

УДК 539.3

А. Г. НИКОЛАЕВ, Е. А. ТАНЧИК

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина***РАЗВИТИЕ АППАРАТА ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ФУРЬЕ НА НЕКОТОРЫЕ МНОГОСВЯЗНЫЕ ОБЛАСТИ И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА**

В работе получены новые теоремы сложения модифицированных базисных решений уравнения Ламе в сжатых сфероидальных системах координат, начала которых произвольно сдвинуты друг относительно друга. Эти теоремы использованы для построения модели напряженно-деформированного состояния пористого упругого материала. Поры моделируются сжатыми сфероидальными полостями, центры которых расположены в узлах кубической решетки. Модель сводится к краевой задаче для уравнения Ламе с однородными условиями на границе пор и условиями на бесконечности. Вектор перемещения строится в виде суперпозиции модифицированных базисных решений уравнения Ламе и перемещения, удовлетворяющего условиям на бесконечности. В модели граничные условия удовлетворяются точно при помощи аппарата теорем сложения. Разрешающая система для определения параметров модели допускает эффективное численное решение. Проведен численный и качественный анализ напряженного состояния в областях максимальной концентрации напряжений в зависимости от относительного расстояния между полостями.

Ключевые слова: теоремы сложения, базисные решения уравнения Ламе, сжатые сфероидальные полости, граничные условия, напряженно-деформированное состояние, обобщенный метод Фурье, метод редукции, пористый материал.

Введение

В последние десятилетия наблюдается стремительный рост внедрения новых видов материалов при проектировании различных образцов техники в высокотехнологических областях, в частности, в авиаракетостроении. К таким материалам относятся металлические и неметаллические композиты, металлопены, керамика, интерметаллиды, полимеры и др. При этом важной задачей является создание математических моделей материалов, учитывающих их физические и геометрические неоднородности. Практически все известные на сегодняшний день модели обладают одним существенным недостатком — они учитывают влияние неоднородностей приближенно. При этом в авиаракетостроении с каждым годом повышаются требования к точности расчетов полей напряжений и деформаций, которые возникают в процессе эксплуатации летательных аппаратов. В связи с этим актуальной задачей для высокотехнологических областей промышленности является задача точного определения напряженно-деформированного состояния многокомпонентных материалов.

В настоящее время предлагаются разные модели напряженно-деформированного состояния пористых и композиционных материалов. В работе [1] обобщены базовые подходы, применяемые в математических моделях, и общие методы решения уравнений механики стохастических композитов.

Они могут быть сведены к стохастическим уравнениям теории упругости структурно неоднородного тела, к уравнениям теории эффективных упругих модулей, к уравнениям теории упругих смесей или к более общим уравнениям четвертого порядка. Решение стохастических уравнений теории упругости для произвольной области вызывает значительные математические трудности и может быть реализовано только приближенно. Построение уравнений теории эффективных упругих модулей связано с задачей определения интегральных модулей стохастически неоднородной среды, которая может быть решена методом возмущений, методом моментов или методом условных моментов. Однако, т.к. уравнения состояния не были строго обоснованы, эта теория не может использоваться для систематического моделирования композитных структур.

В статьях [2–4] методами теории аналитических функций решаются некоторые осесимметричные задачи теории упругости для системы сферических и эллипсоидальных полостей и включений.

В статье [5] предложена структурная модель зернистого эластомерного композита, позволившая связать его деформационное и прочностное поведение с размерами частиц дисперсной фазы, т.е. учесть масштабный фактор прочности. На основе теоретических исследований напряженно-деформированного состояния вокруг двух жестких сферических включений в упругой несжимаемой матрице

установлены зависимости математического ожидания разрывного усилия от физико-механических характеристик связующего, размеров частиц и расстояния между ними. В результате предложен новый вероятностный критерий появления микроразрушения в композитной структуре в виде отслоений матрицы от частиц. С его помощью проведены модельные исследования процессов развития внутренней поврежденности в композитной системе в зависимости от степени наполнения и величины включений. Построены соответствующие кривые растяжения, определены предельные разрывные макро-напряжения и макродеформации.

В работах [6, 7] методами теории гармонических функций исследованы осесимметричные напряженные состояния в упругом пространстве с двумя сферическими включениями и в полупространстве с вытянутой сфероидальной полостью.

В статье [8] сделана попытка моделирования напряженного состояния упругой среды с периодической системой сфероидальных включений.

В статье [9] дается обзор методов моделирования напряженного состояния композита с очень малыми размерами нановключений. Обсуждаются варианты применения функции Грина, непосредственного интегрирования уравнений равновесия, метода бесконечно малых включений. Все перечисленные методы учитывают неоднородные включения приближенно.

В работе [10] на примере решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа приводится сравнительный анализ методов решения краевых задач в областях с N непересекающимися включениями.

В статьях [11, 12] исследовано напряженное состояние в окрестности четырех вытянутых сфероидальных пор и включений в упругом материале обобщенным методом Фурье (ОМФ). Численная реализация модели позволила получить характер распределения локальных напряжений в области их концентрации. Развитие и применение ОМФ излагается в работах [13, 14]. В данной работе ОМФ развивается на модифицированные базисные решения уравнения Ламе в сжатых сфероидальных системах координат, сдвинутых произвольно друг относительно друга. Приводится его приложение к моделированию напряженно-деформированного состояния пористого материала.

Теоремы сложения решений уравнения Ламе в сдвинутых сжатых сфероидальных системах координат для модифицированного базиса

В работе [13] были введены наборы частных решений уравнения Ламе

$$\Delta \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} = 0 \quad (1)$$

в сжатых сфероидальных системах координат (ξ, η, φ)

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(6)} = \frac{-ic}{2n+1} \mathbf{D}_s \left[\mathbf{u}_{n-1,m}^{\pm(6)} - \mathbf{u}_{n+1,m}^{\pm(6)} \right], \quad s=1,3; \quad (2)$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(6)} = \mathbf{D}_2 \mathbf{u}_{n,m}^{\pm(6)} - ic \bar{q}_0^2 \mathbf{D}_1 \mathbf{u}_{n\pm 1,m}^{\pm(6)}, \quad (3)$$

$$n, m \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0, \quad |m| \leq n+1,$$

$$\mathbf{u}_{n,m}^{\pm(6)}(\xi, \eta, \varphi) = \mathbf{u}_{n,m}^{\pm}(\xi) \mathbf{S}_n^m,$$

$$\mathbf{u}_{n,m}^+(\xi) = \mathbf{Q}_n^{-m}(\operatorname{ish} \xi), \quad \mathbf{u}_{n,m}^-(\xi) = \mathbf{P}_n^{-m}(\operatorname{ish} \xi),$$

где $\mathbf{D}_1 = \nabla$, $\mathbf{D}_2 = z \nabla - \chi \mathbf{e}_z$, $\mathbf{D}_3 = i[\nabla \times \mathbf{e}_z]$ (здесь i - мнимая единица), $\mathbf{S}_n^m = \mathbf{P}_n^m(\cos \eta) e^{im\varphi}$, $\chi = 3 - 4\sigma$, $\bar{q} = \operatorname{sh} \xi$, $\bar{q}_0 = \operatorname{sh} \xi_0$, \mathbf{P}_n^m и \mathbf{Q}_n^m - присоединенные функции Лежандра первого и второго рода соответственно.

В координатной форме перемещения (2), (3) имеют вид

$$\mathbf{U}_{1,n,m}^{\pm(6)} = \mathbf{u}_{n,m-1}^{\pm(6)} \mathbf{e}_{-1} - \mathbf{u}_{n,m+1}^{\pm(6)} \mathbf{e}_1 - \mathbf{u}_{n,m}^{\pm(6)} \mathbf{e}_0, \quad (4)$$

$$\mathbf{U}_{3,n,m}^{\pm(6)} = -\mathbf{u}_{n,m-1}^{\pm(6)} \mathbf{e}_{-1} - \mathbf{u}_{n,m+1}^{\pm(6)} \mathbf{e}_1, \quad (5)$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(6)} = i \bar{q} \mathbf{u}_{1,n,m-1}^{\pm(6)} \mathbf{e}_{-1} - i \bar{q} \mathbf{u}_{1,n,m+1}^{\pm(6)} \mathbf{e}_1 - \left[i \bar{q} \mathbf{u}_{1,n,m}^{\pm(6)} + \chi \mathbf{u}_{n,m}^{\pm(6)} \right] \mathbf{e}_0 + ic \left(\bar{q}^2 - \bar{q}_0^2 \right) \nabla \mathbf{u}_{n\pm 1,m}^{\pm(6)}, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{u}_{1,n,m}^{\pm(6)} = \mathbf{u}_{1,n,m}^{\pm} \mathbf{S}_n^m,$$

$$\mathbf{u}_{1,n,m}^+ = (n+m+1) \mathbf{Q}_{n+1}^{-m}(i\bar{q}),$$

$$\mathbf{u}_{1,n,m}^- = -(n-m) \mathbf{P}_{n-1}^{-m}(i\bar{q}).$$

Базис $(\mathbf{e}_{-1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0)$ связан с ортами цилиндрической системы координат следующим образом:

$$\mathbf{e}_{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho + i\mathbf{e}_\varphi) e^{i\varphi}, \quad \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho - i\mathbf{e}_\varphi) e^{-i\varphi}, \quad \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z.$$

Можно заметить, что приведенные частные решения уравнения Ламе не при всех индексах n и m являются регулярными линейно независимыми функциями в областях $\xi > \xi_0$ ($\xi < \xi_0$). Ввиду этого в работе [13] были введены наборы регулярных линейно независимых решений уравнения Ламе в соответствующих областях

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(6)} = \mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(6)}, \quad s=1 \div 3, \quad n \in \mathbb{N}, \quad |m| \leq n-1; \quad (7)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,n,\pm n}^{+(6)} = \mathbf{U}_{1,n,\pm n}^{+(6)} \mp \mathbf{U}_{3,n,\pm n}^{+(6)}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad (8)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,0,0}^{+(6)} = -\chi \mathbf{U}_{1,0,1}^{+(6)} + \mathbf{U}_{2,0,1}^{+(6)} + (1+\chi) \mathbf{U}_{3,0,1}^{+(6)}; \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{2,n,\pm n}^{+(6)} = \mathbf{U}_{2,n,\pm n}^{+(6)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+; \quad (10)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{3,n,\pm n}^{+(6)} = -\chi \mathbf{U}_{1,n,\pm(n+1)}^{+(6)} + \mathbf{U}_{2,n,\pm(n+1)}^{+(6)} \pm$$

$$\pm(1+\chi)U_{3,n,\pm(n+1)}^{+(6)}, n \in \mathbb{N}; \quad (11)$$

$$\tilde{U}_{3,0,0}^{+(6)} = -\chi U_{1,0,-1}^{+(6)} + U_{2,0,-1}^{+(6)} - (1+\chi)U_{3,0,-1}^{+(6)}; \quad (12)$$

$$\tilde{U}_{1,n,\pm n}^{-(6)} = U_{1,n,\pm n}^{-(6)}, n \in \mathbb{Z}_+; \quad (13)$$

$$\tilde{U}_{2,n,\pm n}^{-(6)} = U_{1,n,\pm(n+1)}^{-(6)}, n \in \mathbb{N}; \quad (14)$$

$$\tilde{U}_{3,n,\pm n}^{-(6)} = U_{3,n,\pm n}^{-(6)}, n \in \mathbb{N}; \quad (15)$$

$$\tilde{U}_{2,0,0}^{-(6)} = U_{1,0,1}^{-(6)}, \tilde{U}_{3,0,0}^{-(6)} = U_{1,0,-1}^{-(6)}. \quad (16)$$

В работе [15] было доказано, что наборы решений (7) – (12) и (13) – (16) являются базисными решениями уравнения Ламе в областях $\xi > \xi_0$ и $\xi < \xi_0$ соответственно. В работе [13] были получены теоремы сложения решений (2), (3) в сжатых сфероидальных системах координат, начала которых произвольно сдвинуты друг относительно друга. Целью настоящей работы является получение теорем сложений решений (7) – (12) в сдвинутых друг относительно друга сонаправленных сжатых сфероидальных системах координат и применение их к моделированию напряженно-деформированного состояния пористого материала со сфероидальными порами.

