

УДК 532.526.02

Ю. А. КРАШАНИЦА, ЮЕ ПЕН

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина

## ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ СИСТЕМЫ ТЕЛЕСНЫХ ПРОФИЛЕЙ ОГРАНИЧЕННЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ СРЕДЫ

На базе развитого аппарата векторно-тензорного анализа представлены обобщённые векторные потенциалы дифференциальных законов сохранения гидродинамики, а также интегральные представления решений в виде комбинаций поверхностных интегралов типа потенциалов не только основной задачи векторного анализа в случае поверхностного распределения завихренности и интенсивности источников массы, но и полной системы уравнений Навье-Стокса в случае обтекания произвольной системы телесных профилей потоком вязкой несжимаемой жидкости также и вблизи поверхности раздела.

**Ключевые слова:** система телесных аэродинамических профилей, система уравнений Навье-Стокса, векторно-тензорный анализ, интегральное представление решений.

### Введение

В аэродинамике проблема увеличения эффективности авиационной техники и транспорта связана с теоретическим и экспериментальным исследованиями соответствующих аэрогидродинамических характеристик, обоснованием существующих и новых принципов образования сил и управления ими, что должно обеспечить выполнение технико-экономических требований с учётом безопасной эксплуатации.

Реализация такого объединения позволит получать высокие значения аэрогидродинамических характеристик, определяющих, в сочетании с большими скоростями, уровень эффективности транспортных средств; будет способствовать решению ряда задач взлёта - посадки летательных аппаратов, устойчивости, управления и безопасности движения аппаратов, перемещающихся на больших и малых

расстояниях от границы.

### 1. Постановка задачи исследования

Представлено решение задачи исследования обтекания произвольной системы аэродинамических профилей телесной формы в плоской области ( $\tau$ ) реальным потоком несжимаемой среды (рис. 1). В связи с возможным присутствием плоской поверхности раздела на режимах взлёта/посадки самолёта, поле скоростей набегающего потока  $V_\infty$  считается существенно завихренным.

Необходимо подчеркнуть, что современные исследования проблемных и востребованных задач механики сплошных сред и, в частности, аэрогидродинамики, опираются на развитые аппараты функционального и векторно-тензорного анализов [1 – 4], что в полной мере эффективно эксплуатируется и способствует развитию численных методов решения

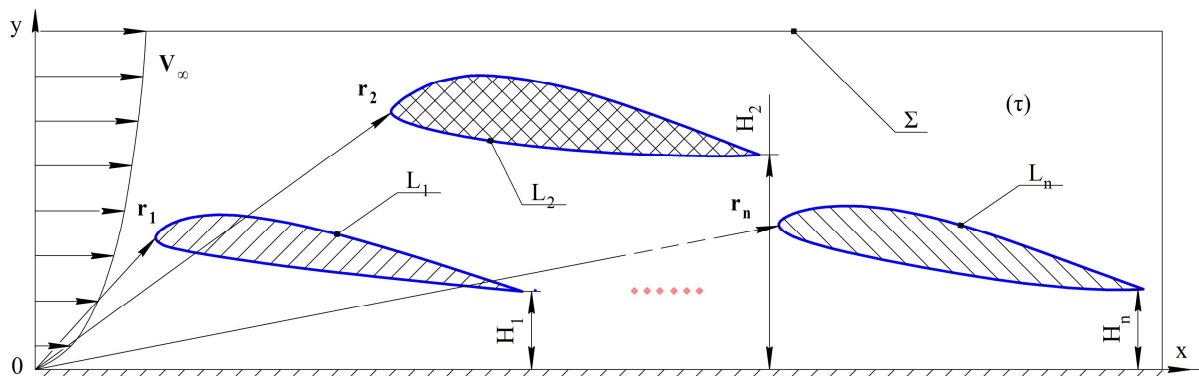


Рис. 1. Система телесных профилей в стационарном вязком потоке вблизи поверхности раздела,

$L_1, L_2, \dots, L_n$  – границы профилей;  $\Sigma$  – граница контрольного объёма;

$H_1, H_2, \dots, H_n$  – высоты профилей;  $r_1, r_2, \dots, r_n$  – векторы положений профилей;

$V_\infty$  – вектор скорости набегающего потока

всего спектра востребованных задач аэрогидромеханики [5, 12 – 15]. Применение функционального анализа в механике жидкости и газа обусловлено отражением того факта, что реально, как правило, невозможно измерить значение физической величины в точке, а можно измерять лишь её средние значения в малых окрестностях данной точки. Таким образом, техника обобщённых функций служит удобным и адекватным аппаратом для описания распределений различных физических величин [1, 5, 10 – 11].

Наиболее достоверной и апробированной математической моделью движения несжимаемой нетеплопроводной жидкости является краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных Навье-Стокса [6, 9 – 11], которая состоит из системы уравнений сохранения:

$$\text{массы неразрывности} - \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla, \mathbf{V}) = 0 \quad (1)$$

и сохранения импульса –

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{V} + \frac{\nu}{3} \nabla(\nabla, \mathbf{V}), \quad (2)$$

где в плоском случае течения в декартовом базисе  $\mathbf{V} = i\mathbf{u} + j\mathbf{v}$  – вектор скорости потока среды;  $\mathbf{F}$  – внешняя массовая сила (например, сила тяжести и т.д.) может быть потенциальным вектором, но в нашем простейшем случае ограничимся тем, что  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ;  $p$  – внутреннее гидростатическое давление внутри среды;  $\rho$  – плотность среды;  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  – коэффициент кинематической вязкости, а  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости.

## 2. Граничные условия в задаче обтекания системы телесных аэродинамических профилей в ограниченной области

Известно, что математические модели процессов или явлений в аэрогидромеханике нетеплопроводной среды представляют собой комплекс системы дифференциальных законов сохранения (1 – 2) и начально-краевых условий, обусловленных экспериментальными наблюдениями.

Так как

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V}, \quad (3)$$

то для стационарного движения потока вязкой несжимаемой жидкости вместо уравнений (1 – 2) имеем базовую систему уравнений:

$$(\nabla, \mathbf{V}) = 0; \quad (4)$$

$$(\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{V}, \quad (5)$$

при исследовании которой необходимо воспользоваться развитым аппаратом векторно-тензорного анализа [2, 4].

Исходя из этого опыта и учитывая свойства единичного тензора  $\mathbf{I}$ :

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \left( \nabla, \mathbf{I} \frac{p}{\rho} \right); \quad (6)$$

$$(\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} = (\nabla, \mathbf{V}\mathbf{V}) - \mathbf{V}(\nabla, \mathbf{V}); \quad (7)$$

а

$$\left( \nabla, \nabla^* \mathbf{V} \right) = \nabla(\nabla, \mathbf{V}), \quad (8)$$

где  $\mathbf{V}\mathbf{V}$  – диада, а  $\nabla^* \mathbf{V}$  – тензор сопряженный тензору  $\nabla \mathbf{V}$  [4].

Тогда:

$$(\nabla, \mathbf{V}\mathbf{V}) + \left( \nabla, \mathbf{I} \frac{p}{\rho} \right) - \nu \Delta \mathbf{V} = 0. \quad (9)$$

Известно [4], что вектор завихренности  $\mathbf{\Omega} = [\nabla, \mathbf{V}]$  в случае несжимаемой среды:

$$\Delta \mathbf{V} = -(\nabla, [\mathbf{I}, \mathbf{\Omega}]). \quad (10)$$

Тогда, дифференциальный закон сохранения импульса (5) в случае движения стационарной, нетеплопроводной и несжимаемой среды можно представить в консервативном виде:

$$\left( \nabla, \left( \mathbf{V}\mathbf{V} + \mathbf{I} \frac{p}{\rho} + \nu [\mathbf{I}, \mathbf{\Omega}] \right) \right) = 0, \quad (11)$$

или:

$$\left( \nabla, (\mathbf{V}\rho\mathbf{V}) \right) = (\nabla, \mathbf{T}), \quad (12)$$

где тензор напряжений  $\mathbf{T}$  имеет вид:

$$\mathbf{T} = -\mathbf{I}p + \mu \nabla \mathbf{V}. \quad (13)$$

Причём искомые характеристики обтекания: давление –  $p$  и завихренность –  $\mathbf{\Omega}$  (см. рис. 1), должны определяться с учётом заданных граничных условий:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}|_{L_i} &= \mathbf{0}; \quad \mathbf{V}|_{\Sigma} = \mathbf{V}_{\infty}; \\ \mathbf{V}|_{r \rightarrow \pm \infty} &\rightarrow \mathbf{V}_{\infty}; \quad p|_{r \rightarrow \pm \infty} \rightarrow p_{\infty}. \end{aligned} \quad (14)$$

В координатном виде закон сохранения импульса (5) имеет вид:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \quad (15)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (16)$$

Причём на границах области  $\Sigma$  вертикальная составляющая вектора скорости  $v=0$ , а горизонтальная составляющая вектора скорости  $u(y)$  зависит только от координаты  $y$ . Поэтому здесь:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = v = 0. \quad (17)$$

Подставляя эти результаты в уравнения (15) и (16), получим:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (18)$$

откуда следует, что скалярное давление  $p$  зависит только от продольной координаты  $x$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\nu \rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\nu \rho} \frac{dp}{dx} = \text{const}. \quad (19)$$

На верхней границе  $\Sigma_{\text{вер}}$  (рис. 2):

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=H} = 0; \quad u|_{y=H} = V_{\infty}. \quad (20)$$

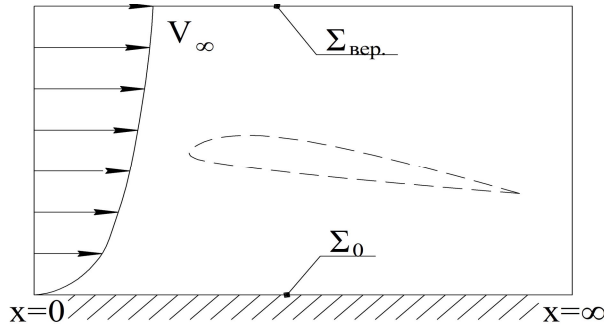


Рис. 2. Границы области течения вязкой среды

На нижней границе  $\Sigma_0$ :  $u|_{y=0} = 0.$  (21)

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \frac{1}{\nu \rho} \frac{dp}{dx} y + C_1; \quad (22)$$

$$u = \int \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{1}{2\nu \rho} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2. \quad (23)$$

С учётом граничных условий (20) и (21), имеем:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=H} = \frac{1}{\nu \rho} \frac{dp}{dx} H + C_1 = 0, \quad (24)$$

$$u(0) = \frac{1}{2\nu \rho} \frac{dp}{dx} \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \quad (25)$$

и

$$C_1 = -\frac{1}{\nu \rho} \frac{dp}{dx} H, \quad C_2 = 0. \quad (26)$$

Таким образом,

$$u(y) = \frac{1}{\nu \rho} \frac{dp}{dx} \left( \frac{y^2}{2} - H y \right) \quad (27)$$

и

$$u(H) = -\frac{1}{2\nu \rho} \frac{dp}{dx} H^2 = V_{\infty}, \quad (28)$$

а

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{2\nu \rho}{H^2} V_{\infty}. \quad (29)$$

Тогда:

$$p = -\frac{2\nu \rho}{H^2} V_{\infty} x + C_1.$$

При  $x = 0, p = p_{\infty} C_1 = p_{\infty}.$

Полученные результаты позволяют выписать граничные условия для скорости  $u$  на границах:  $x = 0; x = \infty$  (см. рис. 2):

$$u(y) \Big|_{x=0; x=\infty} = -\frac{2V_{\infty}}{H^2} \left( \frac{y^2}{2} - H y \right); \quad (30)$$

и граничные условия для давления  $p$  на границах  $\Sigma_0$  и  $\Sigma_{\text{вер}}$ :

$$p(x) = -\frac{2\nu \rho}{H^2} V_{\infty} x + p_{\infty}. \quad (31)$$

Кроме этого, здесь необходимо выделить тот классический факт, что векторы скорости  $\mathbf{V}$  и завихренности  $\mathbf{\Omega}$  являются решениями основной задачи векторного анализа [2, 4]:

$$(\nabla, \mathbf{V}) = q; \quad (\nabla, \mathbf{\Omega}) = 0, \quad (32)$$

где  $q$  – интенсивность возможных источников/стоков массы и параметров энергетической механизации.

К сожалению, до настоящего времени не создан общий метод исследования и решения нелинейной системы законов сохранения даже в простейшем случае (4 – 5). Тем не менее современное развитие математической физики, основанное на методе граничных интегральных уравнений в применении к краевым задачам механики [2, 7, 8], и, в первую очередь, аэрогидродинамики [2], позволяют выходить на аналитические решения определённых классов нелинейных задач.

### 3. Фундаментальное решение основной задачи векторного анализа

Классические условия Коши-Римана [3 – 4]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (33)$$

можно представить в векторных видах:

$$\nabla \varphi = [\nabla, \mathbf{k}\psi]; \quad \nabla \psi = -[\nabla, \mathbf{k}\varphi], \quad (34)$$

где функции  $\varphi$  и  $\psi$  – сопряжённые аналитические функции – известные решения уравнения Лапласа [4]

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|; \quad (35)$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \text{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0}. \quad (36)$$

Отсюда следует, что тензор

$$\Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \mathbf{I}\varphi - [\mathbf{I}, \mathbf{k}\psi], \quad (37)$$

является консервативным:

$$(\nabla, \Gamma) = (\nabla, (\mathbf{I}\varphi - [\mathbf{I}, \mathbf{k}\psi])) = \nabla\varphi - [\nabla, \mathbf{k}\psi] = 0, \quad (38)$$

а, в силу условий Коши-Римана (33) и потенциальным, так как

$$[\nabla, \Gamma] = \mathbf{k} \left( \mathbf{j} \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \mathbf{i} \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) - \mathbf{k} \left( \mathbf{i} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) = 0. \quad (39)$$

Кроме этого, можно утверждать, что тензор  $\Gamma$  является фундаментальным решением дифференциального оператора второго порядка:

$$\nabla(\nabla, \Gamma) = \Delta\Gamma + [\nabla, [\nabla, \Gamma]] = \mathbf{I}\Delta\varphi. \quad (40)$$

Таким образом, для основной задачи векторного анализа (32), представленной в виде операторов второго порядка:

$$\nabla(\nabla, \mathbf{V}) = \nabla q; \quad \nabla(\nabla, \mathbf{\Omega}) = 0,$$

тензор  $\Gamma$  (37), по определению [1], является фундаментальным решением.

#### 4. Векторный потенциал закона сохранения импульса

На основании изложенного основную задачу векторного анализа гидродинамического содержания (32) целесообразно сформулировать в консервативной форме:

$$\nabla(\nabla, \mathbf{V}) = (\nabla, \nabla^* \mathbf{V}) = \nabla q; \quad (41)$$

$$\nabla(\nabla, \mathbf{\Omega}) = (\nabla, \nabla^* \mathbf{\Omega}) = 0. \quad (42)$$

В представленной работе предполагается отсутствие как объёмных, так и поверхностных источников массы ( $q = 0$ ), а также тепловых процессов, хотя эта идеология позволяет учитывать физико-химические взаимодействия с реагированием, приводящие к важным эффектам, существенно влияющих на аэрогидродинамические характеристики объектов аэрокосмической техники на любых режимах полёта и в любой среде или атмосфере.

Приведенные векторно-тензорные дифференциальные операции позволяют выписать закон сохранения импульса, при указанных ограничениях, в консервативной форме, который широко используется в мировой практике вычислительной аэрогидродинамики [12 – 15]:

$$\begin{aligned} & \left( \nabla, \left\{ \mathbf{V}\mathbf{V} + \mathbf{I} \frac{p}{\rho} - \nu \nabla \mathbf{V} \right\} \right) \equiv \\ & \equiv \left( \nabla, \left\{ \mathbf{V}\mathbf{V} + \mathbf{I} \frac{p}{\rho} + \nu [\mathbf{I}, \mathbf{\Omega}] \right\} \right) = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Эта консервативная форма закона сохранения допускает введение векторного потенциала  $\Psi$ :

$$\mathbf{V}\mathbf{V} + \mathbf{I} \frac{p}{\rho} - \nu \nabla \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}\mathbf{V} + \mathbf{I} \frac{p}{\rho} + \nu (\nabla^* \mathbf{V} - \nabla \mathbf{V}) = \nabla^* \Psi, \quad (44)$$

который принадлежит к классу решений базового уравнения типа (42) основной задачи векторного анализа [4]:

$$(\nabla, \nabla^* \Psi) \equiv \nabla(\nabla, \Psi) = 0. \quad (45)$$

#### 5. Интегральные представления решений

Интегральные представления решений краевых задач математической физики для дифференциальных уравнений, в данном случае, второго порядка строятся путём интегрирования комбинации операторов (40 – 41) для произвольного вектора  $\mathbf{a}$  с необходимыми дифференциальными свойствами и тензора  $\Gamma$  по области ( $\tau$ ) (рис. 3), применяя классический процесс выделения особой точки, с учётом известных свойств потенциала двойного слоя  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$  [3]:

$$\begin{aligned} & \iint_{(\tau)+\tau_\varepsilon} (\nabla, [\nabla, (\mathbf{a}, \Gamma)]) d\tau = \\ & = \oint_{\Sigma L_i + \Sigma + L_\varepsilon} (\mathbf{n}, [\nabla, (\mathbf{a}, \Gamma)]) d(\sigma + l + l_\varepsilon). \end{aligned} \quad (46)$$

Выражение  $(\mathbf{n}, [\nabla, (\mathbf{a}, \Gamma)])$  можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{n}, [\nabla, [\mathbf{a}, \Gamma]]) = \\ & = \left( \frac{\partial^* \mathbf{a}}{\partial n}, \Gamma \right) - (\nabla, \mathbf{a})(\mathbf{n}, \Gamma) - \left( \mathbf{a}, \frac{\partial^* \Gamma}{\partial n} \right) + (\mathbf{n}, \mathbf{a})(\nabla, \Gamma). \end{aligned} \quad (47)$$

Тогда для контурного интеграла (46) имеем:

$$\begin{aligned} & \oint_{\Sigma L_i + \Sigma + L_\varepsilon} (\mathbf{n}, [\nabla, (\mathbf{a}, \Gamma)]) d(\sigma + l + l_\varepsilon) = \\ & = \oint_{\Sigma L_i + \Sigma + L_\varepsilon} \left\{ \left( \frac{\partial^* \mathbf{a}}{\partial n}, \Gamma \right) - \left( \mathbf{a}, \frac{\partial^* \Gamma}{\partial n} \right) \right\} d(\sigma + l + l_\varepsilon) + \\ & + \oint_{\Sigma L_i + \Sigma + L_\varepsilon} \{ (\mathbf{n}, \mathbf{a})(\nabla, \Gamma) - (\nabla, \mathbf{a})(\mathbf{n}, \Gamma) \} d(\sigma + l + l_\varepsilon). \end{aligned} \quad (48)$$

Из определения тензора  $\Gamma$  (37) следует, что

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial n} = \mathbf{I} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - [\mathbf{I}, \mathbf{k}] \frac{\partial \psi}{\partial n}. \quad (49)$$

А по определению функции  $\psi$  (см. формулу (36)), имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0. \quad (50)$$

Тогда

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial n} = \mathbf{I} \frac{\partial \varphi}{\partial n}. \quad (51)$$

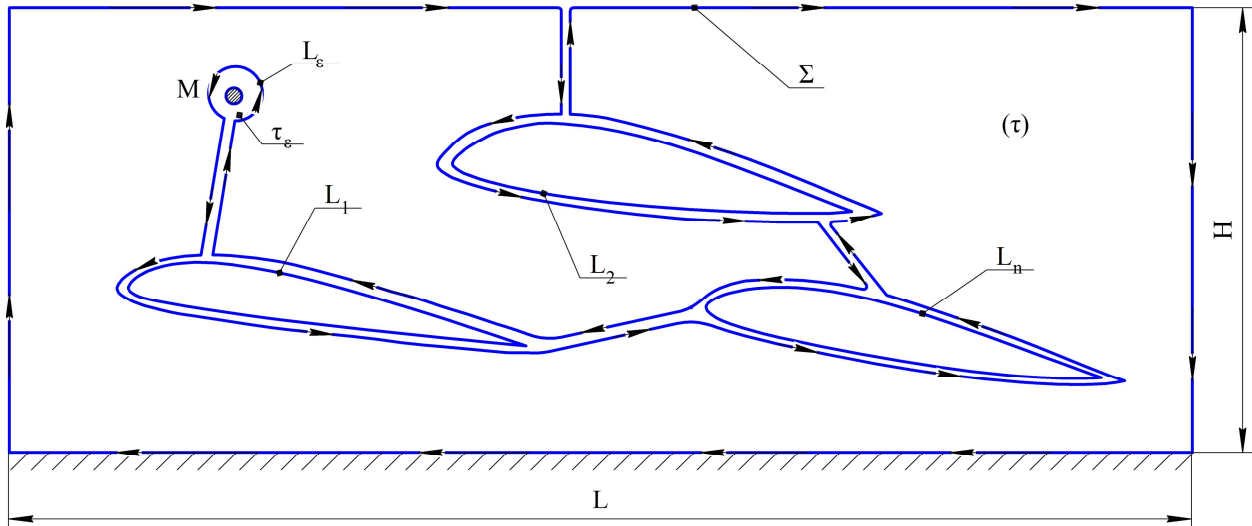


Рис. 3. Область интегрирования, H – высота контрольной области; L – длина контрольной области; (τ) – контрольная область; τ<sub>ε</sub> – область особой точки M с бесконечно малым радиусом ε; L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub>, ..., L<sub>n</sub> – границы профилей; Σ – граница контрольной области; L<sub>ε</sub> – граница области особой точки с бесконечно малым радиусом ε

Граница области с центром в контрольной точке – окружность L<sub>ε</sub> (см. рис. 3 и рис. 4):

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \varepsilon. \quad (52)$$

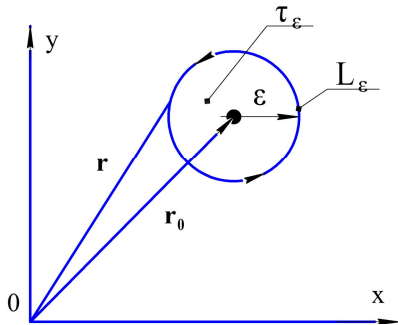


Рис. 4. Выделение особой точки внутри области интегрирования

Из определения функции φ (см. формулу (35)) на L<sub>ε</sub>, получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{2\pi} \right) = \frac{1}{2\pi \varepsilon}. \quad (53)$$

И тогда:

$$\begin{aligned} \oint_{L_\varepsilon} \left( \mathbf{a}, \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}} \right) d l_\varepsilon &= \oint_{L_\varepsilon} \left( \mathbf{a}, \mathbf{I} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right) d l_\varepsilon = \oint_{L_\varepsilon} \left( \mathbf{a}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right) d l_\varepsilon = \\ &= \int_0^{2\pi} \mathbf{a} \cdot \frac{1}{2\pi \varepsilon} \cdot \varepsilon d\theta = \mathbf{a} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (54)$$

$$\oint_{\Sigma L_1 + \Sigma + L_\varepsilon} \left( \mathbf{a}, \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}} \right) d(\sigma + 1 + l_\varepsilon) = \oint_{\Sigma L_1 + \Sigma} \left( \mathbf{a}, \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}} \right) d(\sigma + 1) +$$

$$+ \oint_{L_\varepsilon} \left( \mathbf{a}, \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}} \right) d l_\varepsilon = \oint_{\Sigma L_1 + \Sigma} \left( \mathbf{a}, \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}} \right) d(\sigma + 1) + \mathbf{a}. \quad (55)$$

При ε → 0 в этом случае, вместо выражения (48), получим:

$$\begin{aligned} &\iint_{(\tau)} (\nabla, [\nabla, (\mathbf{a}, \Gamma)]) d\tau = \\ &= \oint_{\Sigma L_1 + \Sigma} \left\{ \left( \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{n}}, \Gamma \right) - \left( \mathbf{a}, \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}} \right) \right\} d(\sigma + 1) + \\ &+ \oint_{\Sigma L_1 + \Sigma} \left\{ ([\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{a}]], \Gamma) - (\mathbf{a}, [\mathbf{n}, [\nabla, \Gamma]]) \right\} d(\sigma + 1) - \\ &- \mathbf{a} + \oint_{\Sigma L_1 + \Sigma} \left\{ (\mathbf{n}, \mathbf{a})(\nabla, \Gamma) - (\nabla, \mathbf{a})(\mathbf{n}, \Gamma) \right\} d(\sigma + 1). \end{aligned} \quad (56)$$

Обобщённую интегральную теорему векторно-тензорного анализа (46) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} &\oint_{\Sigma L_1 + \Sigma} \left\{ (\nabla, \mathbf{a})(\mathbf{n}, \Gamma) - (\mathbf{n}, \mathbf{a})(\nabla, \Gamma) \right\} d(\sigma + 1) = \\ &= \iint_{(\tau)} \left\{ (\nabla(\nabla, \mathbf{a}), \Gamma) - (\mathbf{a}, \nabla(\nabla, \Gamma)) \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (57)$$

Так как вне особой точки M (см. рис. 3, 4 и (40))

$$\nabla(\nabla, \Gamma) = 0,$$

то и

$$\iint_{(\tau)} (\mathbf{a}, \nabla(\nabla, \Gamma)) d\tau = 0. \quad (58)$$

Поэтому, окончательно:

$$\oint_{\Sigma L_1 + \Sigma} \left\{ (\mathbf{n}, \mathbf{a})(\nabla, \Gamma) - (\nabla, \mathbf{a})(\mathbf{n}, \Gamma) \right\} d(\sigma + 1) =$$

$$= - \iint_{(\tau)} (\nabla(\nabla, \mathbf{a}), \Gamma) d\tau. \quad (59)$$

Тогда, выражение (56) приобретает необходимый вид:

$$\begin{aligned} & \iint_{(\tau)} (\nabla, [\nabla, (\mathbf{a}, \Gamma)]) d\tau = \oint_{\Sigma_{L_i+\Sigma}} \left( \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial n}, \Gamma \right) d(\sigma+1) + \\ & + \oint_{\Sigma_{L_i+\Sigma}} \left\{ ([\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{a}]], \Gamma) - (\mathbf{a}, [\mathbf{n}, [\nabla, \Gamma]]) \right\} d(\sigma+1) - \\ & - \iint_{(\tau)} (\nabla(\nabla, \mathbf{a}), \Gamma) d\tau - \oint_{\Sigma_{L_i+\Sigma}} \left( \mathbf{a}, \frac{\partial \Gamma}{\partial n} \right) d(\sigma+1) - \mathbf{a} = 0. \quad (60) \end{aligned}$$

Отсюда получаем общее интегральное представление решения оператора  $\nabla(\nabla, \mathbf{a}) = \nabla \mathbf{q}$  для произвольного вектора  $\mathbf{a}$  в плоской области с контрольной границей ( $\Sigma$ ) (см. рис. 3):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{r}_0) = & - \iint_{(\tau)} (\nabla \mathbf{q}, \Gamma(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)) d\tau + \\ & + \oint_{\Sigma_{L_i+\Sigma}} \left\{ \left( \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial n}, \Gamma(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) \right) + ([\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{a}]], \Gamma(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)) \right\} d(\sigma+1) - \\ & - \oint_{\Sigma_{L_i+\Sigma}} \left( \mathbf{a}, \frac{\partial \Gamma}{\partial n} \right) d(\sigma+1). \quad (61) \end{aligned}$$

В простейшем случае движения несжимаемой нетеплопроводной жидкости при отсутствии источников массы в области имеем интегральное представление, например, вектора скорости:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{r}_0) = & \oint_{\Sigma_{L_i+\Sigma}} \left\{ \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n}, \Gamma \right) + ([\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{V}]], \Gamma) \right\} d(\sigma+1) - \\ & - \oint_{\Sigma_{L_i+\Sigma}} \left( \mathbf{V}, \frac{\partial \Gamma}{\partial n} \right) d(\sigma+1), \quad (62) \end{aligned}$$

где контурные интегралы в представлениях (61 – 62) допускают численную реализацию в силу их принадлежности к классу сингулярных интегралов и интегралов со слабой особенностью [3, 7].

### Заключение

Таким образом, большой практический и теоретический интерес вызывает решение задачи исследования обтекания несущих элементов летательных аппаратов, с целью определения реальных аэродинамических характеристик. Кроме этого представленный подход позволяет исследовать правдоподобные физические процессы вихреобразования в окрестности несущих элементов, их пространственного взаимодействия и влияния на аэродинамические характеристики летательных аппаратов.

В настоящее время наиболее перспективным методом решения широкого круга краевых задач механики сплошных сред является метод граничных

интегральных уравнений, позволяющий:

- понизить размерность задачи и рассматривать более сложные классы задач, чем те, которые решаются другими методами;

- определять неизвестные величины на границах области; решения во внутренних точках области находятся интегрированием;

- нелинейные краевые задачи для систем дифференциальных уравнений привести к системе линейных граничных интегральных уравнений относительно неизвестных краевых значений разыскиваемых параметров задачи или функций от них;

- выполнить корректную алгоритмизацию и осуществить вычислительный процесс с целью определения кинематических и динамических характеристик взаимодействия среды с обтекаемым объектом.

### Литература

1. Владимиров, В. С. *Обобщённые функции в математической физике [Текст] / В. С. Владимиров.* – М.: Наука, 1976. – 395 с.
2. Крашаница, Ю. А. *Теория обобщённых гидродинамических потенциалов и метод граничных интегральных уравнений в краевых задачах гидродинамики [Текст] / Ю. А. Крашаница.* – К.: Наукова думка, 2013. – 215 с.
3. Гюнтер, Н. М. *Теория потенциала и ее применения к основным задачам математической физики [Текст] / Н. М. Гюнтер.* – М.: Гостехиздат, 1953. – 415 с.
4. Кочин, Н. Е. *Векторное исчисление и начала тензорного исчисления [Текст] / Н. Е. Кочин.* – М.: АН СССР, 1961. – 427 с.
5. Бабенко, К. И. *Основы численного анализа [Текст] / К. И. Бабенко.* – М.: Наука, 1986. – 876 с.
6. Ладыженская, О. А. *Математические вопросы динамики вязкой жидкости [Текст] / О. А. Ладыженская.* – М.: Наука, 1970. – 288 с.
7. Мазья, В. Г. *Граничные интегральные уравнения. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления [Текст] / В. Г. Мазья // Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР.* – 1988. – Т. 27. – С. 131–228.
8. Круза, Т. *Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения в механике [Текст] / Т. Круза, Ф. Риццо.* – М.: Мир, 1978. – 210 с.
9. Слезкин, Н. А. *Динамика вязкой несжимаемой жидкости [Текст] / Н. А. Слезкин.* – М.: ГИТТЛ, 1955. – 519 с.
10. Темам, Р. *Уравнение Навье–Стокса [Текст] / Р. Темам.* – М.: Мир, 1981. – 408 с.

11. Galdi, G. P. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier–Stokes Equations [Text]* / G. P. Galdi. – New York; Dordrecht; Heidelberg; London : Springer, 2011. – 1018 p.
12. Hall, M. G. *Computational Fluid Dynamics. A Revolutionary Force in Aerodynamics [Text]* / M. G. Hall. – California: AIAA Paper 81–1014, 1981. – 238 p.
13. Viviani, H. *Computational Fluid Dynamics in France [Text]* / H. Viviani, C. Lecomte // AIAA 8th. Comput. Fluid Dyn. Conf. : Collect. Techn. Pap. – 1967. – P. 336–351.
14. Schmidt, W. *Computational Fluid Dynamics In West Germany [Text]* / W. Schmidt // AIAA 8th. Comput. Fluid Dyn. Conf.: Collect. Technol. Pap. – 1987. – P. 322–335.
15. Kulter, P. *Status of Computation Fluid Dynamics in the United States [Text]* / P. Kulter, J. L. Steger, F. R. Bailey // AIAA 8th. Comput. Fluid Dyn. Conf.: Collect. Technol. Pap. – 1988. – P. 375–396.

Поступила в редакцию 03.05.2014, рассмотрена на редколлегии 20.05.2014

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф., проф. каф. ракетно-космических двигателей и энергетических установок летательных аппаратов А. В. Амброжевич, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.

### ІНТЕГРАЛЬНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ РІШЕННЯ ЗАДАЧІ ОБТІКАННЯ СИСТЕМИ ТІЛЕСНИХ ПРОФІЛЕЙ ОБМЕЖЕНИМ ПОТОКОМ В'ЯЗКОГО СЕРЕДОВИЩА

*Ю. А. Крашаниця, Юе Пен*

На базі розвинутого апарату векторно - тензорного аналізу представлено узагальнені векторні потенціали диференціальних законів збереження гідродинаміки, а також інтегральні представлення розв'язків у вигляді комбінацій поверхневих інтегралів типу потенціалів не тільки основної задачі векторного аналізу в разі поверхневого розподілу завихорності та інтенсивності джерел маси, а й повної системи рівнянь Нав'є - Стокса в разі обтікання довільної системи тілесних профілів потоком в'язкої нестисливої рідини також і поблизу поверхні розділу.

**Ключові слова:** система тілесних аеродинамічних профілів, система рівнянь Нав'є - Стокса, векторно - тензорний аналіз, інтегральне представлення розв'язків.

### INTEGRAL REPRESENTATION OF SOLUTION FLOW OF SOLID PROFILES LIMITING THE FLOW OF THE VISCOUS MEDIA

*Y. A. Krashanitsa, Yue Peng*

On the basis of the apparatus of vector- tensor analysis summarizes the vector potentials for differential conservation laws of hydrodynamics, as well as integral representations of the solutions in the form of combinations of surface integrals of potential type not only the primary challenge of vector analysis for the surface vorticity distribution and intensity used sources of mass, but also the full Navier - Stokes equation for flow past an arbitrary system threads bodily Profile viscous incompressible fluid flow and also near the interface between.

**Key words:** bodily system airfoils, Navier-Stokes system of equations, vector-tensor analysis, the integral representation of the solution.

**Крашаниця Юрій Александрович** – д-р техн. наук, проф., гл. науч. сотр. каф. аэрогидродинамики, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

**Юе Пен** – аспирант каф. Аэрогидродинамики, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина, e-mail: yue.pengyu@yahoo.com