УДК 532.526.01

Ю. А. КРАШАНИЦА, ЮЕ ПЕН

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ОПЕРАЦИЙ ВЕКТОРНО-ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

Современная идеология решения начально-краевых задач механики сплошных сред, в том числе аэрогидрогазодинамики, упругости и пластичности базируется на фундаментальных положениях векторно-тензорного анализа, таких как дифференциальные операции и интегральные теоремы в пространствах необходимой размерности. Однако в силу известных причин развитие этого направления математики оставляет желать лучшего. В статье представлен спектр основных дифференциальных операций в плоском случае для вектор-функций двух переменных, а также доказаны обобщённые интегральные теоремы Грина. Показано, что развитый аппарат востребован идеологией формулирования законов сохранения механики в наиболее предпочтительной, в плане численной реализации, консервативной форме.

Ключевые слова: *вектор, тензор, векторно-тензорный анализ, обобщённая дифференциальная операция, обобщённая интегральная теорема векторно-тензорного анализа.*

Введение

В механике сплошных сред все физические величины являются вектор-функциями и тензорами, например, в аэрогидродинамике математической моделью является система законов сохранения в виде дифференциальных уравнений в частных производных типа Навье-Стокса [1], которая в простейшем стационарном случае движения несжимаемой нетеплопроводной жидкости и при отсутствии массовых сил имеет консервативную форму:

$$\left(\nabla, \mathbf{V}\right) = 0, \quad \left(\nabla, \left(\mathbf{VV} + \mathbf{I}\frac{p}{\rho} - \nu[\mathbf{I}, \boldsymbol{\Omega}]\right)\right) = 0, \quad (1)$$

где: $\mathbf{V}$ – вектор скорости; $\boldsymbol{\Omega}$ - вектор завихренности; ρ – скалярная плотность; p – скалярное давление, а единичный тензор $\mathbf{I}$ в плоском случае имеет вид [2, 4]

$$\mathbf{I} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj},$$

а выражением вида $\mathbf{ab}$ обозначается диада [2, 5]:

$$\mathbf{ab} = \begin{Vmatrix} a_x b_x & a_x b_y \\ a_y b_x & a_y b_y \end{Vmatrix} =$$

$$= \mathbf{ii} a_x b_x + \mathbf{ij} a_x b_y + \mathbf{ji} a_y b_x + \mathbf{jj} a_y b_y$$

и векторы $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$ и $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}$ предполагаются дифференцируемыми до второго порядка включительно.

Векторный анализ – раздел математики, распространяющий методы математического анализа на векторы в пространствах двух или трех измерений [2-5].

Тензорное исчисление – обобщение векторного анализа, позволяющее использовать дифференциальные операторы, действующие на алгебре тензорных полей $\mathbf{D}$(M) дифференцируемого многообразия M любой размерности [5], что особенно актуально при исследовании нестационарных задач механики сплошных сред в пространствах произвольной размерности.

Известно [2], что для единичных векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ декартового базиса (рис.1), имеют место следующие соотношения:

$$\left(\mathbf{i}, \mathbf{j}\right) = \left(\mathbf{k}, \mathbf{i}\right) = \left(\mathbf{k}, \mathbf{j}\right) = 0; \; \left[\mathbf{i}, \mathbf{j}\right] = \mathbf{k}; \; \left[\mathbf{j}, \mathbf{k}\right] = \mathbf{i}; \; \left[\mathbf{k}, \mathbf{i}\right] = \mathbf{j}.$$

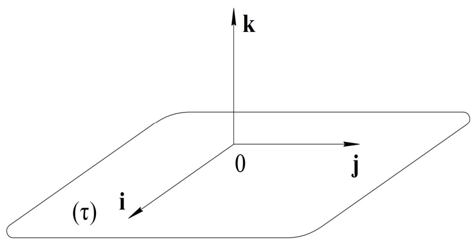

Рис. 1. Система координат в области течения (τ)

Обобщённые дифференциальные операции векторно-тензорного анализа

На основании предшествующих соотношений, нетрудно показать, что для любых вектор-функции $\mathbf{a}$ и скалярной функции φ, имеющих непрерывные производные до второго порядка включительно в исследуемой области, имеют место следующие обобщённые дифференциальные операции векторно-тензорного анализа с оператором $\nabla = \mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\dfrac{\partial}{\partial y}$, которые будут также широко использоваться и в дальнейшем [2-4].

