УДК 539.3

А. Г. НИКОЛАЕВ, Е. А. ТАНЧИК

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина

НОВЫЕ ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ БАЗИСНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛАМЕ ДЛЯ ВЫТЯНУТЫХ СФЕРОИДОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА

В работе получены новые теоремы сложения модифицированных базисных решений уравнения Ламе в вытянутых сфероидальных системах координат, начала которых произвольно сдвинуты друг относительно друга. Эти теоремы использованы для построения модели напряженно-деформированного состояния пористого упругого материала. Поры моделируются вытянутыми сфероидальными полостями, центры которых расположены в узлах кубической решетки. Рассмотрен случай восьми полостей. Модель сводится к краевой задаче для уравнения Ламе с однородными условиями на границе пор и условиями на бесконечности. Вектор перемещений строится в виде суперпозиции модифицированных базисных решений уравнения Ламе и перемещения, удовлетворяющего условиям на бесконечности. В модели граничные условия удовлетворяются точно при помощи аппарата теорем сложения. Разрешающая система для определения параметров модели допускает эффективное численное решение. Проведен численный и качественный анализ напряженного состояния в областях максимальной концентрации напряжений в зависимости от относительного расстояния между полостями.

Ключевые слова: *теоремы сложения, базисные решения уравнения Ламе, вытянутые сфероидальные полости, граничные условия, напряженно-деформированное состояние, обобщенный метод Фурье, метод редукции, пористый материал.*

Введение

Проектирование деталей узлов и агрегатов при создании авиационной и ракетно-космической техники существенно опирается на прочностные свойства материалов изделий. В последние десятилетия в качестве материалов все шире используются композиты, не только для облегчения несиловых элементов конструкции, но и некоторых несущих элементов. Любой качественный прорыв в направлении применения композиционных (пористых) материалов в аэрокосмической технике связан с созданием нового поколения моделей этих материалов, более точно учитывающих их внутреннюю структуру. Оценки прочности материала основываются на определении напряженно-деформированного состояния, возникающего в нем под действием внешних нагрузок. Известные методы определения напряжений и деформаций в композиционном материале недостаточно точны, так как обычно используют приближенные модели. Низкой точностью применительно к пространственным многосвязным задачам с большим числом компонент связности отличаются и стандартные численные методы (метод конечных элементов, метод граничных элементов и др.). В связи с этим актуальной задачей для высокотехнологических областей промышленности является задача точного определения напряженно-деформированного состояния многокомпонентных материалов.

В настоящее время предлагаются разные модели напряженно-деформированного состояния пористых и композиционных материалов. В работе [1] обобщены базовые подходы, применяемые в математических моделях, и общие методы решения уравнений механики стохастических композитов. Они могут быть сведены к стохастическим уравнениям теории упругости структурно неоднородного тела, к уравнениям теории эффективных упругих модулей, к уравнениям теории упругих смесей или к более общим уравнениям четвертого порядка. Решение стохастических уравнений теории упругости для произвольной области вызывает значительные математические трудности и может быть реализовано только приближенно. Построение уравнений теории эффективных упругих модулей связано с задачей определения интегральных модулей стохастически неоднородной среды, которая может быть решена методом возмущений, методом моментов или методом условных моментов. Однако, т.к. уравнения состояния не были строго обоснованы, эта теория не может использоваться для систематического моделирования композитных структур.

В статьях [2–4] методами теории аналитических функций решаются некоторые осесимметричные задачи теории упругости для системы сфериче-

© А. Г. Николаев, Е. А. Танчик

ских и эллипсоидальных полостей и включений.

В статье [5] предложена структурная модель зернистого эластомерного композита, позволившая связать его деформационное и прочностное поведение с размерами частиц дисперсной фазы, т.е. учесть масштабный фактор прочности. На основе теоретических исследований напряженно-деформированного состояния вокруг двух жестких сферических включений в упругой несжимаемой матрице установлены зависимости математического ожидания разрывного усилия от физико-механических характеристик связующего, размеров частиц и расстояния между ними. В результате предложен новый вероятностный критерий появления микроразрушения в композитной структуре в виде отслоений матрицы от частиц. С его помощью проведены модельные исследования процессов развития внутренней поврежденности в композитной системе в зависимости от степени наполнения и величины включений. Построены соответствующие кривые растяжения, определены предельные разрывные макронапряжения и макродеформации.

В работах [6, 7] методами теории гармонических функций исследованы осесимметричные напряженные состояния в упругом пространстве с двумя сферическими включениями и в полупространстве с вытянутой сфероидальной полостью.

В статье [8] сделана попытка моделирования напряженного состояния упругой среды с периодической системой сфероидальных включений.

В статье [9] дается обзор методов моделирования напряженного состояния композита с очень малыми размерами нановключений. Обсуждаются варианты применения функции Грина, непосредственного интегрирования уравнений равновесия, метода бесконечно малых включений. Все перечисленные методы учитывают неоднородные включения приближенно.

В работе [10] на примере решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа приводится сравнительный анализ методов решения краевых задач в областях с N непересекающимися включениями.

В работе [11] введена локальная осесимметричная модель пористого материала, в которой напряженное состояние определяется равномерным давлением, создаваемым внутри вытянутых сфероидальных пор.

В статьях [12, 13] исследовано напряженное состояние в окрестности двух сфероидальных пор и включений в упругом материале обобщенным методом Фурье (ОМФ). Численная реализация модели позволила получить характер распределения локальных напряжений в области их концентрации. Проведено сравнение результатов с решением методом конечных элементов.

В данной работе обобщенный метод Фурье реализуется для модифицированных базисных решений уравнения Ламе и показывается его приложение к моделированию напряженно-деформированного состояния пористого материала.

Теоремы сложения решений уравнения Ламе в сдвинутых сфероидальных системах координат для модифицированного базиса

В работе [14] были введены наборы частных решений уравнения Ламе

$$\Delta \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\sigma}\nabla \operatorname{div}\mathbf{U} = 0 \tag{1}$$

в вытянутых сфероидальных системах координат (ξ, η, φ)

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(5)} = \frac{c}{2n+1}\mathbf{D}_s\left[u_{n-1,m}^{\pm(5)} - u_{n+1,m}^{\pm(5)}\right], \quad s = 1,3; \tag{2}$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(5)} = \mathbf{D}_2 u_{n,m}^{\pm(5)} - cq_0^2\mathbf{D}_1 u_{n\pm1,m}^{\pm(5)}, \tag{3}$$

$$n, m \in \mathbb{Z}, \quad n \ge 0, \quad |m| \le n+1,$$

$$u_{n,m}^{\pm(5)}(\xi,\eta,\varphi) = u_{n,m}^{\pm}(\xi)S_n^m,$$

$$u_{n,m}^{+}(\xi) = Q_n^{-m}(\operatorname{ch}\xi),\ u_{n,m}^{-}(\xi) = P_n^{-m}(\operatorname{ch}\xi),$$

где $\mathbf{D}_1 = \nabla$, $\mathbf{D}_2 = z\nabla - \chi\mathbf{e}_z$, $\mathbf{D}_3 = i\left[\nabla\times\mathbf{e}_z\right]$ (здесь i - мнимая единица), $S_n^m = P_n^m(\cos\eta)e^{im\varphi}$, $\chi = 3-4\sigma$, $q = \operatorname{ch}\xi$, $q_0 = \operatorname{ch}\xi_0$, P_n^m и Q_n^m - присоединенные функции Лежандра первого и второго рода соответственно.

