

УДК 517.958:539.4: 629.7.02

С. А. ХАЛИЛОВ, В. Б. МИНТЮК, В. В. КОПЫЧКО, Д. А. ТКАЧЕНКО

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Украина*

## ОСНОВНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ОБЩЕЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОТКРЫТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ. РЕШЕНИЕ БАЗОВОЙ ЗАДАЧИ

*В высоких приближениях дано аналитико-численное решение важной задачи теории ортотропной открытой цилиндрической оболочки при однородных главных краевых условиях и произвольной нормальной нагрузке. С привлечением системы координатных функций, предложенной одним из авторов, конструктивно показана устойчивость как процедуры решения системы линейных алгебраических уравнений, так и процесса получения самих решений, сходимость решения к точному в различных метриках и, следовательно, возможность получения решений с любой наперед заданной точностью самих функций и их первых и вторых производных, которыми определяются компоненты напряженно-деформированного состояния оболочки. Полученные результаты позволяют отыскать аналитико-численное решение полностью неоднородной краевой задачи рассматриваемой теории оболочек, что, в свою очередь, обеспечит проведение метода сопряжения конструктивных элементов для оболочечных систем.*

**Ключевые слова:** краевая задача; открытая цилиндрическая оболочка; устойчивость, сходимость и точность решения; адекватная математическая модель; энергетическое пространство; система координатных функций.

### Введение

Открытые цилиндрические оболочки, подкрепленные регулярной системой стрингеров и шпангоутов, являются основными несущими элементами силовых конструкций большегрузных самолетов (типа АН, Boeing, Airbus и др.). Многозамкнутые поперечные сечения фюзеляжей таких самолетов образуются композицией подкрепленных открытых оболочек (корпус), пластин (пол) и «буферных» элементов (бимсы, скуловые балки и др.). В режиме десантирования хвостовая часть военно-транспортных самолетов становится открытой оболочкой, а при выполнении функциональных задач редан гидросамолетов (например, Бе-200) превращается в систему также открытых оболочек.

Решение имеющей место в авиационной противоречивой проблемы: «максимум прочности при минимальной массе», может быть достигнуто лишь на компромиссной основе. Одним из моментов этого компромисса, безусловно, является повышение точности прочностных расчетов, что требует применения высокоточных математических моделей конструктивных элементов заданной тонкостенной пространственной системы и современных высокоточных методов их анализа.

Адекватная математическая модель открытых оболочек в силу специфики их работы в составе конструкции может быть получена только на основе

общей (моментной) теории оболочек. Композиция таких элементов в систему должна быть осуществлена с безусловным точным учетом геометрии, свойств материалов, наличия промежуточных упругих элементов, характера действующей нагрузки и т. д. Таким образом, в распоряжении специалиста-проектировщика должен быть метод, позволяющий точно выполнить такую композицию и провести её анализ. Таким методом является развиваемый в Национальном аэрокосмическом университете им. Н. Е. Жуковского «ХАИ» метод сопряжения конструктивных элементов (МСКЭ).

Одним из главных (если не основным) этапом реализации этого метода является получение общих решений для двумерных конструктивных элементов в виде оболочек и пластин, явно выраженных через краевые функции или их параметры, физический смысл которых может быть различен: перемещения и нормальные углы поворота (метод перемещений), удельные усилия и моменты (метод сил) или корректные комбинации кинематических и статических величин (смешанный метод). Поскольку получение точного решения исходных краевых задач не представляется возможным, то отмеченные решения могут быть реализованы только численно или аналитико-численно. Под аналитико-численным решением здесь понимается решение, выписанное в явном виде, параметры которого определяются из системы линейных алгебраических уравнений.

Поставленная в данной работе задача рассматривается с позиции метода перемещений, поскольку алгоритм такого метода реализуется наиболее просто. При этом кинематические условия сопряжения конструктивных элементов по их смежным границам непосредственно или посредством одномерных упругих элементов (ребер жесткости) выполняются заранее и точно. Выполнение же статических условий сопряжения (уравнений равновесия) по этим границам позволяет получить разрешающие уравнения для всей системы.

Алгебраизация МСКЭ может быть выполнена с помощью двух подходов: вариационного (исходным является функционал полной потенциальной энергии) и метода моментов в той или иной форме (исходной является краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных). В рассматриваемом случае оба эти подхода приводят к одной и той же системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Как показано в работах [1, 2], полностью неоднородная краевая задача (неоднородна правая часть и неоднородны краевые условия) может быть редуцирована к полуоднородной. В рассматриваемом подходе неоднородность краевых условий учитывается путем трансформации в дополнительные правые части разрешающей системы уравнений или в полную потенциальную энергию. Такая полуоднородная краевая задача (однородны краевые условия) здесь обозначена как базовая. Решение этой задачи и является целью настоящей работы.

Уместно отметить, что МСКЭ существенно превосходит по точности метод конечного элемента (МКЭ) в силу своей аналитичности и благодаря точному учету отмеченных выше факторов. Сказанное определяет как актуальность данной работы, так и ее научную новизну и практическую ценность.

### 1. Постановка задачи

С позиции общей (моментной) теории цилиндрических оболочек (основанной на гипотезах Кирхгофа – Лява) рассматривается прямоугольная в плане открытая цилиндрическая оболочка из ортотропного материала. Оболочка подкреплена регулярным набором часто расположенных стрингеров, работа которых в составе системы учитывается на основе конструктивно-ортотропной модели. Предполагается, что стрингеры работают на растяжение (сжатие) и изгиб в плоскости, нормальной к поверхности оболочки. Срединная поверхность оболочки отнесена к линиям главных кривизн. Координаты  $\alpha, \beta$  пробегает множество пар

$$\tilde{\Omega} = \{(\alpha, \beta) : \alpha_1 < \alpha < \alpha_2, \beta_1 < \beta < \beta_2\},$$

где  $\alpha, \beta$  – длины дуг координатной системы по образующей и направляющей соответственно.