Доказана следующая

Теорема. Справедливы теоремы сложения внешних базисных решений уравнения Ламе (7) – (12) по внутренним решениям (13) – (16) при $\xi_\alpha \in (0, \gamma_{j\alpha})$:

$$\tilde{U}_{s,n,m}^{+(6)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=-k}^k \tilde{T}_{s,n,m,j}^{t,k,\ell,\alpha} \tilde{U}_{t,k,\ell}^{-(6)}(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \varphi_\alpha), \quad (17)$$

где

$$\gamma_{j\alpha} = \text{Arsh} \frac{\sqrt{t_{j\alpha} + \sqrt{t_{j\alpha}^2 + 4c_\alpha^2 z_{j\alpha}^2}}}{c_\alpha \sqrt{2}},$$

$$t_{j\alpha} = z_{j\alpha}^2 + (\rho_{j\alpha} - c_j)^2 - c_\alpha^2,$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{t,k,\ell,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{t,k,\ell,\alpha}, k \geq 1, |\ell| \leq k-1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{1,k,k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,k,\alpha} + \chi T_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha}, k \geq 0;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,k+1,\alpha} - T_{s,n,m,j}^{3,k,k+1,\alpha}, k \geq 0;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{3,k,k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{3,k,k,\alpha} + (1+\chi)T_{s,n,m,j}^{2,k,k,\alpha}, k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{1,k,-k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,-k,\alpha} + \chi T_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha}, k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,k,-k-1,\alpha} + T_{s,n,m,j}^{3,k,-k-1,\alpha}, k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{3,k,-k,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{3,k,-k,\alpha} - (1+\chi)T_{s,n,m,j}^{2,k,-k,\alpha}, k \geq 1;$$

$$\tilde{T}_{s,n,m,j}^{3,0,0,\alpha} = T_{s,n,m,j}^{1,0,-1,\alpha} + T_{s,n,m,j}^{3,0,-1,\alpha},$$

$$T_{s,n,m,j}^{t,k,\ell,\alpha} = \delta_{st} f_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha} - \delta_{s2} \delta_{t1} g_{n,m,j}^{k,\ell,\alpha}$$

при $(n \geq 1) \wedge (|m| \leq n-1)$;

$$T_{1,n,n,j}^{t,k,\ell,\alpha} = (\delta_{t1} - \delta_{t3}) f_{n,n,j}^{k,\ell,\alpha}$$

при $(-k \leq \ell \leq k+1) \wedge (n \geq 1)$;

$$T_{1,n,n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} = 0 \text{ при } n \geq 1;$$

$$T_{1,n,-n,j}^{t,k,\ell,\alpha} = (\delta_{t1} + \delta_{t3}) f_{n,-n,j}^{k,\ell,\alpha}$$

при $(-k-1 \leq \ell \leq k) \wedge (n \geq 1)$;

$$T_{1,0,0,j}^{t,k,\ell,\alpha} = \tilde{\delta}_t f_{0,1,j}^{k,\ell,\alpha} - \delta_{t1} g_{0,1,j}^{k,\ell,\alpha}$$

при $1-k \leq \ell \leq k+1$;

$$T_{1,0,0,j}^{t,k,-k,\alpha} = -\delta_{t1} g_{0,1,j}^{k,-k,\alpha};$$

$$T_{1,0,0,j}^{t,k,-k-1,\alpha} = \delta_{t1} g_{0,1,j}^{k,-k-1,\alpha};$$

$$T_{2,n,n,j}^{t,k,\ell,\alpha} = \delta_{st} f_{n,n,j}^{k,\ell,\alpha} - \delta_{s2} \delta_{t1} g_{n,n,j}^{k,\ell,\alpha}$$

при $-k \leq \ell \leq k+1$;

$$T_{2,n,n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} = -\delta_{t1} \delta_{s2} g_{n,n,j}^{k,-k-1,\alpha};$$

$$T_{2,n,-n,j}^{t,k,\ell,\alpha} = \delta_{st} f_{n,-n,j}^{k,\ell,\alpha} - \delta_{s2} \delta_{t1} g_{n,-n,j}^{k,\ell,\alpha}$$

при $-k-1 \leq \ell \leq k$;

$$T_{2,n,-n,j}^{t,k,k+1,\alpha} = -\delta_{t1} \delta_{s2} g_{n,-n,j}^{k,k+1,\alpha};$$

$$T_{3,n,n,j}^{t,k,\ell,\alpha} = \tilde{\delta}_t f_{n,n+1,j}^{k,\ell,\alpha} - \delta_{t1} g_{n,n+1,j}^{k,\ell,\alpha}$$

при $(1-k \leq \ell \leq k+1) \wedge (n \geq 1)$;

$$T_{3,n,n,j}^{t,k,-k,\alpha} = -\delta_{t1} g_{n,n+1,j}^{k,-k,\alpha} \text{ при } n \geq 1;$$

$$T_{3,n,n,j}^{t,k,-k-1,\alpha} = \delta_{t1} g_{n,n+1,j}^{k,-k-1,\alpha} \text{ при } n \geq 1;$$

$$T_{3,n,-n,j}^{t,k,\ell,\alpha} = \hat{\delta}_t f_{n,-n-1,j}^{k,\ell,\alpha} - \delta_{t1} g_{n,-n-1,j}^{k,\ell,\alpha}$$

при $-k-1 \leq \ell \leq k-1$;

$$T_{3,n,-n,j}^{t,k,k,\alpha} = -\delta_{t1} g_{n,-n-1,j}^{k,k,\alpha};$$

$$T_{3,n,-n,j}^{t,k,k+1,\alpha} = \delta_{t1} g_{n,-n-1,j}^{k,k+1,\alpha};$$

$$g_{n,m,j}^{1,k,\ell,\alpha} = -\bar{q}_{j0}^2 f_{n,m,j}^{2,k,\ell,\alpha} - \bar{q}_{\alpha 0}^2 f_{n,m,j}^{3,k,\ell,\alpha} + z_{j\alpha} f_{n,m,j}^{4,k,\ell,\alpha},$$

$$g_{n,m,j}^{2,k,\ell,\alpha} = \bar{q}_{j0}^2 f_{n,m,j}^{2,k,\ell,\alpha} + \bar{q}_{\alpha 0}^2 f_{n,m,j}^{3,k,\ell,\alpha} + f_{n,m,j}^{5,k,\ell,\alpha},$$

$$g_{n,m,j}^{3,k,\ell,\alpha} = \bar{q}_{j0}^2 f_{n,m,j}^{2,k,\ell,\alpha} + \bar{q}_{\alpha 0}^2 f_{n,m,j}^{3,k,\ell,\alpha} + f_{n,m,j}^{6,k,\ell,\alpha};$$

$$\tilde{\delta}_t = -\chi \delta_{t1} + (\chi+1) \delta_{t3} + \delta_{t2},$$

$$\hat{\delta}_t = -\chi \delta_{t1} - (\chi+1) \delta_{t3} + \delta_{t2};$$

$$f_{n,m,j}^{1,k,1,\alpha} = \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \Gamma_{nrj}^{kpa} u_{p+r,m-\ell}^{+(4)j,\alpha},$$

