УДК 517.958: 539.4: 629.7.02

В. С. КРИВЦОВ, В. Н. ПАВЛЕНКО, В. В. КОПЫЧКО

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Украина

ОСНОВНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ОБЩЕЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОТКРЫТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ. КОНСТРУКЦИЯ РЕШЕНИЯ

Рассмотрено два подхода к анализу конструктивного элемента в виде открытой цилиндрической оболочки при произвольной системе перемещений и углов поворота на границе. Предложена конструкция решения основной краевой задачи моментной теории открытой оболочки с неоднородными краевыми условиями типа Дирихле. Эта конструкция построена на рассмотрении ряда так называемых базовых задач, анализ которых с точки зрения устойчивости, сходимости и точности получаемых решений был дан в предыдущих работах авторов. Проанализирована требуемая гладкость входных данных задачи с учетом угловых точек границы.

Ключевые слова: *открытая моментная оболочка, неоднородные краевые условия типа Дирихле, вариационная постановка, гладкость входных данных, способ продолжения функции с границы в область, покомпонентное представление краевых функций, вспомогательные задачи.*

Введение

Открытые оболочки являются основными элементами несущих конструкций в авиастроении, кораблестроении и в других областях техники. Особенности работы открытых оболочек под нагрузкой как самостоятельного элемента конструкции слабо изучены, еще менее исследована работа оболочек, деформирование которых на краях стеснено (наложены упругие связи). Трудности математического характера при анализе открытых оболочек и систем из них заключаются, кроме прочего, в отсутствии эффективных методов построения решений.

В настоящее время самым эффективным методом анализа оболочечных структур является метод конечного элемента (МКЭ). Однако точность этого численного метода оставляет желать лучшего, кроме того, он приводит к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) очень высокого порядка. Чтобы повысить точность получаемых результатов, необходимо брать все больше и больше конечных элементов, что приводит к ухудшению свойств матрицы СЛАУ – число обусловленности этой матрицы неограниченно растет, матрица вырождается.

В научно-исследовательском подразделении Национального аэрокосмического университета им. Н. Е. Жуковского «ХАИ» под руководством С. А. Халилова предложен новый метод расчета тонкостенных пространственных систем, основным преимуществом которого по сравнению с существующими методами является точность получаемых решений.

Главной задачей анализа структур в рамках этого метода является определение краевых функций как результата взаимодействия элементов структуры непосредственно или через промежуточные упругие звенья. При анализе отдельно взятой открытой оболочки краевые функции известны. Поэтому на первый план выдвигается задача построения решений неоднородных краевых задач теории оболочек, явно выраженных через произвольные краевые функции. Если же краевые функции в области их задания представить или аппроксимировать разложениями по системе, образующей базис в рассматриваемом функциональном пространстве, то в качестве неизвестных будут выступать коэффициенты этих разложений, которые могут быть определены в дальнейшем из условий упругого сопряжения элементов (метод сопряжения конструктивных элементов (МСКЭ)). Таким образом, **цель данной работы** – рассмотреть конструкцию предлагаемого метода расчета тонкостенных пространственных систем.

1. Постановка задачи и методы решения

Для реализации МСКЭ в форме метода перемещений желательно иметь аналитические или аналитико-численные решения для элементов, явно выраженные через перемещения и нормальные углы поворота, заданные на границах этих элементов в виде достаточно гладких функций. Последние, как отмечено во введении, могут быть представлены через счетное множество параметров, которые подлежат определению в дальнейшем при анализе всей конструкции, состоящей из этих элементов. К сожалению, представить искомые решения через краевые функции в виде интегральных, интегральнодифференциальных или иных операторов не представляется возможным. Поэтому для алгебраизации задачи приходится выбирать иные пути, например, покомпонентное представление краевых функций. Одна из этих компонент является функцией с конечным множеством параметров, а вторая – разложением в ряд по некоторой полной системе функций. Таким образом, проблема сводится к получению решений, явно выраженных через совокупность указанных параметров.

