УДК 517.958:539.4: 629.7.02

С. А. ХАЛИЛОВ, В. Б. МИНТЮК, Д. А. ТКАЧЕНКО, В. В. КОПЫЧКО

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина

СОБСТВЕННЫЙ СПЕКТР БИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ ПРИ ГЛАВНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

Показано, что решение означенной задачи может быть получено с любой наперед заданной точностью. Это позволило уточнить известные оценки сверху и снизу собственных значений. Решения конкретных задач в форме разложения в ряд по собственным функциям обладают не только высокой устойчивостью, сходимостью и точностью, но и обеспечивают стремление к нулю невязки в уравнении соответствующих краевых задач. Предлагаемые решения имеют самостоятельное значение как при исследовании состояния конструктивных элементов в виде прямоугольных пластин, так и при исследовании пластинчатых систем, что весьма важно при проектировании аэрокосмической техники, поскольку оказывается возможным получать искомые характеристики системы в алгоритмически замкнутой форме.

Ключевые слова: *бигармонический оператор; собственный спектр и собственные функции; устойчивость, сходимость и точность решений; стремление невязки к нулю.*

Введение

При исследовании напряжённо-деформированного состояния, упругой устойчивости и упругих колебаний несущих конструкции аэрокосмической техники как классических объектов тонкостенных пространственных систем определяющими являются краевые задачи теории пластин (плоская задача теории упругости и задача изгиба) и оболочек (общая моментная теория). Обе задачи теории пластин описываются бигармоническим оператором, в задачах же теории оболочек бигармонический оператор является старшим.

Построение аналитико-численных решений оговоренных задач с заданной наперёд точностью выступает на первый план. Под аналитико-численным здесь понимается решение, записанное в виде замкнутых аналитических выражений и содержащее счетное (на практике – конечное) множество параметров, определяемых численно путем решения системы линейных алгебраических уравнений. Неоспоримым достоинством подобного рода решений является возможность обеспечения любой наперёд заданной гарантированной точности. Применение метода сопряжения конструктивных элементов [1] позволяет из элементов (агрегатов) синтезировать любую тонкостенную пространственную систему. Точность анализа всей системы можно обеспечить лишь тогда, когда модели элементов адекватны, то есть априорно известна погрешность применяемых математических моделей. Например, погрешность общей (моментной) теории пластин и оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа – Лява, имеет порядок h/c, где h – толщина оболочки или пластины, c – характерный размер в плане пластины или характерный радиус кривизны оболочки [2]. Здесь следует отметить, что существуют теории, имеющие меньшую погрешность, например, «итерационные теории», предложенные для однородных и изотропных оболочек А. Л. Гольденвейзером [3] и впоследствии распространённые на анизотропные (в том числе слоистые) оболочки С. А. Амбарцумяном [4]. Следует подчеркнуть, что отмеченные «итерационные» модели оболочек представляют чисто теоретический интерес: авторам неизвестны решения интересных для практики задач, основанных на этих моделях. Говоря иными словами, сейчас наибольшую актуальность представляет создание методов и подходов к анализу нетривиальных краевых задач общей теории пластин и оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа - Лява; тем более, что модели пластин и оболочек, сочленённых в некоторую тонкостенную пространственную систему, определяют точность и адекватность результатов анализа подобных систем. Анализ тонкостенной пространственной системы должен быть выполнен с не меньшей точностью, чем точность применяемых математических моделей. В этом наше глубокое убеждение.

Как известно, любая полностью неоднородная краевая задача с положительно определённым оператором A при неоднородных краевых условиях может быть редуцирована к одной из полуоднородных краевых задач.

Пусть решается линейная краевая задача

$$A\mathbf{u}(x,y)=\mathbf{f}(x,y)\,,\quad (x,y)\in\Omega\,, \qquad (1)$$

$$B\mathbf{u}(x,y)=\boldsymbol{\varphi}(x,y), \quad (x,y)\in\Gamma, \qquad (2)$$

где **u**(x,y) - искомая вектор-функция, являющаяся элементом функционального пространства С. Л. Соболева $H^{(k)}$;

f(x,y) и **φ**(x,y) - заданные вектор-функции соболевских пространств $H^{(l_1)}(\Omega)$ и $H^{(l_2)}(\Gamma)$ соответственно;

A и B – заданные матричные дифференциальные операторы, причём A - оператор эллиптический и положительно определенный;

Ω – заданная двумерная область с липшицевой границей Γ.

Общая краевая задача может быть редуцирована к одной из полуоднородных краевых задач, в которой либо **f**=0 (**φ**≠0) – задача 1, либо **φ=0** (**f**≠0) - задача 2. В дальнейшем вторая задача будет называться *базовой*. Таким образом, необходимо уметь решать одну из двух отмеченных задач. Возможность перехода к базовой задаче обеспечена теоремами вложения, продолжения и теоремами о следах [5 – 7].

В работе рассматривается решение базовой задачи в прямоугольнике для бигармонического оператора. Базовость этой задачи заключается в том, что при анализе тонкостенных пространственных систем она служит фундаментом для успешного проведения этого анализа. Совершенно понятен выбор бигармонического оператора в роли основного, о чем вкратце было сказано выше.