$$f_{n,m,j}^{2,k,1,\alpha} = \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n+2}^{\infty} (n-r) \Gamma_{nrj}^{kpa} u_{p+r,m-\ell}^{+(4)j,\alpha},$$

$$f3_{n,m,j}^{k,l,\alpha} = \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k+2}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} (p-k) \Gamma_{nrj}^{k p \alpha} u_{p+r,m-\ell}^{+(4)j,\alpha},$$

$$f4_{n,m,j}^{k,l,\alpha} = -\pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \Gamma_{nrj}^{k p \alpha} u_{p+r+1,m-\ell}^{+(4)j,\alpha},$$

$$f5_{n,m,j}^{k,l,\alpha} = \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \Gamma_{nrj}^{k p \alpha} v_{p+r,n,k}^{j,\alpha},$$

$$f6_{n,m,j}^{k,l,\alpha} = \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=k}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \Gamma_{nrj}^{k p \alpha} w_{p+r,n,k}^{j,\alpha},$$

$$\Gamma_{nrj}^{k p \alpha} = \frac{1}{\gamma_{kp} \gamma_{nr}} (-1)^{p+m-\ell} \varepsilon_{kp} \varepsilon_{nr} \left(\frac{-ic_j}{2} \right)^{r+1} \left(\frac{-ic_\alpha}{2} \right)^p;$$

$$\gamma_{kp} = \Gamma \left(\frac{p-k}{2} + 1 \right) \Gamma \left(\frac{k+p}{2} + \frac{3}{2} \right);$$

$$v_{v,n,k}^{j,\alpha} = \begin{cases} u_{v,n+k+2}^{+(4)j,\alpha} + z_{j\alpha} u_{v+1,n+k+2}^{+(4)j,\alpha}, & v \geq n+k+2, \\ \frac{r_{j\alpha}^2}{2n+2k+3} u_{n+k+2,n+k+2}^{+(4)j,\alpha}, & v \leq n+k+1, \end{cases}$$

$$w_{v,n,k}^{j,\alpha} = \begin{cases} u_{v,-n-k-2}^{+(4)j,\alpha} + z_{j\alpha} u_{v+1,-n-k-2}^{+(4)j,\alpha}, & v \geq n+k+2, \\ \frac{r_{j\alpha}^2}{2n+2k+3} u_{n+k+2,-n-k-2}^{+(4)j,\alpha}, & v \leq n+k+1, \end{cases}$$

$$u_{n,m}^{+(4)j,\alpha} = \begin{cases} \frac{(n-m)!}{r_{j\alpha}^{n+1}} P_n^m(\cos \theta_{j\alpha}) e^{im\varphi_{j\alpha}}, & n \geq m, \\ \frac{(-1)^m (n+m)!}{r_{j\alpha}^{n+1}} P_n^{-m}(\cos \theta_{j\alpha}) e^{im\varphi_{j\alpha}}, & n < m, \end{cases}$$

$(r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha})$ – сферические координаты точки O_α в системе координат с началом в точке O_j .

Приложение ОМФ к определению напряженного состояния в пористом материале

Рассматривается упругое пространство Ω с четырьмя непересекающимися сжатыми сфероидальными полостями Ω_j , центры которых расположены в вершинах квадрата со стороной a , как показано на рис. 1. Будем использовать одинаково ориентированные цилиндрические (ρ_j, φ_j, z_j) и сжатые сфероидальные системы координат $(\xi_j, \eta_j, \varphi_j)$, начала которых отнесены к центрам полостей O_j , $j=1 \div 4$. Граница Γ_j сфероидальной полости Ω_j описывается в локальной сжатой сфероидальной системе координат уравнением $\xi_j = \xi_{j0}$. Материал

пространства имеет упругие характеристики (G, σ) .

Будем считать, что на бесконечности приложены постоянные растягивающие усилия $\sigma_z^\infty = T$, $\tau_{\rho z}^\infty = \tau_{\varphi z}^\infty = 0$ (одноосное растяжение) или $\sigma_\rho^\infty = T$, $\tau_{\rho\varphi}^\infty = \tau_{\rho z}^\infty = 0$ (двуосное растяжение), а полости свободны от нагрузки.

Для определения напряженно-деформированного состояния в рассматриваемом теле необходимо решить краевую задачу для уравнения Ламе с условиями на границе полостей

$$\mathbf{FU}|_{\Gamma_j} = 0, \quad (18)$$

а также указанными выше условиями на бесконечности. Здесь \mathbf{FU} – отвечающий перемещению \mathbf{U} вектор усилий на соответствующей граничной поверхности; σ – коэффициент Пуассона.

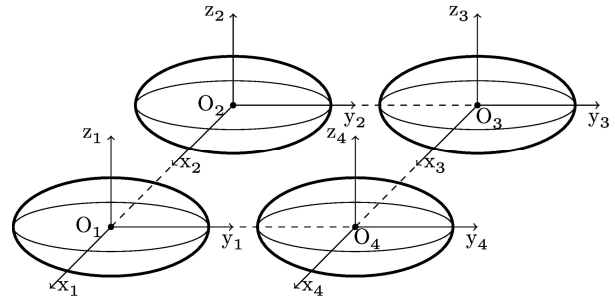


Рис. 1. Схематическое представление задачи

Решение задачи в упругом пространстве Ω ищется в виде

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{U}_0; \quad (19)$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{j=1}^4 \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{s,n,m}^{(j)} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(6)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j), \quad (20)$$

при $x \in \Omega \setminus \bigcup_j \Omega_j$,

где $a_{s,n,m}^{(j)}$ – неизвестные коэффициенты, которые определяются из граничных условий. Перемещение \mathbf{U}_0 соответствует напряженно-деформированному состоянию на бесконечности (для одноосного и двуосного растяжения упругого пространства):

$$\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{T\sigma\rho}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{2} \frac{Tz}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_z; \quad (21)$$

$$\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{T(\sigma-1)\rho}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_\rho - \frac{1}{2} \frac{T\sigma z}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_z; \quad (22)$$

где T – усилие на бесконечности; G – модуль сдвига; $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$ – орты цилиндрической системы координат.

Вектор напряжений на площадке с нормалью \mathbf{n} имеет вид:

$$\mathbf{FU} = 2G \left[\frac{\sigma}{1-2\sigma} \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{2} (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{U}) \right]. \quad (23)$$

Применив к формулам (4) – (6) оператор (23) на площадке с нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\xi$ получим:

$$\mathbf{FU}_{s,n,m}^{\pm(6)} \Big|_{\xi=\xi_0} = 2G \frac{h}{c} \times \sum_{r=-1}^1 F_{s,n,m}^{\pm(r)}(\xi_0) P_n^{m+r}(\cos \eta) e^{i(m+r)\varphi} \mathbf{e}_r, \quad (24)$$

где

$$F_{1,n,m}^{\pm(-1)} = \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m-1}^{\pm}, \quad F_{1,n,m}^{\pm(1)} = -\frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m+1}^{\pm}, \quad F_{1,n,m}^{\pm(0)} = -\frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m}^{\pm},$$

$$F_{2,n,m}^{\pm(-1)} = i\bar{q}^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{q}^{-1} u_{1,n,m-1}^{\pm}) - 2\sigma u_{2,n,m}^{\pm},$$

$$F_{2,n,m}^{\pm(1)} = -i\bar{q}^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{q}^{-1} u_{1,n,m+1}^{\pm}) + 2\sigma u_{3,n,m}^{\pm},$$

$$F_{2,n,m}^{\pm(0)} = -i\bar{q}^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{q}^{-1} u_{1,n,m}^{\pm}) + (2\sigma - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m}^{\pm}.$$

$$F_{3,n,m}^{\pm(-1)}(\xi) = -\frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m-1}^{\pm}(\xi) + \frac{1}{2} u_{2,n,m}^{\pm}(\xi),$$

$$F_{3,n,m}^{\pm(1)}(\xi) = -\frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m+1}^{\pm}(\xi) + \frac{1}{2} u_{n,m}^{\pm}(\xi),$$

$$F_{3,n,m}^{\pm(0)}(\xi) = \frac{m}{2} \frac{\bar{q}}{q} u_{n,m}^{\pm}(\xi);$$

$$u_{2,n,m}^{+(-6)} = \omega^- Q_n^{-m} (i\bar{q}) S_n^{m-1}, \quad u_{3,n,m}^{+(6)} = Q_n^{-m} (i\bar{q}) S_n^{m+1},$$

$$u_{3,n,m}^{-(6)} = P_n^{-m} (i\bar{q}) S_n^{m+1}, \quad u_{2,n,m}^{-(-6)} = \omega^- P_n^{-m} (i\bar{q}) S_n^{m-1},$$

$$\omega^- = (n+m)(n-m+1), \quad h = (\bar{q}^2 + \cos^2 \eta)^{-1/2},$$

$$\bar{q} = \operatorname{sh} \xi.$$

Используя теоремы сложения (17), представим вектор перемещения $\tilde{\mathbf{U}}$ в системе координат с началом в точке O_j :

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{s,n,m}^{(j)} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(6)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) + \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{-(6)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=-k}^k a_{t,k,\ell}^{(\alpha)} \tilde{\mathbf{T}}_{t,k,\ell,\alpha}^{s,n,m,j}.$$

После удовлетворения граничных условий задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a_{s,n,m}^{(j)}$:

$$\sum_{s=1}^3 a_{s,n,m}^{(j)} \tilde{\mathbf{F}}_{s,n,m}^{+(r)}(\xi_j) + \tilde{\mathbf{F}}_{s,n,m}^{-(r)}(\xi_j) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=-k}^k a_{t,k,\ell}^{(\alpha)} \tilde{\mathbf{T}}_{t,k,\ell,\alpha}^{s,n,m,j} + F_{0,n,m}^{(r)} = 0, \quad (25)$$

$$r = -1, 0, 1; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -n \div n,$$

где $F_{0,n,m}^{(0)} = \frac{Td_1}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0}$, $F_{0,n,m}^{(-1)} = F_{0,n,m}^{(1)} = 0$ (для одноосного растяжения) и $F_{0,n,m}^{(0)} = 0$,

$F_{0,n,m}^{(-1)} = \frac{Td_2}{G} \delta_{n1} \delta_{m0}$, $F_{0,n,m}^{(1)} = -\frac{Td_2}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0}$ (для

двуосного растяжения). Выражения $\tilde{\mathbf{F}}_{s,n,m}^{\pm(r)}(\xi_j)$ являются компонентами напряжений $\tilde{\mathbf{F}}_{s,n,m}^{\pm(5)}$ и получаются из формул (7) – (16) и (24) при помощи линейных преобразований. Ввиду громоздкости их явный вид мы не приводим. Оператор системы уравнений (25) является фредгольмовым при условии непересечения граничных поверхностей [15].

Анализ результатов

При численном анализе полагаем коэффициент Пуассона материала упругого пространства равным $\sigma = 0,38$, полости считаем одного размера, отношение полуосей сфероидов — $d_2/d_1 = 0,5$. Система уравнений (25) численно решается методом редукции ($n_{\max} = 6$). На основании полученных решений находятся нормальные напряжения на площадках, параллельных координатным плоскостям.

На рис. 2 – 4 приведены напряжения σ_x/T , σ_y/T , σ_z/T на линии O_1O_4 (рис. 1) вне полостей при одноосном растяжении в зависимости от относительного расстояния a/d_1 между полостями.

Областью концентрации напряжений σ_y/T , σ_z/T является граница полостей, в то время как напряжения σ_x/T достигают максимальных значений в окрестности середины отрезка O_1O_4 . Для всех случаев характерен рост напряжений с приближением полостей друг к другу.

На рис. 5 – 7 приведены напряжения σ_x/T , σ_y/T , σ_z/T на линии O_1O_4 (рис. 1) вне полостей при двуосном растяжении в зависимости от относительного расстояния a/d_1 между полостями.

Напряжения σ_x/T убывают с приближением полостей друг к другу. Напряжения σ_y/T растут с приближением полостей и для случая $a/d_1 = 2,5$ практически постоянны на всем рассматриваемом отрезке. Областью концентрации напряжений σ_z/T являются границы полостей, причем с удалением полостей друг от друга напряжения σ_z/T растут по модулю, оставаясь вблизи полостей сжимающими.

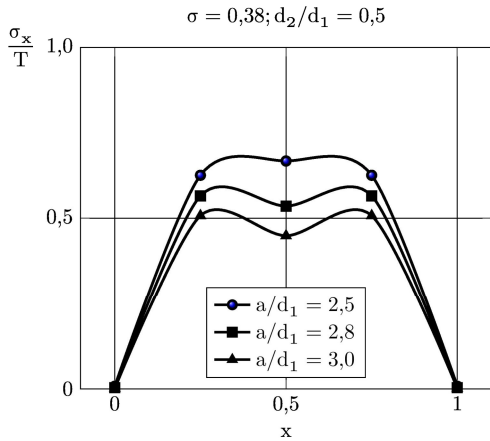


Рис. 2. Напряжения σ_x/T на линии O_1O_4 в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном растяжении

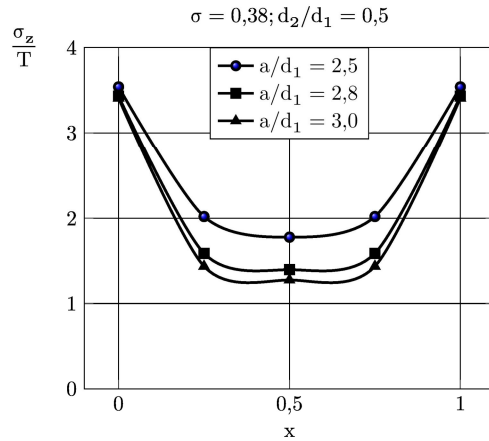


Рис. 4. Напряжения σ_z/T на линии O_1O_4 в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном растяжении

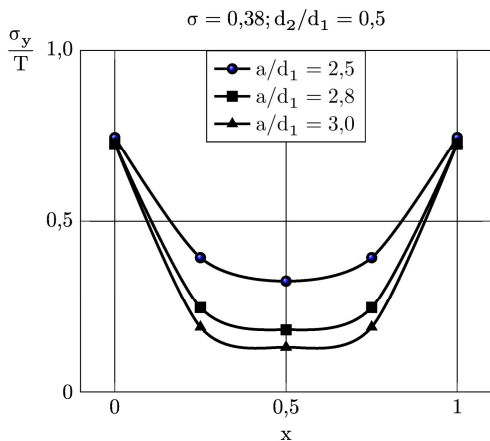


Рис. 3. Напряжения σ_y/T на линии O_1O_4 в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном растяжении

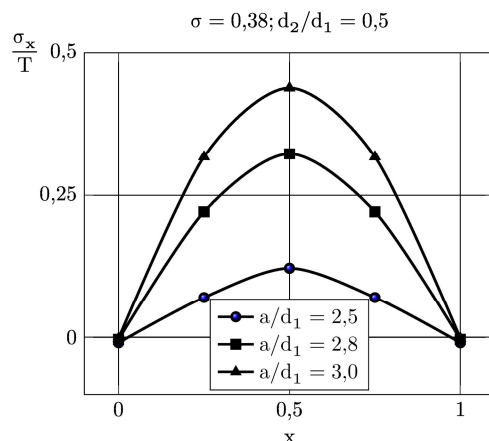


Рис. 5. Напряжения σ_x/T на линии O_1O_4 в зависимости от относительного расстояния между полостями при двуосном растяжении

На рис. 8 – 10 приведены напряжения σ_x/T , σ_y/T , σ_z/T на линии O_1O_4 вне полостей при одноосном растяжении в зависимости от отношения вертикальной полуоси сфероида к его горизонтальной полуоси при $a/d_1 = 3,5$.

Наибольшие значения напряжений σ_x/T наблюдаются при наименьшем отношении d_2/d_1 . Для случая сжатых сфероидальных полостей присутствует ярко выраженная двухмодальность кривых в распределении напряжений.

Для напряжений σ_y/T в середине рассматриваемого отрезка имеется область, в которой напряжения практически не зависят от отношения d_2/d_1 , в то время как вблизи границ полостей имеется область концентрации напряжений, в которой напряжения растут при уменьшении d_2/d_1 . Похожая ситуация наблюдается и для напряжений σ_z/T .

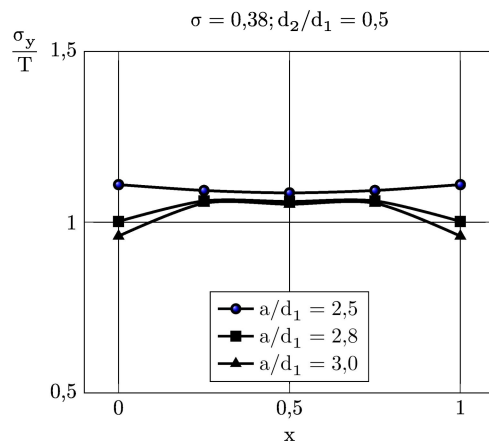


Рис. 6. Напряжения σ_y/T на линии O_1O_4 в зависимости от относительного расстояния между полостями при двуосном растяжении

Напряжения σ_x/T концентрируются в середине отрезка и возрастают с уменьшением d_2/d_1 .

Для напряжений σ_y / T характерно изменение направления выпуклости кривых при переходе от вытянутых сфероидальных полостей к сжатым сфероидальным. Для напряжений σ_z / T наблюдается концентрация у границ полостей, при этом они растут по модулю с уменьшением отношения d_2 / d_1 .

модифицированных базисных решений уравнения Ламе в сжатых сфероидальных системах координат, начала которых произвольно сдвинуты друг относительно друга.

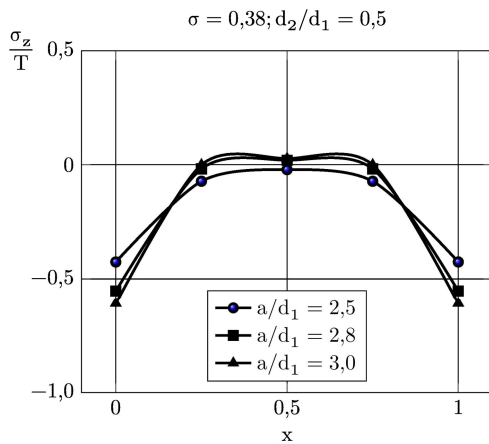


Рис. 7. Напряжения σ_z / T на линии O_1O_4 в зависимости от относительного расстояния между полостями при двусном растяжении

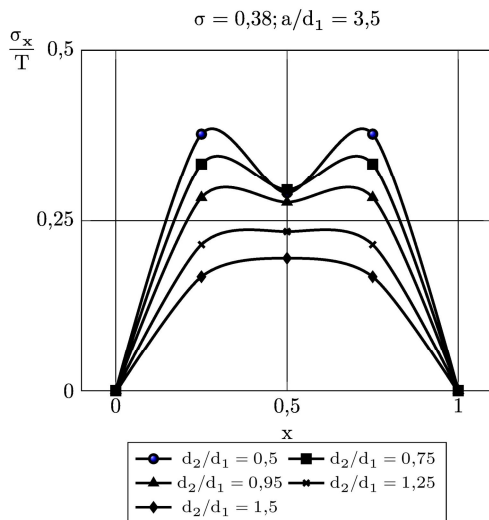


Рис. 8. Напряжения σ_x / T на линии O_1O_4 в зависимости от отношения полуосей сфероид при одноосном растяжении

На рис. 11 – 13 приведены напряжения σ_x / T , σ_y / T , σ_z / T на линии O_1O_4 вне полостей при двусном растяжении в зависимости от отношения вертикальной полуоси сфероид к его горизонтальной полуоси при $a / d_1 = 3,5$.

Заключение

В работе получены новые теоремы сложения

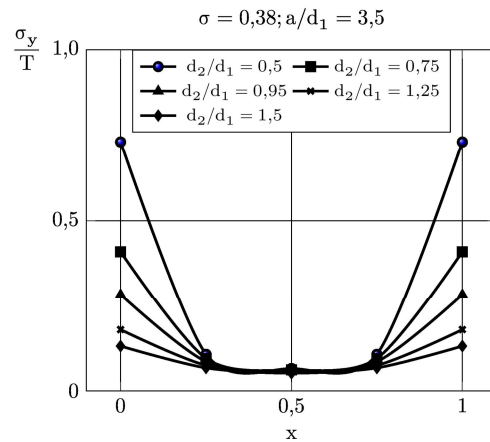


Рис. 9. Напряжения σ_y / T на линии O_1O_4 в зависимости от отношения полуосей сфероид при одноосном растяжении

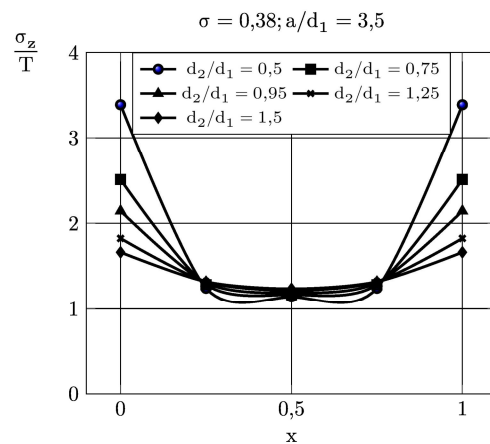


Рис. 10. Напряжения σ_z / T на линии O_1O_4 в зависимости от отношения полуосей сфероид при одноосном растяжении

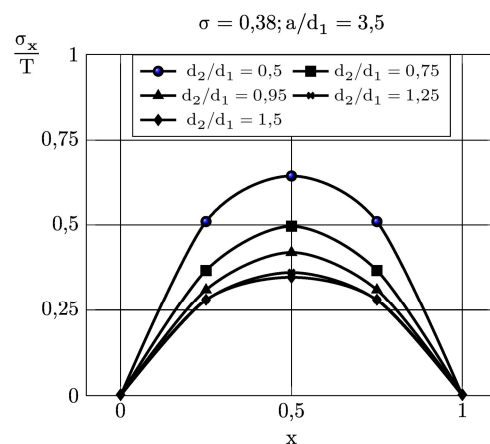


Рис. 11. Напряжения σ_x / T на линии O_1O_4 в зависимости от отношения полуосей сфероид при двусном растяжении

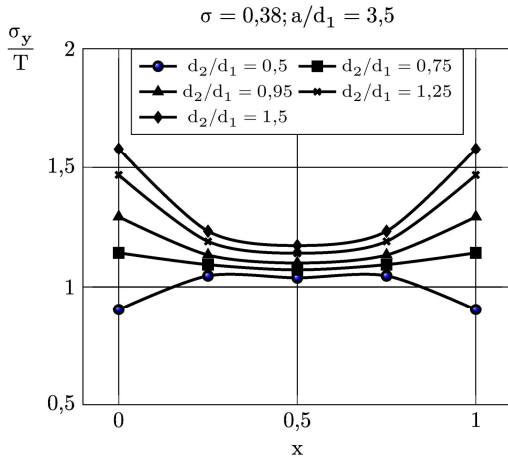


Рис. 12. Напряжения σ_y/T на линии O_1O_4 в зависимости от отношения полуосей сфероида при двусосном растяжении.

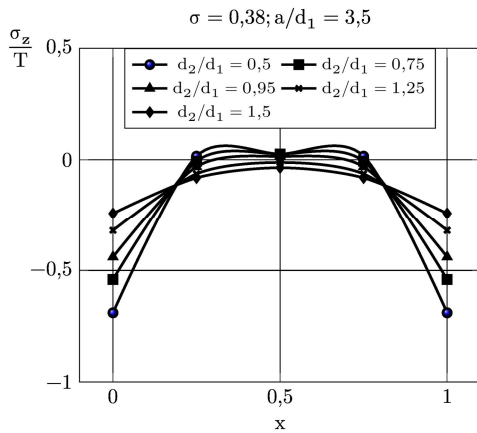


Рис. 13. Напряжения σ_z/T на линии O_1O_4 в зависимости от отношения полуосей сфероида при двусосном растяжении

Эти теоремы использованы для построения модели напряженно-деформированного состояния пористого упругого материала.

Поры моделируются сжатыми сфероидальными полостями, центры которых расположены в узлах кубической решетки. Рассмотрен случай четырех полостей. Модель сводится к краевой задаче для уравнения Ламе с однородными условиями на границе пор и условиями на бесконечности. Вектор перемещений строится в виде суперпозиции модифицированных базисных решений уравнения Ламе и перемещения, удовлетворяющего условиям на бесконечности. В модели граничные условия удовлетворяются точно при помощи аппарата теорем сложения. Разрешающая система для определения параметров модели допускает эффективное численное решение.

Проведен численный и качественный анализ напряженного состояния в областях максимальной

концентрации напряжений в зависимости от относительного расстояния между полостями. Дано сравнение полученных результатов для случаев вытянутых сфероидальных и сжатых сфероидальных пор.

По результатам исследования можно сделать следующие выводы:

- в случае одноосного растяжения наибольшей концентрацией (в 3,5 раза) обладают напряжения σ_z/T на границах полостей, при этом коэффициент концентрации практически не зависит от взаимной близости полостей;

- с уменьшением вертикальной полуоси сфероидов d_2 (переход от вытянутых сфероидов к сжатым) при фиксированном расстоянии между полостями все напряжения в области их концентрации растут при одноосном растяжении;

- в случае двусосного растяжения наибольшей концентрацией (в 1,5 раза) обладают напряжения σ_y/T на границах полостей, при этом коэффициент концентрации растет с ростом d_2 при фиксированном расстоянии между полостями.

Литература

1. Khoroshun, L. P. *Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites* [Text] / L. P. Khoroshun // *International Applied Mechanics*. – 2000. – V. 36, No 10. – P. 1284–1316.
2. Вольперт, В. С. *Осесимметричное напряжённое состояние пространства, содержащего систему сферических полостей или включений* [Текст] / В. С. Вольперт, И. П. Олегин // *Новосиб. ин-т инж. ж.-д. транспорта*. – 1977. – 19 с. – Деп. в ВИНТИ. – №3266–77.
3. Олегин, И. П. *Осесимметричное напряженное состояние в трансверсально-изотропной упругой среде с двумя жесткими эллипсоидальными включениями* [Текст] / И. П. Олегин // *Сибирский журнал индустриальной математики*. – 2002. – Т. V, № 1(9). – С. 127–132.
4. Олегин, И. П. *Решение пространственной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного тела, содержащего периодическую систему эллипсоидальных полостей* [Текст] / И. П. Олегин // *Сибирский журнал индустриальной математики*. – 1999. – Т. II, № 1. – С. 117–122.
5. Гаришин, О. К. *Прогнозирование прочности эластомерных зернистых композитов в зависимости от размеров частиц наполнителя* [Текст] / О. К. Гаришин, Л. А. Комар // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2003. – Т. 9, № 3. – С. 278–286.
6. Tsuchida, E. *On the asyymmetric problem of the theory for an infinite elastic solid containing two spherical inclusions* [Text] / E. Tsuchida, I. Nakahara, M. Kodama // *Bull. JSME*. – 1980. – V. 23, № 181. – P. 1072–1080.
7. *Stress concentration around a prolate spheroidal cavity in a semi-infinite elastic body under all-*

round tension [Text] / E. Tsuchida, Y. Saito, I. Nakahara, M. Kodama // Bull. JSME. – 1982. – V. 25, №202. – P. 493 – 500.

8. Куц, В. И. Напряжённое состояние и эффективные упругие модули среды, нормированной периодически расположенными сфероидальными включениями [Текст] / В. И. Куц // Прикладная механика. – 1995. – Т. 31, №3. – С. 32 – 39.

9. Овидько, И. А. Упругие поля наноскопических включений в нанокompозитах [Текст] / И. А. Овидько, А. Г. Шейнерман // Физика и механика материалов. – 2010. – Т. 10, №1/2. – С. 1–29.

10. Трайтак, С. Д. Методы решения краевых задач в областях с несвязной границей [Текст] / С. Д. Трайтак // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2005. – Т. 11, № 1. – С. 87–112.

11. Николаев, А. Г. Напряженное состояние пористого материала в области между четырьмя сфероидальными порами [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вісник НТУ «ХП». Серія: Матема-

тичне моделювання в техніці та технологіях. – Х. : НТУ «ХП», 2014. – № 6 (1049). – С. 150–160.

12. Николаев, А. Г. Упругое пространство с четырьмя сфероидальными включениями под действием внешней нагрузки [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Авиационно-космическая техника и технология. – 2014. – № 4(111). – С. 49–60.

13. Николаев, А. Г. Теоремы сложения решений уравнения Ламе [Текст] / А. Г. Николаев. – Х. : Харьк. авиац. ин-т, 1993. – 109 с. – Деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, № 1178 – Ук 93.

14. Николаев, А. Г. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости [Текст]: монография / А. Г. Николаев, В. С. Проценко. – Х. : Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т», 2011. – 344с.

15. Николаев, А. Г. Обоснование обобщенного метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей [Текст] / А. Г. Николаев // Доповіди НАН України. – 1998. – Т. 2. – С. 78–83.

Поступила в редакцию 11.09.2014, рассмотрена на редколлегии 19.11.2014

Рецензент: д-р техн. наук, проф., вед. науч. сотр. В. А. Ванін, ИПМаш НАН України, Харьков.

РОЗВИТОК АПАРАТУ УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ ФУР'Є НА ДЕЯКІ БАГАТОЗВ'ЯЗНІ ОБЛАСТІ ТА ЙОГО ВИКОРИСТАННЯ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПОРИСТОГО МАТЕРІАЛУ

О. Г. Ніколаєв, Є. А. Танчик

У роботі отримано нові теореми додавання модифікованих базисних розв'язків рівняння Ламе у стиснутих сфероїдальних системах координат, початки яких довільно зсунуті один відносно одного. Ці теореми використано для побудови моделі напружено-деформівного стану пористого пружного матеріалу. Пори моделюються стиснутими сфероїдальними порожнинами, центри яких розташовано у вузлах кубічної решітки. Модель зводиться до крайової задачі для рівняння Ламе з однорідними умовами на границі пор і умовами на нескінченності. Вектор переміщень будується у вигляді суперпозиції модифікованих базисних розв'язків рівняння Ламе і переміщення, що задовольняє умовам на нескінченності. У моделі граничні умови задовольняються точно за допомогою апарату теорем додавання. Розв'язальна система для визначення параметрів моделі допускає ефективний чисельний розв'язок. Проведено чисельний і якісний аналіз напруженого стану в областях максимальної концентрації напружень в залежності від відносної відстані між порожнинами.

Ключові слова: теореми додавання, базисні розв'язки рівняння Ламе, стистуті сфероїдальні порожнини, граничні умови, напружено-деформівний стан, узагальнений метод Фур'є, метод редукції, пористий матеріал.

DEVELOPMENT OF GENERALIZED FOURIER METHOD ON SOME MULTIPLY CONNECTED DOMAINS AND ITS USE FOR POROUS MATERIAL MODELING

A. G. Nikolaev, E. A. Tanchik

The paper presents a new addition theorems of modified basic solutions of the Lamé equation in oblate spheroidal coordinate systems, which origins arbitrarily shifted relative to each other. These theorems are used to construct a model of the stress-strain state of the porous elastic material. Pores are modeled by oblate spheroidal cavities, whose centers are located at the nodes of a cubic lattice. Model reduces to a boundary value problem for the Lamé equation with homogeneous boundary conditions on the boundary of cavities and the conditions at infinity. Displacement vector is constructed as a superposition of modified basic solutions of the Lamé equation and displacement, satisfying the conditions at infinity. The boundary conditions are satisfied exactly by means of addition theorems in the model. Resolve system for determining parameters of the model allows efficient numerical solution. The numerical and qualitative analysis of the stress state in the areas of highest concentration of stress, depending on the relative distance between the cavities is carried out.

Key words: addition theorems, basic solutions of the Lamé equation, oblate spheroidal cavities, boundary conditions, the stress-strain state, the generalized Fourier method, the method of reduction, porous material.

Николаев Алексей Георгиевич – д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

Танчик Евгений Андреевич – ассистент каф. высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина; e-mail: eug.tanchik@yandex.ru.