Если рассматривается задача о деформировании конкретной открытой оболочки с заданными на её границе известными функциями перемещений (параметры краевых функций заданы), решение, полученное в описанном виде, является окончательным. Иначе обстоит дело при рассмотрении системы из открытых оболочек: здесь параметры краевых функций подлежат определению из условий упругого сопряжения, которые в данном случае представляют собой условия статики (равновесия), а кинематические условия упругого сопряжения выполняются заранее.

Для решения, таким образом, предварительно сформулированной задачи могут быть применены различные подходы. Здесь рассмотрены два из них: первый заключается в постановке и решении некоторой *краевой задачи* для системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными; второй основан на применении *вариационного принципа* виртуальной работы.

Рассмотрим первый подход. Отнесем срединную поверхность оболочки к линиям главных кривизн, при этом участки границы совпадают с координатными линиями. С помощью невырожденного (линейного) преобразования системы координат приведем область, занимаемую срединной поверхностью оболочки к квадратной области $\Omega = \{(\alpha,\beta) : -1 < \alpha,\ \beta < 1\}$. Тогда означенная краевая задача описывается системой дифференциальных уравнений восьмого порядка в частных производных

$$L\vec{u}(\alpha,\beta) = \vec{Q}(\alpha,\beta) <=> \sum_{j=1}^{3} L_{ij}u_i = \vec{Q}_i(\alpha,\beta) \text{ в } \Omega, i = 1,2,3 \quad (1)$$

при краевых условиях на Γ :

$$\begin{gathered} w = \gamma_1(\beta), \frac{\partial w}{\partial \alpha} = \gamma_3(\beta), u = \gamma_1^*(\beta), v = \gamma_3^*(\beta) : \alpha = -1; \\ w = \gamma_2(\beta), \frac{\partial w}{\partial \alpha} = \gamma_4(\beta), u = \gamma_2^*(\beta), v = \gamma_4^*(\beta) : \alpha = 1; \\ w = \mu_1(\alpha), \frac{\partial w}{\partial \beta} = \mu_3(\alpha), u = \mu_1^*(\alpha), v = \mu_3^*(\alpha) : \beta = -1; \quad (2) \\ w = \mu_2(\alpha), \frac{\partial w}{\partial \beta} = \mu_4(\alpha), u = \mu_2^*(\alpha), v = \mu_4^*(\alpha) : \beta = 1; \\ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \equiv (u, v, w). \end{gathered}$$

Краевая задача (1) – (2) является частным случаем общей краевой задачи, рассмотренной в работе [1]. Принятые здесь обозначения, кроме обозначения аргументов, такие же, как в работе [2].

Компоненты L_{ii} матричного дифференциального оператора **L** являются эллиптическими (и даже сильно эллиптическими), причем $L_{ij} = L_{ji}$, операторы L_{11} и L_{22} имеют второй порядок, а L_{33}– четвертый.

Краевую задачу (1) – (2) по аналогии с классификацией краевых задач теории упругости мы называем основной, хотя в теории оболочек такой четкой классификации не существует.

Сделаем два замечания:

– краевая задача (1) – (2) при однородных краевых условиях (*базовая* задача) решена и достаточно подробно исследована в смысле устойчивости, сходимости и точности в работе [2], поэтому в дальнейшем полагаем $\vec{Q}(\alpha,\beta) \equiv 0$;

– предполагаем, что краевые функции из (2) обладают требуемой гладкостью (этот вопрос будет обсужден далее).

Краевые функции из (2) представим в виде сумм

$$\begin{gathered} \gamma_k(\beta) = \pi_k(\beta) + \varphi_k(\beta),\ \mu_k(\alpha) = \rho_k(\alpha) + \psi_k(\alpha), \\ \gamma_k^*(\beta) = \pi_k^*(\beta) + \varphi_k^*(\beta),\ \mu_k^*(\alpha) = \rho_k^*(\alpha) + \psi_k^*(\alpha), \quad (3) \\ (k = 1,2,3,4), \end{gathered}$$

где π_k и ρ_k – многочлены третьей степени,

π_k^* и ρ_k^* – многочлены первой степени.

Эти многочлены подберем так, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{gathered} \varphi_k(\pm 1) = \varphi_k'(\pm 1) = \psi_k(\pm 1) = \psi_k'(\pm 1) = \\ = \varphi_k^*(\pm 1) = \psi_k^*(\pm 1) = 0,\ (k = 1,2,3,4). \end{gathered} \quad (4)$$

Тогда для определения многочленов π_k, ρ_k, π_k^*, ρ_k^* будем иметь условия:

$$\begin{gathered} \pi_k(\pm 1) = \gamma_k(\pm 1), \quad \pi_k'(\pm 1) = \gamma_k'(\pm 1), \quad \rho_k(\pm 1) = \mu_k(\pm 1), \\ \rho_k'(\pm 1) = \mu_k'(\pm 1), \quad \pi_k^*(\pm 1) = \gamma_k^*(\pm 1), \quad \rho_k^*(\pm 1) = \mu_k^*(\pm 1), \end{gathered}$$

из которых их можно определить однозначно.

В соответствии с таким представлением краевых функций решение полуоднородной краевой задачи (1) – (2), в силу ее линейности, запишем в виде суммы двух компонент по каждой искомой функции:

$$\begin{gathered} u(\alpha,\beta) = u_1(\alpha,\beta) + u_2(\alpha,\beta), \\ v(\alpha,\beta) = v_1(\alpha,\beta) + v_2(\alpha,\beta), \quad (5) \\ w(\alpha,\beta) = w_1(\alpha,\beta) + w_2(\alpha,\beta). \end{gathered}$$

Первая из этих компонент отвечает полиномиальным частям краевых функций, а вторая – оставшимся. Эти компоненты решения назовем первым и вторым вспомогательными решениями соответственно, хотя они имеют и самостоятельное значение. Первая компонента соответствует деформированию открытой оболочки при согласованных обобщенных перемещениях угловых точек границы. Вторая компонента описывает деформирование открытой оболочки с неподвижными угловыми точками границы и произвольными перемещениями её сторон.

Прежде чем переходить к построению конструкции отмеченных решений, следует отметить, что здесь существует два основных подхода. Первый (прямой) подход заключается в построении *полной* системы решений однородного уравнения (1) со счетным множеством неизвестных параметров, определяемых в дальнейшем путем выполнения неоднородных краевых условий в том или ином смысле (методом наименьших квадратов по границе, методом граничной коллокации, методом компенсирующих нагрузок и др.). Однако построение полной совокупности решений системы уравнений в частных производных – задача весьма сложная и не проще поставленной. Второй подход заключается в редукции полуоднородной краевой задачи (неоднородны краевые условия) к другой полуоднородной краевой задаче (неоднородна правая часть). Возможности второго подхода намного шире, поскольку можно привлечь и вариационные методы, сходимость которых (в том или ином функциональном пространстве) не требует доказательства, поскольку она уже доказана (так называемое обобщенное решение). Поэтому здесь выбран второй подход.

2. Конструкция решения первой вспомогательной задачи

Итак, пусть в правых частях стоят первые (полиномиальные) компоненты краевых функций: линейные многочлены относительно функций u и v и кубические – относительно w и $\partial w/\partial n$. Эти решения, обозначенные ранее через u_1, v_1, w_1, представим в виде суммы двух компонент:

$$u_1(\alpha,\beta) = u_{11}(\alpha,\beta) + u_{12}(\alpha,\beta),$$
$$v_1(\alpha,\beta) = v_{11}(\alpha,\beta) + v_{12}(\alpha,\beta), \qquad (6)$$
$$w_1(\alpha,\beta) = w_{11}(\alpha,\beta) + w_{12}(\alpha,\beta).$$

Зададим первые компоненты представления (6) так, чтобы краевые условия были выполнены. Отметим, что такое представление не единственное. Задача заключается в продолжении функций в область с её границы, а это можно сделать множеством способов на основании теоремы о продолжении. Возникает задача выбора способа продолжения, а именно: мало оставить граничные функции без изменения, необходимо продолжить их в область некоторым оптимальным способом. Критерий оптимальности, носящий абстрактный характер, можно понимать по-разному, что во многом зависит от субъективных факторов. В зависимости от выбранного критерия будем получать одно из множеств решения задачи о продолжении. Но, принимая во внимание, что краевые функции имеют вид полиномов, естественно ограничиться полиномиальным продолжением. В пользу такого продолжения свидетельствует также гарантированная возможность дифференцирований, предписанных матричным оператором системы уравнений.

На основе сказанного предлагается следующий вариант продолжения:

$$\begin{aligned} w_{11}(\alpha,\beta) = \sum_{p=1}^{2}\sum_{q=1}^{2}[&W_{pq}f_p(\alpha)f_q(\beta) + \\ &+W_{p+2,q}f_{p+2}(\alpha)f_q(\beta) + \\ &+W_{p,q+2}f_p(\alpha)f_{q+2}(\beta) + \\ &+W_{p+2,q+2}f_{p+2}(\alpha)f_{q+2}(\beta)], \end{aligned}$$
$$u_{11}(\alpha,\beta) = \sum_{p=1}^{2}\sum_{q=1}^{2}U_{pq}\nu_p(\alpha)\nu_q(\beta),$$
$$v_{11}(\alpha,\beta) = \sum_{p=1}^{2}\sum_{q=1}^{2}V_{pq}\nu_p(\alpha)\nu_q(\beta), \qquad (7)$$

где $\nu_1(z) = 0{,}5(1-z)$, $\nu_2(z) = 0{,}5(1+z)$,
$f_1(z) = 0{,}25(2-\ 3z+z^3)$, $f_2(z) = 0{,}25(2+3z-z^3)$,
$f_3(z) = 0{,}25(1-z-z^2+z^3)$, $f_4(z) = 0{,}25(-1-z+z^2+z^3)$,
$z = \alpha$ или $z = \beta$;

U_{ij}, V_{ij}, W_{ij} – обобщенные перемещения угловых точек, а именно: $U_{11} = u(-1,-1)$, $U_{12} = u(-1,1)$, $U_{21} = u(1,-1)$, $U_{22} = u(1,1)$, $V_{11} = v(-1,-1)$, $V_{12} = v(-1,1)$, $V_{21} = v(1,-1)$, $V_{22} = v(1,1)$, $W_{11} = u(-1,-1)$, $W_{12} = u(-1,1)$, $W_{21} = u(1,-1)$, $W_{22} = u(1,1)$, $W_{31} = w_\alpha(-1,-1)$, $W_{32} = w_\alpha(-1,1)$, $W_{41} = w_\alpha(1,-1)$, $W_{42} = w_\alpha(1,1)$, $W_{13} = w_\beta(-1,-1)$, $W_{14} = w_\beta(-1,1)$, $W_{23} = w_\beta(1,-1)$, $W_{24} = w_\beta(1,1)$, $W_{33} = w_{\alpha\beta}(-1,-1)$, $W_{34} = w_{\alpha\beta}(-1,1)$, $W_{43} = w_{\alpha\beta}(1,-1)$, $W_{44} = w_{\alpha\beta}(1,1)$.

Нижние индексы α и β обозначают дифференцирование по соответствующей переменной.

Согласно равенствам (7) смежные участки границы, пересечением которых является соответствующая угловая точка, смещены по u и v по линейному закону, принимая в углу заданное значение U_{ij} (V_{ij}), а на противоположных сторонах перемещения обращаются в нуль вплоть до соответствующих угловых точек. Прогибы и нормальные углы поворота изменяются вдоль смежных сторон по кубическим параболам и обращаются в нуль вместе со своими первыми производными по соответствующей переменной на противоположных сторонах вплоть до их граничных точек, что следует из способа их определения (4).

Уместно отметить, что функции $u_{11}(\alpha,\beta)$ и $v_{11}(\alpha,\beta)$ определяют функции формы простейшего прямоугольного конечного элемента плоской задачи теории упругости, а функция $w_{11}(\alpha,\beta)$ есть не что иное, как изгибный прямоугольный конечный элемент Богнера-Фокса-Шмидта. Как известно, эти элементы являются совместными, но не равновесными (в малом).