1. Постановка и решение базовой задачи с бигармоническим оператором

Рассматривается краевая задача в прямоугольнике $\Omega^*=\{(x_0,y_0):-a<x_0<a,-b<y_0<b\}$ с границей Γ*. Путем линейного преобразования область Ω* приводится к квадрату Ω={(x,y):-1<x<1, -1<y<1} с границей Γ. Краевая задача описывается дифференциальным уравнением

$$Au\equiv\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\lambda^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\lambda^4\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=f(x,y) \text{ в } \Omega \qquad (3)$$

и краевыми условиями

$$u=\frac{\partial u}{\partial n}=0 \quad \text{на } \Gamma, \qquad (4)$$

где производная в (4) берётся по нормали n к границе Γ;

λ=a/b - параметр удлинения пластины с размерами 2a×2b.

Относительно функций u и f будем предполагать, что $u\in D_A$, $f\in L_2(\Omega)$. Здесь D_A - область определения оператора A. Приведенные требования к гладкости функций u и f можно значительно ослабить (об этом будет сказано ниже).

Оператор A краевой задачи при краевых условиях (4) – положительно определённый, поэтому можно ввести энергетическое пространство H_A этого оператора, задав в нём энергетическое скалярное произведение [u,v]≡(Au,v) и порождаемую им норму $[\![u]\!]^2\equiv(Au,u)$ $u\in H_A$, $v\in H_A$ следующим образом:

$$[u,v]=\int_\Omega\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2\lambda^2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\lambda^4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]d\Omega, \qquad (5)$$

$$[\![u]\!]^2=\int_\Omega\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+2\lambda^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2+\lambda^4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right]d\Omega. \qquad (6)$$

Решение краевой задачи (3) – (4) удовлетворяет интегральному тождеству

$$[u,v]-(f,v)=0, \ \forall v\in H_A, \ (u\in H_A). \qquad (7)$$

Тождество (7) позволяет перейти к вариационной постановке краевой задачи (3) – (4), а именно:

$$Fu=\frac{1}{2}[\![u]\!]^2-(f,u)\Rightarrow\min, \qquad (8)$$

где $[\![u]\!]^2$ - квадратичная форма;

(f,u) - линейная форма.

Функционал $\frac{1}{2}[\![u]\!]^2$ с точностью до мультипликативной постоянной равен потенциальной энергии деформирования.

Интегральное тождество (7) позволяет смягчить выше оговоренные требования к гладкости функций u и f. Достаточно потребовать:

$$u\in H_0^{(2)}(\Omega)\equiv H_A(\Omega), \ f\in L^{(-2)}(\Omega),$$

где $L^{(-2)}(\Omega)$ - пространство, сопряжённое к пространству $L^{(2)}(\Omega)$ (пространство обобщённых функций, функционалов).

Точное решение базовой задачи (3) - (4) неизвестно по сей день. Поэтому можно только уповать на построение приближенных решений, арсенал которых весьма богат: метод конечного элемента (МКЭ), разностные и вариационно-разностные методы, метод граничных интегральных уравнений, метод граничных элементов в различных его формах, метод наименьших квадратов, метод Ритца, Бубнова - Галеркина и т.д. Перечисленные методы являются численными или аналитико-численными и обладают различной точностью, зачастую вполне удовлетворительной. В настоящее время проблема точности является, пожалуй, самой актуальной в задачах естествознания. Удовлетворительное решение этой проблемы может быть достигнуто, во-первых, путем создания (или применения) математических моделей, наиболее адекватно описывающих рассматриваемые физические состояния и процессы, и, во-вторых, созданием (или применением) новых высокоточных методов анализа, среди которых предпочтение, конечно же, следует отдать методам аналитическим или аналитико-численным.

Наиболее часто применяемые в механике деформируемого твёрдого тела методы Ритца и Бубнова - Галеркина являются аналитико-численными (в отмеченном ранее смысле) и для положительно определённых операторов приводят к одним и тем же результатам. Поэтому краевую задачу (3) – (4) желательно решать одним из этих методов, поскольку метод Ритца (а следовательно, метод Бубнова-Галеркина) дает наилучшее приближение к точному решению в энергетической метрике. Однако при этом возникает очень важная проблема выбора систем координатных функций (координатных систем), удовлетворяющих кроме требований принадлежности H_A, линейной независимости и полноты в H_A, сильной минимальности в H_A [8, 9] также и требованию стремления невязки $\Delta_n = Au_n - f$ к нулю при $n \to \infty$, где u_n - n-е приближение искомой функции к точному решению u. Как было показано в работах [10 – 12], перечисленным требованиям отвечают функции, предложенные в работах [14, 15]. Однако стремление невязки Δ_n к нулю в предыдущих работах исследовано *a posteriori*. Теоретически [9, с. 124, теорема 23.1] установлено, что если в качестве координатной системы принять систему собственных элементов положительно определённого оператора B, сходного [9] с оператором A, то $\Delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

В рассматриваемом случае операторы B и A совпадают. Отсюда следует, что для установления *a priori* стремления Δ_n к нулю необходимо располагать собственными элементами оператора A. Укажем, что условия теоремы 23.1 [9] являются достаточными, но не необходимыми, поэтому, как было показано конструктивно в работе [10], существуют координатные системы, обеспечивающие $\Delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, не являющиеся собственными элементами подходящего сходного оператора.

Однако весьма желательно «иметь под рукой» собственные элементы заданного оператора A. Тогда можно сразу получить решение рассматриваемой задачи в виде разложения в ряд по собственным функциям самосопряженного оператора A [16], который, как известно, является сходящимся как в $L_2(\Omega)$, так и в $H_A(\Omega) \equiv \overset{0}{W}{}_2^2(\Omega) \subset W_2^2(\Omega)$ (здесь $\overset{0}{W}{}_2^2(\Omega)$ и $W_2^2(\Omega)$ - пространства С. Л. Соболева). Отсюда и из теорем вложения [5, 6] следует, что $u \in C(\overline{\Omega})$. Дальнейшую гладкость искомой функции u можно повысить при достаточной гладкости границы Γ. В данном случае Ω - область с границей Липшица, нормаль к которой не определена лишь в угловых точках, то есть на множестве нулевой лебеговой меры, иными словами, $\Gamma \subset C^\infty$ почти всюду. Можно показать, что в областях с угловыми точками, в которых внутренний угол $\alpha < 0{,}701576\pi$ (в рассматриваемом случае $\alpha = 0{,}5\pi$), решение бигармонической проблемы $u \in \overset{0}{W}{}_2^2(\Omega)$ является элементом из $W_2^4(\Omega)$. Из тех же теорем вложения следует, что $u \in C^2(\Omega)$, если $f \in L_2(\Omega)$.

Спектр положительно определенного оператора A (он к тому же сильно эллиптический) – дискретный, поэтому любая функция из $L_2(\Omega)$ (тем более из $W_2^{(k)}(\Omega)$, $k > 0$) может быть представлена в виде ряда по системе собственных функций $\overline{\varphi}_n(x,y)$, $n = \overline{1,\infty}$ оператора A, отвечающих собственным значениям μ_n. Это означает, что искомое решение u(x,y) краевой задачи (3) – (4) может быть представлено в виде ряда

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(f, \overline{\varphi}_n\right)}{\mu_n} \overline{\varphi}_n(x,y). \qquad (9)$$

Поскольку собственные функции $\overline{\varphi}_n(x,y)$ ортогональны и полны как в $L_2(\Omega)$, так и в $H_A(\Omega)$ [16], то ряд (9) сходится равномерно и абсолютно в $C^2(\Omega)$, что следует из сказанного выше.

При написании формулы (9) предполагалось, что функции $\overline{\varphi}_n(x,y)$ ортонормированы в $L_2(\Omega)$ Если их нормировать в $H_A(\Omega)$ (обозначим эти функции через $\varphi_n(x,y)$), то решение запишется так:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)\varphi_n(x,y). \qquad (10)$$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к задаче о собственном спектре оператора A при краевых условиях (4).

2. Собственный спектр бигармонического оператора в прямоугольнике при главных однородных краевых условиях

Рассматривается краевая задача

$$\begin{gathered} Au(x,y) = \mu u(x,y) \quad \text{в} \quad \Omega, \\ u(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \end{gathered} \qquad (11)$$

где μ - безразмерное собственное значение оператора A; в задачах колебаний корень квадратный из этой величины пропорционален частоте собственных колебаний защемлённой по контуру пластины:

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{\mu D}{\rho h a^4}}, \qquad (12)$$

где D – цилиндрическая жесткость пластины;

ρ – плотность материала пластины;

h – её толщина.

Относительно собственных значений μ_n и собственных функций $\varphi_n(x,y)$ оператора A известно:

– спектр оператора A – дискретен, а собственные значения μ_n – действительны, положительны и сгущаются на бесконечности;

– собственные функции $\varphi_n(x,y)$, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны как в $L_2(\Omega)$, так и в $H_A(\Omega)$;

– система собственных функций $\varphi_n(x,y)$ линейно независима и полна в $L_2(\Omega)$ и в $H_A(\Omega)$.

Собственные функции $\varphi_n(x,y)$ будем искать в виде линейной комбинации функций $H_i(x)H_j(y)$, $i, j = 0,\ldots,\infty$ [14]. Следует напомнить, что исходная система функций $H_i(x)H_j(y)$ ортонормирована в $L_2(\Omega)$ [14] и квазиортогональна в $H_A(x,y)$ [11-14]. Эти замечательные свойства функций $H_i(x)H_j(y)$ вселяют уверенность, что процедура определения собственных значений μ_n и построения собственных функций $\varphi_n(x,y)$ будет устойчивой и быстросходящейся. Итак, будем искать решение краевой задачи (11) в виде

$$u(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_{ij} H_i(x) H_j(y). \qquad (13)$$

Благодаря тем же свойствам функций $H_i(x)H_j(y)$ бесконечные пределы в (13) можно заменить конечными значениями M и N:

$$u(x,y) = \sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{N} C_{ij} H_i(x) H_j(y). \qquad (14)$$

Как было показано в работе [13], при построении ортонормированного в $H_A(\Omega)$ базиса основной вклад в каждую функцию ω_k вносит так называемая ведущая функция. Следует ожидать, что это свойство имеет место и здесь. Другими словами, в сумме (14) можно изменить нижний и верхний пределы таким образом, чтобы ведущий элемент $H_{i_1}(x)H_{j_1}(y)$ был окаймлён несколькими ближайшими членами слева и справа, что дает значительное сокращение вычислительных ресурсов.