В координатной форме перемещения (2), (3) имеют вид

$$\mathbf{U}_{1,n,m}^{\pm(5)} = u_{n,m-1}^{\pm(5)}\mathbf{e}_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(5)}\mathbf{e}_1 - u_{n,m}^{\pm(5)}\mathbf{e}_0, \tag{4}$$

$$\mathbf{U}_{3,n,m}^{\pm(5)} = -u_{n,m-1}^{\pm(5)}\mathbf{e}_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(5)}\mathbf{e}_1, \tag{5}$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(5)} = qu_{1,n,m-1}^{\pm(5)}\mathbf{e}_{-1} - qu_{1,n,m+1}^{\pm(5)}\mathbf{e}_1 - \\ -\left[qu_{1,n,m}^{\pm(5)} + \chi u_{n,m}^{\pm(5)}\right]\mathbf{e}_0 + c\left(q^2 - q_0^2\right)\nabla u_{n\pm1,m}^{\pm(5)}, \tag{6}$$

где

$$u_{1,n,m}^{\pm(5)} = u_{1,n,m}^{\pm}S_n^m,$$

$u_{1,n,m}^{+} = (n+m+1)Q_{n+1}^{-m}(q)$, $u_{1,n,m}^{-} = -(n-m)P_{n-1}^{-m}(q)$.

Базис $(\mathbf{e}_{-1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0)$ связан с ортами цилиндрической системы координат следующим образом:

$$\mathbf{e}_{-1} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}_\rho + i\mathbf{e}_\varphi\right)e^{i\varphi}, \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}_\rho - i\mathbf{e}_\varphi\right)e^{-i\varphi}, \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z.$$

Можно заметить, что приведенные частные решения уравнения Ламе не при всех индексах n и m являются регулярными линейно независимыми функциями в областях $\xi > \xi_0$ ($\xi < \xi_0$). Ввиду этого в работе [14] были введены наборы регулярных линейно независимых решений уравнения Ламе в соответствующих областях

$$\tilde{\mathbf{U}}^{\pm(5)}_{s,n,m}=\mathbf{U}^{\pm(5)}_{s,n,m},\ s=1\div 3,\ n\in\mathbb{N},\ |m|\le n-1; \quad (7)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(5)}_{1,n,\pm n}=\mathbf{U}^{+(5)}_{1,n,\pm n}\mp\mathbf{U}^{+(5)}_{3,n,\pm n},\ n\in\mathbb{N}; \quad (8)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(5)}_{1,0,0}=-\chi\mathbf{U}^{+(5)}_{1,0,1}+\mathbf{U}^{+(5)}_{2,0,1}+(1+\chi)\mathbf{U}^{+(5)}_{3,0,1}; \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(5)}_{2,n,\pm n}=\mathbf{U}^{+(5)}_{2,n,\pm n},\ n\in\mathbb{Z}_+; \quad (10)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(5)}_{3,n,\pm n}=-\chi\mathbf{U}^{+(5)}_{1,n,\pm(n+1)}+\mathbf{U}^{+(5)}_{2,n,\pm(n+1)}\pm$$

$$\pm(1+\chi)\mathbf{U}^{+(5)}_{3,n,\pm(n+1)},\ n\in\mathbb{N}; \quad (11)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(5)}_{3,0,0}=-\chi\mathbf{U}^{+(5)}_{1,0,-1}+\mathbf{U}^{+(5)}_{2,0,-1}-(1+\chi)\mathbf{U}^{+(5)}_{3,0,-1}; \quad (12)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{-(5)}_{1,n,\pm n}=\mathbf{U}^{-(5)}_{1,n,\pm n},\ n\in\mathbb{Z}_+; \quad (13)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{-(5)}_{2,n,\pm n}=\mathbf{U}^{-(5)}_{1,n,\pm(n+1)},\ n\in\mathbb{N}; \quad (14)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{-(5)}_{3,n,\pm n}=\mathbf{U}^{-(5)}_{3,n,\pm n},\ n\in\mathbb{N}; \quad (15)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{-(5)}_{2,0,0}=\mathbf{U}^{-(5)}_{1,0,1},\ \tilde{\mathbf{U}}^{-(5)}_{3,0,0}=\mathbf{U}^{-(5)}_{1,0,-1}. \quad (16)$$

В работе [15] было доказано, что наборы решений (7) – (12) и (13) – (16) являются базисными решениями уравнения Ламе в областях $\xi>\xi_0$ и $\xi<\xi_0$ соответственно. В работе [14] были получены теоремы сложения решений (2), (3) в вытянутых сфероидальных системах координат, начала которых произвольно сдвинуты друг относительно друга. Целью настоящей работы является получение теорем сложений решений (7) – (12) в сдвинутых друг относительно друга сонаправленных вытянутых сфероидальных системах координат и применение их к моделированию напряженно-деформированного состояния пористого материала со сфероидальными порами.