Вторые компоненты представлений (6) должны быть определены из решения краевой задачи

$$\begin{gathered} L_{i1}u_{12} + L_{i2}v_{12} + L_{i3}w_{12} = \\ -L_{i1}u_{11} - L_{i2}v_{11} - L_{i3}w_{11} (i = 1,2,3) \end{gathered} \tag{8}$$

плюс однородные краевые условия, следующие из условий (2).

В системе уравнений (8) функции, стоящие в правых частях, бесконечно дифференцируемы, известны и содержат параметры обобщенных угловых перемещений согласно (7). Таковыми являются и искомые функции в (8), т.е. решение краевой задачи (8) следует понимать как классическое.

3. Конструкция решения второй вспомогательной задачи

Здесь речь идет о решении краевой задачи (1) – (2) при нулевых правых частях и неоднородных краевых условиях, в правых частях которых стоят вторые функции из представлений (3). Эти функции, как следует из (4), в своих областях определения обладают следующими свойствами: представители функций u и v обращаются в нуль на границах отрезка [-1,1], а представители функций w и $\partial w/\partial n$ в тех же граничных точках обращаются в нуль вместе со своими первыми производными.

Необходимо отметить, что рассматриваемые вторые части краевых функций полностью наследуют свойства гладкости исходных краевых функций, но из механического смысла рассматриваемой краевой задачи следует, что краевые значения функций u, v и $\partial w/\partial n$ должны быть непрерывными, а функции w – непрерывно дифференцируемыми. Однако на основе аппроксимационных теорем К. Вейерштрасса произвольная непрерывная на отрезке функция может быть *равномерно* приближена либо степенными, либо тригонометрическими полиномами. От тригонометрических полиномов, мы отказываемся, поскольку, как следует из теоремы Д. Джексона [3], тригонометрическая система не обладает наилучшими аппроксимативными свойствами по сравнению со степенной. Кроме того, аналитико-численное решение базовой задачи, к которой мы намерены свести решение и этой задачи, существенно опирается на привлечение координатных систем функций в виде многочленов, обладающих определенными замечательными свойствами [4, 5]. Согласно всему сказанному выше вторые части решений (5) представим в виде суммы двух компонент

$$\begin{gathered} u_2(x,y) = u_{21}(x,y) + u_{22}(x,y), \\ v_2(x,y) = v_{21}(x,y) + v_{22}(x,y), \\ w_2(x,y) = w_{21}(x,y) + w_{22}(x,y), \end{gathered} \tag{9}$$

первые из которых продолжим в область исходя из их конкретного задания следующим образом:

$$\begin{gathered} u_{21} = \sum_{k=1}^{2} \{\varphi_k^*(\beta)\nu_k(\alpha) + \psi_k^*(\alpha)\nu_k(\beta)\}, \\ v_{21} = \sum_{k=1}^{2} \{\varphi_{k+2}^*(\beta)\nu_k(\alpha) + \psi_{k+2}^*(\alpha)\nu_k(\beta)\}, \\ w_{21} = \sum_{k=1}^{4} \{\varphi_k(\beta)f_k(\alpha) + \psi_k(\alpha)f_k(\beta)\}. \end{gathered} \tag{10}$$

При этом краевые условия выполнены.

Тогда вторые компоненты из (9) определим из решения *базовой* краевой задачи

$$\begin{gathered} L_{i1}u_{22} + L_{i2}v_{22} + L_{i3}w_{22} = \\ = -L_{i1}u_{21} - L_{i2}v_{21} - L_{i3}w_{21},\ (i = 1,2,3) \end{gathered} \tag{11}$$

плюс однородные краевые условия, следующие из условий (2). Отметим, что правые части уравнения (1) определяются через краевые функции и их производные до определенного порядка, поэтому естественно предположить существование этих производных. Наряду с этим вторые компоненты из представлений (3) для получения численных результатов должны быть конкретизированы. Для этого предлагается (и это согласовано с методом решения базовой задачи) представить отмеченные компоненты краевых функций в виде рядов по конкретным полным, ортонормированным в $L_2(-1,1)$ системам функций.

4. Вариационная постановка

Оператор краевой задачи $(1)-(2)$ при $\overline{Q}(\alpha,\beta) \neq 0$ и однородных краевых условиях (2) – положительно определенный, что нетрудно показать с помощью теоремы о дивергенции (формула Грина) с привлечением ряда известных интегральных неравенств (Корна, Фридрихса, Пуанкаре, Гёльдера, Минковского и др.). Так поступил бы математик, не знакомый с принципами и основными теоремами механики деформируемого твердого тела. Однако такая процедура достаточно утомительна. В теории оболочек это доказательство основано на симметрии матрицы L дифференциального оператора задачи, что следует из теоремы Бетти о взаимности работ (принцип симметрии). Чтобы эта теорема имела место, необходимо обратить в тождество шестое (конечное) уравнение равновесия, что достигается соответствующим обоснованным выбором замыкающих уравнений (уравнений состояния), связывающих компоненты погонных усилий и моментов с компонентами деформаций. Таковыми являются соотношения типа Новожилова-Балабуха [8]. Для данной оболочки с учетом ортотропии свойств её материала они приведены в работе [2]. Положительная определенность симметричного оператора доказывается также просто, исходя из выражения для потенциальной энергии деформирования, записанного через деформации. При этом устанавливается [9], что энергия деформирования может обратиться в нуль только в отсутствие деформаций, т.е. перемещения являются перемещениями оболочки как жесткого целого.

Поскольку оператор L положительно определенный, то можно ввести его энергетическое пространство $\overset{o}{H}_{\mathbf{L}}(\Omega)$, определив в нем скалярное произведение $[\mathbf{u},\mathbf{v}] \equiv (\mathbf{Lu},\mathbf{v}), \mathbf{u},\mathbf{v} \in \overset{o}{H}_{\mathbf{L}}(\Omega)$. Пространство $\overset{o}{H}_{\mathbf{L}}(\Omega)$ вводится так:

$$\overset{o}{H}_{\mathbf{L}}(\Omega) = (\overset{o}{H}{}^1(\Omega))^2 \times \overset{o}{H}{}^2(\Omega), \qquad (12)$$

где $\overset{o}{H}{}^l(\Omega) \equiv \overset{o}{W}{}^l_2(\Omega)$ – пространство С. Л. Соболева. Функции из этого пространства интегрируемы с квадратом в области Ω с производными до порядка l включительно и удовлетворяют однородным краевым условиям (2) (значок «о»). Теперь из общей теории краевых задач [10, 11, 12] следует, что рассматриваемая краевая задача эквивалентна интегральному тождеству

$$\mathbf{u} \in \overset{o}{H}_{\mathbf{L}}(\Omega),\ (\mathbf{Lu},\mathbf{v}) = -(\mathbf{Lw},\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in \overset{o}{H}_{\mathbf{L}}(\Omega). \qquad (13)$$

Здесь $\mathbf{u}$ – искомое решение, $\mathbf{w}$ – известная функция, зависящая от краевых функций из (2), продолженных с границы Г в область Ω таким образом, чтобы тождество (13) имело смысл. Из (13) следует абстрактная вариационная задача (принцип виртуальной работы)

$$(\mathbf{Lu},\mathbf{u}) - 2\mathbf{F}(\mathbf{u},\mathbf{w}) \to \min,\ \mathbf{u} \in \overset{o}{H}_{\mathbf{L}}(\Omega), \qquad (14)$$

где (**Lu**,**u**) – квадратичный функционал (функционал энергии деформирования), а **F**(**u**, **w**) – ограниченный линейный функционал.

Теперь нетрудно видеть, что сформулированные в пунктах 2 и 3 краевые задачи сводятся к интегральному тождеству (13) или к вариационной задаче (14), в которых $\mathbf{u} = (u_{12}, v_{12}, w_{12})$, $\mathbf{w} = (u_{11}, v_{11}, w_{11})$ – первая вспомогательная задача либо $\mathbf{u} = (u_{22}, v_{22}, w_{22})$, $\mathbf{w} = (u_{21}, v_{21}, w_{21})$ – вторая вспомогательная задача.

Несколько слов о гладкости входных данных. Гладкость входных данных характеризуется гладкостью правой части системы уравнений (1), гладкостью её коэффициентов, гладкостью краевых функций из условий (2) и видом области Ω, а точнее гладкостью её границы Г.

