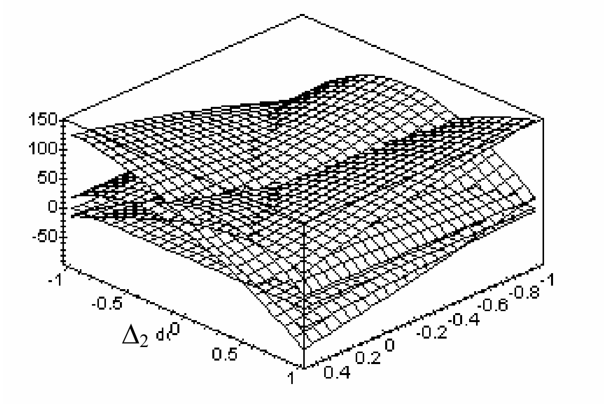


Рис. 2. Граница области устойчивости

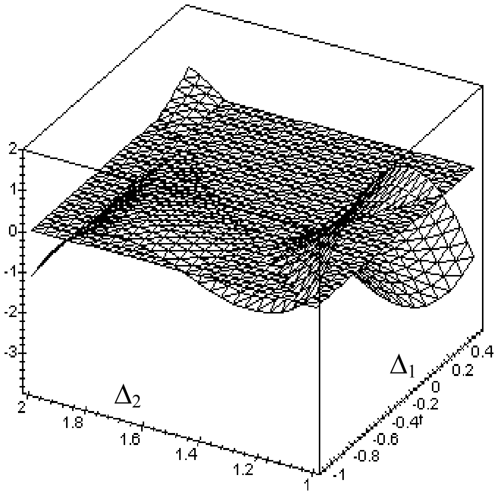


Рис. 3. Область устойчивости
и поверхность условий устойчивости

Выводы и перспективы дальнейших исследований

Практическое решение задачи исследование устойчивости сводится к установлению символьных зависимостей в виде границ областей допустимых изменений, найденных относительно первичных параметров.

При исследовании устойчивости процессов с использованием символьно-численных преобразований может быть решена как прямая задача анализа устойчивости при заданных значениях первичных параметров, так и обратная – определения области изменения неизвестных первичных параметров, при которых управляемый процесс будет устойчивым.

Символьный результат позволяет реально рассматривать всю совокупность возможных решений за приемлемое время и при удовлетворительной точности расчетов.

Наибольший эффект от использования символьно-численных вычислений может быть получен при поиске общего решения задачи разбиения многомерного пространства исследуемых параметров на области с заданными характеристиками.

Рассмотрен подход к решению задачи обеспечения робастной устойчивости БЛА по полиномиальным моделям с коэффициентами – символьными функциями исследуемых параметров, заданными интервалами их изменения, основанный на использовании различных алгебраических критериев и приводящий к эффективным общим решениям.

Литература

1. Неймарк Ю.И. Робастная устойчивость и D – разбиение / Ю.И. Неймарк // Автоматика и телемеханика. – 1992.- №7. – С.10-18.

2. Харитонов В.Л. Семейства устойчивых квазиполиномов / В.Л. Харитонов // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 7. – С.75-88.

3. Вартанян В.М. Применение метода физического моделирования для создания новых образцов беспилотной техники / В.М. Вартанян, В.О. Чарановский, Али Мохамед Аль Дахери // Авиационно-космическая техника и технология. – 2010. – № 3 (70). - С. 51-56.

4. Полиномиальные матрицы и их применение к решению дифференциально-алгебраических систем уравнений m-го порядка для технических приложений / В.Б. Михайлов, В.Н.Гридин, К.В. Михайлов, А.Н. Храпонов // Информационные технологии в проектировании и производстве. – 2001. – № 4. – С. 27-33.

Поступила в редакцию 12.11.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф., зав. каф. менеджмента, декан ф-та экономики и менеджмента И.В. Чумаченко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ РОБАСТНОЇ СТІЙКОСТІ НА ЕТАПІ ПРОЕКТУВАННЯ КОНФІГУРАЦІЇ БЕЗПІЛОТНОГО ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТА

Аль Дахері Алі Мохамед, В.М. Вартанян

Розглядаються варіанти вибору компонування безпілотного літального апарата, які забезпечують статичну стійкість в різних режимах польоту з урахуванням зміни окремих аеродинамічних характеристик в ході виконання льотного завдання. Методологічна основа дослідження складних систем у роботі – теорія управління. Математичний апарат дослідження містить аналіз характеристичного полінома, який враховує різні режими за рахунок інтервальності його коефіцієнтів, які отримані шляхом лінеаризації системи нелінійних диференційних рівнянь динаміки безпілотного літального апарата.

Ключові слова: безпілотний літальний апарат, льотні дослідження, математичне моделювання режимів польоту, робастна стійкість.

ASSURANCE OF ROBUST STABILITY AT THE STAGE OF DESIGNING THE CONFIGURATION OF UNMANNED AIRCRAFT

Al Daheri Ali Mohamed, V.M. Vartanyan

The options of the choice of unmanned aircraft layout, providing static stability in various flight modes, taking into account changes in separate aerodynamic characteristics during the performance of flight tasks are considered. The methodological basis for studying complex systems in the work is management theory. The mathematical apparatus of the research includes an analysis of the characteristic polynomial, taking into account different modes through the interval coefficients obtained by linearization of the nonlinear differential equations of the unmanned aircraft dynamics.

Keywords: unmanned aerial vehicle, flight research, mathematical modeling of flight modes, robust stability.

Аль Дахери Али Мохамед – аспирант каф. экономики и маркетинга, Национальный аэрокосмический университет им.Н.Е. Жуковского «ХАИ»», Харьков, Украина.

Вартанян Василий Михайлович – д-р техн. наук, проф., зав. каф. экономики и маркетинга, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: vartanyan_vm@ukr.net.