$$(\nabla,(\mathbf{I}\varphi)) = \nabla\varphi; \qquad (2^1)$$

$$[\nabla,(\mathbf{I}\varphi)] = [\mathbf{kk},\nabla\varphi] = [\nabla\varphi,\mathbf{I}]; \qquad (2^2)$$

$$[\nabla,\mathbf{kk}\varphi] = [\nabla\varphi,\mathbf{kk}] = [\mathbf{I},\nabla\varphi]; \qquad (2^3)$$

$$(\nabla,[\mathbf{I},\mathbf{a}]) = [\nabla,\mathbf{a}]; \qquad (2^4)$$

$$[\nabla,[\mathbf{kk},\mathbf{a}]] = [\nabla,[\mathbf{a},\mathbf{I}]] = \nabla^*\mathbf{a} - \mathbf{I}(\nabla,\mathbf{a}); \qquad (2^5)$$

$$[\mathbf{I},[\nabla,\mathbf{a}]] = \nabla^*\mathbf{a} - \nabla\mathbf{a}; \qquad (2^6)$$

$$[\nabla,[\mathbf{I},\mathbf{a}]] = -\mathbf{kk}(\nabla,\mathbf{a}); \qquad (2^7)$$

$$\nabla(\nabla,\mathbf{a}) = (\nabla,\nabla^*\mathbf{a}) = \Delta\mathbf{a} + [\nabla,[\nabla,\mathbf{a}]], \qquad (2^8)$$

где $\nabla\mathbf{a}$ и $\nabla^*\mathbf{a}$ сопряжённые тензоры:

$$\nabla\mathbf{a} = \mathbf{i}\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial y};$$

$$\nabla^*\mathbf{a} = \mathbf{i}\nabla a_x + \mathbf{j}\nabla a_y.$$

Из известных формул векторного анализа [2] и показанных операций (2), для произвольных скалярной функции φ, вектор-функции **a** и тензора $\mathbf{B} = \mathbf{i}\mathbf{B_x} + \mathbf{j}\mathbf{B_y}$, имеем:

$$[\nabla,[\mathbf{a},\mathbf{B}]] = ((\nabla^*\mathbf{a}),\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla,\mathbf{a}) - \\ -(\mathbf{a},\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{a}(\nabla,\mathbf{B}). \qquad (3)$$

$$(\nabla,\varphi\mathbf{B}) = \varphi(\nabla,\mathbf{B}) + (\nabla\varphi,\mathbf{B}); \\ [\nabla,\varphi\mathbf{B}] = \varphi[\nabla,\mathbf{B}] + [\nabla\varphi,\mathbf{B}]. \qquad (4)$$

Подставив тензор **B** = [**kk**,**a**] и скаляр φ в формулу (4)

$$[\nabla,\varphi[\mathbf{kk},\mathbf{a}]] = \varphi[\nabla,[\mathbf{kk},\mathbf{a}]] + [\nabla\varphi,[\mathbf{kk},\mathbf{a}]] \qquad (5)$$

и, умножив на единичный вектор нормали $\mathbf{n}=n_x\mathbf{i}+n_y\mathbf{j}$ (рис. 2), получим

$$(\mathbf{n},[\nabla,\varphi[\mathbf{kk},\mathbf{a}]]) = \varphi(\mathbf{n},[\nabla,[\mathbf{kk},\mathbf{a}]]) + \\ +(\mathbf{n},[\nabla\varphi,[\mathbf{kk},\mathbf{a}]]). \qquad (6)$$

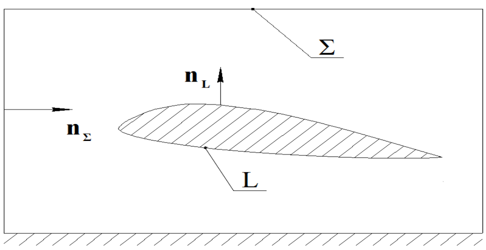

Рис. 2. Область интегрирования (τ) (см. рис. 1) с границами (Σ) и (L)

Так как для любых векторов **a**,**b** и **c**

$$([\mathbf{b},\mathbf{c}],[\mathbf{kk},\mathbf{a}]) = [[\mathbf{b},\mathbf{c}],\mathbf{a}], \qquad (7)$$

то последнее слагаемое в правой части выражения (6)

$$(\mathbf{n},[\nabla\varphi,[\mathbf{kk},\mathbf{a}]]) = ([\mathbf{n},\nabla\varphi],[\mathbf{kk},\mathbf{a}]) \qquad (8)$$

преобразуется к виду:

$$(\mathbf{n},[\nabla\varphi,[\mathbf{kk},\mathbf{a}]]) = ([\mathbf{n},\nabla\varphi],[\mathbf{kk},\mathbf{a}]) = [[\mathbf{n},\nabla\varphi],\mathbf{a}]. \qquad (9)$$

Обобщённая интегральная теорема векторно-тензорного анализа

Очевидно, что основные законы сохранения, записанные в консервативном виде (1), можно представить в форме дифференциальных уравнений второго порядка

$$\nabla(\nabla,\mathbf{a}) = 0;\ \nabla(\nabla,\mathbf{B}) = 0, \qquad (10)$$

где вектор **a** и тензор **B** связаны с решением конкретной задачи механики сплошных сред.

Тогда, интегрируя комбинацию этих операторов по области (τ) (см. рис.2), имеем:

$$\iint\limits_{(\tau)} \{(\nabla(\nabla,\mathbf{a}),\mathbf{B}) - (\mathbf{a},\nabla(\nabla,\mathbf{B}))\} d\tau =$$

$$= \iint\limits_{(\tau)} \{(\nabla,\{(\nabla,\mathbf{a})\mathbf{B}\}) - (\nabla,\{\mathbf{a}(\nabla,\mathbf{B})\})\} d\tau =$$

$$= \iint\limits_{(\tau)} (\nabla,\{(\nabla,\mathbf{a})\mathbf{B} - \mathbf{a}(\nabla,\mathbf{B})\}) d\tau$$

так как

$$(\nabla(\nabla,\mathbf{a}),\mathbf{B}) + (\nabla,\mathbf{a})(\nabla,\mathbf{B}) =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\right)\right]\mathbf{B}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\right)\frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial x} +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\right)\right]\mathbf{B}_y + \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\right)\frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\right)\mathbf{B}_x\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\right)\mathbf{B}_y\right] =$$

$$= (\nabla,\{(\nabla,\mathbf{a})\mathbf{B}\});$$

$$(\nabla,\mathbf{a})(\nabla,\mathbf{B}) + (\mathbf{a},\nabla(\nabla,\mathbf{B})) =$$

$$= \left(\frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial y}\right)\frac{\partial a_x}{\partial x} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial y}\right)\right]a_x +$$

$$+ \left(\frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial y}\right)\frac{\partial a_y}{\partial y} + \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial y}\right)\right]a_y =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial y}\right)a_x\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial y}\right)a_y\right] =$$

$$= (\nabla,\{\mathbf{a}(\nabla,\mathbf{B})\}).$$

По теореме Грина [2] интегралы по области (τ) можно преобразовать в контурные интегралы по границам (Σ) и (L):

$$\iint\limits_{(\tau)} \left(\nabla, \left\{(\nabla,\mathbf{a})\mathbf{B} - \mathbf{a}(\nabla,\mathbf{B})\right\}\right) d\tau =$$

$$= \oint\limits_{(\Sigma+L)} \left(\mathbf{n}, \left\{(\nabla,\mathbf{a})\mathbf{B} - \mathbf{a}(\nabla,\mathbf{B})\right\}\right) d(\sigma+1) =$$

$$= \oint\limits_{(\Sigma+L)} \left\{(\nabla,\mathbf{a})(\mathbf{n},\mathbf{B}) - (\mathbf{n},\mathbf{a})(\nabla,\mathbf{B})\right\} d(\sigma+1).$$