Далее вводится безразмерная система координат  $x = \frac{\alpha}{a}, y = \frac{\beta}{R\varphi}$ , тем самым область  $\tilde{\Omega}$  преобразуется в квадратную область

$$\Omega = \{(x, y) : -1 < x < 1, -1 < y < 1\}.$$

Введенная безразмерная система координат  $(x, y)$ , участки границы ( $\Gamma_i$ ), а также положительные направления компонент вектора перемещений, нагрузки и внутренние удельные усилия и моменты показаны на рис. 1.

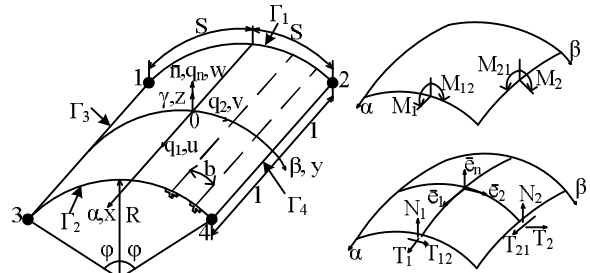


Рис. 1. Геометрические параметры, положительные направления компонент вектора перемещений, нагрузки, удельных усилий и моментов

Опуская подробности, сформулируем краевую задачу. Требуется найти вектор перемещений  $\vec{u} = (u, v, w)^T$  ( $T$  – операция транспонирования), компоненты которого удовлетворяют системе дифференциальных уравнений в частных производных с неоднородными правыми частями и отвечают однородным краевым условиям:

$$L\vec{u}(x, y) = \vec{Q}(x, y) \tag{1}$$

$$\text{в } \Omega = \{(x, y) : -1 < x < 1, -1 < y < 1\};$$

$$u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \tag{2}$$

$$\text{на } \Gamma = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i, \Gamma_i = \{s : -1 < s < 1\}.$$

Симметричный матричный дифференциальный оператор  $L$  положительно определен. Общий его порядок равен восьми (классическая моментная теория оболочек). Компоненты этого оператора таковы:

$$\begin{aligned} L_{11} &= \mu_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, L_{12} = L_{21} = \mu_{13} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \\ L_{13} &= L_{31} = \mu_{14} \frac{\partial}{\partial x} - \mu_{15} \frac{\partial^3}{\partial x^3}; \\ L_{22} &= \mu_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu_{23} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, L_{23} = L_{32} = \mu_{24} \frac{\partial}{\partial y}; \\ L_{33} &= \mu_{33} + \mu_{34} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \mu_{35} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \mu_{36} \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \end{aligned} \tag{3}$$

$$\bar{Q}(x, y) = (-Q_1, -Q_2, Q_3)^T; \quad (4)$$

$$Q_k = \frac{\lambda^2 a^2 (1 - \nu_1 \nu_2)}{E_1 h} q_k(x, y), \quad (k = 1, 2, 3).$$

В вышеприведенных равенствах (3) и (4) приняты следующие обозначения:

$$\mu_{11} = \lambda^2 \left[ 1 + \frac{E_c S_c (1 - \nu_1 \nu_2)}{E_1 h b} \right]; \mu_{12} = \mu_{21} = \frac{G}{E_1} (1 - \nu_1 \nu_2);$$

$$\mu_{13} = \mu_{31} = \lambda (\nu_2 + \mu_{12}); \mu_{14} = \lambda \phi \nu_2; \lambda = \frac{S}{a};$$

$$\mu_{15} = \frac{E_c S_c \lambda^2 (1 - \nu_1 \nu_2)}{E_1 h a}; \mu_{22} = \frac{E_2}{E_1}; \mu_{23} = \lambda^2 \mu_{12}.$$

Здесь, в свою очередь, обозначено:

$E_i, \nu_i, G$  ( $i = 1, 2$ ) – модули упругости первого рода, коэффициенты Пуассона и модуль сдвига ортотропного материала оболочки;

$h$  – толщина оболочки;

$E_c, F_c, S_c, J_c$  – модуль упругости материала стрингера, площадь сечения, статический и осевой моменты инерции сечения, вычисленные относительно оси, лежащей в плоскости, касательной к срединной поверхности оболочки. Остальные обозначения показаны на рис. 1.

Краевой задаче (1) – (2) соответствует вариационная задача о стационарности (минимуме) полной потенциальной энергии  $\mathcal{E}$ :

$$\delta \mathcal{E} = \delta(U - A) = 0, \quad (5)$$

где  $U$  – потенциальная энергия деформирования,

$$A = \lambda a^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (q_1 u + q_2 v + q_3 w) dx dy \quad - \text{ работа}$$

внешних сил,

$\delta$  – знак вариации.

Потенциальная энергия деформирования состоит из двух частей: непосредственно энергии деформирования оболочки и суммарной энергии деформирования подкрепляющих элементов (стрингеров)

$$U = U_{об} + \sum U_{ci}.$$

В рассматриваемом случае имеют место выражения:

$$U_{ci} = \frac{E_c}{2a} \int_{-1}^1 \left[ F \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{J_y}{a^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \right.$$

$$\left. - 2 \frac{S_y}{a} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] dx \Big|_{y=y_{ci}};$$

$$U_{об} = \frac{aR\phi}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left[ \frac{C_{11}}{a^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{2C_{12}}{Ra} \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{1}{\phi} \frac{\partial v}{\partial y} + w \right) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{C_{22}}{R^2} \left( \frac{1}{\phi} \frac{\partial v}{\partial y} + w \right)^2 + C_{66} \left( \frac{1}{R\phi} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] +$$

$$\left. + \left[ \frac{D_{11}}{a^4} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{2D_{12}}{a^2 R^2 \phi} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\phi} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{D_{22}}{R^4 \phi^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\phi} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{4D_{66}}{R^2 a^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{\phi} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \Big\},$$

где мембранные  $C_{ij}$  и изгибные  $D_{ij}$  жесткости оболочки определяются так:

$$C_{11} = \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad C_{12} = \frac{\nu_2 E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad C_{22} = \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2};$$

$$C_{66} = Gh;$$

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}; \quad D_{12} = \frac{\nu_2 E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)};$$

$$D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}; \quad D_{66} = \frac{Gh^3}{12}.$$

Поскольку оператор  $L$  положительно определенный, то можно ввести его энергетическое пространство  $H_L \equiv W_2 \times W_2 \times W_2$ , элементами которого являются всевозможные векторы  $\bar{u} = (u, v, w)^T$ , удовлетворяющие краевым условиям (2) и обладающие определенными свойствами гладкости:  $u \in W_2^{(1)}(\Omega), v \in W_2^{(1)}(\Omega), w \in W_2^{(2)}(\Omega)$ ,

где  $W_2^{(k)}$  – соответствующие функциональные пространства С. Л. Соболева.

Необходимо отметить, что если исходить из краевой задачи (1) – (2), то требования гладкости к компонентам вектора  $\bar{u}$  следует ужесточить так, чтобы существовали дифференциальные операторы (3).

## 2. Решение задачи

Решение будем искать в виде:

$$u = \sum_{m=0}^{M_1} \sum_{n=0}^{N_1} U_{mn} h_m(x) h_n(y);$$

$$v = \sum_{m=0}^{M_2} \sum_{n=0}^{N_2} V_{mn} h_m(x) h_n(y); \quad (6)$$

$$w = \sum_{m=0}^{M_3} \sum_{n=0}^{N_3} W_{mn} H_m(x) H_n(y).$$

В зависимости от свойств четности или нечетности правых частей индексы  $m$  и  $n$  принимают четные или нечетные значения, поэтому количество

неизвестных в каждой из этих суммах не одинаково. Обозначим их число  $S = S_M \cdot S_N$ , где  $S_K = 0,5(K+2)$ , если суммирование ведется по четным индексам, и  $S_K = 0,5(K+1)$ , если суммирование ведется по нечетным индексам. Если же такого разделения по свойствам четности не проводить, то число неизвестных для каждой функции в суммах (6) будет

$$S = (M + 1) \cdot (N + 1).$$

В силу эквивалентности обоих подходов будем искать минимум функционала  $\mathcal{E}$  в классе функций (6).

В представлениях (6)  $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}$  – коэффициенты, подлежащие определению,  $h_n(t), H_n(t)$  ( $t = x$  или  $t = y$ ) – известные [3] ортонормированные в  $L_2(-1,1)$  координатные функции, удовлетворяющие условиям:

$$h_n(\pm 1) = H_n(\pm 1) = H_n'(\pm 1) = 0. \quad (7)$$

Выбор верхних пределов суммирования  $M_i, N_i$  (в пределе они бесконечны) зависит от заказанной пользователем точности вычисления напряжений.

Функции  $h_n(t)$  и  $H_n(t)$  являются представителями своего класса из общего семейства функций  $H_n^{(\alpha)}(t)(n, \alpha = 0, 1, 2, \dots)$ . Здесь они переобозначены:  $h_n(t) = H_n^{(0)}(t)$ ,  $H_n(t) = H_n^{(1)}(t)$ . Для них получены замкнутые формулы при произвольных значениях  $\alpha$  и  $n$  [3] и, более того, в замкнутой форме вычислен ряд интегралов, используемых в дальнейшем [4]. Эти формулы конкретизируются так:

$$h_n(t) = (1 - t^2) \sum_{m=0}^{\Gamma} A_{mn}^{(0)} t^{n-2m},$$

$$H_n(t) = (1 - t^2)^2 \sum_{m=0}^{\Gamma} A_{mn}^{(1)} t^{n-2m},$$

где  $\Gamma$  – целая часть числа  $n/2$ ,

$$A_{mn}^{(\alpha)} = \frac{(-1)^m}{2^{n+2\alpha+1}} \sqrt{\frac{n!(2n+4\alpha+5)}{2(n+4\alpha+4)!}} \times \frac{(2n-2m+4\alpha+3)!}{(n-m+2\alpha+1)!m!(n-2m)!}.$$

Свойства координатной системы в правых частях равенств (6) в виде произведений  $h_m(x) \cdot h_n(y), H_m(x) \cdot H_n(y)$  таковы: элементы этой системы принадлежат области определения оператора  $L$ , система линейно независима и полна как в  $L_2(\Omega)$ , так и в  $H_L(\Omega)$ , т.е. образует базис в этих пространствах. Кроме того, эта система сильно минимальна [5, 6], что обеспечивает как сходимость к точному решению в метрике пространства  $H_L(\Omega)$  (и, тем более, – в  $L_2(\Omega)$ ), так и устойчивость процедуры решения системы линейных алгебраических уравнений и самих решений. Более того,

эта система почти ортонормирована в  $H_L(\Omega)$  [5, 6], т.е. собственные значения матрицы Грама, вычисленные в этом пространстве, ограничены как сверху, так и снизу [7 – 9]. Последнее свойство следует из квазиортогональности в  $L_2(-1,1)$  первых производных функций  $h_n(t)$  и первых и вторых производных  $H_n(t)$  [7]. Отметим, что последнее свойство отсутствует в МКЭ, где координатные функции являются финитными [7] и не обладают минимальными свойствами. Что касается сходимости решений к точным, то исходя из теорем вложения можно говорить о равномерной сходимости к точному решению первых производных компонент  $u$  и  $v$  и первых и вторых производных компоненты  $w$ . Более того, имеет место поточечная сходимость старших производных до некоторого порядка.