Для получения матрицы линейных алгебраических уравнений относительно постоянных C_{ij}, содержащей искомый параметр μ, применяется процесс Бубнова - Галеркина. Процедуры определения собственных значений и собственных векторов положительно определённой матрицы стандартны.

Поскольку любую непрерывную функцию одной или нескольких переменных, заданную в симметричной относительно осей координат области, можно представить в виде суммы функций, обладающих определенными свойствами симметрии относительно какой-либо оси, то в рассматриваемом случае собственные функции двух независимых переменных можно разбить на четыре класса четности: «четный-четный» (+ +), «четный-нечетный» (+ –), «нечетный-четный» (– +), «нечетный-нечетный» (– –). Такое разбиение позволяет значительно сократить время вычисления. Здесь и далее (там, где это существенно) принята сквозная нумерация собственных значений и собственных функций по классам четности.

3. Некоторые численные результаты

Приводимые ниже результаты охватывают два направления. Первое касается вопросов устойчивости, сходимости и точности определения собственных значений и собственных функций в зависимости от параметра удлинения пластины. Здесь же дается сравнение первых тринадцати собственных значений с данными Г. Фикера [8] и А. Ванштейна [17], подходы которых позволяют получить двусторонние оценки собственных значений. Второе направление посвящено тем же вопросам и касаются решения конкретной краевой задачи (3) - (4).

В табл. 1 представлена сходимость первого собственного значения при различных значениях параметра удлинения пластины в зависимости от числа удерживаемых членов в сумме (14).

Таблица 1

Сходимость и точность минимального собственного значения при различных значениях параметра удлинения

λ	M	N	μ	λ	M	N	μ
$\frac{1}{2}$	0	0	37,968750	1	0	0	81,000000
	2	2	37,764344		2	2	80,954860
	4	4	37,755434		4	4	80,934825
	6	6	37,754209		6	6	80,933496
	8	8	37,754022		8	8	80,933385
	10	10	37,753996		10	10	80,933375
	12	***12***	***37,753992***		***12***	***12***	***80,933374***
	14	14	37,753992		14	14	80,933374
$\frac{2}{3}$	0	0	45,722222	2	0	0	607,50000
	2	2	45,591688		2	2	604,22950
	4	4	45,580455		4	4	604,08694
	6	6	45,579289		6	6	604,06734
	8	8	45,579165		8	8	604,06435
	10	10	45,579151		10	10	604,06394
	12	12	45,579150		12	12	604,06388
	14	***14***	***45,579149***		***14***	***14***	***604,06387***
	16	16	45,579149		16	16	604,06387

В выделенных жирным курсивом собственных значениях для каждого λ верны все значащие цифры, и после увеличения слагаемых в сумме (14) уточнение собственного значения не происходит. Это позволяет считать выделенные собственные значения точными.

Данные этой же таблицы позволяют сделать ещё два вывода: сходимость собственных значений очень высока, а сама процедура их получения устойчива. С ростом параметра удлинения скорость сходимости уменьшается весьма незначительно, что наглядно представлено в таблице, а устойчивость процедуры получения собственных значений не нарушается. Для инженерных расчетов, как можно проследить из данных таблицы, достаточно ограничиться в сумме (14) всего лишь одним первым членом (по крайней мере, до значения параметра $\lambda \le 2$, на практике это положение имеет силу при $\lambda \le 5$). Например, при $\lambda = 2$ эта погрешность составляет всего 0,5689%. Этим еще раз, но под другим ракурсом, подтверждается вывод работ [10-13] о том, что исходная система $H_i(x)H_j(y)$ не только почти ортогональна в энергетическом пространстве H_A, но весьма и весьма близка к собственным функциям оператора А. И, наконец, последнее. С увеличением числа слагаемых, удерживаемых в сумме (14), при любых λ собственные значения уменьшаются, что находится в полном согласии с теоремой Дж. У. Рэлея.

В табл. 2 продемонстрирована сходимость и точность для нескольких первых собственных значений при параметре удлинения λ=1. В первом столбце в числителе дроби указано число полуволн вдоль оси 0x, а в знаменателе – вдоль оси 0y. Результаты сравниваются с данными (они отмечены «*») справочника [18], приведенными в соответствие к нашим обозначениям по формуле

$$\mu^* = \left(\bar{\omega}/4\right)^2, \tag{15}$$

где $\bar{\omega}$ - данные работы [18].

В табл. 2 M*, N* обозначают число удерживаемых членов в сумме (14) по каждой переменной.

В выделенных собственных значениях верны все приведенные значащие цифры. В соответствии с той же теоремой Дж. У. Рэлея более высокие приближения уточняют собственные значения сверху. Сопоставление данных последних двух колонок табл. 2 говорит о более высокой точности и, следовательно, достоверности наших результатов.

Поскольку энергетические методы (включая и МКЭ) дают лишь оценку собственных значений сверху, на практике наибольшую значимость приобретает получение нижних оценок. Последняя задача намного сложнее, чем уточнение верхних оценок. Это связано с тем, что встречный к принципу Лагранжа вариационный принцип Кастильяно в задачах устойчивости и колебаний не имеет места, так как последние задачи имеют нелинейную природу. Тут необходима разработка специальных встречных методов двусторонних оценок, не связанных с какими-то вариационными принципами.

Таблица 2

Сходимость собственных значений
для некоторых собственных форм

Форма	M*	N*	μ	μ*
$\frac{1}{1}$	0	0	81,000000	80,995500
	4	4	80,934825	
	8	8	80,933385	
	12	12	**80,933374**	
	14	14	80,933374	
$\frac{1}{2}$	4	4	336,833347	336,768377
	8	8	336,666333	
	12	12	336,666040	
	16	16	**336,666035**	
	18	18	336,666035	
$\frac{2}{2}$	4	4	732,479161	732,203011
	8	8	731,928617	
	12	12	731,925777	
	16	16	731,925704	
	18	18	**731,925703**	
$\frac{3}{3}$	6	6	3025,972600	3026,650225
	10	10	3025,901879	
	14	14	3025,898885	
	18	18	3025,898740	
	20	20	**3025,898734**	

В связи со сказанным приведём сравнение (табл. 3) полученных результатов с данными А. Вайнштейна [17] и Г. Фикера [8], каждый из которых получил двусторонние оценки своим оригинальным методом. В таблице приведены данные авторов (с учетом кратности собственных значений), в которых гарантируется верность пяти значащих цифр после запятой (M*=N*=20), по сути, – это точные решения. С увеличением параметра удлинения λ точность собственных значений сохраняется, если увеличить число M* не изменяя N*. В колонках «А. Вайнштейн» и «Г.Фикера» приведены нижние (знаменатель) и верхние (числитель) оценки собственных значений, рядом вычислены их средние значения и погрешность этих значений по отношению к нашему собственному значению μ.

Величины собственных значений, вычисленные авторами данной работы и приведенные в табл. 3, чётко попадают в интервалы между нижними и верхними оценками как А. Вайнштейна, так и более точными оценками Г. Фикера. Из результатов данной таблицы вытекают два основных следствия:

Таблица 3

Сравнительная оценка собственных значений, полученных различными методами

Номер собств. знач.	μ	А. Вайнштейн	Среднее по А. Вайнштейну	ε, %	Г. Фикера	Среднее по Г. Фикера	ε, %
1	80,933374	81,48392226 80,86172169	81,172822	0,30	80,93343914 80,93331738	80,933378	5,6E-06
2	336,666035	344,3472249 336,3048868	340,326056	1,09	336,6661528 336,6513588	336,658756	2,2E-03
3	336,666035	344,3472249 336,3048868	340,326056	0,79	336,6661528 336,6513588	336,658756	3,0E-01
4	731,925702	755,3709726 730,6107992	742,990886	1,51	731,9270396 731,8728558	731,899948	3,5E-03
5	1082,093733	1108,88074 1081,667075	1095,273908	1,22	1082,093849 1081,967217	1082,030533	5,8E-03
6	1092,381660	1123,248581 1085,502558	1104,375570	1,10	1082,093849 1081,967217	1082,030533	9,5E-01
7	1701,570878	1835,856963 1688,951877	1762,404420	3,58	1701,573051 1699,679662	1700,626357	5,6E-02
8	1701,570878	1835,856963 1688,951877	1762,404420	3,51	1701,573051 1699,679662	1700,626357	1,1E-01
9	2769,965313	2904,008526 2763,982958	2833,995742	2,31	2769,96692 2761,822911	2765,894916	1,5E-01
10	2769,965313	2904,008526 2763,982958	2833,995742	2,27	2769,96692 2761,822911	2765,894916	1,8E-01
11	3025,898734	3336,261368 2970,977277	3153,619322	4,22	3025,909916 3023,048524	3024,479220	4,7E-02
12	3664,908073	3785,87738 3657,954891	3721,916135	1,56	3664,908074 3661,899959	3663,404016	4,1E-02
13	3694,948551	3938,608747 3662,393093	3800,500920	2,86	3690,706871 3688,107266	3689,407069	1,5E-01

первое – точность определения верхней и нижней оценок собственных значений, полученная Г. Фикера, значительно выше, чем у А. Вайнштейна; второе, и самое главное, заключение состоит в том, что данные оценки ещё раз подтверждают высокую точность предложенного здесь решения.

Двусторонние оценки собственных значений по Г. Фикера можно ещё больше уточнить. Для этого шестую значащую цифру после запятой в колонке "μ" табл. 3 следует заменить в первый раз на девятку (верхняя граница), во второй – на нуль (нижняя граница). Правда, такое уточнение для практики не имеет существенного значения, но оно принципиально с теоретической точки зрения, поскольку дает критерий, который следует иметь в виду при создании новых методов двусторонних оценок собственных значений.

В качестве приложения рассмотрим задачу изгиба равномерно распределённым давлением q жестко защемлённой по всему контуру прямоугольной пластины. Соответствующая краевая задача описывается уравнением (3) при $f(x,y)=qa^4/D$ и краевыми условиями (4). Искомая функция u(x,y) является функцией прогиба. Эта «вечная» проблема привлекает внимание многих ученых со времен И. Г. Бубнова, В. Ритца, С. П. Тимошенко, М. Хилла и других исследователей по сей день. Эта проблема не обошла вниманием и авторов данной работы [10 - 13]. По сути, настоящая работа также посвящена этой проблеме, решение которой имеет фундаментальное значение.

Характеристики напряженно-деформированного состояния пластины сведены в табл. 4 при различных значениях параметра λ. Между тем, главное внимание уделено сходимости, устойчивости и точности полученных результатов.

При определении собственных значений и собственных функций задачи, исходя из представления (14), с ростом параметра λ величина M > N всегда и при фиксированном значении M выражалась как

$$M = \lambda N, \qquad (16)$$

хотя можно и ограничиться выбором M=(λ-k)N, где k – натуральное число, k< λ.

Во второй колонке таблицы указано число удерживаемых собственных функций N в представлении (10). В таблице приведены относительные значения прогибов $\overline{u}(x,y)$ и моментов $\overline{M}_x(x,y)$, $\overline{M}_y(x,y)$, через которые истинные значения этих величин определяются равенствами $u = D^{-1}qa^4\overline{u}$, $M = qa^2\overline{M}$.

Таблица 4

Жестко защемленная по всем сторонам прямоугольная пластина
под действием равномерно распределённого давления

λ	N	$\overline{u}(0;0)$	$\overline{M}_x(0;0)$	$\overline{M}_y(0;0)$	$\overline{M}_x(1;0)$	$\overline{M}_y(0;1)$
1	9	**0,020244**301	**0,091**563939	**0,091**563939	**-0,205**11779	**-0,205**11779
	25	**0,020245**086	**0,0916**16897	**0,0916**16897	**-0,205**213499	**-0,205**213499
	49	**0,020245105**	**0,091620**038	**0,091620**038	**-0,2053**01624	**-0,2053**01624
	81	**0,020245105**	**0,0916203**34	**0,0916203**34	**-0,2053**26664	**-0,2053**26664
	100	**0,020245105**	**0,0916203**57	**0,0916203**57	**-0,2053**38953	**-0,2053**38953
2	18	**0,0025329**62	**0,0158**10643	**0,041157**914	**-0,056**826276	**-0,0828**83783
	50	**0,002532956**	**0,0158080**80	**0,04115**505	**-0,0569**37917	**-0,08286**7275
	98	**0,002532956**	**0,0158080**29	**0,0411549**89	**-0,0569**7553	**-0,0828660**4
	162	**0,002532956**	**0,0158080**29	**0,04115499**	**-0,05698**4421	**-0,0828660**11
	200	**0,002532956**	**0,0158080**30	**0,04115499**	**-0,05698**7467	**-0,0828660**27
3	27	**0,00051698**3	**0,005641**058	**0,018622**657	**-0,025**195471	**-0,03723**2762
	75	**0,000516984**	**0,00564124**4	**0,01862281**7	**-0,0252**60383	**-0,0372340**58
	147	**0,000516984**	**0,005641243**	**0,018622816**	**-0,0252**77637	**-0,0372340**35
	243	**0,000516984**	**0,005641243**	**0,018622816**	**-0,02528**1551	**-0,0372340**27
	300	**0,000516984**	**0,005641243**	**0,018622816**	**-0,02528**2864	**-0,0372340**26
4	16	**0,00016291**1	**0,003117**321	**0,010424**233	**-0,0142**72125	**-0,02084**7736
	64	**0,000162912**	**0,003117816**	**0,01042471**2	**-0,0142**47615	**-0,0208466**67
	144	**0,000162912**	**0,003117816**	**0,010424711**	**-0,01422**7403	**-0,0208466**76
	256	**0,000162912**	**0,003117816**	**0,010424711**	**-0,01422**2814	**-0,020846677**
	324	**0,000162912**	**0,003117816**	**0,010424711**	**-0,01422**102	**-0,020846677**
5	5	**6,6**7142E-05	0,002008525	**0,0066**73554	**-0,009**316795	**-0,0133**42849
	45	**6,66682E-05**	**0,001999061**	**0,00666665**	**-0,009**069225	**-0,0133331**82
	125	**6,66682E-05**	**0,001999061**	**0,00666665**	**-0,009**093862	**-0,013333179**
	245	**6,66682E-05**	**0,001999061**	**0,00666665**	**-0,0091**00049	**-0,013333179**
	320	**6,66682E-05**	**0,001999061**	**0,00666665**	**-0,0091**02603	**-0,013333179**

Жирным шрифтом в таблице отмечены верные цифры. Как и должно быть, точность определения момента в середине короткой стороны $\overline{M}_x(1;0)$ наиболее низкая, но даже эта точность намного превосходит точность, предъявляемую к инженерным расчетам. Максимальный изгибающий момент $\overline{M}_y(0;1)$, достигаемый в середине длинной стороны, с ростом параметра λ обладает уж очень высокой точностью, что является следствием равенства (16). Что же касается устойчивости и сходимости решения в зависимости от числа вводимых собственных функций, то ответ здесь прозрачный: решения в виде разложения в ряды по собственным функциям устойчивы, быстросходящиеся, и потому обладают превосходной точностью. Об этом говорят данные табл. 4 сами за себя.

В заключение исследуем поведение невязки в уравнении (3) в открытой области Ω Результаты вычислений относительной невязки Δ в каждой точке $(x, y) \in \Omega$ для квадратной пластины приведены в табл. 5.

Невязка вычислялась по формуле $\Delta = \left(\frac{D}{qa^4} Au - 1 \right) \cdot 100\%$. В силу полной симметрии задачи результаты приводятся только для четверти пластины. В первой колонке таблицы указано число (N) вводимых собственных функций в решении (10).

Даже при сравнительно небольшом числе собственных функций (N=36) относительная погрешность в некоторой внутренней области $\Omega' \subset \Omega$ незначительна, за исключением малых окрестностей угловых точек. С увеличением числа вводимых собственных функций (N=100) можно заметить резкое стремление невязки к нулю в уравнении (3). Сходимость невязки к нулю нарушается только в угловых точках.

Заключение

В высоких приближениях определен собственный спектр основной краевой задачи в прямоугольнике для бигармонического оператора при главных краевых условиях и различных значениях параметра удлинения. Соответствующие собственные функции построены с точностью, намного превосходящей точность, предъявляемую к инженерным расчетам.

Конструктивно показано, что верхние и нижние оценки собственных значений, построенные ранее сложными методами Г. Фикера и А. Ванштейна, можно значительно уточнить. А полученные уточненные данные могут быть использованы как критериальные при оценке качества вновь разрабатываемых методов двусторонних оценок собственных значений. Это принципиально важно.

Наглядно продемонстрированы при решении конкретной задачи изгиба жестко защемленной по контуру прямоугольной пластины устойчивость получения решения в высоких приближениях и быстрая сходимость, а, следовательно, и точность самого решения, которая обеспечивается при любом заданном её порядке.

Принципиальной является сходимость к нулю невязки в исходном уравнении. Сказанное позволяет принять полученные решения в качестве точных.

Таблица 5

Распределение невязки Δ, %

N=36	ось абсцисс							
ось ординат	λ=1	0	0,15	0,3	0,45	0,6	0,75	0,9
	0	-0,0736	0,0467	0,0149	-0,0760	0,1914	-0,4856	1,1804
	0,15	0,0467	-0,0295	-0,0101	0,0496	-0,1213	0,2992	-0,7418
	0,3	0,0149	-0,0101	-0,0011	0,0113	-0,0384	0,1218	-0,2516
	0,45	-0,0760	0,0496	0,0113	-0,0705	0,1909	-0,5131	1,1607
	0,6	0,1914	-0,1213	-0,0384	0,1909	-0,4092	0,9358	-2,1724
	0,75	-0,4856	0,2992	0,1218	-0,5131	0,9358	-1,8779	4,5681
	0,9	1,1804	-0,7418	-0,2516	1,1607	-2,1724	4,5681	-10,1627
N=100	ось абсцисс							
ось ординат	λ=1	0	0,15	0,3	0,45	0,6	0,75	0,9
	0	-0,0012	0,0012	-0,0008	-0,0005	0,0038	-0,0051	-0,1258
	0,15	0,0012	-0,0011	0,0007	0,0005	-0,0038	0,0046	0,1218
	0,3	-0,0008	0,0007	-0,0004	-0,0007	0,0033	-0,0028	-0,1024
	0,45	-0,0005	0,0005	-0,0007	0,0011	-0,0014	-0,0023	0,0394
	0,6	0,0038	-0,0038	0,0033	-0,0014	-0,0044	0,0125	0,1195
	0,75	-0,0051	0,0046	-0,0028	-0,0023	0,0125	-0,0053	-0,2345
	0,9	-0,1258	0,1218	-0,1024	0,0394	0,1195	-0,2345	-1,1906

Литература

1. Теоретические основы метода идентификации краевых условий для исследования упругой устойчивости силовой конструкции аэрокосмической техники [Текст] : отчет о НИР (заключ.) : 11–26 / Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского "ХАИ" ; рук. Гайдачук В. Е., Халилов С. А. ; исполн. : Минтюк В. Б. [и др.]. – Х., 2005. – 173 с. – № ГР 0103U005070. – Инв. № 0206U002451.

2. Новожилов, В. В. О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек [Текст] / В. В. Новожилов. Р. М. Финкельштейн // Прикладная математика и механика. – М., 1943. – Т.7, вып. 5 . – С. 331 – 340.

3. Гольденвейзер, А. Л. Теория упругих тонких оболочек [Текст] / А. Л. Гольденвейзер. – М. : Наука, 1976. – 512 с.

4. Амбарцумян, С. А. Общая теория анизотропных оболочек [Текст] / С. А. Амбарцумян. – М. : Наука, 1974. – 448 с.

5. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике [Текст] / С. Л. Соболев. – М. : Наука, 1988. – 333 с.