Формально для существования и единственности обобщенного решения требуется, чтобы компоненты вектора правых частей были из пространства $H_L^*(\Omega)$, сопряженного к пространству $H_L(\Omega)$: $H_L^*(\Omega) = (H^{-1}(\Omega))^2 \times (H^{-2}(\Omega))$ – пространство обобщенных функций (функционалов).

Коэффициенты системы уравнений (1) в данном случае постоянные и, следовательно, аналитические.

Гладкость краевых функций была ранее оговорена достаточно жесткими условиями. В вариационной постановке эти условия можно значительно ослабить: достаточно сохранить априорные условия $u, v, \frac{\partial w}{\partial n} \in C(\Gamma), w \in C^1(\Gamma)$, определяемые механическим смыслом задачи.

Первые две компоненты вектор-функций из класса $\overset{0}{H}_{\mathbf{L}}(\Omega)$ интегрируемы с квадратом вместе со своими первыми производными, а третья компонента – интегрируема с квадратом вплоть до вторых производных. Оказывается, что на самом деле можно утверждать большую гладкость решения, что определяется гладкостью границы Г, которая в рассматриваемом случае имеет угловые точки, т.е. является границей типа Липшица, а поскольку углы прямые, то область удовлетворяет более слабому требованию (условию конуса). Гладкость решения определяется величиной внутреннего угла $0 < \varphi < 2\pi$. С. А. Халиловым доказаны теоремы о большей гладкости решения при наличии угловых точек границы. Так, одна из них гласит, что основная краевая задача Дирихле в клине K (прямом или криволинейном) для бигармонического оператора, априори принадлежащая $H^2(K)$ (требование конечности энергии деформирования), принадлежит $H^4(K)$, если угол раствора клина $\varphi < 126{,}2837099741076$. Отсюда и из теорем вложения следует, что эти решения являются функциями класса $C^2(K)$.

Заключение

1. В рамках общей (моментной) теории оболочек в двух постановках дана полная конструкция решения краевой задачи типа Дирихле для открытой цилиндрической оболочки.

2. Сформулированы минимальные требования к гладкости входных данных задачи, при которых обобщенное решение является и классическим.

3. Конструкция решения представлена в покомпонентном виде, причем определение каждой компоненты сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с неизменной матрицей и различными правыми частями.

4. Предлагаемое решение является основным при линейном анализе тонкостенных пространственных систем методом перемещений.

5. Отмечено, что наличие угловой точки границы с внутренним прямым углом позволяет утверждать значительную гладкость искомого решения по сравнению с априорно известной.

6. Вспомогательные задачи имеют самостоятельное значение при рассмотрении деформирования отдельно взятой оболочки.

7. Построенное решение позволяет получить функциональную матрицу жесткости граничного контура (которая дает связь между статическими величинами, возникающими на краях (усилиями и моментами), с кинематическими (перемещениями и углами поворота).

8. Дальнейшие исследования проблемы заключаются в качественном и количественном анализе предлагаемого решения в смысле его устойчивости, сходимости и точности.

Авторы выражают глубокую благодарность С. А. Халилову за постановку задачи, постоянное внимание к ней и конструктивную критику.

Литература

1. *Новые методы исследования линейно и нелинейно деформируемых тел из композиционных материалов. Математические модели, методы их анализа и численная реализация нелинейного деформирования тонкостенных пространственных систем [Текст] : отчет о НИР (заключ.) т. 2 ; рук. С. А. Халилов ; исполн. В. Б. Минтюк [и др.]. – Х., 2014. – 160 с. – №ГР 0112U002135. – Инв. № 0215U006163.*

2. *Основная краевая задача общей классической теории открытой цилиндрической оболочки. Решение базовой задачи [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, В.В. Копычко, Д. А. Ткаченко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2015. – № 3(120). – С. 24-32.*

3. *Джексон, Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы [Текст] / Д. Джексон. – М. : Государственное издательство иностранной литературы, 1948. – 260 с.*

4. *Халилов, С. А. Новые системы ортонормированных многочленов, некоторые их свойства и приложения [Текст] / С. А. Халилов // Прочность конструкций летательных аппаратов : темат. сб. науч. тр. Харьк. авиац. ин-та им. Н. Е. Жуковского. – Вып. 5. – Х., 1978. – С. 46 – 56.*

5. *Халилов, С. А. Вычисление некоторых определенных интегралов, содержащих присоединенные функции Лежандра второго и четвертого порядков [Текст] / С. А. Халилов // Прочность конструкций летательных аппаратов : темат. сб. науч. тр. Харьк. авиац. ин-та им. Н. Е. Жуковского. – Вып. 7. – Х., 1984. – С. 158 – 165 с.*

6. *Сегё, Г. Ортогональные многочлены [Текст] / Г. Сегё. – М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 500 с.*

7. *Суетин, П. К. Классические ортогональные многочлены [Текст] / П. К. Суетин. – изд. 2-е, дополненное. – М. : Наука, 1979. – 416 с.*

8. *Новожилов, В. В. Теория тонких оболочек [Текст] / В. В. Новожилов. – Л. : СУДпромгиз, 1962. – 431 с.*

9. *Гольденвейзер, А. А. Теория упругих тонких оболочек [Текст] / А. А. Гольденвейзер. – М. : Наука, 1976. – 512 с.*

10. *Ладыженская, О. А. Краевые задачи математической физики [Текст] / О. А. Ладыженская. – М. : Наука, 1973. – 408 с.*

11. *Обэн, Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач [Текст] / Ж.-П. Обэн. – М. : Мир, 1977. – 384 с.*

12. *Сьярле, Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач [Текст] / Ф. Сьярле. – М. : Мир, 1980. – 512 с.*

Поступила в редакцию 12.10.2015, рассмотрена на редколлегии 18.11.2015

ОСНОВНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ЗАГАЛЬНОЇ КЛАСИЧНОЇ ТЕОРІЇ ВІДКРИТОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ. КОНСТРУКЦІЯ РІШЕННЯ

В. С. Кривцов, В. М. Павленко, В. В. Копичко

Розглянуто два підходи до аналізу конструктивного елемента у вигляді відкритої циліндричної оболонки із стисненими краями. Запропоновано конструкцію вирішення основної крайової задачі моментної теорії відкритої оболонки з неоднорідними крайовими умовами типу Діріхле. Цю конструкцію побудовано на розгляді низки так званих базових задач, аналіз яких з погляду стійкості, збіжності та точності одержуваних рішень був даний у попередніх роботах авторів. Проаналізована необхідна гладкість вхідних даних задачі, включаючи наявність кутових точок на кордоні області.

Ключові слова: відкрита моментна оболонка, неоднорідні крайові умови типу Діріхле, варіаційна постановка, гладкість вхідних даних, спосіб продовження функції з границі в область, покомпонентне уявлення крайових функцій, допоміжні задачі.

MAIN BOUNDARY VALUE PROBLEM OF GENERAL CLASSICAL THEORY OF OPEN CYLINDRICAL SHELL. SOLUTION CONSTRUCTION

V. S. Kryvtsov, V. N. Pavlenko, V. V. Kopychko

The paper considers two approaches to the analysis of the component in the form of an open cylindrical shell with constrained edges. As a result, the design bending theory main boundary value problem solution for an open shell with inhomogeneous boundary conditions of Dirichlet type is given. This design is based on the consideration of a number of so-called basic problems, the analysis of which in terms of stability, convergence and accuracy of the solutions was given in previous papers of the authors. The required input data smoothness including the presence of angular points on the boundary is analized.

Key words: open torque shell, inhomogeneous boundary conditions of Dirichlet type, variational formulation, the smoothness of the input data, a way of extension of function from the border to the region, component view of the boundary functions, auxiliary tasks.

Кривцов Владимир Станиславович – д-р техн. наук, проф., ректор, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, e-mail: v.kryvtsov@khai.edu.

Павленко Виталий Николаевич – д-р техн. наук, проф., проректор по науч.-пед. работе, Национальный аэрокосмического университета им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, e-mail: v.pavlenko@khai.edu.

Копычко Виктор Владимирович – асп. каф. технологии и производства летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, e-mail: viktor_kopychko@mail.ru.