Переходя к составлению матрицы СЛАУ и вектора правых частей согласно энергетическому подходу, имеем

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial U_{ij}} = 0, \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial V_{ij}} = 0, \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial W_{ij}} = 0, (i, j = 0, 1, 2, \dots). \quad (8)$$

Матрица системы линейных алгебраических уравнений относительно  $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}$  положительно определена, а собственные значения этой матрицы ограничены как снизу, так и сверху. Элементы матрицы СЛАУ (8) и вектора правых частей, являющиеся двойными интегралами по области  $\Omega$ , вычисляются точно [4], следовательно, при выбранной надлежащей длине мантииссы в представлениях чисел ошибки округления отсутствуют.

Система (8) конкретизируется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{M_1} \sum_{n=0}^{N_1} \{U_{mn} a_{mnij}^{(1)}\} + \sum_{m=0}^{M_2} \sum_{n=0}^{N_2} \{V_{mn} b_{mnij}^{(1)}\} + \\ & + \sum_{m=0}^{M_3} \sum_{n=0}^{N_3} \{W_{mn} c_{mnij}^{(1)}\} = Q_{1ij}, \\ & \sum_{m=0}^{M_1} \sum_{n=0}^{N_1} \{U_{mn} b_{mnij}^{(1)}\} + \sum_{m=0}^{M_2} \sum_{n=0}^{N_2} \{V_{mn} b_{mnij}^{(2)}\} + \\ & + \sum_{m=0}^{M_3} \sum_{n=0}^{N_3} \{W_{mn} c_{mnij}^{(2)}\} = Q_{2ij}, \quad (9) \\ & \sum_{m=0}^{M_1} \sum_{n=0}^{N_1} \{U_{mn} c_{mnij}^{(1)}\} + \sum_{m=0}^{M_2} \sum_{n=0}^{N_2} \{V_{mn} c_{mnij}^{(2)}\} + \\ & + \sum_{m=0}^{M_3} \sum_{n=0}^{N_3} \{W_{mn} c_{mnij}^{(3)}\} = Q_{3ij}, \\ & (i, j = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Структура вектора неизвестных  $X$ , элементами которого являются параметры  $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}$ , зависит от нашего выбора. В работе принят такой ва-

риант этой структуры:

$$\begin{aligned} X = & (U_{00}, V_{00}, W_{00}, U_{01}, V_{01}, W_{01}, \dots, U_{0N_1}, \\ & V_{0N_2}, W_{0N_3}, U_{10}, V_{10}, W_{10}, U_{11}, V_{11}, \\ & W_{11}, \dots, U_{1N_1}, V_{1N_2}, W_{1N_3}, \dots, U_{M_1-1,0}, \\ & V_{M_2-1,0}, W_{M_3-1,0}, \dots, U_{M_1-1,N_1}, V_{M_2-1,N_2}, \\ & W_{M_3-1,N_3}, U_{M_10}, V_{M_20}, W_{M_30}, \dots, U_{M_1N_1}, \\ & V_{M_2N_2}, W_{M_3N_3})^T. \end{aligned} \quad (10)$$

Структуры матрицы системы (9) и вектора правых частей подчинены структуре вектора неизвестных. Приведем лишь структуру вектора правых частей

$$\begin{aligned} Q = & (Q_{100}, Q_{200}, Q_{300}, Q_{101}, Q_{201}, Q_{301}, \dots, Q_{10N_1}, \\ & Q_{20N_2}, Q_{30N_3}, Q_{110}, Q_{210}, Q_{310}, Q_{111}, Q_{211}, Q_{311}, \\ & Q_{112}, Q_{212}, Q_{312}, \dots, Q_{1M_1N_1}, Q_{2M_2N_2}, Q_{3M_3N_3})^T. \end{aligned} \quad (11)$$

После определения неизвестных параметров в решении (6) компоненты напряженно-деформированного состояния определяются простым дифференцированием по приводимым ниже формулам.

Деформации:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = & \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R\varphi} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}; \quad \omega = \frac{1}{R\varphi} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \chi_1 = & -\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_2 = \frac{1}{R^2\varphi} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R^2\varphi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \tau = & 2\left(\frac{1}{Ra} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{Ra\varphi} \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right). \end{aligned}$$

Удельные усилия и моменты:

$$\begin{aligned} T_1 = & \frac{1}{a} \left( C_{11}^* \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{C_{12}}{\lambda} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{a}{R} C_{12} w - \frac{C_{11}^* E_c S_c}{ab C_{11}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ T_2 = & \frac{C_{22}}{a} \left( \frac{1}{\lambda} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{a}{R} w + \frac{C_{12}}{C_{22}} \frac{\partial u}{\partial x} \right); \\ S = & \frac{C_{66}}{a} \left( \frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \\ M_1 = & -\frac{1}{a^2} \left( D_{11}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{D_{12}}{\lambda^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{E_c S_c a}{b} \frac{\partial u}{\partial x} \right); \\ M_2 = & -\frac{D_{22}}{a^2} \left( \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{D_{12}}{D_{22}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ H = & -\frac{2D_{66}}{a^2 \lambda} \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}; \\ N_1 = & \frac{-1}{a^3} \left( D_{11}^* \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{2D_{66} + D_{12}}{\lambda^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2} - \frac{E_c S_c a}{b} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right); \\ N_2 = & -\frac{D_{22}}{a^3} \left( \frac{1}{\lambda^3} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left( 2 \frac{D_{66}}{\lambda D_{22}} + \frac{D_{12}}{D_{22}} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right); \end{aligned}$$

$$C_{11}^* = C_{11} + \frac{E_c F_c}{b}; \quad D_{11}^* = D_{11} + \frac{E_c J_c}{b}.$$

Нормальные углы поворота

$$\vartheta_1 = -\frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \vartheta_2 = -\frac{1}{R\varphi} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{R}.$$

При передаче усилий от оболочки на бортовые элементы (шпангоуты и бимсы) понадобятся обобщенные по Кирхгофу поперечные  $Q_1^*$ ,  $Q_2^*$  и сдвигающие  $S_1^*$ ,  $S_2^*$  усилия:

$$\begin{aligned} Q_1^* = & N_1 + \frac{1}{a\lambda} \frac{\partial H}{\partial y}; \quad Q_2^* = N_2 + \frac{1}{a} \frac{\partial H}{\partial x}; \\ S_1^* = & S + \frac{H}{R}; \quad S_2^* = S. \end{aligned}$$

В случае отсутствия стрингеров подчеркнутые в приведенных выше формулах члены отсутствуют.

### 3. Устойчивость, сходимость и точность решения задачи

Как отмечалось ранее, используемая здесь система координатных функций сильно минимальна и почти ортонормирована в метрике  $H_L(\Omega)$ . Сильная минимальность априори обеспечивает устойчивость процесса Ритца по отношению к малым погрешностям, допущенным при составлении системы Ритца (матричные элементы системы Ритца вычисляются по замкнутым формулам и, следовательно, могут быть определены с любой наперед заданной точностью), но при решении этой системы неизбежны ошибки округления, что может привести к значительным погрешностям в коэффициентах Ритца  $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}$  [6]. Этого не произойдет, если координатная система является почти ортонормированной, т.е.  $P$  – число обусловленности матрицы Грама (отношение максимального собственного значения к минимальному) ограничено сверху. Указанный факт обеспечивает устойчивость процесса Ритца к ошибкам округления и устойчивость самих решений. Последнее означает, что с увеличением верхних пределов сумм в решениях (6) значения искомым параметров  $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}$  стабилизируются до определенного знака в мантиссе.

Чтобы убедиться в этом, обратимся к данным табл. 1, в которой приведены первые десять коэффициентов решения  $W_{mn}$  (по коэффициентам  $U_{mn}, V_{mn}$  картина аналогична) в зависимости от числа неизвестных в суммах. В каждом случае решалась система уравнений, порядок которой в три раза больше указанного количества неизвестных  $S$ .

Таблица получена при таких исходных данных (стрингеры отсутствуют):

$$E_1 = E_2 = 7,2 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \quad v_1 = v_2 = v = 0,3;$$

$$G = \frac{E}{2(1+v)}; \quad l = 1 \text{ м}; \quad R = 1 \text{ м}; \quad h = 0,01 \text{ м};$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad q_1 = q_2 = 0; \quad q_3 = 10^5 \text{ Па}.$$

В рассматриваемом случае функция  $u$  является нечетной по  $x$  и четной по  $y$ , четность функции  $v$  противоположна  $u$ , а функция  $w$  четная по обеим переменным. Верхние пределы  $M_i, N_i$  в суммах (6) выбирались таким образом, чтобы число неизвестных в каждой сумме было одним и тем же. В дальнейшем при обсуждении некоторых полученных результатов в таблице указывается число неизвестных по каждой искомой функции.

Таблица 1

Параметры решения  $W_{mn}$  (м)

$W_{ij}$	S = 36	S = 81	S = 225
$W_{00}$	0,18261248 53385937e-3	0,18260911 35675209e-3	0,18260917 5236179e-3
$W_{02}$	0,10591153 67337458e-3	0,10590761 1484593e-3	0,10590772 48189897e-3
$W_{04}$	0,68740784 9902059e-4	0,68756733 95110493e-4	0,68756576 67254877e-4
$W_{06}$	0,90822009 77551721e-5	0,91283697 24660252e-5	0,9128175 720559451e-5
$W_{08}$	-0,2141935 286977255e-5	-0,22671754 67676481e-5	-0,22672119 34618786e-5
$W_{20}$	0,82167588 07751767e-4	0,8216564 758552069e-4	0,82165673 03533699e-4
$W_{22}$	0,43201785 90195678e-4	0,43194940 83265947e-4	0,43195033 18897464e-4
$W_{24}$	0,29858488 13916427e-4	0,29850969 57169548e-4	0,29851031 8325584e-4
$W_{26}$	0,1482069 33017721e-4	0,14850570 53623566e-4	0,1485047 053016599e-4
$W_{28}$	0,28364927 38199229e-5	0,29976704 80120581e-5	0,29974867 55231492e-5

Анализируя данные табл. 1, можно сделать такой вывод: искомые параметры решения  $W_{mn}$  с увеличением верхних пределов сумм  $M_i$  и  $N_i$  стабилизируются. При этом уточнение результатов происходит лишь в дальних разрядах мантииссы (установившиеся знаки мантииссы в таблице выделены жирным шрифтом).

Кроме этого, отметим, что дальние члены в суммах (6) не оказывают практически никакого влияния на точность и сходимость решения. Например, если удержать в суммах 36 неизвестных, то наибольший по модулю коэффициент из наиболее удаленных от  $W_{00}$ , т.е. из коэффициентов  $W_{10,i}, W_{i,10}$  ( $i=0..10$ ) имеет порядок  $2e-7$ , что на три порядка

меньше  $W_{00} = 1,826e-3$ . Если в суммах удержать 225 слагаемых, то наибольший по модулю коэффициент из  $W_{28,i}, W_{i,28}$  ( $i=0..28$ ) имеет значение  $W_{14,28} = -7,6758e-11$ , т.е. он привносит в решение величину перемещения на восемь порядков меньше, чем основной коэффициент. Отсюда следует, что по заданной точности вычисления перемещений существуют такие верхние пределы  $M_i$  и  $N_i$  ( $i=1,2,3$ ), что она будет гарантирована. Такой вывод правомочен, поскольку функции  $h_i(t)$  и  $H_i(t) t \in [-1, 1]$  ограничены в совокупности (независимо от  $i$ ), т.е.

$$h_i(t) \leq C_1, \quad H_i(t) \leq C_2. \quad (16)$$

Обратимся вновь к представлению решения в форме (6) и условно заменим верхние пределы в суммах на бесконечность. Тогда решения (6) можно трактовать как разложение искомым функций  $u, v, w$  в ряды по ортонормированным в  $L_2(\Omega)$  системам функций. При этом, поскольку искомые функции  $u, v, w$  априори принадлежат  $L_2(\Omega)$ , то к полученным рядам можно применить равенство Парсеваля, которое, как известно, имеет место не только для тригонометрической системы, но и для любой другой замкнутой системы функций (для гильбертова пространства  $L_2(\Omega)$  понятия замкнутости и полноты эквивалентны)

$$\int_{\Omega} f^2(x, y) dx dy = \sum_m \sum_n f_{mn}^2,$$

где  $f(x, y)$  – любая из компонент вектора  $\vec{u}$ ;  $f_{mn}$  – соответствующие коэффициенты разложения.

Дадим оценку сходимости и точности этого равенства, когда верхние пределы отличны от бесконечности. Обратимся к табл. 2, в которой приведены результаты для функции  $w$  (для  $u$  и  $v$  результат аналогичен). При построении этой таблицы вычисления проводились с различными способами упорядочения множества параметров  $W_{mn}$ , а именно:

- 1) упорядочение согласно принятому представлению вектора неизвестных (10);
- 2) упорядочение по возрастанию суммы  $m+n$ ;
- 3) упорядочение по убыванию  $|W_{mn}|$ .

Четвертая строка в таблице дает оценку точности вектора решения  $\vec{u}$  в  $L_2(\Omega)$ .

Как видно из данных таблицы, сходимость имеет место в любом случае упорядочения, однако способ упорядочения заметно влияет на её скорость; очевидно, наилучшим способом упорядочения является третий. Однако для такого упорядочения нужно иметь решение задачи в высоких приближениях, но при этом способ упорядочения теряет смысл. Следовательно, наиболее приемлемым будет второй способ, при котором упорядочение можно выпол-

нить заранее, а получаемый при этом результат обладает более высокой точностью.

Таблица 2  
Сходимость решения в  $L_2(\Omega)$

S	$\sum W_{nm}^2, \text{ м}^2$			$\sum (W_{nm}^2 + U_{nm}^2 + V_{nm}^2), \text{ м}^2$
	упорядочение 1	упорядочение 2	упорядочение 3	
25	6,6613424473E-08	6,6503447032E-08	6,6536353268E-08	6,6894062016E-08
36	6,6599534738E-08	6,6541903497E-08	6,6552160649E-08	6,6879543660E-08
49	6,6553256413E-08	6,6550596451E-08	6,6553021362E-08	6,6833070459E-08
64	6,6553012979E-08	6,6552903155E-08	6,6553107769E-08	6,6832816531E-08
81	6,6553558049E-08	6,6553055249E-08	6,6553112347E-08	6,6833371214E-08
100	6,6553121572E-08	6,6553108168E-08	6,6553112699E-08	6,6832936524E-08
121	6,6553101361E-08	6,6553111415E-08	6,6553112718E-08	6,6832916945E-08
144	6,6553106977E-08	6,6553112610E-08	6,6553112720E-08	6,6832922933E-08
169	6,6553109711E-08	6,6553112711E-08	6,6553112720E-08	6,6832925862E-08
196	6,6553111578E-08	6,6553112720E-08	6,6553112720E-08	6,6832927840E-08
225	6,6553112720E-08	6,6553112720E-08	6,6553112720E-08	6,6832929048E-08

Компоненты вектора  $\vec{u}$  обладают более высокой гладкостью, а именно – они принадлежат энергетическому пространству  $H_1$ . Поэтому целесообразно проследить за устойчивостью, сходимостью и точностью в этом пространстве. Ответ на эти вопросы дает табл. 3, в которой приведены значения энергии, вычисленные при различном числе удерживаемых членов в суммах (6). Как видно из таблицы, сходимость в  $H_1(\Omega)$  имеет место, однако скорость её ниже, чем в  $L_2(\Omega)$ .

Таблица 3  
Сходимость решения в  $H_1(\Omega)$

S	U, Дж
25	7,4517352094E-08
36	7,4799722091E-08
49	7,4835499510E-08
64	7,4836586641E-08
81	7,4837808204E-08
100	7,4838066919E-08
121	7,4838079013E-08
144	7,4838082452E-08
169	7,4838083991E-08
196	7,4838084880E-08
225	7,4838085466E-08

Обратимся далее к поточечной сходимости. В табл. 4 даны значения перемещений  $u, v, w$  в некоторых точках в зависимости от числа неизвестных в суммах.

Таблица 4  
Перемещения некоторых точек

S	$u(0,5;0), \text{ м}$	$v(0;0,5), \text{ м}$	$w(0;0), \text{ м}$
25	-2,227034E-06	3,396763E-06	1,252813E-04
36	-2,014046E-06	3,396958E-06	1,177031E-04
49	-1,951930E-06	3,398592E-06	1,198629E-04
64	-1,983541E-06	3,403782E-06	1,199044E-04
81	-1,984623E-06	3,404794E-06	1,193728E-04
100	-1,985417E-06	3,404345E-06	1,195781E-04
121	-1,984542E-06	3,404115E-06	1,195586E-04
144	-1,984523E-06	3,404091E-06	1,195459E-04
169	-1,984495E-06	3,404095E-06	1,195500E-04
196	-1,984485E-06	3,404116E-06	1,195499E-04
225	-1,984474E-06	3,404126E-06	1,195497E-04

Как видно, с увеличением числа членов в суммах (6) во всех случаях происходит стабилизация значений, что определяет устойчивость процесса и, следовательно, его сходимость и точность. Сравнив данные при удержании 225 членов с данными при удержании 64 членов, получим, что погрешность в определении перемещений  $u$  и  $v$  составляет 0,01%, а при определении прогиба  $w - 0,3\%$ . Для достижения инженерной точности достаточно ограничиться всего 36 неизвестными, при этом компоненты вектора перемещений определяются с погрешностью порядка 1,5%. Порядок же СЛАУ снижается с 675 до 108, т.е. практически в десять раз. Таким образом, наблюдается поточечная сходимость решения.

Подводя итог, еще раз отметим, что вследствие сильной минимальности и почти ортонормированности в  $H_1(\Omega)$  системы координатных функций (6) наблюдается устойчивость как процедуры получения приближенных решений, так и процесса решения СЛАУ достаточно высокого порядка. Однако при этом нельзя утверждать о сходимости к нулю невязки в дифференциальных уравнениях системы. В работе [6] приведена теорема, утверждающая, что для обеспечения стремления невязки к нулю *достаточно* (но не необходимо) в качестве координатных функций выбрать собственные функции оператора  $\bar{L}$ , сходного к исходному. В данном случае эта теорема практически ничего не дает, поскольку задача построения собственных функций оператора  $\bar{L}$  не менее сложна, чем построение самого решения. Поскольку условие отмеченной теоремы является лишь достаточным, то можно утверждать, что существуют и иные координатные функции, обеспечивающие стремление невязки к нулю. Для бигармонического оператора этот вопрос подробно исследован в работах [7 – 9]. Данные приведенной ниже табл. 5, полученные при  $M=N=30$ , обосновывают это утверждение.

Таблица 5  
Значения левой части третьего уравнения  
в долях от  $Q_3$

$y \setminus x$	0	0,2	0,3	0,4	0,5
0	1,000021	1,000019	1,000019	1,000013	1,000011
0,1	1,000019	1,000017	1,000013	1,000013	1,000008
0,2	0,999998	0,999999	1,000002	1,000000	1,000002
0,3	0,999967	0,999971	0,999974	0,999982	0,999987
0,4	0,999937	0,999941	0,999949	0,999955	0,999967
0,5	0,999960	0,999957	0,999954	0,999953	0,999954
0,6	1,000052	1,000043	1,000030	1,000016	0,999995
0,7	1,000155	1,000153	1,000153	1,000140	1,000126
0,8	1,000164	1,000173	1,000188	1,000201	1,000226
0,9	0,999953	0,999959	0,999979	0,999981	1,000008
1	0,999023	0,999083	0,999519	0,999462	0,998568
$y \setminus x$	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	1,000008	1,000001	0,999997	0,999962	0,984796
0,1	1,000005	1,000006	1,000004	1,000033	1,015036
0,2	1,000003	0,999999	0,999997	0,999968	0,985640
0,3	0,999992	1,000000	1,000005	1,000036	1,012434
0,4	0,999978	0,999987	0,999996	0,999989	0,992363
0,5	0,999959	0,999969	0,999984	1,000001	0,997686
0,6	0,999974	0,999965	0,999969	1,000026	1,017564
0,7	1,000098	1,000051	1,000005	0,999924	0,978921
0,8	1,000259	1,000282	1,000255	1,000019	0,973762
0,9	1,000049	1,000127	1,000330	1,000293	0,957664
1	1,000320	0,998353	0,996254	1,001437	2,938236

Поскольку невязка имеет смысл лишь в открытой области  $\Omega$  (на границе «работают» краевые условия), то, как видно, невязка стремится к нулю в любой замкнутой области  $\bar{\Omega}'$ , целиком лежащей в области  $\Omega$ . Таким образом, верно утверждение: «Принятая система координатных функций обеспечивает сходимости невязки к нулю». Следовательно, решение (6) является классическим в том смысле, что практически точно выполнены уравнения краевой задачи при точном выполнении краевых условий. О поведении невязки в угловых точках оболочки, образующих множество нулевой лебеговой меры, в рамках данной работы утверждать ничего нельзя. Хотя, как видно из таблицы, невязка стремится к нулю и на границе, за исключением малых окрестностей угловых точек.

Описанные свойства полученного решения позволяют назвать это решение *критериальным*, т.е. решением, позволяющим оценить точность решений, полученных иными методами, в том числе и по МКЭ.

### Заключение

1. В двух постановках (вариационной и в виде краевой задачи) была рассмотрена и решена полунормальная краевая задача, названная здесь *базовой*. Полученное решение может быть принято в

качестве *критериального* при оценке точности решений, полученных другими методами.

2. Элементы матрицы однородной системы линейных алгебраических уравнений, к решению которой редуцировано решение исходной задачи, вычислены точно в виде дробей, радикалов и т.п., что позволило определить характеристическое уравнение с заданной гарантированной точностью.

3. Заданную точность решения можно обеспечить меньшей ценой путем упорядочения по различным признакам слагаемых в суммах, представляющих решение.

4. Решение базовой задачи является основой для построения решения полностью неоднородной краевой задачи (краевые условия (2) неоднородны). Означенное решение является тем самым «кирпичиком», из которого строится «здание» метода сопряжения конструктивных элементов.

### Литература

1. Халилов, С. А. Решение в прямоугольнике статической задачи теории упругости при заданных на границе напряжениях [Текст] / С. А. Халилов // Вопросы проектирования самолетных конструкций : темат. сб. науч. тр. Харьк. авиац. ин-та им. Н. Е. Жуковского. – Вып. 3. – Х., 1982. – С. 120 - 127.
2. Халилов, С. А. Изгиб прямоугольной ортотропной пластины при заданных на границе перемещениях [Текст] / С. А. Халилов // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов : темат. сб. науч. тр. Харьк. авиац. ин-та им. Н. Е. Жуковского. – Вып. 3. – Х., 1987. – С. 31 - 39.
3. Халилов, С. А. Новые системы ортонормированных многочленов, некоторые их свойства и приложения [Текст] / С. А. Халилов // Прочность конструкций летательных аппаратов : темат. сб. науч. тр. Харьк. авиац. ин-та им. Н. Е. Жуковского. – Вып. 5. – Х., 1978. – С. 46 - 56.
4. Халилов, С. А. Вычисление некоторых определенных интегралов, содержащих присоединенные функции Лежандра второго и четвертого порядков [Текст] / С. А. Халилов // Прочность конструкций летательных аппаратов : темат. сб. науч. тр. Харьк. авиац. ин-та им. Н. Е. Жуковского. – Вып. 7. – Х., 1984. – С. 158 - 165.
5. Михлин, С. Г. Вариационные методы в математической физике [Текст] / С. Г. Михлин. – М. : Гостехиздат, 1957. – 478 с.
6. Михлин, С. Г. Численная реализация вариационных методов [Текст] / С. Г. Михлин. – М. : Наука, 1966. – 432 с.
7. Халилов, С. А. Построение и исследование аналитико-численного решения задачи об изгибе жестко зацементированной прямоугольной пластины [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткачен



ко // *Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии* : сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 49. – X., 2011. – С. 81 – 94.

8. Халилов, С. А. Построение и исследование приближённого аналитического решения бигармонической проблемы в прямоугольнике при однородных главных краевых условиях [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // *Авиа-*

*ционно-космическая техника и технология*. – 2013. – № 2 (99). – С. 40 – 49.

9. Халилов, С. А. Приближённое аналитическое решение бигармонической проблемы в прямоугольнике при однородных главных краевых условиях на двух противоположных сторонах и произвольных – на двух других [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2013. – № 5 (102). – С. 40 – 49.

Поступила в редакцию 07.04.2015, рассмотрена на редколлегии 15.05.2015

## ОСНОВНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ЗАГАЛЬНОЇ КЛАСИЧНОЇ ТЕОРІЇ ВІДКРИТОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ. РОЗВ'ЯЗАННЯ БАЗОВОЇ ЗАДАЧИ

*С. А. Халілов, В. Б. Минтюк, В. В. Копичко, Д. А. Ткаченко*

У високих наближеннях дано аналітико-числове розв'язання важливої задачі теорії ортотропної відкритої циліндричної оболонки при однорідних головних крайових умовах і довільному навантаженні. Із залученням системи координатних функцій, запропонованої одним з авторів, конструктивно відображено стійкість процедури вирішення системи лінійних алгебричних рівнянь та процесу отримання самих рішень, збіжність рішення до точного в різних метриках і, отже, можливість отримання рішень з будь-якою наперед заданою точністю як самих функцій, так і їх перших і других похідних, якими визначаються компоненти напружено-деформованого стану оболонки. Отримані результати дозволяють відшукати аналітико-числове рішення повністю неоднорідної крайової задачі розглянутої теорії оболонок, що, в свою чергу, забезпечить проведення методу сполучення конструктивних елементів для оболонкових систем.

**Ключові слова:** крайова задача; відкрита циліндрична оболонка; стійкість, збіжність і точність рішення; адекватна математична модель; енергетичний простір; система координатних функцій.

## MAIN BOUNDARY VALUE PROBLEM OF CLASSICAL THEORY OF GENERAL OPEN CYLINDRICAL SHELL. BASIC TASK SOLUTION

*S. A. Khalilov, V. B. Myntyuk, V. V. Kopychko, D. A. Tkachenko*

In higher approximations given the analytical-numerical solution of important problem in the theory of orthotropic open cylindrical shells with homogeneous main boundary conditions and an arbitrary load. With the use of the coordinate functions, proposed by one of the authors, constructively shown sustainability of solving the system of linear algebraic equations procedure and the sustainability of obtaining the solutions themselves, the convergence to the exact solutions in various metrics and, therefore, the possibility of obtaining solutions with any desired degree of accuracy of the functions themselves and their first and second derivatives, which determines the components of the stress strain state of the shell. The obtained results allow us to find an analytical- numerical solution of the full inhomogeneous boundary value problem of the theory of shells, which in turn will provide the execution of conjugation constructive elements method for shell systems.

**Keywords:** boundary value problem; open cylindrical shell; stability, convergence and accuracy of the solution; adequate mathematical model; energy space; system of coordinate functions.

**Халилов Сиявуш Ахмедович** – старший научный сотрудник научного отдела кафедры высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: khalilov@ukr.net.

**Минтюк Виталий Борисович** – канд. техн. наук, доцент кафедры прочности летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: minvit@mail.ru.

**Копычко Виктор Владимирович** – аспирант кафедры технологии и производства летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: viktor\_kopychko@mail.ru.

**Ткаченко Денис Анатольевич** – аспирант кафедры технологии и производства летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: 20Black\_and\_White07@ukr.net.