Тогда обобщённая интегральная теорема Грина примет следующий вид:

$$\iint\limits_{(\tau)} \left\{\left(\nabla(\nabla,\mathbf{a}),\mathbf{B}\right) - \left(\mathbf{a},\nabla(\nabla,\mathbf{B})\right)\right\} d\tau =$$

$$= \oint\limits_{(\Sigma+L)} \left\{(\nabla,\mathbf{a})(\mathbf{n},\mathbf{B}) - (\mathbf{n},\mathbf{a})(\nabla,\mathbf{B})\right\} d(\sigma+1). \quad (11)$$

Подынтегральное выражение в (11) удобно представить так:

$$(\nabla,\mathbf{a})(\mathbf{n},\mathbf{B}) - (\mathbf{n},\mathbf{a})(\nabla,\mathbf{B}) =$$

$$= \left(\frac{\partial^{*}\mathbf{a}}{\partial n},\mathbf{B}\right) - \left(\mathbf{a},\frac{\partial^{*}\mathbf{B}}{\partial n}\right) - \left(\mathbf{n},\left[\nabla,[\mathbf{a},\mathbf{B}]\right]\right). \quad (12)$$

Тогда:

$$\oint\limits_{(\Sigma+L)} \left(\mathbf{n},\left[\nabla,(\mathbf{a},\mathbf{B})\right]\right) d(\sigma+1) = \iint\limits_{(\tau)} \left(\nabla,\left[\nabla,(\mathbf{a},\mathbf{B})\right]\right) d\tau = 0.$$

И

$$\iint\limits_{(\tau)} \left\{\left(\nabla(\nabla,\mathbf{a}),\mathbf{B}\right) - \left(\mathbf{a},\nabla(\nabla,\mathbf{B})\right)\right\} d\tau =$$

$$\iint\limits_{(\tau)} \left[(\nabla,\mathbf{a})(\mathbf{n},\mathbf{B}) - (\mathbf{n},\mathbf{a})(\nabla,\mathbf{B})\right] d\tau =$$

$$= \oint\limits_{(\Sigma+L)} \left[\left(\frac{\partial^{*}\mathbf{a}}{\partial n},\mathbf{B}\right) - \left(\mathbf{a},\frac{\partial^{*}\mathbf{B}}{\partial n}\right)\right] d(\sigma+1). \quad (13)$$

Но, так как $\frac{\partial^{*}\mathbf{X}}{\partial n} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial n} + \left[\mathbf{n},[\nabla,\mathbf{X}]\right]$, где объект $\mathbf{X}$ является либо вектором $\mathbf{a}$, либо тензором $\mathbf{B}$, то

$$\oint\limits_{(\Sigma+L)} \frac{\partial^{*}\mathbf{a}}{\partial n} d\sigma = \oint\limits_{(\Sigma+L)} \left\{\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial n} + \left[\mathbf{n},[\nabla,\mathbf{a}]\right]\right\} d(\sigma+1), \quad (14)$$

$$\oint\limits_{(\Sigma+L)} \frac{\partial^{*}\mathbf{B}}{\partial n} d(\sigma+1) = \oint\limits_{(\Sigma+L)} \left\{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial n} + \left[\mathbf{n},[\nabla,\mathbf{B}]\right]\right\} d(\sigma+1). \quad (15)$$

Таким образом, вместо (13), имеем окончательный вид обобщенной теоремы Грина

$$\iint\limits_{(\tau)} \left\{\left(\nabla(\nabla,\mathbf{a}),\mathbf{B}\right) - \left(\mathbf{a},\nabla(\nabla,\mathbf{B})\right)\right\} d\tau =$$

$$= \oint\limits_{(\Sigma+L)} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial n},\mathbf{B}\right) + \left(\left[\mathbf{n},[\nabla,\mathbf{a}]\right],\mathbf{B}\right)\right] d(\sigma+1) -$$

$$- \oint\limits_{(\Sigma+L)} \left[\left(\mathbf{a},\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial n}\right) + \left(\mathbf{a},\left[\mathbf{n},[\nabla,\mathbf{B}]\right]\right)\right] d(\sigma+1). \quad (16)$$

Заключение

Многочисленные парадоксы теоретической аэрогидродинамики указывают на необходимость совершенствования математических и физических моделей аэрогидродинамических процессов и использования существующих возможностей более глубокого математического и численного анализа классических задач. Наиболее перспективным методом решения широкого спектра начально-краевых задач механики сплошных сред, в том числе аэрогидрогазодинамики, теорий упругости и пластичности является метод граничных интегральных уравнений, базирующийся на фундаментальных положениях векторно-тензорного анализа, таких как дифференциальные операции и интегральные теоремы в пространствах необходимой размерности. Однако в силу известных причин развитие этого направления математического анализа оставляет желать лучшего. В статье представлен спектр основных обобщенных дифференциальных операций в плоском случае для вектор-функций двух переменных, а также доказаны обобщенные интегральные теоремы. Показано, что развитый аппарат востребован идеологией формулирования законов сохранения механики в наиболее предпочтительной, в плане численной реализации, консервативной форме, а также позволяет получать интегральные представления решений.

Литература

1. *Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа [Текст] / Л. Г. Лойцянский. – М. : Наука, 1970. – 904 с.*
2. *Кочин, Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления [Текст] / Н. Е. Кочин. – М. : АН СССР, 1961. – 427 с.*
3. *Крашаница, Ю. А. Основная задача векторного анализа в механике сплошных сред (сообщение 1) [Текст] / Ю. А. Крашаница // Вісник Дніпропетровського університету. – 2000. – Т. 1, вып. 3. – С. 52 – 56.*
4. *Крашаница, Ю. А. Теория обобщённых гидродинамических потенциалов и метод граничных интегральных уравнений в краевых задачах гидродинамики [Текст] / Ю. А. Крашаница. – К. : Наукова думка, 2013. – 215 с.*
5. *Huang, K. Tensor analysis [Text] / K. Huang. – Beijing : Higher Education Publishing, 1998. – 285 с.*

Поступила в редакцию 6.02.2014, рассмотрена на редколлегии 12.03.2014

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, профессор, Заслуженный деятель науки и техники Украины, зав. отделом гидродинамики волновых процессов И. Т. Селезов, Институт гидромеханики НАН Украины.

ДЕЯКІ УЗАГАЛЬНЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ВЕКТОРНО-ТЕНЗОРНОГО АНАЛІЗУ

Ю. О. Крашаниця, Ює Пен

Сучасна ідеологія розв'язання початково-крайових задач механіки суцільних середовищ, в тому числі аерогідрогазодінамікі, пружності і пластичності базується на фундаментальних положеннях векторно-тензорного аналізу таких як диференціальні операції та інтегральні теореми в просторах необхідної розмірності. Однак у силу відомих причин розвиток цього напрямку математики залишає бажати кращого. У статті представлено спектр основних диференціальних операцій в плоскому випадку для вектор-функцій двох змінних, а також доведено узагальнені інтегральні теореми Гріна. Показано, що розвинений апарат затребувано ідеологією формулювання законів збереження механіки в найбільш кращій, в плані чисельної реалізації, консервативній формі.

Ключові слова: вектор, тензор, векторно-тензорний аналіз, узагальнена диференціальна операція, узагальнена інтегральна теорема векторно-тензорного аналізу.

SOME OPERATIONS GENERALIZATIONS OF THE VECTOR-TENSOR ANALYSIS

Y. A. Krashanitsa, Yue Peng

Modern ideology solutions of boundary value problems of continuum mechanics, including aero-hydrodynamics and gas dynamics, elasticity and plasticity based on the fundamental positions of vector-tensor analysis operations such as differential and integral theorems in spaces necessary dimension. However, due to reasons known development of this area of mathematics is poor. The article presents a range of basic differential operations in the planar case for vector-valued functions of two variables, and prove generalized integral Green's theorem. It is shown that the developed apparatus claimed ideology formulation of the conservation laws of mechanics in the most preferred in terms of numerical implementation, conservative form.

Key words: vector, tensor, vector and tensor analysis, generalized differential operation, the generalized integral theorem of vector-tensor analysis.

Крашаница Юрий Александрович – д-р техн. наук, проф., гл. науч. сотр. каф. аэрогидродинамики, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

Юе Пен – аспирант каф. аэрогидродинамики, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина.