УДК 681.5.015:629.7.05

**С.Н. ФИРСОВ**

***Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина***

# АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМЫ ОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

*Предложен аналитический метод определения параметров закона управления спутниковой системы ориентации и стабилизации космического аппарата, позволяющий по диагностической информации о функциональном состоянии элементов системы стабилизации и самого космического аппарата корректировать параметры законов управления, обеспечивая при этом асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Определены граничные значения параметров управления, обеспечивающие максимальную степень устойчивости, как функции начальных условий углового движения космического аппарата и максимальных значений исполнительной системы, а также допустимого значения угловой скорости вращения спутника.*

***Ключевые слова:*** *космический аппарат, функция Ляпунова, степень устойчивости, спутниковая система ориентации и стабилизации.*

## Введение

В системах ориентации и стабилизации (СОС) космическими аппаратами (КА) традиционно применяют блоки с тремя двигателями маховиками (ДМ), у которых оси вращения коллинеарны главным осям инерции КА [1 – 3]. Подобная компоновка использовалась, например, на спутнике «Электро (GOMS)», спутниках серии «Метеор», «Ресурс-О», «Канапус», спутнике «Татьяна-2», поздних версиях «Meteosat», малых спутниках «BIRD», «SNAP», «RapidEye», «Сич», «Сич-1», «МС-1», «Egepsat» и других [4 – 6]. Применение ДМ в СОС обусловлено, прежде всего, тем, что такая система работает при отсутствии силовых полей или тогда, когда эти поля являются возмущающими факторами. Кроме того, ДМ не расходуют рабочее тело, как это делают реактивные двигатели, а применение в качестве привода маховика бесконтактного двигателя постоянного тока позволяет использовать свойство рекуперации электроэнергии ДМ с целью минимизации потребления энергии СОС.

Анализ применения такой компоновки показал, что такое расположение ДМ обеспечивает выполнение поставленной перед блоком задачи с требуемыми показателями качества только в штатном режиме функционирования блока, а при появлении аварийных ситуаций такая компоновка оказывается частично работоспособной. При этом, одним из основных средств парирования возникшей ситуации является подстройка параметров регулятора. Именно поэтому задача определения аналитических зависимостей коррекции параметров закона управления СОС КА с ДМ является актуальной.

## Постановка задачи исследования

С целью получения аналитических зависимостей подстройки параметров закона управления, реализуемого в СОС КА, необходимо проанализировать влияние формируемого управления на динамику всей системы в целом, используя ее математическую модель движения, полученную применением законов изменения кинетического момента (динамические уравнения Эйлера) и кинематических уравнений:

$$\frac{d\bar{K}}{dt} + \bar{\omega}_{абс} \times \bar{K} = \bar{M}_{внш} + \bar{M}_{упр}; \qquad (1)$$

$$\dot{A} = WA; \Rightarrow \begin{cases} \dot{\psi} = \dfrac{1}{\cos\upsilon}(\omega_y \cos\gamma - \omega_z \sin\gamma); \\ \dot{\upsilon} = \omega_y \sin\gamma + \omega_z \cos\gamma; \\ \dot{\gamma} = \omega_x - \mathrm{tg}\upsilon(\omega_y \cos\gamma - \omega_z \sin\gamma), \end{cases} \qquad (2)$$

где $\bar{K} = J\bar{\omega}_{абс}$ – кинетический момент аппарата;

$\bar{\omega}_{абс} = \bar{\omega}_{отн} + A\bar{\omega}_0$ – вектор абсолютной угловой скорости вращения КА;

$J$ – тензор инерции КА;

$\bar{M}_{внш}$ – результирующий момент внешних сил, действующих на КА;

$\bar{M}_{упр}$ – результирующий момент управления;

$\bar{\omega}_{отн} = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T$ – вектор угловой скорости вращения связанной системы координат с корпусом КА относительно базовой (опорная не вращающаяся система координат, у которой одна из осей направлена перпендикулярно плоскости эклиптики, другая – направлена в точку весеннего равноденствия, а третья дополняет до правильного триэдра);

$\bar{\omega}_0$ – абсолютная угловая скорость опорной системы координат;

A – матрица направляющих косинусов, определяемая через углы Эйлера-Крылова, описывающая переход от опорной системы координат в связанную с КА систему координат;

$$W = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Используя полученные уравнения (1) – (2) определим аналитическое выражение для управления $\bar{M}_{упр}$ в (1), обеспечивающее совмещение связанной системы координат с опорной. При этом управляющий момент $\bar{M}_{упр}$ должен создавать такое положение равновесия, в котором $\omega_{отн} = 0$, а $A = I$ – единичная. Сформированные требования эквивалентны не только выполнению условий $\gamma = \upsilon = \psi = 0$, а и обеспечению их асимптотической устойчивости. Управляющее воздействие $\bar{M}_{упр}$ определим с помощью второго метода А.М. Ляпунова [7], позволяющего получить условия асимптотической устойчивости в некоторой области или в целом. Второй метод Ляпунова, как известно, заключается в формировании специальной вспомогательной скалярной функции, называемой функцией Ляпунова $V$, и исследовании её свойств, а также свойств её первой производной $\dot{V}$.

## Определение функции Ляпунова

Поскольку в качестве цели управления принято асимптотически устойчивое выполнение условия $\gamma = \upsilon = \psi = 0$, то для достижения поставленной цели принимаем функцию Ляпунова в следующем виде:

$$V = \tfrac{1}{2}(\bar{\omega}_{отн}, J\bar{\omega}_{отн}) + \\ + k_a\left[(1-a_{11}) + (1-a_{22}) + (1-a_{33})\right], \qquad (3)$$

где $(\bar{\omega}_{отн}, J\bar{\omega}_{отн})$ – скалярное произведение векторов, являющееся физическим эквивалентом работы, необходимой для устранения вращения связанной системы координат относительно опорной;

$a_{ii}, i = \overline{1,3}$ – диагональные элементы матрицы направляющих косинусов;

$k_a > 0$ – коэффициент пропорциональности (размерность коэффициента $[k_a] = Hm$ ).

Функция (3) удовлетворяет требованиям, которые накладываются на функцию Ляпунова, при следующих условиях: $V = 0$ при $\omega_{отн} = 0$ и единичной матрице A; $V > 0$ при всех остальных значениях $\omega_{отн}$ и A.

Учитывая выше сказанное, первая производная функции Ляпунова будет иметь следующий вид:

$$\dot{V} = \tfrac{1}{2}(\bar{\omega}_{отн}, \left[\bar{M}_{упр} + \bar{M}_{внш} - \bar{\omega}_{абс} \times K - \dot{A}W - A\dot{W}\right]) - \\ -k_a\left(\dot{a}_{11} + \dot{a}_{22} + \dot{a}_{33}\right). \qquad (4)$$

На основании кинематических уравнений (2), исключаем из правой части выражения (4) производные по времени элементов матрицы направляющих косинусов ( $\dot{a}_{ii}, i = \overline{1,3}$ ):

$$\dot{V} = \tfrac{1}{2}\left(\bar{\omega}_{отн}, \begin{bmatrix} \bar{M}_{упр} + \bar{M}_{внш} - \bar{\omega}_{абс} \times K - \\ -WA\omega_o - A\dot{\omega}_o \end{bmatrix}\right) - \\ -k_a\begin{bmatrix} \omega_x\left(a_{32} - a_{23}\right) + \omega_y\left(a_{13} - a_{31}\right) + \\ +\omega_z\left(a_{21} - a_{12}\right) \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Введя в выражение (5) вспомогательный вектор $\wp = \left[a_{32} - a_{23} \quad a_{13} - a_{31} \quad a_{21} - a_{12}\right]^T$, получим следующее тождество:

$$\dot{V} = \tfrac{1}{2}\left(\bar{\omega}_{отн}, \begin{bmatrix} \bar{M}_{упр} + \bar{M}_{внш} - \bar{\omega}_{абс} \times \bar{K} - \\ -WA\bar{\omega}_o - A\dot{\bar{\omega}}_o - k_a\wp \end{bmatrix}\right). \qquad (6)$$

С целью гарантированного выполнения условия $\dot{V} = 0$ при $\omega_{отн} = 0$ и единичной матрице A, а также удовлетворению неравенства $\dot{V} < 0$ при всех остальных значениях $\omega_{отн}$ и A, как того требует теорема Барбашина-Красовского, принято следующее

$$\bar{M}_{упр} + \bar{M}_{внш} - \bar{\omega}_{абс} \times \bar{K} - WA\bar{\omega}_o - \\ -A\dot{\bar{\omega}}_o - k_a\wp = -k_\omega\bar{\omega}_{отн}, \qquad (7)$$

где $k_\omega > 0$ – коэффициент пропорциональности, который также как и $k_a$ является параметром управления (размерность коэффициента $[k_\omega] = Hmc$ ).

Анализ выражения (7) показывает, что выражение для управления, обеспечивающее асимптотическую устойчивость положения равновесия $\omega_{отн} = 0$ и A – единичная матрица, будет иметь следующий вид:

$$\bar{M}_{упр} = -k_\omega\bar{\omega}_{отн} + \bar{\omega}_{абс} \times \bar{K} + WA\bar{\omega}_o + \\ + A\dot{\bar{\omega}}_o + k_a\wp - \bar{M}_{внш}. \qquad (8)$$

Заменив управление в (1) на выражение (8), получим:

$$J\dot{\bar{\omega}}_{отн} + k_\omega\bar{\omega}_{отн} + k_a\wp = 0. \qquad (9)$$

Дополняя уравнение (9) кинематическими уравнениями, получаем систему уравнений управляемого движения замкнутой системы:

$$\begin{aligned}&J\dot{\bar{\omega}}_{отн} + k_\omega \bar{\omega}_{отн} + k_a \wp = 0;\\ &\dot{A} = WA.\end{aligned} \qquad (10)$$

## Исследование движения системы ориентации и стабилизации космическими аппарата с двигателями маховиками

Используя полученные уравнения управляемого движения замкнутой системы (10) проведем исследование движения СОС КА с ДМ. С целью конкретизации решаемой задачи рассматривается один из основных режимов СОС – совмещение осей инерции КА с соответствующими осями опорной системы координат. В качестве опорной системы координат выбрана орбитальная система координат. Следовательно, угловая скорость опорной системы координат будет представлять собой следующее значение: $\bar{\omega}_0 = \begin{pmatrix}0 & \omega_{орб} & 0\end{pmatrix}^T$, где $\omega_{орб}$ – угловая скорость орбитального движения. Управляющие моменты создаются тремя коллинеарными маховиками. Для такой компоновки маховиков, суммарный кинетический момент будет определяться следующим векторным равенством:

$$\bar{K} = J\bar{\omega}_{абс} + \bar{H}, \qquad (11)$$

где $\bar{H}$ – вектор кинетического момента маховика в связанной с КА системе координат.

Учитывая уравнения (1) и (11), управляющий векторное уравнение для определения управляющего момента примет вид:

$$\bar{M}_{упр} = -\dot{\bar{H}} - \left[\bar{\omega}_{абс}, \bar{H}\right]. \qquad (12)$$

Применив к уравнению (12), описанную выше методику, получаем систему уравнений, описывающую движение замкнутой системы, в контуре которой находится КА:

$$\begin{aligned}&J\dot{\bar{\omega}}_{отн} + k_a \wp + k_\omega \bar{\omega}_{отн} = 0;\\ &\dot{\bar{H}} + \left[(A\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_{отн}), \bar{H}\right] = M + k_a S -\\ &-\left[A\bar{\omega}_0, JA\bar{\omega}_0\right] + k_\omega \bar{\omega}_{отн} - \left[\bar{\omega}_{отн}, J\bar{\omega}_{отн}\right] -\\ &-\left[\bar{\omega}_{отн}, JA\bar{\omega}_0\right] - J\Omega A\bar{\omega}_0 - \left[A\bar{\omega}_0, J\bar{\omega}_{отн}\right] - JA\dot{\bar{\omega}}_0;\\ &\dot{A} = WA,\end{aligned} \qquad (13)$$

где $\wp = \begin{bmatrix}a_{23} - a_{32} & a_{31} - a_{13} & a_{12} - a_{21}\end{bmatrix}^T$.

При классическом синтезе систем стабилизации КА, целью исследования является определение параметров закона управления $k_a$ и $k_\omega$, обеспечивающих максимальную степень устойчивости характеристического полинома линеаризованной системы, а при синтезе законов параметрической подстройки необходимо решать обратные задачи. Рассмотрим решение классической постановки задачи, при этом перейдем к безразмерным величинам введением следующих обозначений:

$$H_0 = H_{max}\,;\; m = \dot{H}_{max}\,;\; t_0 = \frac{H_0}{m}, \qquad (14)$$

где $H_{max}$ и $\dot{H}_{max}$ – максимальные кинетический и реактивный моменты, создаваемые маховиком, соответственно, представляющие собой его паспортные характеристики.

Осуществляем дальнейший переход к безразмерным величинам:

$$\bar{\omega}_{отн} = \frac{1}{t_0}\bar{\Omega}\,;\; \bar{H} = H_0 \bar{h}\,;\; \dot{\bar{H}} = m\dot{\bar{h}}\,;\; t = t_0 \bar{\tau}\,;$$

$$I = I_x \mathrm{diag}(1 \quad \theta_1 \quad \theta_2)\,;\; \bar{\omega}_0 = \omega_{орб}\bar{\Omega}_0, \qquad (15)$$

где $\theta_1 = \dfrac{J_y}{J_x}$; $\theta_1 = \dfrac{J_z}{J_x}$; $J_x, J_y, J_z$ – моменты инерции симметричного КА относительно соответствующих осей связанной с его корпусом системой координат.

В безразмерных величинах первое векторное уравнение системы (13) представим следующим образом:

$$J\dot{\Omega} + K_a \wp + K_\omega \Omega = 0, \qquad (16)$$

где $K_a = \dfrac{t_0^2 k_a}{J_x}$; $K_\omega = \dfrac{t_0 k_\omega}{J_x}$.

Для дальнейшего определения параметров закона управления, обеспечивающего требуемые параметры движения КА, линеаризуем уравнение (16) в окрестности положения равновесия, т.е., когда

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \text{ и } \Omega = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Дополняя векторное уравнение (16), линеаризованными кинематическими уравнениями углового движения, получим:

$$\begin{aligned}&\dot{\Omega}_1 + 2K_a \wp + K_\omega \Omega_1 = 0;\\ &\theta_1 \dot{\Omega}_2 + 2K_a \wp + K_\omega \Omega_2 = 0;\\ &\theta_2 \dot{\Omega}_3 + 2K_a \wp + K_\omega \Omega_3 = 0;\\ &\dot{\psi} = \Omega_2;\\ &\dot{\vartheta} = \Omega_3;\\ &\dot{\gamma} = \Omega_1.\end{aligned} \qquad (17)$$

Характеристическое уравнение системы (17) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}&\left(\lambda^2 + K_\omega \lambda + 2K_a\right)\left(\theta_1 \lambda^2 + K_\omega \lambda + 2K_a\right) \times\\ &\times \left(\theta_2 \lambda^2 + K_\omega \lambda + 2K_a\right) = 0.\end{aligned} \qquad (18)$$

Поскольку необходимым условием работоспособности СОС КА является его устойчивость, то анализ на устойчивость осуществим по корням характеристического полинома (18):

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\frac{1}{2}K_\omega \pm \frac{1}{2}\sqrt{K_\omega^2 - 8K_\alpha}; \\ \lambda_{3,4} &= -\frac{1}{2}\frac{K_\omega}{\theta_1} \pm \frac{1}{2\theta_1}\sqrt{K_\omega^2 - 8\theta_1 K_\alpha}; \\ \lambda_{5,6} &= -\frac{1}{2}\frac{K_\omega}{\theta_2} \pm \frac{1}{2\theta_2}\sqrt{K_\omega^2 - 8\theta_2 K_\alpha}. \end{aligned} \quad (19)$$

В теории автоматического управления известно, что действительные части комплексных корней (19) определяют устойчивость системы управления.

При формировании требований к корням характеристического уравнения с целью обеспечения выполнения условия устойчивости необходимо, чтобы они как можно левее располагались от мнимой оси в плоскости комплексного переменного. Следовательно, условие устойчивости для корней (19) формируется следующим образом: необходимо найти такие значения параметров закона управления $K_\alpha$ и $K_\omega$, чтобы самый правый корень полинома (18) лежал как можно левее от мнимой оси в плоскости комплексного переменного, т.е. достигалась максимальная степень устойчивости. С целью выполнения сформированного условия для определения $K_\alpha$ и $K_\omega$, область параметров разделим на четыре части для случая выполнения условия $\theta_2 > \theta_1 > 1$, что вполне соответствует большинству проектируемых и эксплуатируемых симметричных космических летательных аппаратов:

$$\begin{aligned} &0 < K_\omega^2 \le 8K_\alpha; \\ &8K_\alpha < K_\omega^2 \le 8\theta_1 K_\alpha; \\ &8\theta_1 K_\alpha < K_\omega^2 \le 8\theta_2 K_\alpha; \\ &8\theta_2 K_\alpha < K_\omega^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Учитывая введенные ограничения на моменты инерции ( $\theta_2 > \theta_1 > 1$ ) и при выполнении первого условия системы (20), степень устойчивости будет определяться следующим выражением:

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\frac{K_\omega}{\theta_2}. \quad (21)$$

Для варианта выполнения последнего условия системы (20), степень устойчивости определяется выражением:

$$\xi_2 = \frac{1}{2}K_\omega \pm \frac{1}{2}\sqrt{K_\omega^2 - 8K_\alpha}. \quad (22)$$

При выполнении второго неравенства, степень устойчивости будет либо $\xi_1$, либо $\xi_2$. Равенство степеней устойчивости $\xi_1 = \xi_2$ будет достигаться при выполнении следующего условия:

$$K_\omega^2 = \frac{8\theta_2^2}{2\theta_2 - 1}K_\alpha. \quad (23)$$

С целью полноты анализа на степени устойчивости необходимо наложить ограничения, связанные с величиной управляющего момента, записываемые следующим аналитическим выражением:

$$\frac{H_0 t_0}{J_1} = 2\delta_{max}K_\alpha + \Omega_{max}K_\omega, \quad (24)$$

где $\delta_{max}$ и $\Omega_{max}$ – максимальные отклонения по ориентации и угловой скорости.

Зависимость (24) представляет собой нагрузочную характеристику, поэтому в плоскости параметров закона управления $(K_\omega, K_\alpha)$ все точки должны лежать левее прямой, описываемой функцией (24). Следовательно, искомые значения параметров закона управления будут располагаться на пересечении кривой (23) и прямой (24), а значение $K_\omega$ определено следующими выражениями:

$$\begin{aligned} K_\omega = &-\frac{2\Omega_{max}}{\delta_{max}}\frac{\theta_2^2}{2\theta_2 - 1} + \\ &+\frac{1}{\delta_{max}}\sqrt{\left(2\Omega_{max}\frac{\theta_2^2}{2\theta_2 - 1}\right)^2 + 4\frac{H_0 t_0}{J_1}\frac{\theta_2^2}{2\theta_2 - 1}}. \end{aligned} \quad (25)$$

## Заключение

В результате проведенных исследований определены параметры управления СОС КА с диагональным тензором инерции, обеспечивающие максимальную степень устойчивости. Кроме того, полученные аналитические выражения необходимы в последующем для параметрической подстройки параметров законов управления по полученной диагностической информации.

## Литература

*1. Экспериментальная отработка систем управления объектов ракетно-космической техники [Текст]: учеб. пособие / А.И. Батырев, Б.И. Батырев, Г.К. Бандарец и др.; под общ. ред. Ю.М. Златкина, В.С. Кривцова, А.С. Кулика, В.И. Чумаченко. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. Ин-т», НПП «Хартон-Аркос», 2008. – 501 с.*

*2. Ахметов, Р.Н. Методы и модели автономного управления живучестью автоматических космических аппаратов дистанционного зондинорования Землия [Текст] // Р.Н. Ахметов. – Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. Академика С.П. Королева. – 2008. – № 2. – С. 194 – 210.*

*3. Бортовые системы управления космическими аппаратами [Текст]: учебное пособие / А.Г. Бровкин, Б.Г. Бурдычов, С.В. Гордийко и др.; под ред. А.С. Сырова. – М.: Изд-во МАИ – ПРИНТ, 2010. – 340 с.*

*4. Лученко, О.А. Формирование избыточного блока двигателей-маховиков системы ориентации и стабилизации симметричного малогабаритного космического аппарата [Текст] / О.А. Лученко, А.Н. Таран, С.Н. Фирсов. // Авиационно-космическая техника и технология. – 2010. – № 6 (73). – С. 44 – 48.*

*5. Определение параметров установки двигателей-маховиков системы ориентации и стабилизации несимметричного малогабаритного космического аппарата [Текст] / О.А. Лученко, А.Н. Таран, С.Н. Фирсов, В.Н. Постников // Авиационно-космическая техника и технология. – 2011. – №1 (78). – С. 63 – 68.*

*6. Кулик, А.С. Концепция обеспечения живучести спутниковых систем управления ориентацией и стабилизацией [Текст] / А.С. Кулик, О.А. Лученко, С.Н. Фирсов // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – 2011. –№2. – С. 10 – 22.*

*7. Кунцевич, В.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова [Текст] / В.М. Кунцевич, М.М. Лысак. – М.: Наука, 1977. – 400 с.*

*Поступила в редакцию 31.05.2012*

**Рецензент:** д-р техн. наук проф., заведующий кафедрой авиационных систем и измерений Н.Д. Кошевой, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е.Жуковского «ХАИ», Харьков.

## АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ УПРАВЛІННЯ СИСТЕМИ ОРІЄНТАЦІЇ КОСМІЧНОГО АПАРАТУ

***С.М. Фірсов***

Запропоновано аналітичний метод визначення параметрів закону управління супутникової системи орієнтації та стабілізації космічного апарату, що дозволяє за діагностичною інформацією про функціональний стан елементів системи стабілізації і самого космічного апарату коректувати параметри законів управління, забезпечуючи при цьому асимптотичну стійкість замкнутої системи. Визначено граничні значення параметрів управління, що забезпечують максимальну ступінь стійкості, як функції початкових умов кутового руху космічного апарату і максимальних значень виконавчої системи, а також допустимого значення кутової швидкості обертання супутника.

**Ключові слова**: космічний апарат, функція Ляпунова, ступінь стійкості, супутникова система орієнтації та стабілізації.

## ANALYTICAL METHOD FOR THE DETERMINATION OF THE PARAMETERS OF ORIENTATION OF SPACECRAFT

***S.N. Firsov***

An analytical method for determining the parameters of the control law of satellite attitude control and stabilization system of the spacecraft is offered. It allows by diagnostic information about the functional state of the elements of the stabilization system and information of the spacecraft itself to correct the parameters of control laws, while ensuring the asymptotic stability of the closed-loop system. The boundary values of control parameters to ensure maximum degree of stability as a function of the initial conditions of angular movement of the spacecraft and the maximum values of the executive system, and the allowable values of angular velocity of rotation of the satellite are determined.

**Keywords**: spacecraft, Lyapunov function, the degree of stability, satellite attitude control and stabilization system.

**Фирсов Сергей Николаевич** – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры систем управления летательными аппаратами Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина.