УДК 533.9.07

С.Ю. НЕСТЕРЕНКО, Ш. РОШАНПУР

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

ОСОБЕННОСТИ ОТРАЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ ОТ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО БАРЬЕРА И ПОТОКИ ИХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НА ГРАНИЦАХ ПЛАЗМЫ ЭЛЕКТРОРАКЕТНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

Показаны особенности рельефа потенциального барьера на границе плазмы электроракетных двигателей с поверхностью и окружающим вакуумом и, как следствие, упругое, но не зеркальное отражение электронов от барьера. Перечислены уравнения, граничные условия к которым должны учитывать названный эффект. В форме Ландау, по аналогии с интегралом электрон-электронных столкновений в объеме записано выражение для распределения электронов по скоростям в отраженном потоке с учетом названных особенностей отражения от барьера. Записаны выражения граничных условий для уравнений движения и давления, необходимые для формирования математических моделей процессов в разреженных средах электроракетных двигателей и позволяющие рассчитать релаксацию импульса и увеличение его дисперсии в результате его хаотизации при отражении.

Ключевые слова: *функция распределения, уравнение движения, уравнение давления*

Введение

Малость размеров электроракетных двигателей (ЭРД) по сравнению с длинами свободных пробегов частиц означает, что отражение электронов от прикатодного слоя не менее (как правило – более) существенно влияет на изменение всех их газодинамических характеристик чем столкновения в объеме.

Потенциал разных точек поверхности диэлектрических деталей ЭРД разный, но пространственный масштаб изменения потенциала поверхности велик по сравнению с толщиной лэнгмюровского пристеночного слоя. Таким образом, в размерах слоя поверхность диэлектрика тоже можно рассматривать как эквипотенциальную.

Непосредственно вблизи поверхности твердого тела эквипотенциальные поверхности в слое воспроизводят геометрию поверхности твердого тела.

В результате распределение потенциала в слое является существенно неодномерным. Одним из следствий этого является упругое, но не зеркальное отражение электрона от прикатодного потенциального барьера вблизи любой поверхности – электрон после отражения возвращается в плазму с сохранением энергии и абсолютной величины импульса, но с отклонением от траектории зеркального отражения. Таким образом, при отражении электрона от потенциального барьера изменяется не только нормальная, но и параллельные поверхности проекции импульса.

Случайность направления импульса после отражения означает, например, потерю части параллельной поверхности проекции импульса – часть энергии направленного движения электронов при этом превращается в тепловую.

Следует заметить, что даже в случае идеально (что, конечно, невозможно) гладкой поверхности названный эффект сохраняется. Это связано с тем, что даже при стационарных и однородных граничных условиях в плазме, тем не менее, существуют собственные, не нуждающиеся во внешнем источнике плазменные колебания. Длина волны плазменных колебаний имеет порядок длины экранирования, так же как и толщина лэнгмюровского слоя. Период плазменных колебаний и время движения электрона в слое тоже имеют один порядок.

Таким образом, незеркальность отражения имеет место даже вблизи идеально гладкой поверхности. Более того, подобная же картина имеет место и на лэнгмюровских границах внешнего пучка двигателя. При моделировании процессов в ЭРД граничные условия для уравнений движения и давления электронов необходимо формулировать с учетом названных особенностей.

1. Функция распределения электронов в отраженном потоке

Плотность импульса в уравнении движения есть тензор первого порядка (вектор).

Тензор давления в уравнении давления [1] – тензор второго ранга.

Граничным условием для момента n–го порядка функции распределения на поверхности является скалярное произведение (n+1)-го момента на орту нормали к поверхности:

$$\mathbf{M}_{\alpha}^{[n](S)} = \mathbf{M}_{\alpha}^{[n+1]} \cdot \mathrm{i}_n = \int f_{\alpha}(\vec{v}) \mathbf{m}_{\alpha}^{[n+1]}(\vec{v}) \cdot \mathrm{i}_n d\vec{v} =$$

$$= \int f_{\alpha}(\vec{v}) \mathbf{m}_{\alpha}^{[n]}(\vec{v}) v_n d\vec{v}, \qquad (1)$$

где

$$\mathbf{m}_{\alpha}^{[n]}(\vec{v}) = m_{\alpha} \underbrace{\vec{v}\vec{v}...\vec{v}}_{n} = m_{\alpha} \vec{v}^{\lceil n \rceil}. \qquad (2)$$

Представим интеграл в (1) как сумму интегралов в прямом и отраженном потоке:

$$\mathbf{M}_{\alpha}^{[n+1]} \cdot \mathrm{i}_n = \int\limits_{v_n \ge 0} \Gamma_{\alpha n}^{(r)}(\vec{v}) \mathbf{m}_{\alpha}^{[n]}(\vec{v}) d\vec{v} +$$

$$+ \int\limits_{v_n < 0} \Gamma_{\alpha n}^{(r)}(\vec{v}) \mathbf{m}_{\alpha}^{[n]}(\vec{v}) d\vec{v}, \qquad 3)$$

где
$$\Gamma_{\alpha n}^{(r)}(\vec{v}) = f_{\alpha}(\vec{v}) v_n. \qquad (4)$$

При зеркальном отражении в отраженном потоке $v_n < 0$ имело бы место равенство:

$$f_{\alpha 0}(\vec{v}) \Big|_{v_n < 0} = f_{\alpha}^{+}(\vec{v} - 2\mathrm{i}_n v_n), \qquad (5)$$

где $f_{\alpha}^{+}(\vec{v})$ – функция распределения в прямом потоке $v_n \ge 0$.

Движение электрона после отражения опишем в сферических координатах, базовая ось которых совпадает с направлением i_v зеркального отражения (рис. 1).

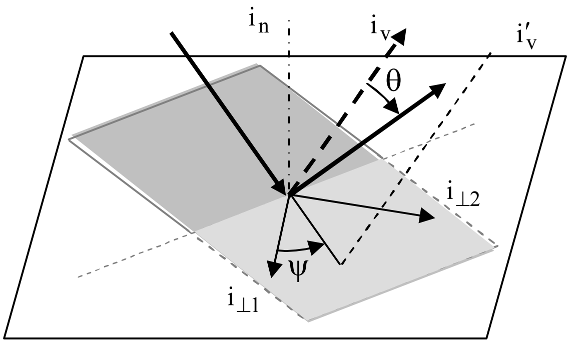

Рис. 1. Система координат отраженного движения

Обозначим как i'_v единичный вектор в направлении траектории после отражения.

Скорость электрона после отражения в таком случае можно выразить так:

$$\vec{v}' = v\left(\mathrm{i}_v \cos\theta + (\mathrm{i}_{\perp 1} \cos\psi + \mathrm{i}_{\perp 2} \sin\psi) \sin\theta\right), \qquad (6)$$

где v – абсолютная, не изменяющаяся при отражении, величина скорости;

$\mathrm{i}_{\perp 1}$, $\mathrm{i}_{\perp 2}$ – поперечные к i_v орты.

В подавляющем большинстве случаев отклонение от траектории зеркального отражения невелико:

$$\theta << 1 \qquad (7)$$

и распределение в отраженном потоке мало отличается от $f_{\alpha 0}(\vec{v})$ – можно применить те же приемы, что и в записи интеграла столкновений в объеме в форме Ландау [2]:

$$\Gamma_{\alpha n}^{(r)}(\vec{v}) =$$

$$= \begin{cases} f_{\alpha}^{+}(\vec{v}) v_n, & v_n \ge 0 \\ f_{\alpha}^{+}(\vec{v} - 2\mathrm{i}_n v_n) v_n - \nabla_v \cdot \vec{J}_{\alpha}^{(rv)}(\vec{v}), & v_n < 0 \end{cases} \qquad (8)$$

где $\vec{J}_{\alpha}^{(rv)}(\vec{v})$ – плотность потока электронов в пространстве скоростей.

Для m-й проекции вектора можно в форме Ландау записать $\vec{J}_{\alpha}^{(rv)}(\vec{v})$:

$$J_{\alpha m}^{(rv)}(\vec{v}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Delta v_m > 0} \int\limits_{v_m - \Delta v_m}^{v_m} \Big(f_{\alpha 0}(\vec{v}) -$$

$$- f_{\alpha 0}(\vec{v} + \Delta\vec{v}) \Big) v_n f(\theta) d\theta d\psi d v_m. \qquad (9)$$

где $\Delta\vec{v}$ – величина отклонения скорости электрона от скорости при зеркальном отражении:

$$\Delta\vec{v} = v(\mathrm{i}_{\perp 1} \cos\psi + \mathrm{i}_{\perp 2} \sin\psi) \sin\theta. \qquad (10)$$

Малость величины Δv позволяет преобразовать выражение (9) к виду:

$$J_{\alpha m}^{(rv)}(\vec{v}) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Delta v_m > 0} \Delta v_m \Delta\vec{v} \cdot \nabla_v f_{\alpha 0}(\vec{v}) v_n f(\theta) d\theta d\psi, \qquad (11)$$

откуда для вектора $\vec{J}_{\alpha}^{(rv)}(\vec{v})$ имеем:

$$\vec{J}_{\alpha}^{(rv)}(\vec{v}) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Delta v_m > 0} \Delta\vec{v} \Delta\vec{v} \cdot \nabla_v f_{\alpha 0}(\vec{v}) v_n f(\theta) d\theta d\psi. \qquad (12)$$

Среднее по углу ψ значение диадного произведения $\Delta\vec{v}\Delta\vec{v}$ равно:

$$\left|\Delta\vec{v}\Delta\vec{v}\right\rangle = v^2 (\mathrm{i}_{\perp 1}\mathrm{i}_{\perp 1} + \mathrm{i}_{\perp 2}\mathrm{i}_{\perp 2}) \frac{1}{2} \sin^2\theta =$$

$$= v^2 (\delta - \mathrm{i}_v \mathrm{i}_v) \frac{1}{2} \sin^2\theta, \qquad (13)$$

где $\boldsymbol{\delta}$ – единичный тензор.

В таком случае:

$$\vec{J}_{\alpha}^{(rv)}(\vec{v}) = -\frac{\left\langle \sin^2\theta \right\rangle}{4} \left(\boldsymbol{\delta} v^2 - \vec{v}\vec{v}\right) \cdot \nabla_v f_{\alpha}^{+}(\vec{v} - 2\mathrm{i}_n v_n) v_n. \qquad (14)$$

Из (2) при этом следует:

$$\mathbf{M}_\alpha^{[n+1]} \cdot i_n = \int\limits_{v_n \ge 0} f_\alpha^+(\vec{v}) \mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v}) v_n d\vec{v} +$$
$$+ \int\limits_{v_n<0} f_\alpha^+(\vec{v} - 2 i_n v_n) \mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v}) v_n d\vec{v} -$$
$$- \int\limits_{v_n<0} \nabla_v \cdot \vec{J}_\alpha^{(rv)}(\vec{v})\, \mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v}) d\vec{v}. \qquad (15)$$

Представим последний интеграл в (15) как разность:

$$\int\limits_{v_n<0} \nabla_v \cdot \vec{J}_\alpha^{(rv)}(\vec{v}) \mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v}) d\vec{v} =$$
$$= \int\limits_{v_n<0} \nabla_v \cdot \left(\vec{J}_\alpha^{(rv)}(\vec{v}) \mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v}) \right) d\vec{v} -$$
$$- \int\limits_{v_n<0} \vec{J}_\alpha^{(rv)}(\vec{v}) \cdot \nabla_v \mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v}) d\vec{v}. \qquad (16)$$

С учетом теореамы Гаусса можно показать:

$$\int\limits_{v_n<0} \nabla_v \cdot \vec{J}_\alpha^{(rv)}(\vec{v}) \mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v}) d\vec{v} =$$
$$= - \int\limits_{v_n<0} \vec{J}_\alpha^{(rv)}(\vec{v}) \cdot \nabla_v \mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v}) d\vec{v}. \qquad (17)$$

2. Граничные условия для уравнений моментов функции распределения электронов

Выражение граничного условия для момента n–го порядка приобретает вид:

$$\mathbf{M}_\alpha^{[n+1]} \cdot i_n = \int\limits_{v_n \ge 0} f_\alpha^+(\vec{v}) \mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v}) v_n d\vec{v} +$$
$$+ \int\limits_{v_n<0} f_\alpha^+(\vec{v} - 2 i_n v_n) \mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v}) v_n d\vec{v} +$$
$$+ \int\limits_{v_n<0} \vec{J}_\alpha^{(rv)}(\vec{v}) \cdot \nabla_v \mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v}) d\vec{v}. \qquad (18)$$

Таким образом:

$$\mathbf{M}_\alpha^{[n+1]} \cdot i_n = \int\limits_{v_n \ge 0} f_\alpha^+(\vec{v}) \mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v}) v_n d\vec{v} +$$
$$+ \int\limits_{v_n<0} f_\alpha^+(\vec{v} - 2 i_n v_n) \mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v}) v_n d\vec{v} - \frac{\left\langle \sin^2\theta \right\rangle}{4} \times$$
$$\times \int\limits_{v_n<0} \left(\left(\boldsymbol{\delta} v^2 - \vec{v}\vec{v} \right) \nabla_v f_\alpha^+(\vec{v} - 2 i_n v_n) \right) \cdot \nabla_v \mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v}) v_n d\vec{v} \cdot$$
$$(19)$$

Допустим, что в нашем случае имеет место, как при максвелловском распределении:

$$f_\alpha^+(\vec{v} - 2 i_n v_n) = f_\alpha^+(\vec{v}), \qquad (20)$$

$$\nabla_v f_\alpha^+(\vec{v} - 2 i_n v_n) = -\frac{m_\alpha}{k T_\alpha} \left(\vec{v} - \vec{V}_\alpha \right) f_\alpha^+(\vec{v}). \qquad (21)$$

Тогда искомую величину

$$\mathbf{M}_\alpha^{[n+1]} \cdot i_n = \int f_\alpha^+(\vec{v}) \mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v}) v_n d\vec{v} +$$
$$+ \frac{\left\langle \sin^2\theta \right\rangle}{4} \frac{m_\alpha}{k T_\alpha} \int\limits_{v_n<0} f_\alpha^+(\vec{v}) \left(\left(\boldsymbol{\delta} v^2 - \vec{v}\vec{v} \right) \cdot \left(\vec{v} - \vec{V}_\alpha \right) \right) \cdot$$
$$\cdot \nabla_v \mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v}) v_n d\vec{v} \qquad (22)$$

можно представить в виде суммы:

$$\mathbf{M}_\alpha^{[n+1]} \cdot i_n = \left(\mathbf{M}_{\alpha 0}^{[n+1]} + \Delta \mathbf{M}_\alpha^{[n+1]} \right) \cdot i_n, \qquad (23)$$

где

$$\mathbf{M}_{\alpha 0}^{[n+1]} = \int f_\alpha^+(\vec{v}) \mathbf{m}_\alpha^{[n+1]}(\vec{v}) d\vec{v}, \qquad (24)$$

$$\Delta \mathbf{M}_\alpha^{[n+1]} \cdot i_n =$$
$$= \frac{\left\langle \sin^2\theta \right\rangle}{4} \frac{m_\alpha}{k T_\alpha} \int\limits_{v_n<0} f_\alpha^+(\vec{v}) \left(\left(\delta v^2 - \vec{v}\vec{v} \right) \cdot \left(\vec{v} - \vec{V}_\alpha \right) \right) \cdot$$
$$\cdot \nabla_v \mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v}) v_n d\vec{v}. \qquad (25)$$

Можно показать, что из (25) следует:

$$\Delta \mathbf{M}_\alpha^{[n+1]} \cdot i_n = -\frac{\left\langle \sin^2\theta \right\rangle}{4} \frac{m_\alpha}{k T_\alpha} \cdot$$
$$\cdot \int\limits_{v_n<0} f_\alpha^+(\vec{v}) \left(\vec{V}_\alpha v^2 - \vec{V}_\alpha \cdot \vec{v}\vec{v} \right) \cdot$$
$$\cdot \nabla_v \mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v}) v_n d\vec{v}. \qquad (26)$$

С учетом показанного выше можно записать граничное условие для уравнения движения:

$$\mathbf{P}_\alpha \cdot i_n = i_n P_\alpha^{(nn)} + \eta_P \frac{v}{4} m_\alpha n_\alpha \vec{V}_\alpha, \qquad (27)$$

где v – средняя тепловая скорость электронов; η_P – коэффициент релаксации импульса электрона в слое:

$$\eta_P = \frac{3\left\langle \sin^2\theta \right\rangle}{4}. \qquad (28)$$

Граничное условие для уравнения давления при этом имеет вид:

$$\mathbf{G}_\alpha \cdot i_n = -2 \eta_P \frac{v}{4} m_\alpha n_\alpha \vec{V}_\alpha \vec{V}_\alpha. \qquad (29)$$

Выводы

Записаны граничные условия для уравнений движения и давления электронов в разреженной среде ЭРД.

Граничное условие (29) для уравнения движения показывает пропорциональный параллельной поверхности проекции импульса поток этой проекции в сторону поверхности в результате релаксации импульса электронов при не зеркальном отражения.

Граничное условие (30) для уравнения давления можно преобразовать к выражению с отрицательной (от поверхности в плазму) нормальной к поверхности проекцией теплопроводности:

$$g_{\alpha n} = \frac{G_{\alpha}^{(11n)} + G_{\alpha}^{(22n)} + G_{\alpha}^{(nnn)}}{2} =$$

$$= -\eta_P \frac{\langle v \rangle}{4} m_{\alpha} n_{\alpha} V_{\alpha}^2 . \qquad (30)$$

Сопоставление (31) и (28) показывает, что теплопроводность при этом с минусом равна "работе вязких сил":

$$g_{\alpha n} = -\vec{V}_{\alpha} \cdot \mathbf{P}_{\alpha} \cdot i_n , \qquad (31)$$

т.е., в качестве тепловой в результате хаотизации импульса в слое в объем возвращается часть энергии направленного движения электронов – температура электронов в результате незеркальности отражения растет.

Литература

1. *Росси, Б. Введение в физику космического пространства [Текст] / Б. Росси, С. Ольберт. – М.: Атомиздат, 1974. – 392 с.*
2. *Нестеренко, С.Ю. Электрогазодинамика: консп. лекц. [Электронный ресурс] / С.Ю. Нестеренко. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т "Харьк. авиац. ин-т", 2012. – 216 с. – Режим доступа: http://library.khai.edu. – 12.05.2013.*

Поступила в редакцию 29.05.2013, рассмотрена на редколлегии 14.06.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф., проф. каф. 401 А.И. Оранский, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "Харьковский авиационный институт", Харьков.

ОСОБЛИВОСТІ ВІДБИТТЯ ЕЛЕКТРОНІВ ВІД ПОТЕНЦІАЛЬНОГО БАР'ЄРУ І ПОТОКИ ЇХ ГАЗОДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК НА МЕЖАХ ПЛАЗМИ ЕЛЕКТРОРАКЕТНИХ ДВИГУНІВ

С.Ю. Нестеренко, Ш. Рошанпур

Показано особливості рельєфу потенційного бар'єру на межі плазми електроракетних двигунів із поверхнею та оточуючим вакуумом і, як наслідок, пружне, але не дзеркальне відбиття електронів від бар'єру. Перераховані рівняння, граничні умови до яких мають враховувати названий ефект. У формі Ландау, за аналогією до інтегралу електрон-електронних зіткнень в об'ємі записано вираз для розподілу електронів за швидкостями у відбитому потоці з урахуванням названих особливостей відбиття від бар'єру. Записано вирази для граничних умов для рівнянь руху і тиску, необхідні для формування математичних моделей процесів у розріджених середовищах електроракетних двигунів, які дозволяють розрахувати релаксацію імпульсу і збільшення його дисперсії внаслідок його хаотизації при відбитті.

Ключові слова: функція розподілу, рівняння руху, рівняння тиску.

PECULIARITIES OF ELECTRONS REFLECTION FROM POTENTIAL BARRIER AND THEIR GAS DYNAMICS CHATACTERISTICS FLOWS ON THE BORDERS OF ELECTRIC PROPULSION THTUSTERS PLASMA

S.Yu. Nesterenko, Sh. Roshanpour

The features of a potential barrier on the border of plasma of electric propulsion thrusters with a surface and environmental vacuum and as a consequence elastic but not mirror reflection of electrons from a barrier are shown. The equations are listed, the boundary conditions to which should take into account the named effect. The expression is written down in Landau form, in analogy to integral of electron-electron collisions in the volume, for electrons velocity distribution in the reflected flow in view of the named features of reflection from a barrier. The expressions are written down of boundary conditions for the motion equation and pressure equation, which are necessary for formation of mathematical models of processes in rarefied environments of electric propulsion thrusters and allow to calculate motion relaxation and it's dispersion increase as a result of it's chaotization at reflection.

Key words: distribution function, motion equation, pressure equation.

Нестеренко Сергей Юрьевич – канд. техн. наук, доцент кафедры двигателей и энергоустановок летательных аппаратов Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: thrust@d4.khai.edu.

Рошанпур Шахрам – аспирант кафедры двигателей и энергоустановок летательных аппаратов Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: sh.roshan2002@gmail.com.