Доказана следующая

Теорема. Справедливы теоремы сложения внешних базисных решений уравнения Ламе (7) – (12) по внутренним решениям (13) – (16) при $\xi_\alpha\in(0,\gamma_{j\alpha})$:

$$\tilde{\mathbf{U}}^{+(5)}_{s,n,m}(\xi_j,\eta_j,\varphi_j)=$$

$$=\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=-k}^{k}\tilde{T}^{t,k,\ell,\alpha}_{s,n,m,j}\tilde{\mathbf{U}}^{-(5)}_{t,k,\ell}(\xi_\alpha,\eta_\alpha,\varphi_\alpha), \quad (17)$$

где

$$\gamma_{j\alpha}=$$

$$=\mathrm{Arsh}\frac{\sqrt{t_{j\alpha}^2+\rho_{j\alpha}^2-c_\alpha^2+\sqrt{(t_{j\alpha}^2+\rho_{j\alpha}^2-c_\alpha^2)^2+4c_\alpha^2\rho_{j\alpha}^2}}}{c_\alpha\sqrt{2}},$$

$$t_{j\alpha}=\max(|z_{j\alpha}|-c_j,0),$$

$$\tilde{T}^{t,k,\ell,\alpha}_{s,n,m,j}=T^{t,k,\ell,\alpha}_{s,n,m,j},\ k\ge 1,\ |\ell|\le k-1;$$

$$\tilde{T}^{1,k,k,\alpha}_{s,n,m,j}=T^{1,k,k,\alpha}_{s,n,m,j}+\chi T^{2,k,k,\alpha}_{s,n,m,j},\ k\ge 0;$$

$$\tilde{T}^{2,k,k,\alpha}_{s,n,m,j}=T^{1,k,k+1,\alpha}_{s,n,m,j}-T^{3,k,k+1,\alpha}_{s,n,m,j},\ k\ge 0;$$

$$\tilde{T}^{3,k,k,\alpha}_{s,n,m,j}=T^{3,k,k,\alpha}_{s,n,m,j}+(1+\chi)T^{2,k,k,\alpha}_{s,n,m,j},\ k\ge 1;$$

$$\tilde{T}^{1,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j}=T^{1,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j}+\chi T^{2,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j},\ k\ge 1;$$

$$\tilde{T}^{2,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j}=T^{1,k,-k-1,\alpha}_{s,n,m,j}+T^{3,k,-k-1,\alpha}_{s,n,m,j},\ k\ge 1;$$

$$\tilde{T}^{3,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j}=T^{3,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j}-(1+\chi)T^{2,k,-k,\alpha}_{s,n,m,j},\ k\ge 1;$$

$$\tilde{T}^{3,0,0,\alpha}_{s,n,m,j}=T^{1,0,-1,\alpha}_{s,n,m,j}+T^{3,0,-1,\alpha}_{s,n,m,j};$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{s,n,m,j}=\delta_{st}f1^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j}-\delta_{s2}\delta_{t1}g1^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j}$$

при $(n\ge 1)\wedge(|m|\le n-1)$;

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{1,n,n,j}=(\delta_{t1}-\delta_{t3})f1^{k,\ell,\alpha}_{n,n,j}$$

при $(-k\le\ell\le k+1)\wedge(n\ge 1)$;

$$T^{t,k,-k-1,\alpha}_{1,n,n,j}=0 \text{ при } n\ge 1;$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{1,n,-n,j}=(\delta_{t1}+\delta_{t3})f1^{k,\ell,\alpha}_{n,-n,j}$$

при $(-k-1\le\ell\le k)\wedge(n\ge 1)$;

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{1,0,0,j}=\tilde{\delta}_t f1^{k,\ell,\alpha}_{0,1,j}-\delta_{t1}\,g1^{k,\ell,\alpha}_{0,1,j}$$

при $1-k\le\ell\le k+1$;

$$T^{t,k,-k,\alpha}_{1,0,0,j}=-\delta_{t1}\,g1^{k,-k,\alpha}_{0,1,j};$$

$$T^{t,k,-k-1,\alpha}_{1,0,0,j}=\delta_{t1}\,g2^{k,-k-1,\alpha}_{0,1,j};$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{2,n,n,j}=\delta_{st}f1^{k,\ell,\alpha}_{n,n,j}-\delta_{s2}\delta_{t1}\,g1^{k,\ell,\alpha}_{n,n,j}$$

при $-k\le\ell\le k+1$;

$$T^{t,k,-k-1,\alpha}_{2,n,n,j}=-\delta_{t1}\delta_{s2}\,g1^{k,-k-1,\alpha}_{n,n,j};$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{2,n,-n,j}=\delta_{st}f1^{k,\ell,\alpha}_{n,-n,j}-\delta_{s2}\delta_{t1}\,g1^{k,\ell,\alpha}_{n,-n,j}$$

при $-k-1\le\ell\le k$;

$$T^{t,k,k+1,\alpha}_{2,n,-n,j}=-\delta_{t,1}\delta_{s2}\,g1^{k,k+1,\alpha}_{n,-n,j};$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{3,n,n,j}=\tilde{\delta}_t f1^{k,\ell,\alpha}_{n,n+1,j}-\delta_{t1}g1^{k,\ell,\alpha}_{n,n+1,j}$$

при $(1-k\le\ell\le k+1)\wedge(n\ge 1)$;

$$T^{t,k,-k,\alpha}_{3,n,n,j}=-\delta_{t1}\,g1^{k,-k,\alpha}_{n,n+1,j} \text{ при } n\ge 1;$$

$$T^{t,k,-k-1,\alpha}_{3,n,n,j}=\delta_{t1}\,g2^{k,-k-1,\alpha}_{n,n+1,j} \text{ при } n\ge 1;$$

$$T^{t,k,\ell,\alpha}_{3,n,-n,j}=\hat{\delta}_t f1^{k,\ell,\alpha}_{n,-n-1,j}-\delta_{t1}g1^{k,\ell,\alpha}_{n,-n-1,j}$$

при $-k-1\le\ell\le k-1$;

$$T^{t,k,k,\alpha}_{3,n,-n,j}=-\delta_{t1}\,g1^{k,k,\alpha}_{n,-n-1,j};$$

$$T^{t,k,k+1,\alpha}_{3,n,-n,j}=\delta_{t1}\,g3^{k,k+1,\alpha}_{n,-n-1,j};$$

$$g1^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j}=q_{j0}^2f2^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j}+q_{\alpha0}^2f3^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j}+z_{j\alpha}f4^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j},$$

$$g2^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j}=-q_{j0}^2f2^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j}-q_{\alpha0}^2f3^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j}+f5^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j},$$

$$g3^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j} = -q^2_{j0} f2^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j} - q^2_{\alpha 0} f3^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j} + f6^{k,\ell,\alpha}_{n,m,j};$$

$$\tilde{\delta}_t = -\chi\delta_{t1} + (\chi+1)\delta_{t3} + \delta_{t2},$$

$$\hat{\delta}_t = -\chi\delta_{t1} - (\chi+1)\delta_{t3} + \delta_{t2};$$

$$f1^{k,l,\alpha}_{n,m,j} = \pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{p=k}^{\infty}\sum_{r=n}^{\infty}\Gamma^{kp\alpha}_{nrj} u^{+(4)j,\alpha}_{p+r,m-\ell},$$

$$f2^{k,l,\alpha}_{n,m,j} = \pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{p=k}^{\infty}\sum_{r=n+2}^{\infty}(n-r)\Gamma^{kp\alpha}_{nrj} u^{+(4)j,\alpha}_{p+r,m-\ell},$$

$$f3^{k,l,\alpha}_{n,m,j} = \pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{p=k+2}^{\infty}\sum_{r=n}^{\infty}(p-k)\Gamma^{kp\alpha}_{nrj} u^{+(4)j,\alpha}_{p+r,m-\ell},$$

$$f4^{k,l,\alpha}_{n,m,j} = -\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{p=k}^{\infty}\sum_{r=n}^{\infty}\Gamma^{kp\alpha}_{nrj} u^{+(4)j,\alpha}_{p+r+1,m-\ell},$$

$$f5^{k,l,\alpha}_{n,m,j} = \pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{p=k}^{\infty}\sum_{r=n}^{\infty}\Gamma^{kp\alpha}_{nrj} v^{j,\alpha}_{p+r,n,k},$$

$$f6^{k,l,\alpha}_{n,m,j} = \pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{p=k}^{\infty}\sum_{r=n}^{\infty}\Gamma^{kp\alpha}_{nrj} w^{j,\alpha}_{p+r,n,k}$$

$$\Gamma^{kp\alpha}_{nrj} = \frac{1}{\gamma_{kp}\gamma_{nr}}(-1)^{p+m-\ell}\varepsilon_{kp}\varepsilon_{nr}\left(\frac{c_j}{2}\right)^{r+1}\left(\frac{c_\alpha}{2}\right)^{p};$$

$$\gamma_{kp} = \Gamma\left(\frac{p-k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{k+p}{2}+\frac{3}{2}\right);$$

$$v^{j,\alpha}_{\nu,n,k} = \begin{cases} u^{+(4)j,\alpha}_{\nu,n+k+2} + z_{j\alpha} u^{+(4)j,\alpha}_{\nu+1,n+k+2}, & \nu \ge n+k+2, \\ \dfrac{r^2_{j\alpha}}{2n+2k+3} u^{+(4)j,\alpha}_{n+k+2,n+k+2}, & \nu \le n+k+1, \end{cases}$$

$$w^{j,\alpha}_{\nu,n,k} = \begin{cases} u^{+(4)j,\alpha}_{\nu,-n-k-2} + z_{j\alpha} u^{+(4)j,\alpha}_{\nu+1,-n-k-2}, & \nu \ge n+k+2, \\ \dfrac{r^2_{j\alpha}}{2n+2k+3} u^{+(4)j,\alpha}_{n+k+2,-n-k-2}, & \nu \le n+k+1, \end{cases}$$

$$u^{+(4)j,\alpha}_{n,m} = \begin{cases} \dfrac{(n-m)!}{r^{n+1}_{j\alpha}} P^m_n(\cos\theta_{j\alpha}) e^{im\varphi_{j\alpha}}, & n \ge m, \\ \dfrac{(-1)^m (n+m)!}{r^{n+1}_{j\alpha}} P^{-m}_n(\cos\theta_{j\alpha}) e^{im\varphi_{j\alpha}}, & n < m, \end{cases}$$

$(r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha})$ – сферические координаты точки O_α в системе координат с началом в точке O_j.

Приложение ОМФ к моделированию напряженного состояния пористого материала

Рассматривается упругое пространство Ω с восемью непересекающимися сфероидальными полостями Ω_j, центры которых расположены в вершинах куба со стороной a, как показано на рис. 1. Будем использовать одинаково ориентированные цилиндрические (ρ_j, φ_j, z_j) и вытянутые сфероидальные системы координат $(\xi_j, \eta_j, \varphi_j)$, начала которых отнесены к центрам полостей O_j, $j = 1 \div 8$. Материал пространства имеет упругие характеристики (G, σ).

Будем считать, что на бесконечности приложены постоянные растягивающие усилия $\sigma^\infty_z = T$, $\tau^\infty_{\rho z} = \tau^\infty_{\varphi z} = 0$ (одноосное растяжение) или $\sigma^\infty_\rho = T$, $\tau^\infty_{\rho\varphi} = \tau^\infty_{\rho z} = 0$ (двуосное растяжение), а полости свободны от нагрузки.

Для определения напряженно-деформированного состояния в рассматриваемом теле необходимо решить краевую задачу для уравнения Ламе с условиями на границе полостей

$$\mathbf{FU}\big|_{\Gamma_j} = 0, \qquad (18)$$

а также указанными выше условиями на бесконечности. Здесь $\mathbf{FU}$ – отвечающий перемещению $\mathbf{U}$ вектор усилий на соответствующей граничной поверхности; σ – коэффициент Пуассона.

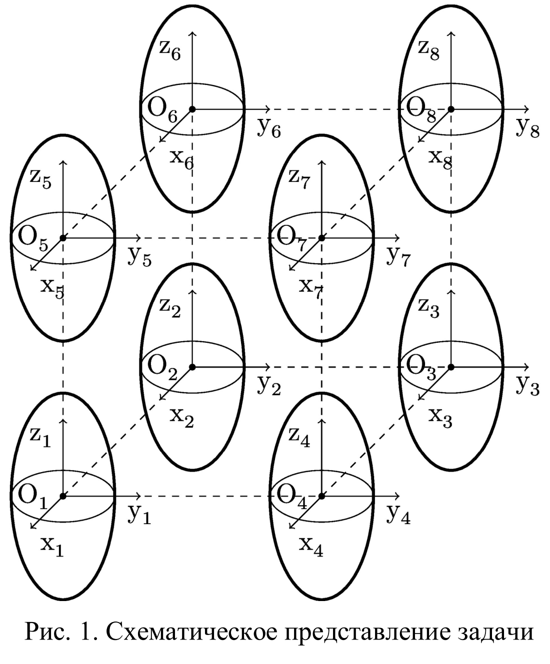

Рис. 1. Схематическое представление задачи

Решение задачи в упругом пространстве Ω ищется в виде

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{U}_0; \qquad (19)$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{j=1}^{8}\sum_{s=1}^{3}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} a^{(j)}_{s,n,m} \tilde{\mathbf{U}}^{+(5)}_{s,n,m}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j), \qquad (20)$$

при $x \in \Omega \setminus \bigcup_j \Omega_j$, где $a^{(j)}_{s,n,m}$ – неизвестные коэффициенты, которые определяются из граничных условий. Перемещение $\mathbf{U}_0$ соответствует напряженно-деформированному состоянию на бесконечности (для одноосного и двуосного растяжения упругого пространства):

$$\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2}\frac{T\sigma\rho}{G(\sigma+1)}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{2}\frac{Tz}{G(\sigma+1)}\mathbf{e}_z; \qquad (21)$$

$$\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2}\frac{T(\sigma-1)\rho}{G(\sigma+1)}\mathbf{e}_\rho - \frac{1}{2}\frac{T\sigma z}{G(\sigma+1)}\mathbf{e}_z; \qquad (22)$$

где T – усилие на бесконечности; G – модуль сдвига; $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$ – орты цилиндрической системы координат.

Вектор напряжений на площадке с нормалью $\mathbf{n}$ имеет вид:

$$\mathbf{F}\mathbf{U} = 2G\left[\frac{\sigma}{1-2\sigma}\mathbf{n}\,\mathrm{div}\mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{2}\left(\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\mathbf{U}\right)\right]. \quad (23)$$

Применив к формулам (4) – (6) оператор (23) на площадке с нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\xi$ получим:

$$\mathbf{F}\mathbf{U}^{\pm(5)}_{s,n,m}\Big|_{\xi=\xi_0} = 2G\frac{h}{c}\times$$

$$\times\sum_{r=-1}^{1} F^{\pm(r)}_{s,n,m}(\xi_0)P_n^{m+r}(\cos\eta)e^{i(m+r)\varphi}\mathbf{e}_r, \qquad (24)$$

где

$$F^{\pm(-1)}_{1,n,m} = \frac{\partial}{\partial\xi}u^{\pm}_{n,m-1}, \quad F^{\pm(1)}_{1,n,m} = -\frac{\partial}{\partial\xi}u^{\pm}_{n,m+1}, \quad F^{\pm(0)}_{1,n,m} =$$
$$-\frac{\partial}{\partial\xi}u^{\pm}_{n,m}, \quad F^{\pm(-1)}_{2,n,m} = q^2\frac{\partial}{\partial\xi}\left(q^{-1}u^{\pm}_{1,n,m-1}\right) - 2\sigma u^{\pm}_{2,n,m},$$

$$F^{\pm(1)}_{2,n,m} = -q^2\frac{\partial}{\partial\xi}\left(q^{-1}u^{\pm}_{1,n,m+1}\right) + 2\sigma u^{\pm}_{3,n,m},$$

$$F^{\pm(0)}_{2,n,m} = -q^2\frac{\partial}{\partial\xi}\left(q^{-1}u^{\pm}_{1,n,m}\right) + (2\sigma-1)\frac{\partial}{\partial\xi}u^{\pm}_{n,m}.$$

$$F^{\pm(-1)}_{3,n,m}(\xi) = -\frac{\partial}{\partial\xi}u^{\pm}_{n,m-1}(\xi) + \frac{1}{2}u^{\pm}_{2,n,m}(\xi),$$

$$F^{\pm(1)}_{3,n,m}(\xi) = -\frac{\partial}{\partial\xi}u^{\pm}_{n,m+1}(\xi) + \frac{1}{2}u^{\pm}_{n,m}(\xi),$$

$$F^{\pm(0)}_{3,n,m}(\xi) = \frac{m}{2}\frac{q}{\bar{q}}u^{\pm}_{n,m}(\xi);$$

$u^{+(5)}_{2,n,m} = \omega^- Q_n^{-m}(q)S_n^{m-1}$, $\quad u^{+(5)}_{3,n,m} = Q_n^{-m}(q)S_n^{m+1}$,
$u^{-(5)}_{3,n,m} = P_n^{-m}(q)S_n^{m+1}$, $\quad u^{-(5)}_{2,n,m} = \omega^- P_n^{-m}(q)S_n^{m-1}$,
$\omega^- = (n+m)(n-m+1)$, $\quad h = (q^2 - \cos^2\eta)^{-1/2}$,
$\bar{q} = \mathrm{sh}\xi$.

Используя теоремы сложения (17), представим вектор перемещения $\tilde{\mathbf{U}}$ в системе координат с началом в точке O_j:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{s=1}^{3}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} a^{(j)}_{s,n,m}\tilde{\mathbf{U}}^{+(5)}_{s,n,m}(\xi_j,\eta_j,\varphi_j) +$$
$$+\tilde{\mathbf{U}}^{-(5)}_{s,n,m}(\xi_j,\eta_j,\varphi_j)\sum_{\alpha\neq j}^{3}\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{k}\sum_{\ell=-k}^{k} a^{(\alpha)}_{t,k,\ell}\tilde{T}^{s,n,m,j}_{t,k,\ell,\alpha}.$$

После удовлетворения граничных условий задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a^{(j)}_{s,n,m}$:

$$\sum_{s=1}^{3} a^{(j)}_{s,n,m}\tilde{F}^{+(r)}_{s,n,m}(\xi_j) +$$
$$+\tilde{F}^{-(r)}_{s,n,m}(\xi_j)\sum_{\alpha\neq j}^{3}\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=-k}^{k} a^{(\alpha)}_{t,k,\ell}\tilde{T}^{s,n,m,j}_{t,k,\ell,\alpha} + F^{(r)}_{0,n,m} = 0, \quad (25)$$
$$r = -1,0,1; \quad n = 0,1,2,\ldots; \quad m = -n \div n,$$

где $F^{(0)}_{0,n,m} = \frac{Td_2}{2G}\delta_{n1}\delta_{m0}$, $F^{(-1)}_{0,n,m} = F^{(1)}_{0,n,m} = 0$ (для одноосного растяжения) и $F^{(0)}_{0,n,m} = 0$, $F^{(-1)}_{0,n,m} = \frac{Td_1}{G}\delta_{n1}\delta_{m0}$, $F^{(-1)}_{0,n,m} = -\frac{Td_1}{2G}\delta_{n1}\delta_{m0}$ (для двуосного растяжения). Выражения $\tilde{F}^{\pm(r)}_{s,n,m}(\xi_j)$ являются компонентами напряжений $\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}^{\pm(5)}_{s,n,m}$ и получаются из формул (7) – (16) и (24) при помощи линейных преобразований. Ввиду громоздкости их явный вид мы не приводим. Оператор системы уравнений (25) является фредгольмовым при условии непересечения граничных поверхностей [15].

Анализ результатов

При численном анализе полагаем коэффициент Пуассона материала упругого пространства равным $\sigma = 0{,}38$, полости считаем одного размера, отношение полуосей сфероидов – $d_2 / d_1 = 0{,}75$. Система уравнений (25) численно решается методом редукции ($n_{max} = 6$). На основании полученных решений находятся нормальные напряжения на площадках, параллельных координатным плоскостям.

На рис. 2 – 4 приведены напряжения σ_x / T, σ_y / T, σ_z / T на линии O_1O_4 вне полостей при одноосном растяжении в зависимости от относительного расстояния a / d_1 между полостями.

Областью концентрации напряжений σ_y / T, σ_z / T является граница полостей, в то время как напряжения σ_x / T достигают максимальных значений в средней точке отрезка O_1O_4.

На рис. 5, 6 приведены напряжения σ_x / T,

σ_y / T, σ_z / T на линии CD (C, D – середины нижнего и верхнего оснований кубической ячейки) в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном растяжении. Наблюдается практически линейный характер распределения напряжений между средней точкой отрезка CD и любым из его концов. Для напряжений σ_x / T, σ_y / T имеются области растягивающих напряжений в окрестности оснований кубической ячейки. Напряжения σ_z / T растут при приближении полостей друг к другу.

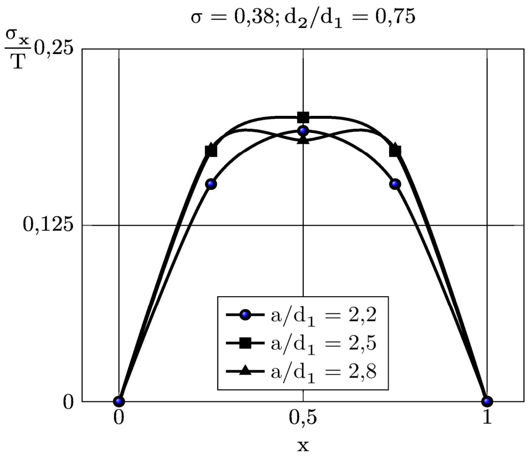

Рис. 2. Напряжения σ_x / T на линии O_1O_4 в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном растяжении

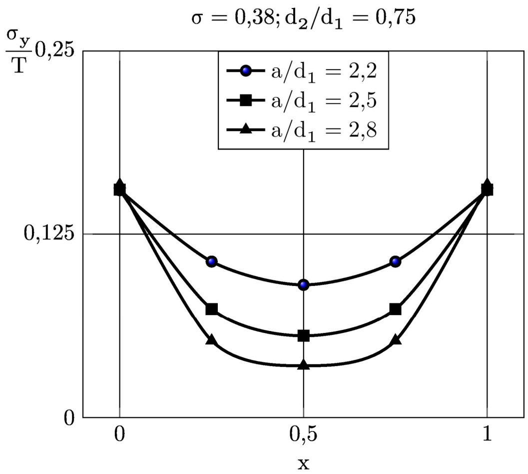

Рис. 3. Напряжения σ_y / T на линии O_1O_4 в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном растяжении

На рис. 7 – 9 приведены напряжения σ_x / T, σ_y / T, σ_z / T на линии O_1O_4 вне полостей при двуосном растяжении в зависимости от относительного расстояния между полостями.

Напряжения σ_x / T убывают, а σ_y / T растут при приближении полостей друг к другу.

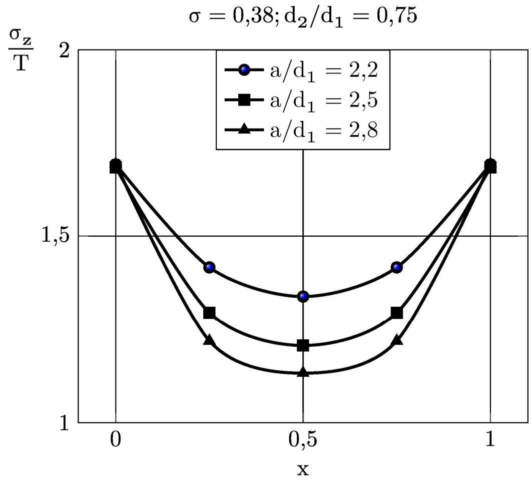

Рис. 4. Напряжения σ_z / T на линии O_1O_4 в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном растяжении

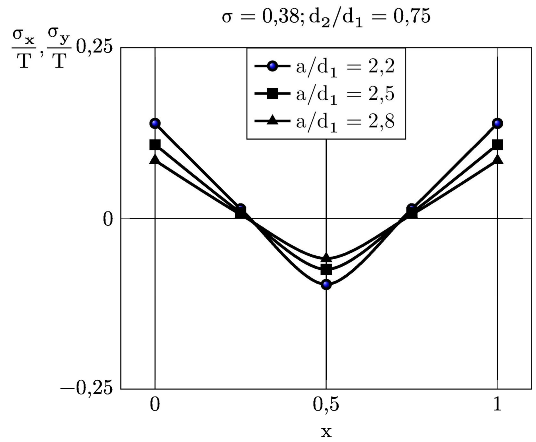

Рис. 5. Напряжения σ_x / T, σ_y / T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном растяжении

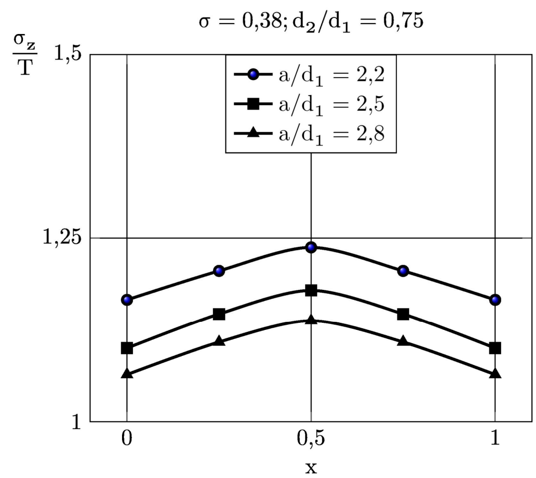

Рис. 6. Напряжения σ_z / T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном растяжении

На рис. 10, 11 приведены напряжения σ_x / T, σ_y / T, σ_z / T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между полостями при двуосном растяжении.

Характер распределения напряжений σ_x / T, σ_y / T, σ_z / T напоминает случай одноосного растяжения только с заменой σ_x / T, σ_y / T на σ_z / T.

На рис. 12 приведено сравнение напряжений σ_x / T на линии O_1O_4 при разном количестве полостей (2, 4, 8) при $a / d_1 = 2,5$ для одноосного растяжения упругого пространства. Наблюдается незначительное отличие в напряжениях вблизи средней точки рассматриваемого отрезка.

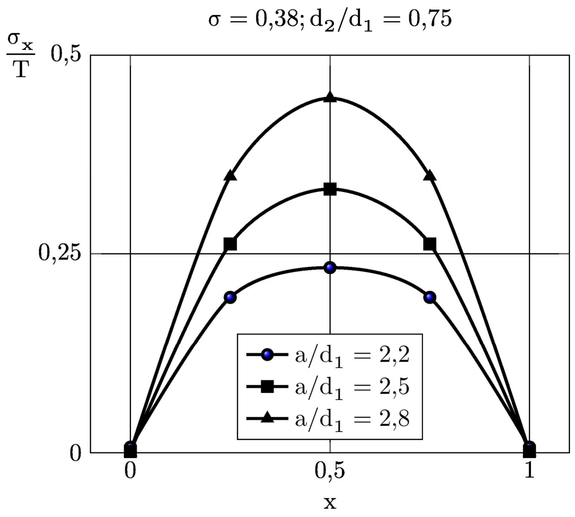

Рис. 7. Напряжения σ_x / T на линии O_1O_4 в зависимости от относительного расстояния между полостями при двуосном растяжении

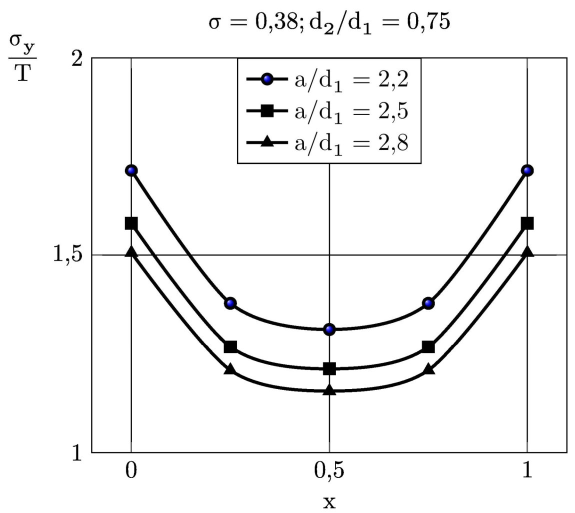

Рис. 8. Напряжения σ_y / T на линии O_1O_4 в зависимости от относительного расстояния между полостями при двуосном растяжении

Заключение

В работе получены новые теоремы сложения модифицированных базисных решений уравнения Ламе в вытянутых сфероидальных системах координат, начала которых произвольно сдвинуты друг относительно друга. Эти теоремы использованы для построения модели напряженно-деформированного состояния пористого упругого материала.

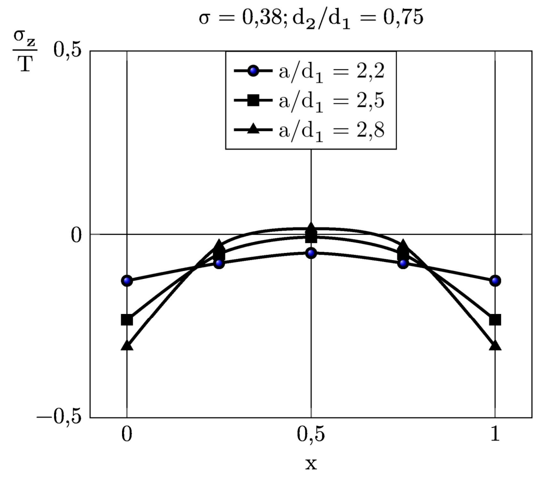

Рис. 9. Напряжения σ_z / T на линии O_1O_4 в зависимости от относительного расстояния между полостями при двуосном растяжении

Поры моделируются вытянутыми сфероидальными полостями, центры которых расположены в узлах кубической решетки. Рассмотрен случай восьми полостей. Модель сводится к краевой задаче для уравнения Ламе с однородными условиями на границе пор и условиями на бесконечности.

Вектор перемещений строится в виде суперпозиции модифицированных базисных решений уравнения Ламе и перемещения, удовлетворяющего условиям на бесконечности.

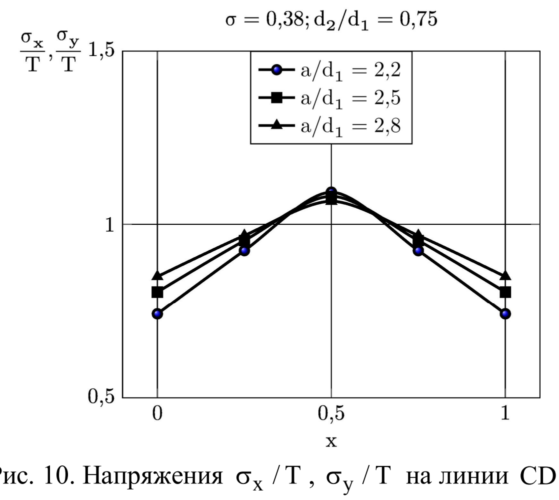

Рис. 10. Напряжения σ_x / T, σ_y / T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между полостями при двуосном растяжении

В модели граничные условия удовлетворяются точно при помощи аппарата теорем сложения. Разрешающая система для определения параметров модели допускает эффективное численное решение. Проведен численный и качественный анализ напряженного состояния в областях максимальной концентрации напряжений в зависимости от относительного расстояния между полостями. Дано сравнение полученных результатов для восьми, четырех и двух полостей.

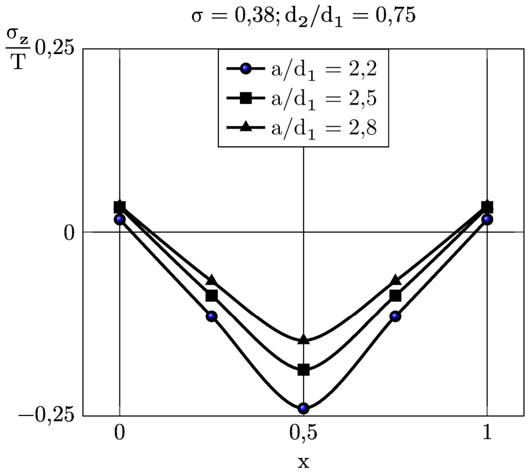

Рис. 11. Напряжения σ_z / T на линии CD в зависимости от относительного расстояния между полостями при двуосном растяжении

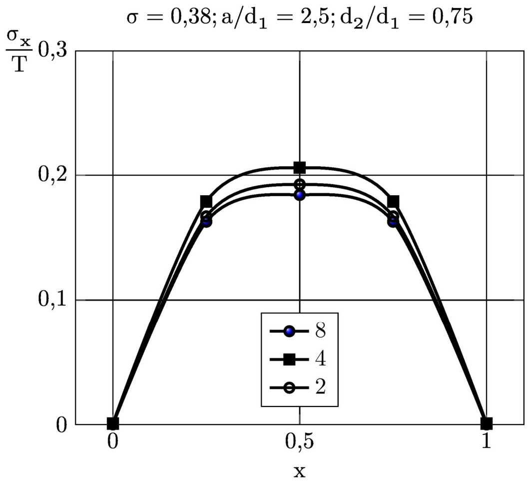

Рис. 12. Сравнение напряжений σ_x / T на линии O_1O_4 в зависимости от числа полостей при одноосном растяжении

Литература

1. Khoroshun, L. P. Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites [Text] / L. P. Khoroshun // International Applied Mechanics. – 2000. – V. 36, No 10. – P. 1284–1316.

2. Вольперт, В. С. Осесимметричное напряжённое состояние пространства, содержащего систему сферических полостей или включений [Текст] / В. С. Вольперт, И. П. Олегин // Новосиб. ин-т инж. ж.-д. транспорта. – 1977. – 19 с. – Деп. в ВИНИТИ. №3266–77.

3. Олегин, И. П. Осесимметричное напряженное состояние в трансверсально-изотропной упругой среде с двумя жесткими эллипсоидальными включениями [Текст] / И. П. Олегин // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2002. – Т. V, № 1(9). – С. 127–132.

4. Олегин, И. П. Решение пространственной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного тела, содержащего периодическую систему эллипсоидальных полостей [Текст] / И. П. Олегин // Сибирский журнал индустриальной математики. – 1999. – Т. II, № 1. – С. 117–122.

5. Гаришин, О. К. Прогнозирование прочности эластомерных зернистых композитов в зависимости от размеров частиц наполнителя [Текст] / О. К. Гаришин, Л. А. Комар // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2003. – Т. 9, № 3. – С. 278–286.

6. Tsuchida, E. On the asysimmetric problem of the theory for an infinite elastic solid containing two spherical inclusions [Text] / E. Tsuchida, I. Nakahara, M. Kodama // Bull. JSME. – 1980. – V. 23, № 181. – P. 1072–1080.

7. Stress concentration around a prolate spheroidal cavity in a semi-infinite elastic body under all-round tension [Text] / E. Tsuchida, Y. Saito, I. Nakahara, M. Kodama // Bull. JSME. – 1982. – V. 25, №202. – P. 493 – 500.

8. Кущ, В. И. Напряжённое состояние и эффективные упругие модули среды, нормированной периодически расположенными сфероидальными включениями [Текст] / В. И. Кущ // Прикладная механика. – 1995. – Т. 31, №3. – С. 32 – 39.

9. Овидько, И. А. Упругие поля наноскопических включений в нанокомпозитах [Текст] / И. А. Овидько, А. Г. Шейнерман // Физика и механика материалов. – 2010. – Т. 10, №1/2. – С. 1–29.

10. Трайтак, С. Д. Методы решения краевых задач в областях с несвязной границей [Текст] / С. Д. Трайтак // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2005. – Т. 11, № 1. – С. 87 – 112.

11. Николаев, А. Г. Математическая модель напряженно-деформированного состояния пористого материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов : сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – 2009. – Т. 2 (58). – С. 48–58.

12. Николаев, А. Г. Развитие локальной модели напряженного состояния пористого материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Авиационно-космическая техника и технология. – 2013. – № 1(98). – С. 14–18.

13. Николаев, А. Г. Локальная математическая модель зернистого композиционного материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вісн. Харк. Нац. ун-та ім. В. Н. Каразіна. Сер.: Математика, прикладна математика і механіка. – 2010. – Т. 922. – С. 4–19.

14. Николаев, А. Г. Теоремы сложения решений уравнения Ламе [Текст] / А. Г. Николаев. – Х. : Харьк. авиац. ин-т, 1993. – 109 с. – Деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, № 1178 – Ук 93.

15. Николаев, А. Г. Обоснование обобщенного метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей [Текст] / А. Г. Николаев // Доповіді НАН України. – 1998. – Т. 2. – С. 78–83.

Поступила в редакцию 16.07.2014, рассмотрена на редколлегии 10.09.2014

Рецензент: д-р техн. наук, проф., вед. науч. сотр. В. А. Ванин, ИПМаш НАН Украины, Харьков.

НОВІ ТЕОРЕМИ ДОДАВАННЯ БАЗИСНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ ЛАМЕ ДЛЯ ВИТЯГНУТИХ СФЕРОЇДІВ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО МОДЕЛЮВАННЯ ПОРИСТОГО МАТЕРІАЛУ

О. Г. Ніколаєв, Є. А. Танчік

У роботі отримано нові теореми додавання модифікованих базисних розв'язків рівняння Ламе у витягнутих сфероїдальних системах координат, початки яких довільно зсунуто одне відносно одного. Ці теореми використано для побудови моделі напружено-деформованого стану пористого пружного матеріалу. Пори моделюються витягнутими сфероїдальними порожнинами, центри яких розташовано у вузлах кубічної решітки. Розглянуто випадок восьми порожнин. Модель зводиться до крайової задачі для рівняння Ламе з однорідними умовами на границі пор і умовами на нескінченності. Вектор переміщень будується у вигляді суперпозиції модифікованих базисних розв'язків рівняння Ламе і переміщення, що задовольняє умовам на нескінченності. У моделі граничні умови задовольняються точно за допомогою апарату теорем додавання. Розв'язальна система для визначення параметрів моделі допускає ефективний чисельний розв'язок. Проведено чисельний і якісний аналіз напруженого стану в областях максимальної концентрації напружень в залежності від відносної відстані між порожнинами.

Ключові слова: теореми додавання, базисні розв'язки рівняння Ламе, витягнуті сфероїдальні порожнини, граничні умови, напружено-деформований стан, узагальнений метод Фур'є, метод редукції, пористий матеріал.

NEW ADDITION THEOREMS OF BASIC SOLUTIONS OF THE LAME EQUATION FOR PROLATE SPHEROIDS AND THEIR APPLICATION TO MODELING POROUS MATERIAL

A. G. Nikolaev, E. A. Tanchik

The paper presents a new addition theorems of modified basic solutions of the Lame equation in prolate spheroidal coordinate systems, which origins arbitrarily shifted relative to each other. These theorems are used to construct a model of the stress-strain state of the porous elastic material. Pores are modeled by prolate spheroidal cavities, whose centers are located at the nodes of a cubic lattice. The case of eight cavities is considered. Model reduces to a boundary value problem for the Lame equation with homogeneous boundary conditions on the boundary of cavities and the conditions at infinity. Displacement vector is constructed as a superposition of modified basic solutions of the Lame equation and displacement, satisfying the conditions at infinity. The boundary conditions are satisfied exactly by means of addition theorems in the model. Resolve system for determining parameters of the model allows efficient numerical solution. The numerical and qualitative analysis of the stress state in the areas of highest concentration of stress, depending on the relative distance between the cavities is carried out.

Key words: addition theorems, basic solutions of the Lame equation, prolate spheroidal cavities, boundary conditions, the stress-strain state, the generalized Fourier method, the method of reduction, porous material.

Николаев Алексей Георгиевич – д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

Танчик Евгений Андреевич – ассистент каф. высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина; e-mail: eug.tanchik@yandex.ru.