УДК 539.3

А.Г. НИКОЛАЕВ, Ю.А. ЩЕРБАКОВА

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

БАЗИСНОСТЬ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ВЫТЯНУТОГО СФЕРОИДА

Применяемые в аэрокосмической технике материалы, как правило, содержат включения, полости, трещины, обусловленные конструктивными, структурными особенностями или несовершенством структуры материала, а также имеют усложненную структуру (в частности, трансверсально-изотропную). Возникает необходимость построения математических моделей новых материалов, проведения расчетов на прочность элементов конструкций летательных аппаратов. Впервые в общей осесимметричной постановке рассматривается и решается проблема обоснования метода Фурье в пространственных краевых задачах теории упругости для трансверсально-изотропного вытянутого сфероида и трансверсально-изотропного пространства со сфероидальной полостью. Вводится понятие базисности частных решений системы уравнений равновесия трансверсально-изотропных канонических тел. Для указанных выше краевых задач доказаны теоремы о базисности построенных ранее частных решений.

Ключевые слова: *метод Фурье, уравнения равновесия трансверсально-изотропной среды, базисность, частные решения для сфероида, краевая задача, теория упругости, канонические тела.*

Введение

Применяемые в аэрокосмической технике материалы, как правило, содержат включения, полости, трещины, обусловленные конструктивными, структурными особенностями или несовершенством структуры материала, а также имеют усложненную структуру (в частности, трансверсально-изотропную). Возникает необходимость построения математических моделей новых материалов, проведения расчетов на прочность элементов конструкций летательных аппаратов. Метод Фурье является, по сути, единственным методом получения аналитических точных решений основных пространственных краевых задач теории упругости в канонических односвязных областях.

Одним из важных вопросов при анализе получаемых в процессе численного решения результатов является их достоверность, проверить которую можно сравнивая результаты тестовых задач с имеющимися точными аналитическими решениями. Применительно к задачам для трансверсально-изотропных тел метод развивался и использовался в работах [1 – 8].

Впервые вопросы обоснования этого метода в общей постановке для канонических односвязных изотропных тел были решены в работах [9 – 11]. Подчеркнем, что в отечественной и зарубежной научной литературе практически отсутствуют работы, посвященные обоснованию метода Фурье для канонических односвязных трансверсально-изотропных тел. Последнее обстоятельство связано с принципиальными сложностями оценки определителей разрешающих систем основных краевых задач теории упругости для канонических областей, ввиду их сложной аналитической зависимости от механических характеристик через специальные функции математической физики. Некоторые частные аспекты обоснования для сфероидальных тел приведены в работах [12 – 15].

В настоящей статье впервые в общей осесимметричной постановке рассматривается и решается проблема обоснования метода Фурье для трансверсально-изотропного вытянутого сфероида и трансверсально-изотропного пространства со сфероидальной полостью. Полученные результаты важны не только для подтверждения достоверности решений многих краевых задач для односвязных тел, но и могут найти полезные приложения при обосновании и оценке точности решений краевых задач в пространственных многосвязных телах.

Постановка задачи

Рассмотрим пространственные области $\Omega_5^{\pm}$, которые в некоторой декартовой прямоугольной системе координат (x, y, z) задаются неравенствами

$\Omega_5^{\pm} = \left\{ (x,y,z) : \frac{x^2+y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} \gtrless 1 \right\}$. Будем считать, что области $\Omega_5^{\pm}$ заполнены трансверсально-изотропным материалом с упругими постоянными c_{ij}, ось анизотропии которого совпадает с осью OZ декартовой системы координат.

Рассмотрим осесимметричные первые краевые задачи для системы уравнений равновесия трансверсально-изотропного упругого тела в областях $\Omega_5^{\pm}$:

$$\left[c_{11}\left(\Delta_2 - \frac{1}{\rho^2}\right) + c_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_\rho + \left(c_{13}+c_{44}\right)\frac{\partial^2 u_z}{\partial\rho\partial z} = 0; \quad (1)$$

$$\left(c_{44}\Delta_2 + c_{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u_z + \left(c_{13}+c_{44}\right)\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u_\rho}{\partial z}\right) = 0 \quad (2)$$

в случае, когда на границе $\partial\Omega_5^{\pm}$ этих областей заданы общие осесимметричные условия вида

$$\mathbf{U}\big|_{\partial\Omega_5^{\pm}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[B_n^{(1)}P_n^{(1)}(\cos\eta)\mathbf{e}_\rho + B_n P_n(\cos\eta)\mathbf{e}_z\right], \quad (3)$$

где $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}$, $P_n^m(x)$ – функции Лежандра 1-го рода, $B_n^{(1)}, B_n$ – заданные коэффициенты, $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_z$ – орты цилиндрической системы координат (ρ, z, φ), непосредственно связанной с введенной выше декартовой системой координат, параметр η будет описан ниже. Будем считать, что ряд (3) сходится абсолютно и равномерно по η.

Для построения частных решений системы уравнений (1), (2) в областях $\Omega_5^{\pm}$ рассмотрим две вытянутые сфероидальные системы координат $(\xi_j, \eta_j, \varphi_j)$ $(j=1,2)$, координаты которых связаны с декартовыми координатами формулами

$$\begin{cases} x = c_j \operatorname{sh}\xi_j \sin\eta_j \cos\varphi_j, \\ y = c_j \operatorname{sh}\xi_j \sin\eta_j \sin\varphi_j, \\ z = \sqrt{\nu_j}\, c_j \operatorname{ch}\xi_j \cos\eta_j, \end{cases} \quad (4)$$

где c_j – параметры сфероидальных систем координат, ν_j – разные положительные корни уравнения

$$c_{11}c_{44}\nu^2 - \left(c_{33}c_{11} - 2c_{13}c_{44} - c_{13}^2\right)\nu + c_{33}c_{44} = 0. \quad (5)$$

Считаем, что $a > \sqrt{\nu_j}\,b$ при j = 1,2. Потребуем, чтобы в сфероидальных координатах граница $\partial\Omega_5^{\pm}$ описывалась уравнением $\xi_j = \xi_{j0}$. Для этого потребуется выполнение следующих соотношений:

$$\begin{cases} c_j \operatorname{sh}\xi_{j0} = b, \\ \sqrt{\nu_j}\, c_j \operatorname{ch}\xi_{j0} = a. \end{cases}$$

В этом случае из соотношений (4) следует, что на границе $\partial\Omega_5^{\pm}$ выполняются равенства $\eta_1 = \eta_2 \equiv \eta$, $\varphi_1 = \varphi_2 \equiv \varphi$. В работе [15] были построены частные решения системы уравнений равновесия в областях $\Omega_5^{\pm}$ при общих граничных условиях. В частном случае осесимметричных решений из них получаем

$$\mathbf{U}_{j,n}^{\pm(5)}(\xi_j,\eta_j) = \frac{c_j}{2n+1}\nabla_j\left[u_{n-1}^{\pm(5)}(\xi_j,\eta_j) - u_{n+1}^{\pm(5)}(\xi_j,\eta_j)\right], \quad (6)$$

где

$$\nabla_j = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_y + k_j\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z;$$

$$u_n^{+(5)}(\xi_j,\eta_j) = Q_n(\operatorname{ch}\xi_j)P_n(\cos\eta_j),$$

$$u_n^{-(5)}(\xi_j,\eta_j) = P_n(\operatorname{ch}\xi_j)P_n(\cos\eta_j),$$

$Q_n^m(x)$ – функции Лежандра 2-го рода;

$$k_j = \frac{c_{11}\nu_j - c_{44}}{c_{13}+c_{44}}.$$

В координатной форме базисные перемещения $\mathbf{U}_{j,n}^{\pm(5)}(\xi_j,\eta_j)$ имеют вид

$$\mathbf{U}_{j,n}^{\pm(5)}(\xi_j,\eta_j) = -u_{n,1}^{\pm(5)}(\xi_j,\eta_j)\mathbf{e}_\rho - \frac{k_j}{\sqrt{\nu_j}}u_n^{\pm(5)}(\xi_j,\eta_j)\mathbf{e}_z, \quad (7)$$

где

$$u_{n,1}^{+(5)}(\xi_j,\eta_j) = Q_n^{(1)}(\operatorname{ch}\xi_j)P_n^{(1)}(\cos\eta_j),$$

$$u_{n,1}^{-(5)}(\xi_j,\eta_j) = P_n^{(1)}(\operatorname{ch}\xi_j)P_n^{(1)}(\cos\eta_j).$$

Далее будут использоваться обозначения:

$$\operatorname{ch}\xi_{j0} = q_j,\ \operatorname{sh}\xi_{j0} = \overline{q}_j.$$

В работе [9] было введено понятие базисности системы решений уравнений Ламе в пространственных канонических областях. По аналогии с этим понятием введем следующее определение.

Определение 1. Системы вектор-функций $\left\{\mathbf{U}_{j,n}^{\pm(5)}(\xi_j,\eta_j)\right\}_{n=0,j=1}^{\infty,2}$ будем называть базисными осесимметричными системами решений уравнений равновесия (1), (2) в областях $\Omega_5^{\pm}$, если:

1) вектор-функций $\mathbf{U}_{j,n}^{\pm(5)}(\xi_j,\eta_j)$ при $n = 0,1,\ldots$, $j = 1,2$ являются регулярными линейно

независимыми решениями системы уравнений (1), (2) в областях $\Omega_5^{\pm}$;

2) существует набор постоянных $\left\{A_{jn}\right\}_{n=0,j=1}^{\infty,2}$ такой, что функция $\mathbf{U}=\sum_{j=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}A_{jn}\mathbf{U}_{j,n,0}^{\pm(5)}\left(\xi_j,\eta_j\right)$ удовлетворяет условиям:

а) $\mathbf{U}\in C^2\left(\Omega_5^{\pm}\right)\cap C\left(\overline{\Omega_5^{\pm}}\right)$,

б) $\mathbf{U}\big|_{\xi_j=\xi_{j0}}=$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[B_n^{(1)}P_n^{(1)}(\cos\eta)\mathbf{e}_\rho+B_nP_n(\cos\eta)\mathbf{e}_z\right].$$

В следующем разделе будет доказана базисность в осесимметричной постановке системы вектор-функций $\left\{\mathbf{U}_{j,n}^{\pm(5)}\left(\xi_j,\eta_j\right)\right\}_{n=0,j=1}^{\infty,2}$ в областях $\Omega_5^{\pm}$.

Основные результаты

Авторами доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. При условии $\nu_1\neq\nu_2$ вектор-функции $\left\{\mathbf{U}_{j,n}^{+(5)}\left(\xi_j,\eta_j\right)\right\}_{n=0,j=1}^{\infty,2}$ являются базисными осесимметричными решениями системы уравнений равновесия (1), (2) в областях Ω_5^{+}.

Доказательство. Для обоснования базисности прежде всего докажем, что определитель
$$\Delta_n^{+(1)5}=\begin{vmatrix} Q_n^{(1)}(q_1) & \dfrac{k_1}{\sqrt{\nu_1}}Q_n(q_1)\\ Q_n^{(1)}(q_2) & \dfrac{k_2}{\sqrt{\nu_2}}Q_n(q_2)\end{vmatrix} \tag{8}$$
отличен от нуля. Запишем его в следующем виде
$$\Delta_n^{+(1)5}=$$
$$=Q_n^{(1)}(q_1)Q_n^{(1)}(q_2)\left[\frac{k_2}{\sqrt{\nu_2}}\frac{Q_n(q_2)}{Q_n^{(1)}(q_2)}-\frac{k_1}{\sqrt{\nu_1}}\frac{Q_n(q_1)}{Q_n^{(1)}(q_1)}\right].$$

Так как $k_j=\dfrac{c_{11}\nu_j-c_{44}}{c_{13}+c_{44}}$, то определитель $\Delta_n^{+(1)5}$ можно представить в виде
$$\Delta_n^{+(1)}=Q_n^{(1)}(q_1)Q_n^{(1)}(q_2)\left[\frac{c_{11}\nu_2-c_{44}}{\sqrt{\nu_2}\left(c_{13}+c_{44}\right)}\frac{Q_n(q_2)}{Q_n^{(1)}(q_2)}-\right.$$
$$\left.-\frac{c_{11}\nu_1-c_{44}}{\sqrt{\nu_1}\left(c_{13}+c_{44}\right)}\frac{Q_n(q_1)}{Q_n^{(1)}(q_1)}\right]=Q_n^{(1)}(q_1)Q_n^{(1)}(q_2)\times$$
$$\times\left[\frac{c_{11}}{\left(c_{13}+c_{44}\right)}\left(\sqrt{\nu_2}\frac{Q_n(q_2)}{Q_n^{(1)}(q_2)}-\sqrt{\nu_1}\frac{Q_n(q_1)}{Q_n^{(1)}(q_1)}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{c_{44}}{\left(c_{13}+c_{44}\right)}\left(\frac{1}{\sqrt{\nu_2}}\frac{Q_n(q_2)}{Q_n^{(1)}(q_2)}-\frac{1}{\sqrt{\nu_1}}\frac{Q_n(q_1)}{Q_n^{(1)}(q_1)}\right)\right]. \tag{9}$$

Полуоси граничного сфероида связаны со сфероидальными координатами формулами $c_j\mathrm{sh}\xi_{j0}=b$, $\sqrt{\nu_j}c_j\mathrm{ch}\xi_{j0}=a$, откуда
$$q_j=\frac{a}{\sqrt{a^2-\nu_jb^2}}\quad\left(a>\sqrt{\nu_j}b\right).$$

Рассмотрим функцию $\tau(\nu)=-\sqrt{\nu}\dfrac{Q_n(q)}{Q_n^{(1)}(q)}$, где q выражается через ν по предыдущей формуле. Покажем, что эта функция монотонно возрастает на полуоси $\mathbf{R}_+$. Производная этой функции равна
$$\frac{d\tau}{d\nu}=-\frac{1}{2\sqrt{\nu}}\left[Q_n^{(1)}(q)\right]^{-2}\left\{Q_n(q)Q_n^{(1)}(q)+\right.$$
$$\left.+\bar{q}q\left[Q_n^{(1)}(q)\right]^2-\bar{q}^2qQ_n(q)\frac{d}{dq}Q_n^{(1)}(q)\right\}=$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{\nu}}\left[Q_n^{(1)}(q)\right]^{-2}\left\{Q_n(q)Q_n^{(1)}(q)+\bar{q}q\left[Q_n^{(1)}(q)\right]^2-\right.$$
$$\left.-\bar{q}qn(n+1)\left[Q_n(q)\right]^2+q^2Q_n(q)Q_n^{(1)}(q)\right\}.$$

Покажем, что выражение
$$\bar{q}q\left[Q_n^{(1)}(q)\right]^2-\bar{q}qn(n+1)\left[Q_n(q)\right]^2+$$
$$+q^2Q_n(q)Q_n^{(1)}(q) \tag{10}$$
отрицательно.

Его можно преобразовать к виду
$$(n+1)qQ_{n+1}(q)Q_n^{(1)}(q)-nqQ_n(q)Q_{n+1}^{(1)}(q).$$

Последнее выражение запишем, используя интегральное представление функции Лежандра второго рода
$$Q_n^{(m)}(z)=(-1)^m\frac{n!}{(n-m)!}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{ch}\,mt\,dt}{\left(z+\sqrt{z^2-1}\mathrm{ch}t\right)^{n+1}}.$$

После некоторых преобразований, получаем
$$(n+1)qQ_{n+1}(q)Q_n^{(1)}(q)-nqQ_n(q)Q_{n+1}^{(1)}(q)=$$
$$=-n(n+1)q\bar{q}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\left(\mathrm{ch}\,u-\mathrm{ch}\,v\right)^2du\,dv}{\left(q+\bar{q}\mathrm{ch}\,u\right)^{n+2}\left(q+\bar{q}\mathrm{ch}\,v\right)^{n+2}},$$
откуда вытекает отрицательность выражения (10), а, следовательно, положительность производной $\dfrac{d\tau}{d\nu}$.

Таким образом, показано, что функция $\tau(\nu)$ монотонно возрастает на полуоси $\mathbf{R}_+$.

Теперь докажем, что функция $\sigma(\nu) = -\frac{1}{\sqrt{\nu}}\frac{Q_n(q)}{Q_n^{(1)}(q)}$ монотонно убывает на полуоси $\mathbf{R}_+$. Для этого вычислим ее производную

$$\frac{d\sigma}{d\nu} = \frac{1}{2\nu^{3/2}}\left[Q_n^{(1)}(q)\right]^{-2}\left\{Q_n(q)Q_n^{(1)}(q) - \right.$$
$$-\bar{q}q\left[Q_n^{(1)}(q)\right]^2 + n(n+1)\bar{q}q\left[Q_n(q)\right]^2 -$$
$$\left.-q^2Q_n(q)Q_n^{(1)}(q)\right\} =$$
$$= \frac{1}{2\nu^{3/2}}\left[Q_n^{(1)}(q)\right]^{-2}\left\{-(n+1)q^2Q_n(q)Q_n^{(1)}(q) + \right.$$
$$+ n\bar{q}^2Q_n(q)Q_n^{(1)}(q) + (n+1)Q_n(q)Q_n^{(1)}(q) -$$
$$\left.-q\bar{q}\left[Q_n^{(1)}(q)\right]^2 + n(n+1)\bar{q}q\left[Q_n(q)\right]^2\right\}.$$

Преобразуем выражение

$$-(n+1)q^2Q_n(q)Q_n^{(1)}(q) - q\bar{q}\left[Q_n^{(1)}(q)\right]^2 +$$
$$+n\bar{q}^2Q_n(q)Q_n^{(1)}(q) + n(n+1)\bar{q}q\left[Q_n(q)\right]^2 =$$
$$= -(n+1)qQ_{n+1}(q)Q_n^{(1)}(q) +$$
$$\left. n(n+1)\bar{q}Q_{n+1}(q)Q_n(q)\right\}.$$

Возвращаясь к производной, получаем

$$\frac{d\sigma}{d\nu} = \frac{1}{2\nu^{3/2}}\left[Q_n^{(1)}(q)\right]^{-2}\left\{(n+1)Q_n(q)Q_n^{(1)}(q) - \right.$$
$$\left.(n+1)qQ_{n+1}(q)Q_n^{(1)}(q) + n(n+1)\bar{q}Q_{n+1}(q)Q_n(q)\right\}.$$

После преобразований с использованием рекуррентных формул для функций Лежандра, производную можно представить в виде

$$\left... -(n+1)qQ_{n+1}(q)Q_n^{(1)}(q) - (n+1)\bar{q}Q_{n+1}(q)Q_n(q)\right\}.$$

В работе [11] было доказано, что

$$Q_{n+1}^{(1)}(q)Q_n(q) - Q_{n+1}(q)Q_n^{(1)}(q) < 0,$$

поэтому $\frac{d\sigma}{d\nu} < 0$ и функция $\sigma(\nu)$ монотонно убывает на полуоси $\mathbf{R}_+$.

Из свойств монотонности рассмотренных функций следует, что оба слагаемых в формуле (9) одинакового знака. Тогда можно записать

$$\left|\Delta_n^{+(1)5}\right| > \frac{c_{44}}{c_{13}+c_{44}}\left|\frac{1}{\sqrt{\nu_2}}\frac{Q_n(q_2)}{Q_n^{(1)}(q_2)} - \frac{1}{\sqrt{\nu_1}}\frac{Q_n(q_1)}{Q_n^{(1)}(q_1)}\right| \times$$
$$\times Q_n^{(1)}(q_1)Q_n^{(1)}(q_2).$$

Модуль в последнем неравенстве оценим с помощью формулы Лагранжа, учитывая, что

$$\left|\frac{d\sigma}{d\nu}\right| > \frac{1}{2\nu^{3/2}}\left[Q_n^{(1)}(q)\right]^{-2}(n+1)\bar{q}Q_n(q)Q_{n+1}(q).$$

Можно показать, что правая часть последней оценки подчиняется условию

$$\frac{1}{2\nu^{3/2}}\left[Q_n^{(1)}(q)\right]^{-2}(n+1)\bar{q}Q_n(q)Q_{n+1}(q) >$$
$$> \frac{1}{8\nu^{3/2}}\left(\frac{\bar{q}}{q}\right)^3\frac{1}{n+1} = \frac{1}{8}\left(\frac{b}{a}\right)^3\frac{1}{n+1}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\left|\Delta_n^{+(1)5}\right| > \frac{c_{44}}{c_{13}+c_{44}}\frac{1}{8}\left(\frac{b}{a}\right)^3\frac{1}{n+1}\left|\nu_1 - \nu_2\right| \cdot$$
$$\cdot Q_n^{(1)}(q_1)Q_n^{(1)}(q_2). \tag{11}$$

Из оценки (11) следует выполнение первого условия определения базисности для вектор-функций $\left\{\mathbf{U}_{j,n}^{+(5)}(\xi_j,\eta_j)\right\}_{n=0,j=1}^{\infty,2}$.

Для доказательства второго условия базисности запишем общее решение осесимметричной краевой задачи для системы уравнений равновесия трансверсально-изотропной среды в перемещениях с граничным условием (3) в виде

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}A_{jn}\mathbf{U}_{j,n}^{+(5)}(\xi_j,\eta_j). \tag{12}$$

Удовлетворяя условию (3), относительно неизвестных коэффициентов A_{jn} получаем линейную алгебраическую систему

$$\begin{cases} A_{1n}Q_n^{(1)}(q_1) + A_{2n}Q_n^{(1)}(q_1) = -n(n+1)B_n^{(1)}, \\ \frac{k_1}{\sqrt{\nu_1}}A_{1n}Q_n^{(1)}(q_1) + \frac{k_2}{\sqrt{\nu_2}}A_{2n}Q_n^{(1)}(q_2) = -B_n, \end{cases} \tag{13}$$

определитель которой совпадает с $\Delta_n^{+(1)5}$.

Решение системы (13) имеет вид:

$$A_{1n} = \left[\Delta_n^{+(1)5}\right]^{-1}\left[B_nQ_n^{(1)}(q_2) - \right.$$
$$\left. - B_n^{(1)}\frac{k_2}{\sqrt{\nu_2}}n(n+1)Q_n(q_2)\right], \quad n = 1,2,...; \tag{14}$$

$$A_{2n} = -\left[\Delta_n^{+(1)5}\right]^{-1}\left[B_nQ_n^{(1)}(q_1) - \right.$$
$$\left. - B_n^{(1)}\frac{k_1}{\sqrt{\nu_1}}n(n+1)Q_n(q_1)\right], \quad n = 1,2,...; \tag{15}$$

$$A_{j0} = (-1)^jB_0c_j^{-1}\left[\frac{k_1}{\sqrt{\nu_1}c_1}Q_0(q_1) - \frac{k_2}{\sqrt{\nu_2}c_2}Q_0(q_2)\right]^{-1}. \tag{16}$$

Из оценки (11) и асимптотических формул для функций Лежандра при $n \to \infty$ следует, что ряд (12) сходится абсолютно и равномерно в замыкании $\overline{\Omega_5^+}$. Кроме этого, заметим, что ряд, полученный из (12) двойным дифференцированием по параметрам сходится абсолютно и равномерно в области $\Omega_5^{\pm}$. Следовательно, вектор-функция (12) удовлетворяет условию $\mathbf{U} \in C^2(\Omega_5^{\pm}) \cap C(\overline{\Omega_5^{\pm}})$. Последнее окончательно доказывает теорему.

Теорема 2. При условии $\nu_1 \neq \nu_2$ вектор-функции $\left\{\mathbf{U}_{j,n}^{-(5)}(\xi_j, \eta_j), \mathbf{U}_{1,0}^{-(5)}(\xi_l, \eta_l)\right\}_{n=1, j=1}^{\infty, 2}$ являются базисными осесимметричными решениями системы уравнений равновесия в областях Ω_5^{-}.

Доказательство. Как и в случае внешней задачи докажем, что определитель

$$\Delta_n^{-(1)5} = \begin{vmatrix} P_n^{(1)}(q_1) & \dfrac{k_1}{\sqrt{\nu_1}} P_n(q_1) \\ P_n^{(1)}(q_2) & \dfrac{k_2}{\sqrt{\nu_2}} P_n(q_2) \end{vmatrix} \tag{17}$$

при $n \geq 1$ отличен от нуля. Повторяя преобразования, подобные приведенным выше в доказательстве теоремы 1, запишем

$$\Delta_n^{-(1)5} = P_n^{(1)}(q_1) P_n^{(1)}(q_2) \times$$
$$\times \left[\frac{c_{11}}{c_{13} + c_{44}} \left(\sqrt{\nu_2} \frac{P_n(q_2)}{P_n^{(1)}(q_2)} - \sqrt{\nu_1} \frac{P_n(q_1)}{P_n^{(1)}(q_1)} \right) - \right.$$
$$\left. - \frac{c_{44}}{c_{13} + c_{44}} \left(\frac{1}{\sqrt{\nu}_2} \frac{P_n(q_2)}{P_n^{(1)}(q_2)} - \frac{1}{\sqrt{\nu_1}} \frac{P_n(q_1)}{P_n^{(1)}(q_1)} \right) \right].$$

Рассмотрим функцию $\tau(\nu) = \sqrt{\nu} \dfrac{P_n(q)}{P_n^{(1)}(q)}$ и найдем ее производную:

$$\frac{d\tau(\nu)}{d\nu} = \frac{1}{2\sqrt{\nu}} \left[P_n^{(1)}(q)\right]^{-2} \left\{ P_n(q) P_n^{(1)}(q) + \bar{q} q \left[P_n^{(1)}(q)\right]^2 - \right.$$
$$\left. - \bar{q} q n(n+1) \left[P_n(q)\right]^2 + q^2 P_n(q) P_n^{(1)}(q) \right\}.$$

Преобразуем выражение в фигурных скобках, используя рекуррентные формулы для функций Лежандра

$$P_n(q) P_n^{(1)}(q) + q P_n^{(1)}(q) \left[n q P_n(q) - n P_{n-1}(q) \right] -$$
$$- \bar{q} q n(n+1) \left[P_n(q)\right]^2 + q^2 P_n(q) P_n^{(1)}(q) =$$
$$= P_n(q) P_n^{(1)}(q) + (n+1) q^2 P_n(q) P_n^{(1)}(q) -$$
$$- n q P_n^{(1)}(q) P_{n-1}(q) - \bar{q} q n(n+1) \left[P_n(q)\right]^2 =$$
$$= P_n(q) P_n^{(1)}(q) + (n+1) q P_n(q) \cdot$$
$$\cdot \left[q P_n^{(1)}(q) - n \bar{q} P_n(q) \right] - n q P_n^{(1)}(q) P_{n-1}(q) =$$
$$= P_n(q) P_n^{(1)}(q) + (n+1) q P_n(q) P_{n-1}^{(1)}(q) -$$
$$- n q P_n^{(1)}(q) P_{n-1}(q) = (n+1) q P_n(q) P_{n-1}^{(1)}(q) -$$
$$- (n-1) P_n(q) P_n^{(1)}(q) - n q P_n^{(1)}(q) P_{n-1}(q) +$$
$$+ n P_n(q) P_n^{(1)}(q) = P_n(q) \left[(n+1) q P_{n-1}^{(1)}(q) - \right.$$
$$\left. - (n-1) P_n^{(1)}(q) \right] - n P_n^{(1)}(q) \left[q P_{n-1}(q) - P_n(q) \right] =$$
$$= \bar{q} \left[P_n^{(1)}(q) P_{n-1}^{(1)}(q) - P_n(q) P_{n-1}^{(2)}(q) \right].$$

В работе [11] было доказано, что последнее выражение в квадратных скобках положительно. Следовательно, $\dfrac{d\tau}{d\nu} > 0$ при $\nu \in \mathbf{R}_+$, а функция $\tau(\nu)$ монотонно возрастает на полуоси.

Аналогично, для функции

$$\sigma(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \frac{P_n(q)}{P_n^{(1)}(q)}$$

после ряда преобразований можно получить

$$\frac{d\sigma}{d\nu} = \frac{1}{2\nu^{3/2}} \left[P_n^{(1)}(q)\right]^{-2} \left\{ (n+1) q P_{n+1}(q) P_n^{(1)}(q) - \right.$$
$$\left. - (n+1) q P_n(q) P_{n+1}^{(1)}(q) + (n+1) \bar{q} P_n(q) P_{n+1}(q) \right\}.$$

Рассмотрим отдельно выражение в фигурных скобках. Его можно представить в виде

$$(n+1) q P_{n+1}(q) P_n^{(1)}(q) - (n+1) q P_n(q) P_{n+1}^{(1)}(q) +$$
$$+ P_n(q) \left[q P_{n+1}^{(1)}(q) - P_n^{(1)}(q) \right] =$$
$$= (n+1) q P_{n+1}(q) P_n^{(1)}(q) - n q P_n(q) P_{n+1}^{(1)}(q) -$$
$$- P_n(q) P_n^{(1)}(q).$$

Покажем отрицательность при $n \geq 1$ суммы первых двух слагаемых полученного выражения, для чего выполним с ними следующие преобразования:

$$(n+1) q P_{n+1}(q) P_n^{(1)}(q) - n q P_n(q) P_{n+1}^{(1)}(q) =$$
$$= \frac{q}{\bar{q}} \left\{ (n+1) P_{n+1}(q) \left[n q P_n(q) - n P_{n-1}(q) \right] - \right.$$
$$\left. - n P_n(q) \left[(n+1) q P_{n+1}(q) - (n+1) P_n(q) \right] \right\} =$$
$$= \frac{q}{\bar{q}} (n+1) n \left\{ \left[P_n(q)\right]^2 - P_{n+1}(q) P_{n-1}(q) \right\}.$$

Выражение в фигурных скобках можно представить следующим интегралом

$$\left[P_n(q)\right]^2 - P_{n+1}(q) P_{n-1}(q) =$$
$$= -\frac{(\bar{q})^2}{2\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} (q + \bar{q} \cos u)^{n-1} (q + \bar{q} \cos v)^{n-1} \times$$
$$\times (\cos u - \cos v)^2 du dv,$$

который показывает, что оно отрицательно.

Таким образом, функция $\sigma(\nu)$ монотонно убывает на полуоси $\mathbf{R}_+$.

Тогда, используя свойство монотонности функций $\sigma(\nu)$ и $\tau(\nu)$, получаем оценку

$$\left|\Delta_n^{-(1)5}\right| >$$

$$> \frac{c_{44}}{c_{13}+c_{44}}\left|\frac{1}{\sqrt{\nu_2}}\frac{P_n(q_2)}{P_n^{(1)}(q_2)} - \frac{1}{\sqrt{\nu_1}}\frac{P_n(q_1)}{P_n^{(1)}(q_1)}\right| \times$$

$$\times \cdot P_n^{(1)}(q_1) P_n^{(1)}(q_2) >$$

$$> \frac{c_{44}}{c_{13}+c_{44}} \frac{1}{2\nu n} \frac{b}{a} P_n^{(1)}(q_1) P_n^{(1)}(q_2) |\nu_1 - \nu_2|, \qquad (18)$$

где $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$.

При помощи оценки (18) также как и в доказательстве теоремы 1 можно обосновать выполнение второго условия в определении базисности, что окончательно доказывает теорему.

Выводы

1. Впервые в общей осесимметричной постановке рассматривается и решается проблема обоснования метода Фурье в пространственных краевых задачах теории упругости для трансверсально-изотропного вытянутого сфероида и трансверсально-изотропного пространства со сфероидальной полостью.

2. По аналогии с результатом работы [9] вводится понятие базисности частных решений системы уравнений равновесия трансверсально-изотропных канонических тел в рассматриваемых областях.

3. Для построенных ранее частных решений основных осесимметричных краевых задач для трансверсально-изотропного вытянутого сфероида и трансверсально-изотропного пространства со сфероидальной полостью доказаны теоремы о их базисности.

4. Полученные результаты являются обоснованием обобщенного метода Фурье, что подтверждает возможность использования заявленных задач как тестовых при анализе напряженно-деформированное состояние изделий и конструкций из трансверсально-изотропных пористых материалов, используемых в аэрокосмической технике.

Литература

1. Zureick A.H. The asymmetric displacement of a rigid spheroidal inclusion embedded in transversely isotropic medium / A.H. Zureick // Acta. mech. – 1989. – V. 77, N 1-2. – P. 101-110.

2. Zhong Z. Analysis of a transversely isotropic rod containing a single cylindrical inclusion with axisymmetric eigenstrains / Z. Zhong // Int. Journal of Solids and Structures. – 2002. - V. 39, Issue 23. – P. 5753-5765.

3. Thermal stress-focusing in a transversely isotropic sphere and an isotropic sphere / X. Wang , C. Wang , G. Lu , B. M. Zhou // Journal Of Thermal Stresses. – 2002. – V. 25, №1. – P. 31-44.

4. Toshiaki H. Thermal stress-focusing effect in a transversely isotropic spherical inclusion embedded in an isotropic infinite elastic medium / H. Toshiaki // Journal Of Thermal Stresses. - 2002. – V. 25, № 7. – P. 691-702.

5. Подильчук Ю.Н. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Т. 1. Граничные задачи статики упругнх тел / Ю.Н. Подильчук. – К.: Наукова думка, 1984. – 304 с.

6. Подильчук Ю.Н. Термоупругая деформация трансверсально-изотропного вытянутого сфероида / Ю.Н. Подильчук // Прикладная механика. – 1987. – Т. 23, № 12. – С. 25-34.

7. Подильчук Ю.Н. Точные аналитические решения пространственных граничных задач статики трансверсально-изотропного тела канонической формы (обзор) / Ю.Н. Подильчук // Прикладная механика. – 1997.- Т. 33, № 10. - С. 3-30.

8. Подильчук Ю.Н. Точные аналитические решения трехмерных статических задач термоупругости трансверсально изотропного тела в криволинейной системе координат / Ю.Н. Подильчук // Прикладная механика. – 2001, – Т. 37, № 6. – С. 72-78.

9. Николаев А.Г. Обоснование метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей / А.Г. Николаев // Доповіді НАН України. – 1998. – № 2. – С. 78-83.

10. Николаев А.Г. Обоснование метода Фурье в пространственнв задачах теории упругости для канонических односвязных областей / А.Г. Николаев // Современные проблемы концентрации напряжений: тр. междунар. науч. конф., Донецк,9-13 сент. 1998 р. – С. 199-203.

11. Николаев А.Г. Круговой штамп на трансверсально изотропном полупространстве со сфероидальной полостью при наличии сцепления / А.Г. Николаев // Прикладная механика. – 1994. – Т. 30, № 8. – С. 48-53.

12. Трансверсально изотропное полупространство с полостью под действием частично сцепленного штампа / А.Г. Николаев; ХАИ. – Х., 1993 – 17 с. – деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, №1177 – Ук 93.

13. Николаев А.Г. Круговая трещина в трансверсально изотропном сфероиде под действием нормальной нагрузки / А.Г. Николаев, Ю.А. Щербакова // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 9-14.

14. Ніколаєв О.Г. Аналіз напружено деформівного стану трансферсально ізотропного сфероїда зі сфероїдальною порожниною / О.Г. Ніколаєв, Ю.А. Щербакова // Вісник Львівського університету. Сер. прикладна математика та інформатика. – 2007. – Вип. 12. – С. 176-181.

15. Теоремы сложения перемещений трансверсально изотропных канонических тел / А.Г. Николаев; Харьковский авиационный институт. – Х., *1996. – 52 с. – Деп. в ГНТБ Украины 10.07.96, № 1568 – Ук 96.*

16. Николаев А.Г. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости для канонических многосвязных тел: дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.02.04; защищена 13.07.97; утв. 20.09.97 / Николаев Алексей Георгиевич. – Х.: 1997. – 331 с.

Поступила в редакцию 27.12.10

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики В.С. Проценко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Харьков.

БАЗИСНІСТЬ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКИВ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ РІВНОВАГИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ВИТЯГНУТОГО СФЕРОЇДА

О.Г. Ніколаєв, Ю.А. Щербакова

Вживані в аерокосмічній техніці матеріали, як правило, містять включення, порожнини, тріщини, обумовлені конструктивними, структурними особливостями або недосконалістю структури матеріалу, а також мають ускладнену структуру (зокрема, трансверсально-ізотропну). Виникає необхідність побудови математичних моделей нових матеріалів, проведення розрахунків на міцність елементів конструкцій літальних апаратів. Вперше в загальній осесиметричній постановці розглядається та розв'язується проблема обґрунтування методу Фур'є в просторових крайових задачах теорії пружності для трансверсально-ізотропного витягнутого сфероїда и трансверсально-ізотропного простору зі сфероїдальною порожниною. Введено поняття базисності частинних розв’язків системи рівнянь рівноваги трансверсально-ізотропних канонічних тіл. Для вказаних вище крайових задач доведені теореми про базисність побудованих раніше частинних розв’язків.

Ключові слова: метод Фур'є, рівняння рівноваги трансверсально-ізотропного середовища, базисність, частинні розв’язки для сфероїда, крайова задача, теорія пружності, канонічні тіла.

THE BASIS PROPERTY OF AXIALLY SYMMETRIC SOLUTIONS OF EQUILIBRIUM EQUATIONS FOR TRANSVERSALY ISOTROPIC PROLATE SPHEROID

A.G. Nikolayev, Y.A. Sherbakova

The materials applied in an aerospace technique, as a rule, contain including, cavities, cracks, conditioned structural, structural features or imperfection of structure of material, and also have the complicated structure (in particular, transversaly-izotropic). There is a necessity of construction of mathematical models of new materials, leadthroughs of calculations on durability of elements of constructions of aircrafts. The problem of justification Fourier's method in axially symmetric statement in the three-dimensional boundary problems of elasticity theory for transversaly isotropic prolate spheroid and transversaly isotropic space with spheroidal cavity is considered and solved for the first time.

Keywords: Fourier's method, equilibrium equations of a transversely isotropic medium basis property, partial solutions for the spheroid, boundary problem, elasticity theory, the canonical body.

Николаев Алексей Георгиевич – д-р физ.-мат. наук, проф., декан факультета ракетно-космической техники, зав. каф. высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина, e-mail: K405@d4.khai.edu.

Щербакова Юнна Анатольевна – ст. преп. каф. высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина.