

УДК 539.4:517.958:629.7.02

С.А. ХАЛИЛОВ, В.Б. МИНТЮК, Д.А. ТКАЧЕНКО

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИБЛИЖЁННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЫ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ ПРИ ОДНОРОДНЫХ ГЛАВНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

Исходя из свойства квазиортогональности в энергетической метрике бигармонического оператора системы функций, предложенной авторами, построено приближённое аналитическое решение поставленной краевой задачи. Выполнено полное исследование точности и сходимости полученного решения в различных метриках. Важные поточечные оценки решения и его производных до второго порядка включительно, представленные в виде подробных таблиц и графиков, позволяют сделать вывод о высокой его точности, согласованной с точностью математической модели тонких жестких пластин. Полученные решения дают возможность проектировщику многократно и оперативно применять их в инженерных расчётах.

Ключевые слова: энергетическое пространство положительно определённого оператора, квазиортогональность в энергетической метрике, приближённое аналитическое решение, сходимость по энергии, поточечная сходимость, точность.

Введение

Точное решение рассматриваемой проблемы до сих пор не получено. Приближённые же решения, полученные на основе различных подходов, не обладают требуемой точностью, устойчивостью, как процедур численного анализа, так и самих решений, а их сходимость и эффективность вычислений оставляют желать лучшего.

В предыдущей работе авторов [1], естественным продолжением которой является данная работа, получены решения «жёсткой» задачи для бигармонического оператора в прямоугольнике способом сведения к бесконечной системе алгебраических уравнений, а также вариационным методом с привлечением различных систем координатных функций (базисов).

Эти решения сопоставлялись в плане точности и сходимости между собой и с результатами, полученными по методу конечного элемента (МКЭ). Было показано, что наилучшими свойствами матрицы линейных алгебраических уравнений (матрицы Грама) обладают базисы Даревского-Шаринова и МКЭ (рис. 1 работы [1]). Что касается четырёх других базисов, то с вычислительной точки зрения лучшими представляются базисы, предложенные в работах [2, 3]. Поскольку эти базисы являются полиномиальными, то решения, доставляемые ими, полностью совпадают в любом приближении, а их точность несколько превосходит точность решений, приведенных в широко известной монографии [4].

Одна из важнейших задач - обеспечение стремления невязки к нулю. Этот вопрос был исследован в работе [1] с использованием базисов работ [2, 3], и

было показано, что относительная невязка при приближении к угловым токам составляет менее 1,2%, а в областях, удалённых от угловых точек, она практически обращается в нуль (рис. 6 работы [1]). Это несомненное достоинство указанных базисов.

К данной краевой задаче редуцируются неоднородные краевые задачи при произвольных краевых условиях: плоская задача теории упругости при произвольной корректно заданной системе напряжений на границе и задача изгиба при произвольной системе заданных на границе перемещений и углов поворота.

Здесь ставится задача построения и исследования аналитических решений указанных выше задач, которые способствуют созданию эффективных подходов к анализу тонкостенных пространственных систем, состоящих из гладких и подкреплённых пластин, работающих в условиях обобщенного плоского напряжённого состояния и изгиба.

Один из таких подходов, опирающийся на метод сопряжения конструктивных элементов, разработан в Национальном аэрокосмическом университете им. Н.Е. Жуковского «ХАИ» и широко используется авторами и сотрудниками, а также в Государственном предприятии «Антонов». Разработанные методы и алгоритмы позволяют многократно проводить численные эксперименты на стадии проектирования, а также дать окончательное заключение о рациональности (прочности, устойчивости, собственных частотах, ресурсе, надёжности и т.д.) силовых схем конструкций аэрокосмической техники.

При решении задач прямыми методами матрица Грама линейно независимой полной системы координатных функций строится в энергетической

метрике H_A положительно определённого оператора A , каковым является оператор рассматриваемой задачи. Следует отметить, что матрица Грама, построенная по базису работы [2], имеет диагональное преобладание, а по базису работы [3] – является ленточной (одно из достоинств МКЭ здесь исчезает).

Обратимся к проблеме построения базиса, обладающего требуемыми свойствами. Пусть в некоторой открытой области Ω с липпшецевой границей Γ ищется решение краевой задачи с положительно определённым оператором A

$$Au = f \text{ в } \Omega, \quad Vu = \varphi \text{ на } \Gamma,$$

где A и B – некоторые матричные дифференциальные операторы (причём A – положительно определённый), f и φ – заданные вектор-функции, такие, что обозначенная выше краевая задача корректна и разрешима единственным образом, u – искомая вектор-функция. Энергетическое пространство оператора A обозначим через H_A . В этом пространстве введём энергетическое произведение $[u, v]$ и энергетическую норму $\|u\|$ (здесь элементы $u, v \in H_A$)

$$[u, v] \equiv (Au, v) = (Av, u), \quad u \in H_A, \quad v \in H_A, \quad (1)$$

$$[u, u] = (Au, u) \equiv \|u\|^2, \quad (2)$$

где (u, v) – скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$

$$(u, v) = \int_{\Omega} u^T v d\Omega.$$

В рассматриваемой задаче u – скалярная функция двух вещественных переменных, $f \in L_2(\Omega)$ (это условие можно ослабить), A – двумерный бигармонический оператор, B – оператор, задающий главные краевые условия, $\varphi \equiv 0$, Ω – область, занятая прямоугольником. Тогда $H_A(\Omega) \equiv W_2^2(\Omega)$ – пространство С.Л. Соболева, состоящее из функций, интегрируемых в Ω с квадратом вплоть до вторых частных производных включительно и обращающихся в нуль вместе с производной по нормали на границе Γ .

Точное решение этой задачи не получено по сей день, поэтому целесообразно её решать прямыми методами математической физики (Релея-Ритца, Бубнова-Галёркина и др.). Качество подобных приближённых решений (устойчивость, сходимости, точность и стремление невязки к нулю) определяется удачным назначением системы координатных функций, которые должны удовлетворять известным требованиям.

Если выполнены обязательные условия линейной независимости и полноты системы координатных функций в H_A , то из этой исходной системы можно путём ортогонализации в метрике H_A по Грама-Сонину-Шмидту получить новый базис, удовлетворяющий всем требованиям к нему. Однако процедура ортогонализации, как известно, является неустойчивой и требует значительных затрат времени. Более того, с увеличением числа элементов базиса они становятся весьма близкими к линейно зависимым. Поэтому от такого пути приходится отказаться.

Следовательно, для получения диагональной матрицы Грама требуется ортогональность в $L_2(\Omega)$ как самих функций, так и их производных до некоторого порядка K относительно одной и той же весовой функции $\rho_k \equiv 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K$. А таких систем функций, кроме тригонометрической системы, не существует в классе непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций до некоторого требуемого порядка (в зависимости от порядка оператора A). И вот почему.

В конце XIX столетия перед математиками – специалистами по теории функций вещественной переменной стал вопрос [5, Дополнения Я.Л. Геронимуса]: «...существуют ли ортогональные многочлены, производные которых любого порядка $k = 0, 1, 2, \dots$ также ортогональны?», при этом веса $\rho_k(x)$ не оговаривались.

В 1887 г. будущий академик Петербургской академии наук (с 1894 г.) Николай Яковлевич Сонин доказал теорему [5, Дополнения Я.Л. Геронимуса], которая утверждала, что такими многочленами могут быть только классические ортогональные многочлены, при этом оказалось, что весовые функции $\rho_k(x)$ различны при различных k .

Классическими ортогональными многочленами являются общие многочлены Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, $\alpha > -1, \beta > -1, x \in [-1, 1]$ ортогональные с весом $\rho_0(x) = (1-x)^\alpha \cdot (1+x)^\beta$; многочлены Чебышёва-Лагерра $L_n(x, \alpha)$, $x \in (0; \infty)$, $\alpha > -1$ и многочлены Эрмита $E_n(x)$, $x \in (-\infty; \infty)$. Частные случаи многочленов Якоби – многочлены Чебышёва первого рода $\left(\alpha = \beta = -\frac{1}{2}\right)$, многочлены Чебышёва второго рода $\left(\alpha = \beta = \frac{1}{2}\right)$ и многочлены Лежандра $(\alpha = \beta = 0)$. Так, для общих многочленов Якоби весовая функция $\rho_k(x)$ имеет вид [6]

$$\rho_k(x) = (1-x)^{\alpha+k} (1+x)^{\beta+k}. \quad (3)$$

Таким образом, получить диагональную матрицу Грама без процедуры ортогонализации в N_A невозможно.

Более общий вопрос, поставленный в первой половине XX века академиком АН СССР Николаем Николаевичем Лузиным [5, Дополнения Я. Л. Геронимуса]: «...выяснить, существуют ли, кроме тригонометрической системы, ортогональные системы функций, производные которых также образуют ортогональную систему». Этот вопрос, к сожалению, по сей день не нашел ответа.

Пусть область Ω является декартовым произведением одномерных областей

$$\omega_i = \{x_i : a_i < x_i < b_i\},$$

и пусть в каждой области ω_i существует множество систем ортогональных в $L_2(\omega_i)$ функций и задано некоторое число $\varepsilon > 0$. Поставим задачу: среди оговоренных систем функций выбрать такую систему, чтобы выполнялись неравенства

$$\int_{\omega_i} \varphi_m^{(k)}(x) \varphi_n^{(k)}(x) dx \leq \varepsilon, \quad k = 1, 2 \dots K, \quad (4)$$

при как можно меньших значениях ε .

Производные от этих функций до K -го порядка назовём **квазиортогональными**. В нашем случае $K = 2$ (этим случаем и ограничимся), а область Ω есть декартово произведение областей $\omega_1(-1,1)$, $\omega_2(-1,1)$:

$$\Omega = \{(x, y) : -1 < x < 1, -1 < y < 1\} = \omega_1 \{x : -1 < x < 1\} \times \omega_2 \{y : -1 < y < 1\}. \quad (5)$$

Составим из функций $\varphi_m(x) \in \omega_1$ и $\psi_n(y) \in \omega_2$ функцию $\gamma_{mn}(x, y) = \varphi_m(x) \cdot \psi_n(y)$. Тогда функции $\gamma_{mn}(x, y)$ будут квазиортогональными в оговорённом выше смысле в энергетическом пространстве N_A оператора A . Введенное понятие квазиортогональности означает, что влиянием недиагональных членов матрицы Грама на решение системы линейных алгебраических уравнений можно пренебречь. Погрешность такого допущения можно исследовать только путём численного эксперимента для рассматриваемого класса задач. Подробному исследованию этого вопроса и посвящена настоящая работа.

1. Постановка задачи и приближённое аналитическое решение

Как и ранее [1], рассматривается краевая задача в прямоугольной области

$$\Omega = \{(x, y) : -1 < x < 1; -1 < y < 1\},$$

описываемая дифференциальным уравнением

$$Aw = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^4 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{qa^4}{D} \quad (6)$$

при однородных краевых условиях

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (7)$$

где $w(x, y)$ – функция прогиба пластины;

n – нормаль к границе Γ ;

$\lambda = a/b$; $2a, 2b$ – размеры пластины в плане;

$q(x, y)$ – функция давления из класса $L_2(\Omega)$;

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{– цилиндрическая жёсткость пла-}$$

стины постоянной толщины h ;

E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины соответственно.

На основе сказанного об ортогональности производных некоторой ортогональной системы функций зададимся вопросом: нельзя ли сконструировать такую полную в $L_2(-1,1)$ и ортонормированную с единичным весом систему функций, производные которой до заданного порядка k были бы приближённо ортогональны с тем же единичным весом? Если это так, то можно построить, хотя и приближённое в указанном выше смысле, но аналитическое решение краевой задачи (6) – (7). Было обнаружено [2], что такие системы функций всё-таки существуют. Это функции $H_n^{(\alpha=1)}(x)$ [2], которые в дальнейшем обозначаются просто $H_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Для подтверждения сказанного ниже приводятся графики первых десяти функций $H_n(x)$ (рис. 1) и их первых (рис. 2) и вторых (рис. 3) производных.

Нетрудно заметить, что сами функции $H_n(x)$ и их первая и вторая производные обладают теми же основными свойствами, что и классические ортогональные многочлены (например, многочлены Лежандра), а именно:

– функции с чётными индексами и их производные четного порядка являются чётными, производные же нечётного порядка – нечётными; и наоборот: функции с нечётными индексами и их производные четного порядка являются нечётными, производные же нечётного порядка – чётными;

– число нулей этих функций в открытой области $(-1,1)$ в точности совпадает с их порядком n , число нулей производных этих функций всякий раз увеличивается на единицу;

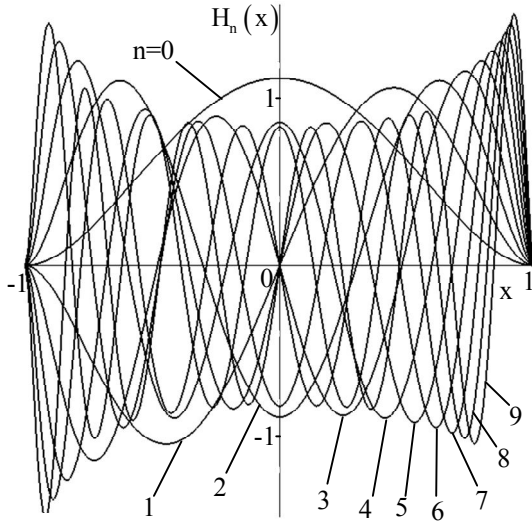


Рис. 1. Ортонормированные функции $H_n(x)$

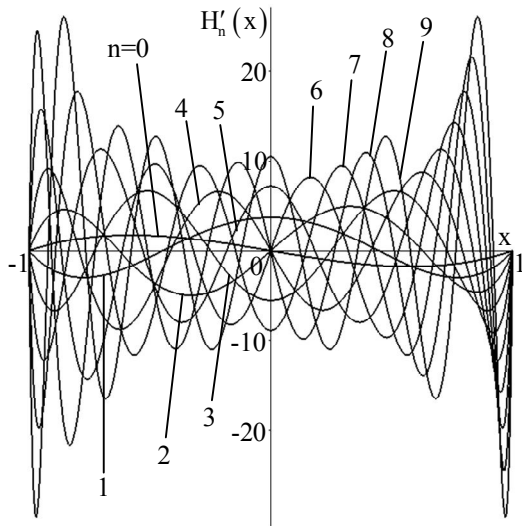


Рис. 2. Первые производные функций $H_n(x)$

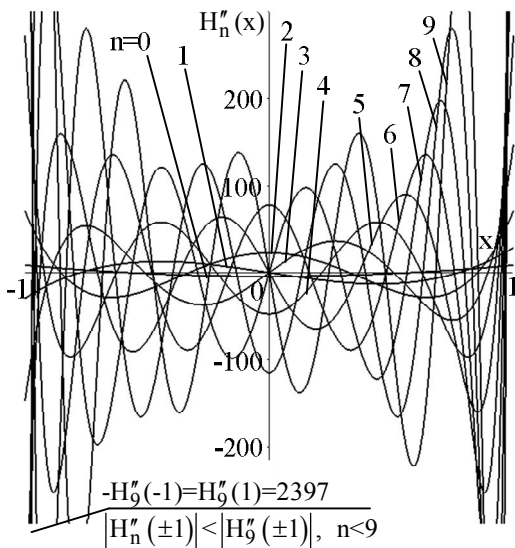


Рис. 3. Вторые производные функций $H_n(x)$

– нули функций и их первых и вторых производных перемежаются и сгущаются к концам отрезка ортогональности;

– между двумя соседними нулями функций, их первых и вторых производных имеет место экстремум.

Отсюда следует, что функции $H_n(x)$ и их первые и вторые производные обладают такими же хорошими аппроксимативными свойствами, как и классические ортогональные многочлены, хотя сами функции к последним не относятся.

Исходя из сказанного можно заключить, что ответ на поставленный вопрос – положительный, используем это для дальнейшего исследования.

Из краевой задачи (6) – (7) следует интегральное тождество

$$(Aw, v) - (q^*, v) \equiv 0, \quad (8)$$

где $q^* = \frac{qa^4}{D}$.

В тождестве (8) $w \in W_2^0(\Omega)$, $v \in W_2^0(\Omega)$, (Aw, v) – энергетическое произведение в $H_A(\Omega)$, (q^*, v) – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, $W_2^0(\Omega)$ – пространство С.Л. Соболева, элементы которого удовлетворяют условиям (7).

Конкретно

$$(Aw, v) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \lambda^4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) d\Omega \equiv [w, v], \quad (9)$$

$$(q^*, v) = \int_{\Omega} q^* v d\Omega.$$

При $v = w$ первое равенство из (9) определяет квадрат нормы функции w в H_A . Эта величина пропорциональна потенциальной энергии деформирования в задаче изгиба пластин (w – функция прогиба) и в плоской задаче теории упругости (w – функция напряжений).

Решение краевой задачи (6) – (7) будем искать в виде

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} H_m(x) H_n(y), \quad (10)$$

$$H_m(x) H_n(y) \in W_2^0(\Omega).$$

В тождестве (8) положим $w = H_m(x) H_n(y)$, $v = H_i(x) H_j(y)$, в результате чего после интегрирования по частям с учётом краевых условий (7)

получим

$$(Aw, v) = (H'_1 H'_1) \delta_{nj} + 2\lambda^2 (H'_1 H'_1) (H'_n H'_j) + \lambda^4 (H'_n H'_j) \delta_{mi}, \quad (11)$$

здесь $m, n, i, j = 0, 1, 2, \dots$, δ_{kl} – символ Кронекера.

Известно [2], что первые и вторые производные функции H_n квазиортогональны в $L_2(-1, 1)$. Тогда

$$(Aw, v) = 0, \\ (Aw, w) = \|H'_m\|^2 + 2\lambda^2 \|H'_m\|^2 \|H'_n\|^2 + \lambda^4 \|H'_n\|^2 \equiv \|w\|^2, \quad (12)$$

и матрица Грама полной линейно независимой системы $\varphi_{mn}(x, y) \equiv H_m(x)H_n(y) \in H_A(\Omega)$ является диагональной.

С учётом этого положения можно записать приближённое аналитическое решение краевой задачи (6) – (7)

$$w(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \varphi_{mn}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q a^4 \varphi_{mn}(x, y) dx dy}{D \| \varphi_{mn}(x, y) \|^2} \varphi_{mn}(x, y). \quad (13)$$

Таким образом, равенством (13) даётся приближённое, но аналитическое решение поставленной краевой задачи.

Точное решение при краевых условиях $w = \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0$ получено в двойных тригонометрических рядах и известно как решение Навье, которое соответствует условиям свободного опирания пластины по её границе (единственный «счастливый» случай). Решение же (13) в терминах задачи изгиба пластин отвечает полному защемлению пластины по границе, поэтому такое решение может быть названо решением типа Навье.

В равенстве (13) присутствуют интегралы в числителе и знаменателе дроби, а также функции H_n . Ниже приводятся точные формулы для вычисления этих интегралов [7]:

$$H_n(x) = (1-x^2)^{\frac{r}{2}} \cdot \sum_{m=0}^r A_{nm} \cdot x^{n-2m}, \\ A_{nm} = \frac{(-1)^m}{2^{n+3}} \sqrt{\frac{n!(2n+9)}{2(n+8)!}} \frac{(2n-2m+7)!}{(n-m+3)!m!(n-2m)!}, \quad (14)$$

где r – целая часть числа $n/2$;

$$\int_{-1}^1 [H'_n(x)]^2 dx = \frac{2n+9}{15} (n^2 + 9n + 5), \quad (15)$$

$$\int_{-1}^1 [H''_n(x)]^2 dx = \frac{2n+9}{4} \left\{ (n+2)(n+7) \left[1 + \frac{n(n+2)(n+7)(n+9)}{60} \right] - \frac{n(n+9)}{84} [252 + (n-1)(n+4)(n+5)(n+10)] \right\}. \quad (16)$$

Если $q(x, y)$ является многочленом от двух переменных (x, y) , то для вычисления интегралов, стоящих в числителе дроби в равенстве (13), необходимо воспользоваться приводимыми ниже формулами:

$$\int_{-1}^1 x^k H_n(x) dx = \begin{cases} D_n I_{nk}, & k+n=2s; \\ 0, & k+n=2s+1; \end{cases} \quad (17)$$

$$I_{nk} = 8[(n+4)(n+5) - 6(n+1)] + I_{1nk} + I_{2nk} + I_{3nk}; \quad (18)$$

$$I_{1nk} = \begin{cases} \frac{2k(k-1)\dots(k-n-6)}{(k+n+1)(k+n-1)\dots(k-n-5)}, & n \leq k-8; \\ 0, & n > k-8; \end{cases} \quad (19)$$

$$I_{2nk} = \begin{cases} \frac{-4(k+2)(k+1)\dots(k-n-4)}{(k+n+3)(k+n+1)\dots(k-n-3)}, & n \leq k-6; \\ 0, & n > k-6; \end{cases} \quad (20)$$

$$I_{3nk} = \begin{cases} \frac{2(k+4)(k+3)\dots(k-n-2)}{(k+n+5)(k+n+3)\dots(k-n-1)}, & n \leq k-4; \\ 0, & n > k-4; \end{cases} \quad (21)$$

$$D_n = \left[\frac{1}{2} (2n+9) \prod_{i=1}^8 \frac{1}{n+i} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (22)$$

здесь n, k – целые положительные числа; запись $n+k=2s$ (или $n+k=2s+1$) означает, что $n+k$ является чётным (соответственно нечётным) числом.

Формулы, приведенные выше, получены путём многократного интегрирования по частям с учётом свойств многочленов Лежандра.

Решение (13) позволяет получить решение более сложной задачи, когда краевые условия (7) неоднородны. Краевая задача (6) – (7) при неоднородных условиях (7) имеет не только самостоятельное значение, но и является основополагающей при статическом анализе плоских и пространственных систем, состоящих из пластин (как гладких, так и подкреплённых рёбрами жёсткости).

2. Исследование точности приближённого решения

Функции $H_m(x) \cdot H_n(y)$ являются элементами

пространства С.Л. Соболева $W_2^0(\Omega)$. Это полное гильбертово пространство. Энергетическое произведение для положительно определённого оператора A (11) и энергетическая норма (12) позволяют определить углы между элементами в энергетической метрике H_A

$$\beta_{mnij} = \arccos \left(\frac{[H_m H_n, H_i H_j]}{(\|H_m H_n\| \cdot \|H_i H_j\|)^{\frac{1}{2}}} \right). \quad (23)$$

Отклонение этих углов от 90° характеризует неортогональность функций $H_m H_n$ и $H_i H_j$ в пространстве H_A . Если обозначенные выше углы были бы точно равны 90° , то это означало бы ортогональность этих функций в H_A . В последнем случае матрица Грама линейно независимых элементов $H_m H_n$ и $H_i H_j$ становится диагональной. Как видно из равенства (11), для этого необходима ортогональность не только самих функций $H_k(z)$, $z \in [-1, 1]$, но и ортогональность с весом, равным единице, их первых и вторых производных. Однако из теоремы Н.Я. Сониной и проблемы Н.Н. Лузина следует, что добиться такой ортогональности по энергии в H_A невозможно, если только отказаться от утомительной, неустойчивой и

неэффективной процедуры ортогонализации в H_A . Как будет показано ниже, предложенные функции квазиортогональны в H_A , т.е. углы β_{mnij} мало отличаются от 90° . Исходя из этого получено приближённое аналитическое решение (13). О степени приближённости этого решения можно судить по приводимой ниже таблице, характеризующей отклонения от ортогональности в энергетической метрике H_A предложенных функций.

В табл. 1 над диагональю стоят величины, соответствующие парам индексов mn (колонка слева) и ij (строка сверху), приведенным в числителях дробей; под диагональю – индексам, указанным в знаменателях дробей. Например, $\beta_{0240} = 89,786^\circ$ (над диагональю), а $\beta_{1731} = 89,925^\circ$ (под диагональю). Данные таблицы не требуют особых обсуждений. Укажем только на то, что имеются отдельные «выбросы», которые в ряде случаев могут привести к погрешностям при определении внутренних моментов на границе области, поскольку они выражаются через вторые производные от функции прогиба.

Следует отметить, что случай квадратной пластины является самым неблагоприятным. При удлинениях, отличных от единицы, отклонение углов β_{mnij} от прямого уменьшается, и, более того, с ростом суммы индексов $m+n$ и $i+j$

Таблица 1

Значение углов β_{mnij} при $\lambda = 1$

Индексы функций	ij										
	00/11	02/13	20/31	22/15	04/51	40/33	06/17	60/71	24/35	42/53	
mn	00/11	0	87,139	87,139	89,469	89,826	89,826	90,071	90,071	89,573	89,826
	02/13	83,548	0	89,667	91,105	71,895	89,786	82,905	89,896	89,978	91,470
	20/31	83,548	89,904	0	91,105	89,786	71,895	89,896	82,905	91,470	89,978
	22/15	88,599	69,051	89,873	0	89,982	89,982	89,834	89,834	80,184	80,184
	04/51	88,599	89,873	69,051	89,833	0	89,862	60,043	89,933	91,227	89,862
	40/33	89,869	88,549	88,549	90,055	90,055	0	89,933	60,043	89,986	91,227
	06/17	89,629	80,927	89,925	57,629	89,901	89,916	0	89,967	90,127	89,866
	60/71	89,629	89,925	80,927	89,901	57,629	89,916	89,941	0	89,866	90,127
	24/35	89,794	89,794	90,787	90,007	90,007	77,195	90,113	89,869	0	89,999
	42/53	89,794	90,787	90,066	90,087	90,007	77,195	89,869	90,113	89,955	0
mn		10/01	30/03	12/21	50/05	32/23	14/41	70/07	52/25	34/43	16/61
	10/01	0	79,288	89,979	86,691	89,765	90,980	88,709	89,663	89,786	90,591
	30/03	79,288	0	89,832	65,497	91,341	89,881	79,012	90,091	91,557	89,940
	12/21	89,979	89,832	0	89,792	86,667	76,086	89,879	89,982	89,985	84,987
	50/05	86,691	65,497	89,792	0	90,079	89,852	55,378	91,020	90,072	89,925
	32/23	89,765	91,341	86,667	90,079	0	89,989	89,884	73,147	83,532	89,889
	14/41	90,980	89,881	76,086	89,852	89,989	0	89,914	89,984	89,541	62,896
	70/07	88,709	79,012	89,879	55,378	89,884	89,914	0	90,143	89,894	89,957
	52/25	89,663	90,091	89,982	91,020	73,147	89,984	90,143	0	90,008	89,842
	34/42	89,786	91,557	89,985	89,985	83,532	89,541	89,894	90,008	0	90,095
16/61	90,591	89,940	84,987	89,925	89,889	62,896	89,957	89,842	90,095	0	

указанные отклонения также уменьшаются при любом удлинении.

Представляется целесообразным сопоставить значения относительной потенциальной энергии деформирования

$$\bar{U} = \frac{1}{2\lambda a^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\lambda^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \lambda^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy = \frac{U}{D}, \tag{24}$$

вычисленной в двух случаях: по решению работы [1] и по равенству (13). Здесь U – потенциальная энергия деформации пластины. Эти вычисления приведены в табл. 2 при численном значении $a = 1$, M и N – количество удерживаемых функций при аппроксимации прогиба.

Из данных табл. 2 следует два основных вывода. Во-первых, сходимость обоих решений в энергетической метрике достаточно быстрая при всех значениях параметра λ . Во-вторых, погрешность в энергетической метрике приближённого решения (13) по сравнению с решением в двойных рядах [1] очень мала (составляет около 1%). Таким образом, приближённое решение (13) обладает достаточно быстрой сходимостью и высокой точностью по энергии.

Введём далее в рассмотрение конечномерное векторное пространство V размерности $(M+1) \times (N+1)$, элементами которого являются компоненты вектора $\bar{A}^* = \{A_{mn}^*\}_{m=0, n=0}^{M, N}$ решения системы линейных алгебраических уравнений рабо-

ты [1] и компоненты вектора $\bar{A} = \{A_{mn}\}_{m=0, n=0}^{M, N}$ из решения (13). Сопоставим квадраты норм

$$\|\bar{A}^*\|^2 \text{ и } \|\bar{A}\|^2$$

$$\|\bar{A}^*\|^2 = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N (A_{mn}^*)^2, \tag{25}$$

$$\|\bar{A}\|^2 = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N (A_{mn})^2.$$

Результаты вычислений по формулам (25) даны

в табл. 3 в долях от $\left(\frac{qa^4}{D}\right)^2$ ($q = \text{const}$).

Выводы по данным табл. 3, как и следовало ожидать, точно такие, как и выводы по данным табл. 2. Функция $w(x; y) \in W_2^0(\Omega)$ и тем более $w(x; y) \in L_2(\Omega)$. По теореме вложения

С. Л. Соболева [8, 9] $W_2^0(\Omega)$ компактно вкладывается в $L_2(\Omega)$ и более того, элементы пространства

$W_2^0(\Omega)$ являются элементами пространства $C^1(\Omega)$.

Из сказанного следует, что, если имеют место выводы по данным табл. 2, то такие же выводы должны иметь место по данным табл. 3. Стоит отметить, что для каждого удлинения λ разница между квадратами норм векторов решения незначительна, то есть два вектора решений \bar{A}^* и \bar{A} имеют практически одну и ту же сферическую норму. Сходимость

Таблица 2

Относительная энергия деформации пластины (значения увеличены в 10^5 раз)

M×N	λ = 0,2; s = 2		λ = 1; s = 3		λ = 2; s = 4		λ = 3; s = 5	
	[1]	(13)	[1]	(13)	[1]	(13)	[1]	(13)
1×1	4,52665	4,52665	3,60684	3,60684	2,40456	2,40456	3,54770	3,54771
2×2	5,38900	5,36851	3,71199	3,71899	2,60832	2,55262	4,06112	3,97021
3×3	5,61250	5,57839	3,71206	3,73937	2,61298	2,58021	4,11166	4,04957
4×4	5,64640	5,65633	3,71208	3,74410	2,61300	2,58782	4,11270	4,07583
5×5	5,64805	5,69262	3,71210	3,74542	2,61300	2,59021	4,11272	4,08539
6×6	5,64810	5,70972	3,71210	3,74585	2,61300	2,59104	4,11272	4,08908
7×7	5,64810	5,71778	3,71209	3,74601	2,61300	2,59137	4,11274	4,09060
8×8	5,64810	5,72168	3,71209	3,74607	2,61300	2,59150	4,11272	4,09126
9×9	5,64810	5,72362	3,71209	3,74610	2,61300	2,59156	4,11278	4,09158
10×10	5,64810	5,72463	3,71210	3,74611	2,61312	2,59159	4,11385	4,09173

Таблица 3

Квадраты норм векторов решений по работе [1] и равенству (13)
(значения увеличены в 10^5 раз)

M×N	$\lambda = 0,2; s = 3$		$\lambda = 1; s = 4$		$\lambda = 2; s = 6$		$\lambda = 3; s = 7$	
	[1]	(13)	[1]	(13)	[1]	(13)	[1]	(13)
1×1	1,88211	1,88212	2,98734	2,98734	5,31082	5,31085	2,60119	2,60119
2×2	1,88211	2,15972	2,99005	2,99331	5,53684	5,40833	2,87158	2,77998
3×3	2,26083	2,20696	2,99026	2,99338	5,53564	5,41010	2,87757	2,78881
4×4	2,26179	2,21290	2,99031	2,99338	5,53569	5,41018	2,87724	2,78925
5×5	2,26142	2,21353	2,99034	2,99338	5,53582	5,41018	2,87724	2,78927
6×6	2,26139	2,21361	2,99034	2,99338	5,53582	5,41018	2,87726	2,78927
7×7	2,26141	2,21362	2,99034	2,99338	5,53582	5,41018	2,87726	2,78927
8×8	2,26142	2,21362	2,99034	2,99338	5,53582	5,41018	2,87726	2,78927
9×9	2,26142	2,21362	2,99034	2,99338	5,53582	5,41018	2,87726	2,78927
10×10	2,26142	2,21362	2,99034	2,99338	5,53582	5,41018	2,87726	2,78927

этих норм весьма быстрая для каждого из решений, а их также быстрая стабилизация носит монотонный характер. Эти обстоятельства позволяют сделать вывод о высоком качестве приближённого решения в смысле, как его устойчивости, так и точности.

В заключение приведём распределение определяющих компонент напряженного и деформированного состояния при $\lambda = 1$ во всей области пластины.

Так, на рис. 4 даны поверхности функций относительного прогиба \bar{w} ($w = \bar{w} \frac{qa^4}{D}$), отвечающие двум решениям: решению (13) – сплошные линии и решению работы [1] – точки. Эти результаты говорят сами за себя и не подлежат никакому обсуждению.

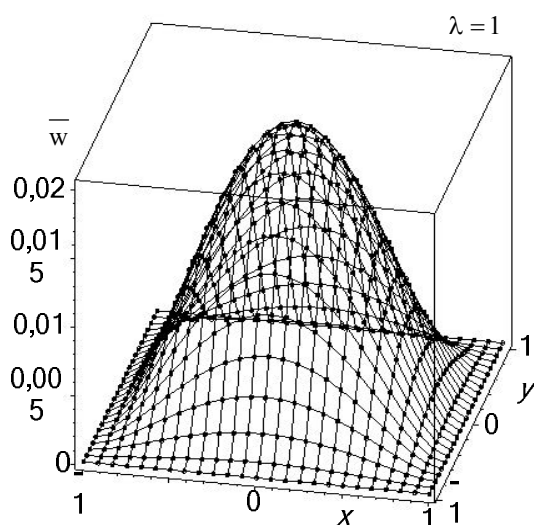


Рис. 4. Поверхности относительных прогибов \bar{w} , полученных по двум решениям: сплошная линия – решение (13), точки – решение работы [1]

Несколько иначе обстоит дело с поверхностями относительных моментов \bar{M} (например, $M_x = qa^2 \bar{M}_x$). Эти поверхности показаны на рис. 5, причём, как и в предыдущем случае, сплошные линии соответствуют решению (13), а точки – решению работы [1]. Нетрудно видеть, что существует некоторая область $\Omega' \subset \Omega$, в которой два решения практически совпадают. Некоторые различия этих решений наблюдаются в приграничной полосе $\delta = \Omega \setminus \Omega'$. Отметим, что моменты, вычисленные по решению (13), как правило, превосходят по модулю соответствующие величины, доставляемые решением работы [1], что идёт в запас прочности. Для уточнения приближённого решения (13) в смысле точности значений моментов достаточно выполнить один-два дополнительных шага, например, по процедуре Зейделя, хотя особой необходимости в этом нет¹.

На рис. 6 показаны сечения поверхностей (рис. 4 и 5) некоторыми плоскостями, способы обозначения кривых те же, что и на указанных рисунках. Здесь более наглядно видны погрешности приближённого решения (13) в приграничной полосе.

Из рисунка 6 следует:

- функция прогибов не нуждается в уточнении;
- функция моментов может быть (при желании) уточнена в некоторой приграничной зоне. Ширина этой зоны зависит от желаемой точности.

При удлиннениях $\lambda > 1$ точность результатов повышается.

¹ Авторы готовы предложить эффективный аналитический метод уточнения решения (13) в приграничной зоне. Этому будет посвящена отдельная работа.

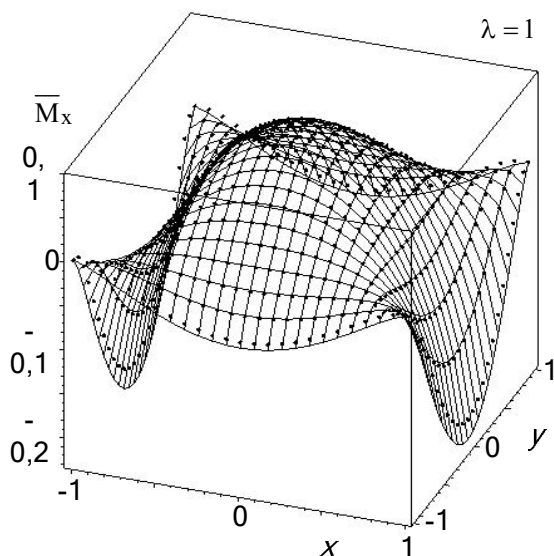


Рис. 5. Поверхности относительных моментов \bar{M}_x , полученных по двум решениям: сплошная линия – решение (13), точки – решение работы [1]

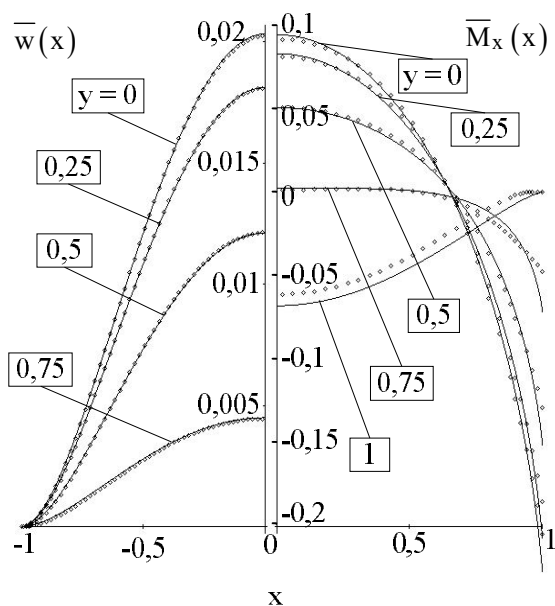


Рис. 6. Распределение относительных прогибов \bar{w} и относительных моментов \bar{M}_x по некоторым линиям

Заключение

Для решения полуоднородной бигармонической проблемы в прямоугольнике предложена и исследована система координатных функций, обладающая рядом замечательных свойств:

- будучи ортонормированной в области Ω , занимаемой пластиной, она квазиортогональна в энергетической метрике $H_A(\Omega)$ бигармонического оператора;
- показано, что углы между функциями данно-

го семейства, рассматриваемыми как элементы гильбертова пространства H_A , слабо отклоняются от 90° , что позволило принять матрицу Грама этих элементов в H_A диагональной и, как следствие, получить приближённое аналитическое решение;

- сопоставление квадратов норм векторов двух решений (аналитико-численного решения работы [1] в двойных рядах и данного приближённого аналитического решения, подобного известному решению Навье) показало их практическое совпадение;

- аналогичный результат имеет место при сопоставлении потенциальных энергий, вычисленных по оговоренным выше решениям;

- конкретные вычисления компонент напряжённо-деформированного состояния пластины при различных удлинениях показали высокую точность определения максимальных прогибов и изгибающих моментов в центре пластины при действии равномерно распределённой изгибающей нагрузки;

- точность вычисления изгибающих моментов вдоль защемлённых сторон гораздо ниже, и устранению этого недостатка будет посвящена следующая работа авторов.

Литература

1. Халилов, С.А. Построение и исследование аналитико-численного решения задачи об изгибе жёстко защемлённой прямоугольной пластины [Текст] / С.А. Халилов, В.Б. Минтюк, Д.А. Ткаченко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. / М-во образования и науки Украины, Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского "ХАИ". – Х., 2011. – Вып. 49. – С. 81 – 94.
2. Халилов, С.А. Новые системы ортонормированных многочленов, некоторые их свойства и приложения [Текст] / С.А. Халилов // Прочность конструкций летательных аппаратов: темат. сб. науч. тр. ХАИ. – Вып. 5. – Х., 1978. – С. 46 – 56.
3. Минтюк, В.Б. Ортонормированный базис для одномерных краевых задач [Текст] / В.Б. Минтюк // Авиационно-космическая техника и технология. – 2007. – № 5 (41). – С. 32 – 36.
4. Тимошенко, С.П. Пластины и оболочки [Текст] / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
5. Сегё, Г. Ортогональные многочлены [Текст] / Г. Сегё. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 500 с.
6. Суетин, П.К. Классические ортогональные многочлены [Текст] / П.К. Суетин. – М.: Наука, 1979. – 416 с.
7. Халилов, С.А. Вычисление некоторых определённых интегралов, содержащих присоединённые функции Лежандра второго и четвёртого порядков [Текст] / С.А. Халилов // Прочность конструкций летательных аппаратов: темат. сб. науч. тр. ХАИ.

– Вып. 7. – X., 1984. – С. 158 – 165.

8. Соболев, С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике [Текст] / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1988. – 333 с.

9. Соболев, С.Л. Введение в теорию кубатурных формул [Текст] / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1974. – 808 с.

Поступила в редакцию 5.03.2013, рассмотрена на редколлегии 13.03.2013

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. высшей математики В.С. Проценко, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ НАБЛИЖЕНОГО АНАЛІТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ БІГАРМОНІЧНОЇ ПРОБЛЕМИ У ПРЯМОКУТНИКУ ПРИ ОДНОРІДНИХ ГОЛОВНИХ КРАЙОВИХ УМОВАХ

С. А. Халілов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко

Виходячи з властивості квазіортогональності в енергетичній метриці бігармонічного оператора системи функцій, запропонованої авторами, побудовано наближене аналітичне розв'язання поставленої крайової задачі. Виконано повне дослідження точності й збіжності запропонованого розв'язання в різних метриках. Важливі поточкові оцінки розв'язання та його похідних до другого порядку включно, які представлено у вигляді докладних таблиць та графіків, дозволяють зробити висновок про високу його точність, що узгоджена з точністю математичної моделі тонких жорстких пластин. Отримані рішення дозволяють проектувальнику багаторазово й оперативно застосовувати їх в інженерних розрахунках.

Ключові слова: енергетичний простір позитивно визначеного оператора, квазіортогональність в енергетичній метриці, наближене аналітичне розв'язання, збіжність за енергією, поточкова збіжність, точність.

DEVELOPMENT AND RESEARCH OF THE APPROXIMATE ANALYTIC SOLUTION FOR THE BIHARMONIC PROBLEM AT THE RECTANGLE WITH THE HOMOGENEOUS BOUNDARY CONDITIONS

S. A. Khalilov, V. B. Myntyuk, D. A. Tkachenko

Based on properties of near-orthogonality of the proposed by the authors function system in the biharmonic operator energy metric, the approximate analytical solution of the boundary problem has been constructed. Full research of the got solution's exactness and convergence has been completed at the different metrics. Important pointwise estimations of solution and its derivatives including the second order, presented in the form of detailed tables and graphics, allow us to conclude its high accuracy, agreed with accuracy the mathematical model of thin rigid plates. The obtained solutions provide an opportunity the designer operatively and many times apply them in engineering calculations.

Keywords: energetic space of the positive definite operator, the near-orthogonality in the energy metric, the approximate analytical solution, the convergence by energy, the pointwise convergence, the accuracy.

Халілов Сиявуш Ахмедович – старший научный сотрудник кафедры высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: khalilov@ukr.net.

Минтюк Виталий Борисович – канд. техн. наук, докторант кафедры прочности летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: minvit@mail.ru.

Ткаченко Денис Анатольевич – магистр кафедры прочности летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: 20Black_and_White07@ukr.net.