

УДК 621.45: 51/483

В. В. КОТКИН

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»*

## СПОСОБ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА РАСЧЕТА ВНЕШНЕГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ТЕЛА ПРИ ОБТЕКАНИИ НЕОГРАНИЧЕННЫМ ДОЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

*Описан способ оценки погрешности численного метода расчета внешнего сопротивления тела при обтекании неограниченным дозвуковым потоком. Выделены факторы, влияющие на величину погрешности. Способ базируется на использовании парадокса Даламбера о внешнем сопротивлении тела в условиях обтекания неограниченным потенциальным дозвуковым потоком и предложенной в статье тестовой задачи, отличительным признаком которой является отсутствие противоречия между граничными условиями и размерами расчетной области при нулевом внешнем сопротивлении тела. Приведены результаты применения данного способа для оценки погрешности численного метода расчета внешнего сопротивления сопла газотурбинного двигателя многорежимного самолета в условиях дозвукового обтекания.*

**Ключевые слова:** внешнее сопротивление тела, погрешность численного метода, расчетная область, граничные условия, обтекание, неограниченный дозвуковой поток, потенциальное течение, сопло газотурбинного двигателя, сверхкритический перепад давления, режим полного расширения.

### Введение

В ряде задач прикладной газовой динамики определяется внешнее сопротивление тела в условиях обтекания неограниченным дозвуковым потоком с использованием численных методов расчета [1, 2]. При этом в величину найденного сопротивления входит погрешность, обусловленная спецификой применяемого численного метода. Последняя в свою очередь зависит от таких факторов как: дискретизация дифференциальных уравнений газовой динамики и корректность выбора граничных условий. При расчете вязких потоков с решением осредненных уравнений Навье – Стокса фактор граничных условий особенно важен, так как для уравнений эллиптического типа их следует задавать на всех внешних границах расчетной области, размеры которой ограничены ресурсами вычислительной техники. В этом случае в значительной мере погрешность может быть обусловлена несоответствием граничных условий размерам расчетной области.

В статье описан способ оценки погрешности расчета внешнего сопротивления тела при обтекании неограниченным дозвуковым потоком. Он базируется на использовании парадокса Даламбера об отсутствии внешнего сопротивления тела в условиях обтекания неограниченным потенциальным дозвуковым потоком и предложенной тестовой задачи, где нет несоответствия граничных условий размерам расчетной области при нулевом внешнем со-

противлении тела. Приведены результаты применения данного способа для оценки погрешности численного метода расчета внешнего сопротивления сопла газотурбинного двигателя многорежимного самолета в условиях дозвукового обтекания.

### 1. Описание способа

В основу способа оценки погрешности расчета внешнего сопротивления тела, обтекаемого неограниченным дозвуковым потоком, положены две задачи: первая – задача с известным точным решением по внешнему сопротивлению тела и вторая – задача с условиями на внешних границах расчетной области, не противоречащими ее размерам.

Сущность первой задачи заключается в следующем. В соответствии с парадоксом Даламбера при равномерном движении тела в неограниченно распространенном идеальном газе результирующая сила в направлении движения отсутствует, то есть внешнее сопротивление равно нулю [3, 4]. Парадокс справедлив для любых тел, имеющих замкнутую поверхность, а также тел, поперечный размер которых перестает меняться при удалении в бесконечность в направлении и против движения.

В работе [5] показано, что в качестве идеального газа можно рассматривать любой, в том числе и вязкий безвихревой поток. Это означает, что внешнее сопротивление  $X$  тела, помещенного в неограниченный несжимаемый (плотность  $\rho = \text{const}$ ), без-

вихревой (завихренность  $\omega=0$ ), вязкий (коэффициент динамической вязкости  $\mu \neq 0$ ) поток, должно быть равным нулю, то есть выполняется соотношение

$$X = \int_F (p - p_H) dF = 0,$$

где  $F$  – площадь сечения тела, нормального направлению движения;  $p_H$  и  $p$  – статические давления невозмущенного потока и на поверхности тела соответственно. Отклонение же  $X$  от 0 является погрешностью (ошибкой) численного метода расчета внешнего сопротивления  $\Delta X$ .

Рассмотрение способа ведется на примере обтекания потоком воздуха бесконечного плоского тела с криволинейной образующей, которое изображено на рис. 1. Утолщенным концом оно обращено против потока. Относительные размеры тела:  $r_1 = 1$ ;  $r_2 = 0,428$ ;  $d = 2,355$ ;  $R_s = 1,285$ ; угол  $\theta = 16^\circ$ . Размеры отнесены к радиусу миделевого сечения  $r_M$ . Там же показаны расчетная область ABCDEF и граничные условия на ее границах.

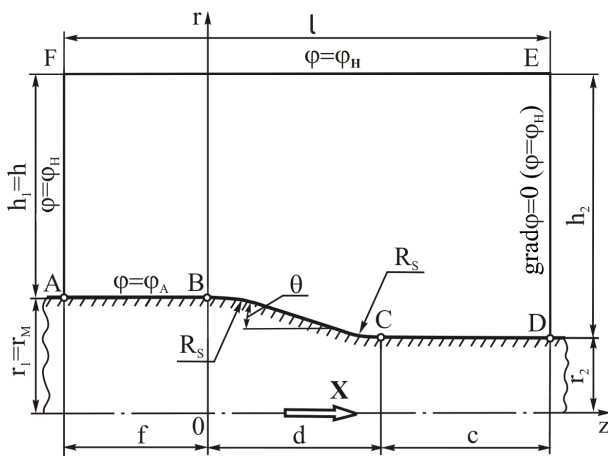


Рис. 1. Обтекаемое тело, расчетная область и граничные условия

Расчетная область удовлетворяет условиям  $h \geq 8$ ,  $f \geq 10$ ,  $c \geq 4$ ,  $h/f \leq 0,8$  [6]. Они получены при допущении о том, что границы достаточно удалены от участка с образующей BC, если их дальнейшее удаление не приводит к заметному изменению параметров в расчетной области.

В качестве граничных условий на левой и верхней входных границах принималось условие  $\phi = \phi_H$ , на правой выходной границе –  $\text{grad}\phi = 0$ . Здесь  $\phi$  – обобщенная (обозначает различные величины) зависимая переменная в решаемой системе уравнений газовой динамики,  $\phi_H$  соответствует невозмущенному потоку.

Применяется оптимизированная по густоте ко-

нечно-разностная сетка.

Реализация в используемом для расчета потока численном методе [6] условий, при которых справедлив парадокс Даламбера, достигается путем задания в каждом узле конечно-разностной сетки  $\rho$ ,  $\mu$ , и  $\omega$  так, что  $\rho = \rho_H$ ,  $\mu = \mu_H$ ,  $\omega = 0$ . Здесь  $\rho_H$  и  $\mu_H$  – плотность и динамическая вязкость невозмущенного потока.

Для оценки вклада граничных условий в величину  $\Delta X$  применяется вторая (тестовая) задача, которая получается корректировкой рассмотренной задачи так, что граничные условия не вступают в противоречие с размерами расчетной области, и их выполнение контролируется. Ниже приводится формулировка данной задачи.

Рассматривается обтекание тела, показанного на рис. 1. Выделяется контрольный объем ABCDEF и делаются следующие допущения:

- 1) размеры контрольного объема совпадают с размерами расчетной области в первой задаче;
- 2) на левой, верхней и правой границах контрольного объема параметры потока равны параметрам невозмущенного потока, то есть  $\phi = \phi_H$ ;
- 3) сила сопротивления тела  $X$  равна нулю.

Для верхней границы вводятся понятия проекций  $\bar{V}_z$ ,  $\bar{V}_r$  средней скорости  $\bar{V}$  так, что

$$\bar{V} = \frac{\int_{z_A}^{z_D} V dz}{z_D - z_A}; \quad \bar{V}_z = \frac{\int_{z_A}^{z_D} V_z dz}{z_D - z_A}; \quad \bar{V}_r = \frac{\int_{z_A}^{z_D} V_r dr}{z_D - z_A}.$$

В данных формулах и дальнейшем нижние индексы A, D, E, F при координатах  $z$  и  $r$  означают их принадлежность соответствующим точкам расчетной области.

После применения теоремы Эйлера к выделенному контрольному объему при условии, что  $X = 0$ , будем иметь равенство:

$$\rho_H V_H h_2 \bar{V}_z - \rho_H V_H h_1 \bar{V}_z - \rho_H \bar{V}_r \ell \bar{V}_z = 0, \quad (1)$$

где  $\ell = z_D - z_A$ ,  $h_1 = r_E - r_A$ ,  $h_2 = r_D - r_B$ .

Уравнение неразрывности примет вид

$$\rho_H V_H h_2 - \rho_H V_H h_1 = \rho_H \bar{V}_r \ell. \quad (2)$$

Рассмотрев совместно (1) и (2), получим

$$\bar{V}_r (V_H - \bar{V}_z) = 0. \quad (3)$$

Из (2) имеем

$$\bar{V}_r = \frac{V_H \Delta h}{\ell}, \quad (4)$$

где  $\Delta h = h_2 - h_1$ .

Проанализируем уравнение (3). Как видно оно выполняется, если  $\bar{V}_r = 0$  и  $\bar{V}_z = V_H$ . Из выражения (4) следует, что  $\bar{V}_r = 0$  при  $\ell = \infty$ . Физически это означает, что поступающая в контрольный объем за секунду конечная масса воздуха ничтожна по сравнению с массой, заключенной внутри этого объема. Данное решение близко к формулировке условий, при которых проявляется парадокс Даламбера, однако реализовать его в рамках численного метода в полной мере невозможно.

Второе решение соответствует условию  $\bar{V}_z = V_H$  при  $\bar{V}_r = V_H \Delta h / \ell$ , и легко реализуется путем задания на верхней границе  $V_z = V_H$  и контроля на ней выполнения равенства  $\bar{V}_r = V_H \Delta h / \ell$ . В этом случае отклонение  $X$  от 0 – это погрешность  $\Delta X$ , которая обусловлена неточностью численного метода, и не связана с некорректностью граничных условий.

Особенностью применяемого конечно-разностного метода [6] является то, что давление не входит в число зависимых переменных, а определяется в результате численного интегрирования после того, как поиск решения системы уравнений завершен. Для оценки вклада этапа расчета давления в величину ошибки  $\Delta X$  удобно воспользоваться тем обстоятельством, что в задаче рассматривается энергоизолированный потенциальный поток. В этом случае для расчета давления можно воспользоваться формулой [7]

$$p = p_H^* \left(1 - \frac{\chi - 1}{\chi + 1} \lambda^2\right)^{\frac{\chi}{\chi - 1}}, \quad (5)$$

где  $\chi$  - показатель адиабаты для воздуха,  $\lambda$  - приведенная скорость,  $p_H^*$  - полное давление невозмущенного потока. Тогда разность между  $\Delta X$  в тестовой задаче, и  $\Delta X$ , полученной с использованием формулы (5), является погрешностью, обусловленной расчетом давления.

Можно показать, что в случае обтекания тела вращения соотношение (3) применяется в том же виде, а вместо (4) следует рассматривать формулу

$$\bar{V}_r = \frac{V_H (r_A^2 - r_D^2)}{2\ell r_F}. \quad (6)$$

Сопоставление формул (4) и (6) показывает, что выводы, сделанные ранее из анализа формул (3) и (4) для плоского тела справедливы и для тела вращения.

### 3. Применение способа

Описанный способ применялся для оценки погрешности метода расчета внешнего сопротивления сопла газотурбинного двигателя многорежимного самолета в условиях дозвукового обтекания [6]. Принималось, что сопло работает на сверхкритических перепадах давления и режиме полного расширения. В этом случае расчетная область на рис. 1 с цилиндрическими участками АВ, CD и наружной обечайкой сопла BC отвечает требованиям поставленной задачи. Оценивалась погрешность расчета коэффициента внешнего сопротивления сопла  $C_X$ . Получены следующие результаты. Найденная из расчета потока в первой задаче погрешность  $\Delta C_X$  составила величину 0,00425, а во второй (тестовой) задаче – 0,00418. Причем во второй задаче отклонения  $\bar{V}_z$  от  $V_H$ ,  $\bar{V}_r$  от  $\bar{V}_r$ , определенной по формуле (6), и  $C_X$ , вычисленного по формуле Эйлера для выбранного контрольного объема, от 0 оказались пренебрежимо малыми. Из сравнения  $\Delta C_X$ , найденных в первой и второй задачах, следует, что погрешность, обусловленная неверным выбором граничных условий, составляет 1,65% всей погрешности (определена в первой задаче).

Таким образом, главной причиной погрешности в расчете  $C_X$  при правильном выборе размеров расчетной области и хорошей конечно-разностной сетке является неточность численного метода. Не соответствие же граничных условий размерам расчетной области играет в этом случае второстепенную роль.

Расчеты с использованием формулы (5) для определения давления в тестовой задаче показали, что величина погрешности уменьшилась до 0,00299. Таким образом, вклад численного интегрирования при расчете давления во всю погрешность составляет 28 %.

### Заключение

На основе использования парадокса Даламбера о внешнем сопротивлении тела в условиях обтекания неограниченным потенциальным дозвуковым потоком и предложенной тестовой задачи, отличительным признаком которой является отсутствие противоречия между граничными условиями и размерами расчетной области при нулевом внешнем сопротивлении тела, разработан способ оценки погрешности определения численным методом внешнего сопротивления тела при обтекании неограниченным дозвуковым потоком.

Приведены результаты применения данного способа для оценки погрешности метода расчета

внешнего сопротивления сопла газотурбинного двигателя многорежимного самолета в условиях дозвукового обтекания.

### Литература

1. Симаков, Н. Н. Расчет обтекания и сопротивления шара в ламинарном и сильнотурбулентном потоках [Текст] / Н. Н. Симаков // Журнал технической физики. – 2013. – Т. 83, Вып. 4. – С. 220–223.

2. Расчет аэродинамического коэффициента лобового сопротивления тела в дозвуковых и трансзвуковых режимах движения с помощью пакета ANSYS Fluent [Текст] / В. В. Фарапонов, Н. В. Савкина, А. С. Дьячковский, А. В. Чупашиев // Компьютерные исследования и моделирование. – 2012. – Т. 4, № 4. – С. 845–853.

3. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа [Текст] / Л. Г. Лойцянский. – М. : Наука, 1987. – 840 с.

4. Schlichting, H. Boundary-Layer Theory [Text] / H. Schlichting, K. Gersten. – Berlin : Springer-Verlag, 2000. – 800 p.

5. Борисенко, А. И. Газовая динамика двигателей [Текст] / А. И. Борисенко. – М. : Оборонгиз, 1962. – 794 с.

6. Коткин, В. В. Методика расчета течения, возникающего при работе выходного устройства авиационного ГТД в условиях дозвукового полета [Текст] / В. В. Коткин // Совершенствование турбоустановок методами математического и физического моделирования : тр. Междунар. науч.-техн. конф., г. Харьков, 29 сент. – 2 окт. 1997 г. / НАН Украины [и др.]. – X, 1997. – С. 220–223.

7. Абрамович, Г. Н. Прикладная газовая динамика [Текст] / Г. Н. Абрамович. – М. : Наука, 1984. – 867 с.

Поступила в редакцию 3.11.2015, рассмотрена на редколлегии 18.11.2015

## СПОСІБ ОЦІНКИ ПОГРІШНОСТІ ЧИСЕЛЬНОГО МЕТОДУ РОЗРАХУНКУ ЗОВНІШНЬОГО ОПОРУ ТІЛА ПРИ ОБТІКАННІ НЕОБМЕЖЕНИМ ДОЗВУКОВИМ ПОТОКОМ

*В. В. Коткін*

Описано спосіб оцінки погрішності чисельного методу розрахунків зовнішнього опору тіла при обтіканні необмеженим дозвуковим потоком. Виділено фактори, що впливають на величину погрішності. Спосіб базується на використанні парадокса Даламбера про зовнішній опір тіла в умовах обтікання необмеженим потенційним дозвуковим потоком і запропонованого в статті тестового завдання, відмітною ознакою якого є відсутність протиріччя між граничними умовами й розмірами розрахункової області при нульовому зовнішньому опорі тіла. Наведено результати застосування даного способу для оцінки погрішності чисельного методу розрахунків зовнішнього опору сопла газотурбинного двигуна багаторежимного літака в умовах дозвукового обтікання.

**Ключові слова:** зовнішній опір тіла, погрішність чисельного методу, розрахункова область, граничні умови, обтікання, необмежений дозвуковий потік, потенційна течія, сопло газотурбинного двигуна, надкритичний перепад тиску, режим повного розширення.

## ERROR ESTIMATION APPROACH OF NUMERICAL COMPUTATIONAL METHOD OF BODY EXTERNAL RESISTANCE IN UNBOUNDED SUBSONIC AIRFLOW

*V. V. Kotkin*

Error estimation approach of numerical computational method of body external resistance in unbounded subsonic airflow is described. Factors influenced the value of error are marked out. The approach is based on the use of d'Alembert paradox of body external resistance in unbounded potential subsonic airflow and test problem proposed in the article. The characteristic feature of the test problem is the absence of conflict between the boundary conditions and calculation area dimensions at zero body external resistance. The results of the application of the given approach for error estimation of numerical computational method of external resistance of multimode airplane gas-turbine engine nozzle in subsonic flow are produced.

**Keywords:** body external resistance, error of numerical computational method, calculation area, boundary conditions, flow, unbounded subsonic airflow, potential flow, gas-turbine engine nozzle, supercritical pressure drop, full expansion rate.

**Коткин Василий Васильевич** – канд. техн. наук, доцент кафедры теории авиационных двигателей, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: v.v.kotkin@gmail.com.