6. Соболев, С. Л. Введение в теорию кубатурных формул [Текст] / С. Л. Соболев. - М. : Наука, 1974. – 808 с.

7. Бесов, О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения [Текст] / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1975. – 480 с.

8. Михлин, С. Г. Вариационные методы в математической физике [Текст] / С. Г. Михлин. - М. : Гостехиздат, 1957. – 478 с.

9. Михлин, С. Г. Численная реализация вариационных методов [Текст] / С. Г. Михлин. - М. : Наука, 1966. – 432 с.

10. Халилов, С. А. Построение и исследование аналитико-численного решения задачи об изгибе жёстко защемлённой прямоугольной пластины [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии : сб. науч. тр. / Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского "ХАИ". – 2011. – Вып. 49. – С. 81 – 94.

11. Халилов, С. А. Построение и исследование приближённого аналитического решения бигармонической проблемы в прямоугольнике при однородных главных краевых условиях [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2013. – № 2 (99). – С. 40 – 49.

12. Халилов, С. А. Приближённое аналитическое решение бигармонической проблемы в прямоугольнике при однородных главных краевых условиях на двух противоположных сторонах и произвольных – на двух других [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2013. – № 5 (102). – С. 40 – 49.

13. Ткаченко, Д. А. Ортонормированный в энергетическом пространстве бигармонического опе-

ратора базис в прямоугольнике при однородных главных краевых условиях по границе [Текст] / Д. А. Ткаченко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2014. – № 3 (110). – С. 41 – 51.

14. Халилов, С. А. Новые системы ортонормированных многочленов, некоторые их свойства и приложения [Текст] / С. А. Халилов // Прочность конструкций летательных аппаратов : темат. сб. науч. тр. Харьковского авиационного института. – Х. : ХАИ, 1978. – Вып. 5. – С. 46 – 56.

15. Минтюк, В. Б. Ортонормированный базис для одномерных краевых задач [Текст] / В. Б. Минтюк // Авиационно-космическая техника и технология. – 2007. – № 5 (41). – С. 32 – 36.

16. Березанский, Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов [Текст] / Ю. М. Березанский. - К. : Наук. думка, 1965. – 798 с.

17. Гулд, С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях. Введение в метод промежуточных задач Вайнштейна [Текст] / С. Гулд. - М. : Мир, 1970. – 328 с.

18. Прочность, устойчивость, колебания [Текст]. Справочник в трех томах. Т. 3 / под общей редакцией И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. - М. : Машиностроение, 1968. – 568 с.

Поступила в редакцию 08.07.2014, рассмотрена на редколлегии 10.09.2014

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. высшей математики В. С. Проценко, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

ВЛАСНИЙ СПЕКТР БІГАРМОНІЧНОГО ОПЕРАТОРА У ПРЯМОКУТНИКУ ПРИ ГОЛОВНИХ КРАЙОВИХ УМОВАХ

С. А. Халілов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копичко

Показано, що розв'язок зазначеної задачі може бути отриманий з будь-якою наперед заданою точністю, що дозволило уточнити відомі оцінки зверху і знизу власних значень. Розв'язок конкретних задач у формі розкладання в ряд за власними функціями мають не тільки високу стійкість, збіжність і точність, але й забезпечують прямування до нуля нев'язки у рівнянні відповідних крайових задач. Пропоновані розв'язки мають самостійне значення як при досліджуванні стану конструктивних елементів у вигляді прямокутних пластин, так і при досліджуванні пластинчастих систем, що досить важливо при проектуванні аєрокосмічної техніки, оскільки виявляється можливим отримувати шукані характеристики системи в алгоритмічно замкнутій формі.

Ключові слова: бігармонічнй оператор; власний спектр і власні функції; стійкість, збіжність і точність розв'язків; прямування нев'язки до нуля.

BIHARMONIC OPERATOR OWN SPECTRUM IN A RECTANGLE AT THE MAIN BOUNDARY CONDITIONS

S. A. Khalilov, V. B. Myntyuk, D. A. Tkachenko, V. V. Kopychko

It is shown that the problem solution is obtained in higher approximations to any predetermined accuracy, which allowed us to clarify the known upper and lower estimates of eigenvalues. Particular problems solutions in the form of a series expansion in eigenfunctions have not only high stability, convergence and accuracy, but also provide the in the corresponding boundary value problems equation. Proposed solutions have substantive meaning in the structural elements in the form of rectangular plates state study as well as plate systems study, which is very important in the design of aerospace engineering, since this enables to obtain the desired system characteristics in algorithmically closed form.

Keywords: biharmonic operator; own spectrum and eigenfunctions; decisions stability, convergence and accuracy; residual vanishing.

Халилов Сиявуш Ахмедович – старший научный сотрудник научного отдела кафедры высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: khalilov@ukr.net.

Минтюк Виталий Борисович – канд. техн. наук, доцент кафедры прочности летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: minvit@mail.ru.

Ткаченко Денис Анатольевич – аспирант кафедры технологии и производства летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: 20Black_and_White07@ukr.net.

Копычко Виктор Володимирович – аспирант кафедры технологии и производства летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: viktor_kopychko@mail.ru.