

УДК 533.6

Ю.В. ГИРЬКА, И.А. ГАНГАН, Ю.А. КРАШАНИЦА

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

## АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВИГАТЕЛЯ БПЛА, ОСНОВАННОМ НА ЭФФЕКТЕ КОАНДА

В работе представлено точное, аналитическое решение системы нелинейных дифференциальных уравнений Навье-Стокса для плоскопараллельного течения ограниченной струи вязкой несжимаемой жидкости вдоль непроницаемой дуги окружности. В результате численной реализации, построенной математической модели, получены аналитические зависимости для скорости, давления, расхода и создаваемой на поверхности цилиндра аэродинамической подъемной силы. Проанализированы зависимости кинематических и динамических параметров пристенной струи от геометрических размеров дуги окружности, а также от характеристик внешнего потенциального потока. Такой подход открывает возможности для аналитических исследований взлетных возможностей БПЛА с двигателями на основе эффекта Коанда.

**Ключевые слова:** уравнения Навье-Стокса, точные решения, плоское течение вдоль цилиндрической поверхности, струя вязкой жидкости, эффект Коанда, двигатель БПЛА.

### Введение

Применение струй в летательных аппаратах на данный момент является одной из наиболее перспективных способов повышения их эффективности. Одним из направлений применения струйного обтекания является обтекание радиальной прилипающей струей к верхней поверхности БПЛА имеющим корпус в виде тела вращения [1] (рис. 1).

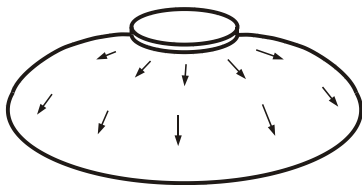


Рис. 1. Принципиальная схема БПЛА с применением эффекта Коанда

Для получения подъемной силы на БПЛА нужен двигатель, который создает струю с потребными аэродинамическими характеристиками. Для подбора такой силовой установки необходимо знать параметры струи на выходе из радиального сопла [2].

В данной задаче рассматривается методика получения рабочих характеристик силовой установки от потребных динамических характеристик БПЛА на примере аналитического решения уравнений Навье-Стокса для частного случая обтекания струей вязкого воздуха дужки окружности.

Полученное частное решение для дужки окружности является базовым и оценочным, для ре-

зультатов полученных другим путем, так как оно является аналитическим решением уравнений Навье-Стокса. Как известно, решение этой системы дифференциальных уравнений в общем случае не может быть получено прямым путем. Также остается открытым вопрос о единственности решения задачи в общем виде из-за нелинейности уравнений Навье-Стокса [3, 4].

### 1. Постановка задачи

Рассматривается обтекание кругового цилиндра  $r_0$  струей вязкой жидкости постоянной толщиной  $\delta$  (рис. 2). Струя считается прижатой к стенке цилиндра. Так как на границе струи поток считается потенциальным, то завихренность потока отсутствует ( $\Omega_z = 0$ ).

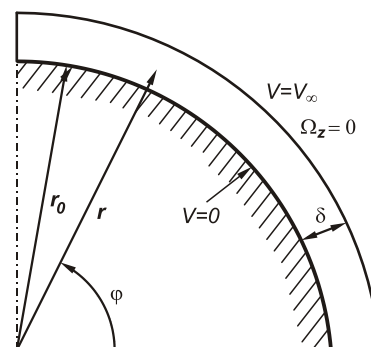


Рис. 2. Постановка задачи

Рассмотрим уравнения Навье-Стокса в цилиндрических координатах [3]. При этом примем следующие допущения:

- поток несжимаемый  $\rho = \text{const}$  ;
- является установившимся  $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = 0$  ;
- в струе отсутствуют объемные силы  $\mathbf{F} = 0$  ;
- поток плоскопараллельный  $V_z = 0$  и все производные по данному направлению, тоже будут равны 0 ;
- каждая частичка движется по окружности со своим радиусом  $r$  и  $V_r = 0$  .

Используя приведенные выше допущения, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -\frac{V_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - v \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + v \left( \Delta V_\varphi - \frac{V_\varphi}{r^2} \right), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Из третьего уравнения системы (1) следует, что окружная скорость в этом случае не зависит от  $\varphi$  или  $\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0$  . Это обстоятельство позволяет упростить данную систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{V_\varphi^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ 0 = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + v \left( \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r^2} \right). \end{cases} \quad (2)$$

Для получения единственного решения задачи необходимо также учесть граничные условия. Для данных допущений такими будут условия сопряжения с внешним потенциальным потоком и с твердой стенкой:

$$\begin{cases} V_\varphi|_{r=r_0} = 0; \\ V_\varphi|_{r=r_0+\delta} = V_{\varphi\infty}; \\ \Omega_z|_{r=r_0+\delta} = 0; \\ p|_{r=r_0+\delta; \varphi=0} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Система уравнений 2 совместно с граничными условиями 3 является постановкой задачи и, как будет показано далее, вследствие природной линейности дифференциальных уравнений имеет однозначное и единственное решение.

## 2. Определение характеристик потока

Определим параметры потока для данного случая, т.е. решим совместно (2) и (3).

Для уменьшения количества неизвестных, избавимся от давления, путем перекрестного дифференцирования в системе уравнений (2):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial \varphi} = 0, \\ r \frac{\partial^3 V_\varphi}{\partial r^3} + 2 \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r^2} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Решив совместно второе уравнение из системы (2) и систему уравнений (4) получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r^2} = \frac{C_0}{\mu r}; \\ \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{V_\varphi^2}{r}; \\ \frac{\partial p}{\partial \varphi} = C_0. \end{cases} \quad (5)$$

Преобразуем последнее уравнение из системы (5):

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \right) = \frac{C_0}{\mu r} \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (V_\varphi r) \right) = \frac{C_0}{\mu r}. \quad (6)$$

Проинтегрируем дифференциальное уравнение (6) и получим выражение для скорости:

$$V_\varphi = \frac{C_0}{2\mu} r \left[ \ln(r) - \frac{1}{2} \right] + \frac{C_1}{2} r + \frac{C_2}{r}. \quad (7)$$

Совместно проинтегрировав второе и третье уравнение системы (5), получим выражение для давления:

$$p = C_0 \varphi + \rho \int \frac{V_\varphi^2}{r} dr + C_3. \quad (8)$$

Уравнения (8) и (9) представляют решение поставленной задачи в общем виде. Для однозначного решения задачи, необходимо воспользоваться граничными условиями (3). Уточним, что

$$\Omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{V_\varphi}{r} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \right) \quad \text{или} \quad \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} = 2\Omega_z - \frac{V_\varphi}{r}.$$

$$\begin{cases} V_\varphi|_{r=r_0} = 0; \\ V_\varphi|_{r=r_0+\delta} = V_{\varphi\infty}; \\ \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_0+\delta} = -\frac{V_{\varphi\infty}}{r_0+\delta}; \\ p|_{r=r_0+\delta; \varphi=0} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Для выдерживания третьего граничного условия из (9), продифференцируем (7) по  $r$  :

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} = \frac{C_0}{2\mu} \left[ \ln(r) + \frac{1}{2} \right] + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2}. \quad (10)$$

Сделаем подстановку граничных условий (9) в полученные выражения (7) и (10), при этом введем относительную толщину струи  $\tilde{\delta} = \delta / r_0$ :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{C_0}{2\mu} r_0 \left[ \ln(r_0) - \frac{1}{2} \right] + \frac{C_1}{2} r_0 + \frac{C_2}{r_0} = 0; \\ & \frac{C_0}{2\mu} r_0 (1 + \tilde{\delta}) \left[ \ln(r_0 (1 + \tilde{\delta})) - \frac{1}{2} \right] + \frac{C_1}{2} r_0 (1 + \tilde{\delta}) + \\ & \quad + \frac{C_2}{r_0 (1 + \tilde{\delta})} = V_{\varphi\infty}; \\ & \frac{C_0}{2\mu} \left[ \ln(r_0 (1 + \tilde{\delta})) + \frac{1}{2} \right] + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r_0^2 (1 + \tilde{\delta})^2} = \\ & \quad = - \frac{V_{\varphi\infty}}{r_0 (1 + \tilde{\delta})}. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Разрешим систему линейных уравнений (11) относительно постоянных  $C_0$ ,  $C_1$  и  $C_2$  и упростим ее относительно геометрических параметров:

$$\left\{ \begin{aligned} C_0 &= - \frac{4\mu(1 + \tilde{\delta})}{r_0(\tilde{\delta}(2 + \tilde{\delta}) - 2\ln(1 + \tilde{\delta}))} V_{\varphi\infty}; \\ C_1 &= \frac{4(\ln(1 + \tilde{\delta}) + \ln(r_0))(1 + \tilde{\delta})}{r_0(\tilde{\delta}(2 + \tilde{\delta}) - 2\ln(1 + \tilde{\delta}))} V_{\varphi\infty}; \\ C_2 &= - \frac{r_0(1 + 2\ln(1 + \tilde{\delta}))(1 + \tilde{\delta})}{(\tilde{\delta}(2 + \tilde{\delta}) - 2\ln(1 + \tilde{\delta}))} V_{\varphi\infty}. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Поставим полученные постоянные в выражение для скорости (7), а также используем относительный радиус  $\tilde{r} = r / r_0$ :

$$V_{\varphi} = \frac{(1 + \tilde{\delta}) V_{\varphi\infty}}{2\ln(1 + \tilde{\delta}) - \tilde{\delta}(2 + \tilde{\delta})} \left( 2\tilde{r} \left[ \ln\left(\frac{\tilde{r}}{1 + \tilde{\delta}}\right) - \frac{1}{2} \right] + \frac{1}{\tilde{r}} (1 + 2\ln(1 + \tilde{\delta})) \right). \quad (13)$$

Из уравнения (13) можно сделать вывод, что скорость в струе линейно зависит от скорости потенциального потока, ограничивающей ее. Используем этот факт для получения относительной скорости  $\tilde{V}_{\varphi} = V_{\varphi} / V_{\varphi\infty}$ :

$$\tilde{V}_{\varphi} = \frac{(1 + \tilde{\delta})}{2\ln(1 + \tilde{\delta}) - \tilde{\delta}(2 + \tilde{\delta})} \left( 2\tilde{r} \left[ \ln\left(\frac{\tilde{r}}{1 + \tilde{\delta}}\right) - \frac{1}{2} \right] + \frac{1}{\tilde{r}} (1 + 2\ln(1 + \tilde{\delta})) \right). \quad (14)$$

Построим профиль относительной скорости. При этом для удобства сравнения при различных  $\tilde{\delta}$  введем относительную координату по нормали к дужке  $\tilde{y} = (\tilde{r} - 1) / \tilde{\delta}$  (рис. 3).

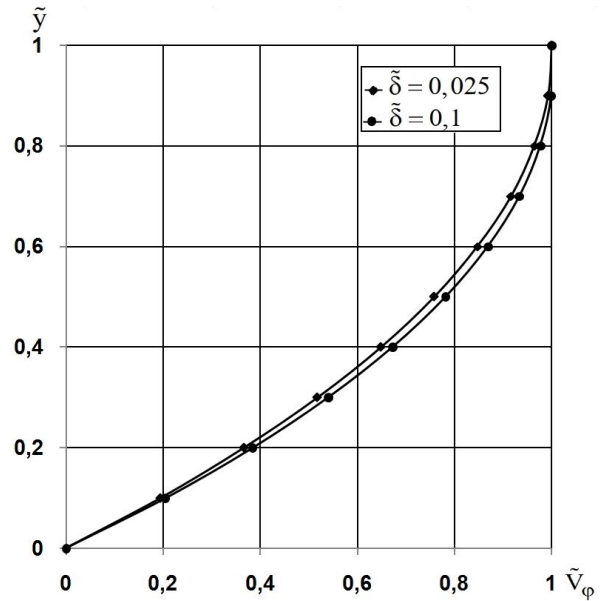


Рис. 3. Профиль скорости в струе по нормали к поверхности

Как можем видеть из рис. 3, при малых значениях относительной толщины струи  $\tilde{\delta}$  профиль относительной скорости практически от нее не зависит. Так как с физической точки зрения наиболее интересными являются  $\tilde{\delta} < 0,1$ , то можно принять, что распределение относительной скорости не зависит от размеров струи.

Определим объемный расход в поперечном сечении струи:

$$Q = r_0 V_{\varphi\infty} \int_1^{1 + \tilde{\delta}} \tilde{V}_{\varphi} d\tilde{r} = r_0 V_{\varphi\infty} \times \frac{(1 + \tilde{\delta})(\ln(1 + \tilde{\delta})(\ln(1 + \tilde{\delta}) + 1) - \tilde{\delta}(2 + \tilde{\delta}))}{2\ln(1 + \tilde{\delta}) - \tilde{\delta}(2 + \tilde{\delta})}. \quad (15)$$

Упростим выражение (15) к виду:

$$Q = r_0 (1 + \tilde{\delta}) \tilde{\delta} V_{\varphi\infty} K_Q, \quad (16)$$

где 
$$K_Q = \frac{(\ln(1 + \tilde{\delta}) - 2\ln^2(1 + \tilde{\delta}) - \tilde{\delta}(2 + \tilde{\delta}))}{\tilde{\delta}[2\ln(1 + \tilde{\delta}) - \tilde{\delta}(2 + \tilde{\delta})]}$$

коэффициент расхода струи.

Зависимость этого коэффициента показана на рис. 4.

Подставим в (8) выражение (7) и найдем статическое давление в струе:

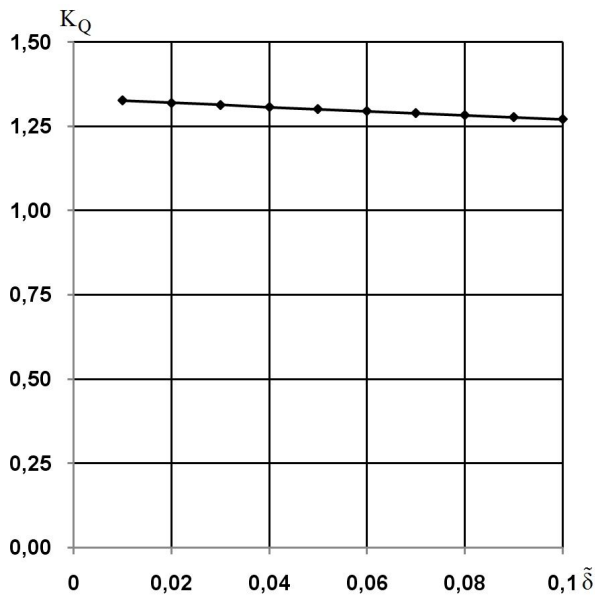


Рис. 4. Зависимость коэффициента расхода от относительной толщины струи

$$p = C_0 \varphi + \rho \frac{V_{\varphi\infty}^2}{r_0} \int \frac{\tilde{V}_{\varphi}^2}{\tilde{r}} d\tilde{r} + C_3 = \frac{4\mu}{r_0} V_{\varphi\infty} K_p \varphi + \rho \frac{V_{\varphi\infty}^2}{r_0} K_p^2 \left\{ 2\tilde{r}^2 \ln \tilde{r} (\ln \tilde{r} - K_{\delta} - 1) + K_{\delta} \times \right. \quad (17)$$

$$\left. \times \ln \tilde{r} [1 - K_{\delta} \ln \tilde{r}] + \frac{\tilde{r}^2}{2} (K_{\delta}^2 - 2K_{\delta} - 2) - \frac{K_{\delta}^2}{2\tilde{r}^2} \right\} + C_3,$$

$$\text{где } K_p = \frac{(1 + \tilde{\delta})}{2 \ln(1 + \tilde{\delta}) - \tilde{\delta}(2 + \tilde{\delta})}; \quad K_{\delta} = 1 + 2 \ln(1 + \tilde{\delta}).$$

Определим  $C_3$  из граничных условий (9):

$$\frac{2C_3}{\rho V_{\varphi\infty}^2} = -\frac{2K_p^2}{r_0} \left\{ 2(1 + \tilde{\delta})^2 \ln(1 + \tilde{\delta}) \times \left( \ln(1 + \tilde{\delta}) - K_{\delta} - 1 \right) + K_{\delta} \ln(1 + \tilde{\delta}) \left[ 1 - K_{\delta} \ln(1 + \tilde{\delta}) \right] + \right. \quad (18)$$

$$\left. + \frac{(1 + \tilde{\delta})^2}{2} (K_{\delta}^2 - 2K_{\delta} - 2) - \frac{K_{\delta}^2}{2(1 + \tilde{\delta})^2} \right\}.$$

Найдем зависимость статического давления на поверхности дужки окружности  $\tilde{r} = 1$ :

$$p|_{\tilde{r}=1} = \frac{4\mu}{r_0} V_{\varphi\infty} K_p \varphi - \frac{\rho V_{\varphi\infty}^2 K_p^2}{r_0} \times \left\{ 2(1 + \tilde{\delta})^2 \ln(1 + \tilde{\delta}) (\ln(1 + \tilde{\delta}) - K_{\delta} - 1) + \right. \quad (19)$$

$$\left. + K_{\delta} \ln(1 + \tilde{\delta}) \left[ 1 - K_{\delta} \ln(1 + \tilde{\delta}) \right] + \frac{\tilde{\delta}(2 + \tilde{\delta})}{2} \left( \frac{K_{\delta}^2}{(1 + \tilde{\delta})^2} + K_{\delta}^2 - 2K_{\delta} - 2 \right) \right\}.$$

Найдем вертикальную силу, действующую на четверть дужки окружности:

$$F_y = 1 \cdot r_0 \int_0^{\pi/2} p \sin \varphi d\varphi. \quad (20)$$

При  $r_0 = 0,3 \text{ м}$ ,  $\tilde{\delta} = 0,1$  и  $V_{\varphi\infty} = 10 \text{ м/с}$   
 $F_y = 113 \text{ кН}$ .

Найдем вертикальную силу, действующую на четверть дужки сферы с распределением давления полученным по (19):

$$F_y = \pi r_0^2 \int_0^{\pi/2} p \sin 2\varphi d\varphi. \quad (21)$$

При  $r_0 = 0,3 \text{ м}$ ,  $\tilde{\delta} = 0,1$  и  $V_{\varphi\infty} = 10 \text{ м/с}$   
 $F_y = 10,7 \text{ кН}$ .

Таким образом, зная необходимую потребную подъемную силу на БПЛА сфероидальной формы  $F_y$  в плане, мы можем определить необходимые характеристики струи для проектирования силовой установки.

Также в ходе экспериментальных исследований была измерена вертикальная сила, действующая на БПЛА сфероидальной формы [5].

## Выводы

Была решена аналитически задача плоскопараллельного течения струи вязкой жидкости вдоль дужки окружности, которая имеет единственное решение.

Полученные результаты могут быть использованы для оценки необходимых параметров струи вязкого воздуха на срезе кольцевого сопла силовой установки БПЛА сфероидального типа.

Дальнейшее направление работы возможно в переходе от плоской задачи обтекания дужки окружности к пространственной задаче обтекания сферы.

## Литература

1. Гирька, Ю.В. Математическое моделирование взаимодействия вязкой струи с несущей поверхностью [Текст] / Ю.В. Гирька, Ю.А. Крашаница // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2012. – № 5(92). – С. 21-23.
2. Гирька, Ю.В. Изучение эффекта Коанда на круглом крыле [Текст] / Ю.В. Гирька, И.А. Ганган // *Возможности использования методов механики для решения вопросов безопасности в условиях чрезвычайных ситуаций: тез. докл. Межвуз. науч.-практ. конф., 6 дек. 2012 г. – X.: Ун-т гражд. защиты Украины, 2012. – С. 28.*

3. Слѣзкин, Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости [Текст] / Н.А. Слѣзкин. – М.: Гос. изво технико-теоретической литературы, 1955. – 520 с.

4. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа [Текст] / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1987. – 840 с.

5. Ганган, И.А. Экспериментальное исследование рабочих характеристик импеллера [Текст] / И.А. Ганган, Ю.В. Гирька // Проблемы создания и обеспечения жизненного цикла авиационной техники: тез. докл. Междунар. науч.-техн. конф, 18-19 апр. 2013 г. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского "Харьк. авиац. ин-т", 2013. – С. 20.

Поступила в редакцию 03.04.2013, рассмотрена на редколлегии 12.06.2013

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, проф., зав. отделом гидродинамики волновых процессов И.Т. Селезов, Институт гидромеханики НАН Украины, Киев.

### АЕРОДИНАМІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВИГУНА БПЛА, ОСНОВАНОГО НА ЕФЕКТІ КОАНДА

*Ю.В. Гирька, І.А. Ганган, Ю.О. Крашаниця*

У роботі представлено точне, аналітичне розв'язання системи нелінійних диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса для плоскопаралельної течії обмеженого струменя в'язкої нестислової рідини уздовж непроникної дуги кола. В результаті числової реалізації, побудованої математичної моделі, отримано аналітичні залежності для швидкості, тиску, витрати і створюючої на поверхні циліндра аеродинамічної підйомної сили. Проаналізовані залежності кінематичних і динамічних параметрів пристінного струменя від геометричних розмірів дужки та струменю і від швидкості зовнішнього потенціального потоку.

**Ключові слова:** рівняння Нав'є-Стокса, точні розв'язки, плоска течія уздовж циліндричної поверхні, струмінь в'язкої рідини, ефект Коанда, двигун БПЛА.

### AERODYNAMIC CHARACTERISTIC OF ENGINE BASED AT COANDA EFFECT

*Y.V. Girka, I.A. Gangan, Yu.A. Krashanitsa*

The exact, analytical decision of the system of nonlinear differential equalizations of Navier-Stokes is in-process presented for the flow of a limit stream of viscid incompressible liquid along the impenetrable arc of circumference. As a result of numeral realization, built mathematical model, analytical dependences are got for speed, pressure, expense and on the surface of cylinder of aerodynamic lift. Dependence's is analysed kinematics and dynamic parameters of пристенной stream from geometrical sizes of bracket and to the stream and from speed of external potential stream.

**Key words:** equalization of Navier-Stokes, exact upshots, flat flow along a cylindrical surface, stream of viscid liquid, Coand effect, engine of UAV

**Гирька Юрій Владимирович** - науч. сотр. проблемной научно-исследовательской лаборатории аэрогидродинамики и акустики Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

**Ганган Игорь Арионович** – ст. науч. сотр. проблемной научно-исследовательской лаборатории аэрогидродинамики и акустики Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

**Крашаниця Юрий Александрович** – д-р техн. наук, профессор, главн. научн. сотр. кафедры аэрогидродинамики Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.