УДК 532.516.5

Ю.А. КРАШАНИЦА

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

На базе оригинального аппарата векторно-тензорного анализа, где развиты теоремы как дифференциального, так и интегрального типов, получены обобщения интегралов системы дифференциальных законов сохранения механики жидкости, а также интегральные представления решений полной системы уравнений Навье-Стокса в случае обтекания произвольного телесного профиля потоком вязкой несжимаемой жидкости также и вблизи поверхности раздела. Эта апробированная идеология позволяет проводить широкомасштабные исследования практически востребованных задач современной аэродинамики летательных аппаратов и их частей, а также получить новые современные подходы к решению классических задач векторного анализа.

Ключевые слова: *телесный профиль, система уравнений Навье-Стокса, векторные потенциалы, интегральные представления решений и система интегральных уравнений*

Введение

Сведение краевой или начально-краевой задачи к интегральному уравнению или к адекватной системе интегральных уравнений позволяет: понизить размерность задачи и рассматривать более сложные классы задач, чем те которые решаются другими методами; непосредственно определять неизвестные величины на границах, не вычисляя их во всем пространстве движения; решение во внутренних точках области находятся интегрированием; в силу граничных условий, гидродинамические нелинейные задачи привести к системе линейных граничных интегральных уравнений относительно неизвестных краевых значений разыскиваемых параметров задачи или функций от них [1]. Метод позволяет ставить и решать экстремальные задачи, которые невозможно решить другими методами.

Постановка задачи

В силу многопараметричности и нелинейности основных задач механики сплошных сред, существенное развитие, наряду с физическим, получил вычислительный эксперимент, а также продолжает совершенствоваться идеология теоретических исследований. Значительные достижения получены в численном анализе и, особенно, в численной реализации конкретных математических моделей механики вязкой несжимаемой жидкости.

Наиболее достоверной и апробированной математической моделью движения несжимаемой нетеплопроводной жидкости является краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных Навье-Стокса [2], которая в случае отсутствия массовых сил состоит из уравнения неразрывности

$$(\nabla, \mathbf{V}) = 0 \tag{1}$$

и закона сохранения импульса

$$(\nabla, (\mathbf{V}\rho\mathbf{V})) = (\nabla, \mathbf{T}), \tag{2}$$

где тензор напряжений имеет вид:

$$\mathbf{T} = -\mathbf{I}p + \mu\nabla\mathbf{V} \tag{3}$$

$\mathbf{I}$ - единичный тензор, p – скалярное давление, ρ - плотность среды, а $\mathbf{V}$ - вектор скорости.

Причем искомые характеристики обтекания: давление - p и завихренность - $\mathbf{\Omega}$ (рис. 1), должны определяться с учетом заданных граничных условий:

$$\begin{gathered} \mathbf{V}\big|_L = \mathbf{V}_L; \\ \mathbf{V} \underset{r\to\infty}{\to} \mathbf{V}_\infty; \quad p \underset{r\to\infty}{\to} p_\infty; \quad \rho = \text{const}. \end{gathered} \tag{4}$$

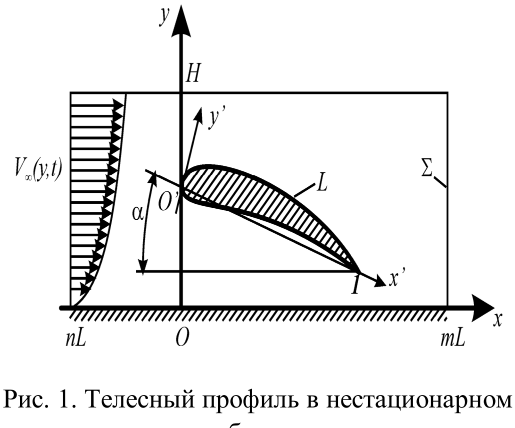

Рис. 1. Телесный профиль в нестационарном завихренном потоке вблизи поверхности раздела

Кроме этого, здесь необходимо выделить тот классический факт, что векторы скорости $\mathbf{V}$ и завихренности $\mathbf{\Omega}$ являются решениями основной задачи векторного анализа [3-4]:

$$\begin{aligned}(\nabla, \mathbf{V}) &= q;\\ (\nabla, \mathbf{\Omega}) &= 0,\end{aligned} \tag{5}$$

где q - интенсивность возможных источников/стоков массы и параметров энергетической механизации [5-6].

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{V} &= \mathbf{i}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y};\\ \nabla * \mathbf{V} &= \mathbf{i}\nabla v_x + \mathbf{j}\nabla v_y\end{aligned} \tag{6}$$

а $\nabla\mathbf{V}$ и $\nabla * \mathbf{V}$ сопряженные тензоры.

Система (1 – 4) впервые была построена в 1822 году. До настоящего времени не найден общий метод исследования и решения этой нелинейной системы, а известны лишь некоторые частные случаи линеаризации, когда удавалось найти аналитические решения системы Навье-Стокса [7]. Тем не менее, современное развитие как методов математической физики, так и теории обобщенных функций в применении к краевым задачам, и, в первую очередь, аэрогидродинамики, позволяют выходить на аналитические решения определенных классов нелинейных задач [8].

Векторно-тензорные дифференциальные операции

Нетрудно показать, что для любых вектор-функции **a** и скалярной функции φ, имеющих непрерывные производные до второго порядка включительно в исследуемой области, имеют место следующие обобщенные операции векторно-тензорного анализа, которые будут также широко использоваться и в дальнейшем (выражение вида **ab** - диада):

$$(\nabla, (\mathbf{I}\varphi)) = \nabla\varphi;; \tag{7_1}$$

$$[\nabla, \mathbf{I}\varphi] = [\mathbf{I}, \nabla\varphi]; \tag{7_2}$$

$$(\nabla, [\mathbf{I}, \mathbf{a}]) = [\nabla, \mathbf{a}]; \tag{7_3}$$

$$[\nabla, [\mathbf{kk}, \mathbf{a}]] = [\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{I}]] = \nabla * a - \mathbf{I}(\nabla, \mathbf{a}); \tag{7_4}$$

$$[\mathbf{I}, [\nabla, \mathbf{a}]] = \nabla * a - \nabla\mathbf{a}; \tag{7_5}$$

$$[\nabla, [\mathbf{I}, \mathbf{a}]] = -\mathbf{kk}(\nabla, \mathbf{a}); \tag{7_6}$$

$$\nabla(\nabla, \mathbf{a}) = (\nabla, \nabla * \mathbf{a}). \tag{7_7}$$

Поэтому основную задачу векторного анализа гидродинамического содержания (5) целесообразно сформулировать в консервативной форме (см. (7_7))

$$\nabla(\nabla, \mathbf{V}) = (\nabla, \nabla * \mathbf{V}) = \nabla q; \tag{8}$$

$$\nabla(\nabla, \mathbf{\Omega}) = (\nabla, \nabla * \mathbf{\Omega}) = 0. \tag{9}$$

В представленной работе предполагается отсутствие как объемных, так и поверхностных источников массы $(q = 0)$, хотя эта идеология позволяет учитывать физико-химические взаимодействия с реагированием, приводящие к важным эффектам, существенно влияющих на аэрогидродинамические характеристики объектов аэрокосмической техники на любых режимах полета и в любой среде или атмосфере.

Приведенные векторно-тензорные операции (7) позволяют выписать закон сохранения импульса (2), при указанных ограничениях, в консервативной форме, которая широко используется в мировой практике вычислительной аэрогидродинамики [9]

$$\begin{aligned}&\left(\nabla, \left\{\mathbf{VV} + \frac{p}{\rho} - \nu\nabla\mathbf{V}\right\}\right) \equiv\\ &\equiv \left(\nabla, \left\{\mathbf{VV} + \frac{p}{\rho} + \nu[\mathrm{I}, \mathbf{\Omega}]\right\}\right) = 0.\end{aligned} \tag{10}$$

Консервативная форма закона сохранения (10) допускает введение векторного потенциала:

$$\mathbf{VV} + \frac{p}{\rho} - \nu\nabla\mathbf{V} \equiv \mathbf{VV} + \frac{p}{\rho} + \nu[\mathrm{I}, \mathbf{\Omega}] = \nabla * \mathbf{\Psi}, \tag{11}$$

где векторный потенциал $\mathbf{\Psi}$ принадлежит к классу решений базового уравнения типа (9) основной задачи векторного анализа :

$$(\nabla, \nabla * \mathbf{\Psi}) \equiv \nabla(\nabla, \mathbf{\Psi}) = 0. \tag{12}$$

Фундаментальное решение основной задачи векторного анализа

Условия Коши-Римана $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$; $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$ можно представить в векторных видах: $\nabla\varphi = [\nabla, \mathbf{k}\psi]$, $\nabla\psi = -[\nabla, \mathbf{k}\varphi]$, где функции φ и ψ - сопряженные аналитические функции – известные решения уравнения Лапласа: $\varphi = \frac{1}{2\pi}\ln|r - r_0|$, $\psi = \frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y - y_0}{x - x_0}$.

Отсюда следует, что тензор

$$\mathbf{\Gamma}(|r - r_0|) = \mathbf{I}\varphi - [\mathbf{I}, \mathbf{k}\psi]$$

является консервативным

$$(\nabla, \mathbf{\Gamma}) = (\nabla, (\mathbf{I}\varphi - [\mathbf{I}, \mathbf{k}\psi])) = \nabla\varphi - [\nabla, \mathbf{k}\psi] = 0, \tag{13}$$

а в силу условий Коши-Римана и потенциальным, так как

$$[\nabla, \mathbf{\Gamma}] = \mathbf{k}\left(\mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) - \mathbf{k}\left(\mathbf{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0. \tag{14}$$

Кроме этого, можно утверждать [3-4], что тензор $\mathbf{\Gamma}$ является фундаментальным решением дифференциальных операторов второго порядка видов (8-9, 12):

$$\nabla(\nabla,\mathbf{\Gamma}) = \Delta\mathbf{\Gamma} + [\nabla,[\nabla,\mathbf{\Gamma}]] = \mathbf{I}\Delta\varphi. \qquad (15)$$

Интегральные представления решений

Исходя из обобщенных формул Грина, применяя классический процесс выделения особой точки, с учетом известных свойств потенциала двойного слоя $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, имеем интегральное представление решения оператора $\nabla(\nabla,\mathbf{a}) = \nabla q$ для произвольного вектора $\mathbf{a}$ в плоской области с контрольной границей (Σ) (рис. 2).

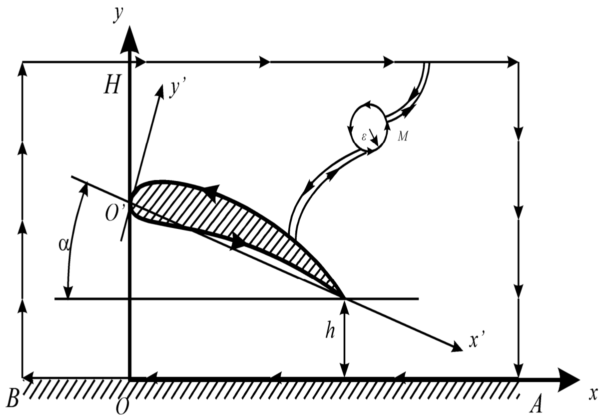

Рис. 2. Выделение особой точки внутри контрольной области

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = -\iint_{(\tau)}(\nabla q,\mathbf{\Gamma})d\tau +$$
$$+\oint_{(L+\Sigma)}\left(\left\{\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial n} + [\mathbf{n},[\nabla,\mathbf{a}]]\right\},\mathbf{\Gamma}\right)d(l+\sigma) -$$
$$-\oint_{(L+\Sigma)}\left(\mathbf{a},\frac{\partial\mathbf{\Gamma}}{\partial n}\right)d(l+\sigma). \qquad (16)$$

В простейшем случае движения несжимаемой нетеплопроводной жидкости при отсутствии источников массы в области, отсюда имеем интегральное представление, например, вектора скорости

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \oint_{(L+\Sigma)}\left(\left\{\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial n} + [\mathbf{n},\mathbf{\Omega}\ ]\right\},\mathbf{\Gamma}\right)d(l+\sigma) -$$
$$\oint_{(L+\Sigma)}\left(\mathbf{V},\frac{\partial\mathbf{\Gamma}}{\partial n}\right)d(l+\sigma), \qquad (17)$$

где контурные интегралы в уравнениях (16-17) допускают численную реализацию в силу их принадлежности к классу сингулярных интегралов и интегралов со слабой особенностью.

Выводы

Представлено развитие нового общего направления численно-аналитического решения широкого класса нелинейных задач механики сплошных сред. Развиты новый подход и формализм в построении граничных интегральных уравнений эквивалентных начально-краевым задачам основных математических моделей механики жидкости и газа.

Литература

1. Boundary-integral equation method: computational applications in applied mechanics [Text] /ed. T. Cruse, F. Rizzo. - N.Y., 1975. – 368 p.

2. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа [Текст]: учеб. для вузов / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1970. – 904 с.

3. Кочин, Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления [Текст] / Н.Е. Кочин. – М.: АН СССР, 1961. – 427 с.

4. Крашаница, Ю.А. Основная задача векторного анализа в механике сплошных сред (сообщение 1) [Текст] / Ю.А. Крашаница // Вісник Дніпропетровського університету. – 2000. – Т. 1, вып.3. – С. 52 – 56.

5. Баев, Б.С. Аэродинамические характеристики пластины со стоком на верхней поверхности вблизи земли [Текст] / Б.С. Баев, Ю.А. Крашаница // Самолетостроение. Техника воздушного флота: респ. межведомств. науч.-техн. сб. / МВиССО УССР, Харьк. авиац. ин-т. – Х., 1981. – Вып. 48. – С. 15–17.

6. Крашаница, Ю.А. Нелинейная задача о тонком профиле со струйным закрылком [Текст]:/ Ю.А. Крашаница, Ф. А. Мохаммед // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. / МОН Украины, Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 19.– Х., 2003. – С. 28–33.

7. Грищенко, В.А. Решение краевой задачи Стокса методом граничных интегральных уравнений [Текст] / В.А. Грищенко, Ю.А. Крашаница // Аэрогидродинамика: проблемы и перспективы: сб. науч. тр. / МОН Украины, Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 2. – Х., 2006. – С. 51–55.

8. Кириченко, Д.В. Про один клас аналітичних розв'язків системи рівнянь Нав'є–Стокса [Текст]/ Ю.О. Крашаниця, Д.В. Кириченко // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – Вип. 17/18. – К., 2007.– С. 84–88.

9. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкости [Текст] / К. Флетчер. – М.: Мир, 1991. Т.1 – 502 с. Т.2 – 552 с.

Поступила в редакцию 15.06.2012

Рецензент: д-р физ.-мат наук, проф., чл.-корр. РАН, нач. отдела И.И. Липатов, ЦАГИ им. проф. Н.Е. Жуковского.

МЕТОД ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ

Ю.О. Крашаниця

На базі оригінального апарату векторно-тензорного аналізу отримані узагальнення інтегралів диференціальних законів збереження, а також інтегральні представлення розв'язків повної системи рівнянь Нав'є-Стокса у випадку обтікання довільного тілесного профілю потоком в'язкої нестисливої рідини також і поблизу поверхні розділу.

Ключові слова: тілесний профіль, система рівнянь Нав'є-Стокса, векторні потенціали, інтегральне подання розв'язків, система інтегральних рівнянь

METHOD OF BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS IN PLANE VISCOUS FLUID DYNAMICS PROBLEMS

Y.A. Krashanytsya

On the basis of the original unit vector and tensor analysis, the generalization of the integrals of differential conservation laws, as well as integral representations of solutions of the full Navier-Stokes equation for flow past an arbitrary solid profile of a viscous incompressible fluid is also close to the interface.

Key words: solid profile, the system of Navier-Stokes equations, vector potentials of integral representations of solutions, the system of integral equations

Крашаница Юрий Александрович – главн. научн. сотр., д-р техн. наук, профессор кафедры аэрогидродинамики Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков