

УДК 517.958:539.4: 629.7.02

**С. А. ХАЛИЛОВ, В. С. КРИВЦОВ, В. Б. МИНТЮК, Д. А. ТКАЧЕНКО,  
В. Н. ПАВЛЕНКО, В. В. КОПЫЧКО***Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина***ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ  
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ**

*Описано дальнейшее развитие ранее предложенного подхода к решению краевых задач типа Дирихле при изгибе прямоугольной трансверсально-изотропной пластины, описываемой системой трех дифференциальных уравнений с частными производными и имеющей суммарный порядок, равный шести. Подход к решению полностью неоднородной краевой задачи основан на сведении к решению ряда базовых краевых задач. Для реализации метода предложено несколько способов продолжения краевых функций с границы в область и дан сравнительный анализ их эффективности. Показано, что наилучшими аппроксимативными свойствами в смысле сходимости и точности построенных аналитико-численных решений обладают полиномиальные функции.*

**Ключевые слова:** базовая краевая задача, критериальное решение, формальное и неформальное продолжение функции с границы в область, сходимость и точность.

**Введение**

Прогресс естественных наук, в том числе и механики деформируемого твердого тела, всегда шел и идет в двух направлениях: по пути развития его физико-механических основ (математических моделей) и создания новых и усовершенствования известных методов анализа. К сожалению, почему-то принято считать первое направление более престижным, о чем свидетельствует тот факт, что число работ, посвященных этому направлению, превышает число работ, посвященных второму. Эта тенденция наблюдается и в таком индустриальном методе, как метод конечного элемента. Следует отметить, что для подготовки специалиста-теоретика, на наш взгляд, требуется намного меньше времени, чем для подготовки квалифицированного вычислителя, так как последний должен обладать не только современными знаниями, значительным опытом вычислений, но и определенной интуицией, вырабатываемой в течение длительного времени. Оптимальным является тот путь развития науки, когда эти два направления смыкаются. Вспомним, например, Карла Фридриха Гаусса, признанного короля математики XIX века, и академика Н. А. Крылова, знаменитого русского и отечественного судостроителя.

Что же касается парадигмы данной работы, то затруднительно привести подобные примеры. Достаточно указать, что в трудах известных современных механиков, как зарубежных: Е. Reissner [1 - 3], J. M. Whitney [4], J. N Reddy [5], С. Т. Herakovich, М. W. Нуге и т.д., так и отечественных: С. Г. Лехницкого [6], В. И. Королева [7], В. В. Болотина и Ю. Н. Новичкова [8], С. А. Амбарцумяна [9],

А. О. Рассказова [10], Ю. М. Тарнопольского, А. К. Малмейстера, Я. Н. Григоренко, Ю. Н. Работнова и др., – рассматриваются разные физические модели оболочек и пластин, выводятся разрешающие уравнения и формулируются соответствующие им краевые задачи. При решении же конкретных задач принимаются такие краевые условия (в основном условия свободного опирания), чтобы получить решения в тригонометрических рядах. Задача же, поставленная и решенная в данной работе, как нам известно, рассматривается впервые.

В работе преследуются две конечные цели. Первая – дать с любой наперед заданной точностью аналитико-численное решение неоднородной нетривиальной краевой задачи типа Дирихле для трансверсально-изотропной прямоугольной пластины, являющейся основным конструктивным элементом несущих поверхностей летательных аппаратов. Вторая цель заключается в создании того самого «кирпичика», из которого в дальнейшем строится «здание» метода сопряжения конструктивных элементов, представляющего в известной мере альтернативу методу конечного элемента. Таким образом, эта работа в основном относится к направлению вычислительной механики деформируемого твердого тела.

**1. Постановка краевой задачи**

Рассматривается неоднородная краевая задача теории изгиба прямоугольной трансверсально-изотропной пластины размерами  $2a \times 2b$ . Переход от размерной системы координат  $\Omega' = \{(x', y') : -a < x' < a, -b < y' < b\}$  к безразмерной  $\Omega = \{(x, y) : -1 < x, y < 1\}$  осуществляется по равенствам:

$$x' = ax \quad \text{и} \quad y' = by.$$

В выбранной безразмерной системе координат уравнения равновесия пластины (уравнения статики), записанные в усилиях и моментах, не зависят от свойств рассматриваемого материала пластины и имеют привычный вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= -qa, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial H}{\partial y} - aQ_x &= -m_x a, \\ \frac{\partial H}{\partial x} + \lambda \frac{\partial M_y}{\partial y} - aQ_y &= -m_y a \quad \text{в } \Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\lambda = a/b$  – параметр удлинения пластины;

$q(x, y)$  – внешнее давление,

$m_x(x, y)$  и  $m_y(x, y)$  – внешние удельные изгибающие моменты, приведенные к срединной плоскости пластины;

$Q_x, Q_y$  – перерезывающие силы,

$M_x, M_y, H$  – изгибающие и крутящий моменты в пластине.

Соотношения упругости в случае трансверсально-изотропного материала определяются следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} Q_x &= k^* h G^* \varepsilon_{xz}, \quad Q_y = k^* h G^* \varepsilon_{yz}, \\ M_x &= D(\kappa_x + \nu \kappa_y), \quad M_y = D(\kappa_x + \nu \kappa_y), \\ H &= \frac{D(1-\nu)}{2} 2\kappa_{xy} \quad \text{в } \bar{\Omega} \equiv \Omega \cup \Gamma, \end{aligned} \quad (2)$$

здесь  $k^*$  – поправочный коэффициент, учитывающий неравномерность распределения по толщине пластины касательных напряжений, для прямоугольного сечения  $k^* = 5/6$ ;

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{– цилиндрическая жёсткость пла-}$$

стины постоянной толщины  $h$  в плоскости изотропии;  $E, \nu$  – обычные модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины в той же плоскости;

$G^*$  – модуль сдвига на площадках, перпендикулярных срединной плоскости пластины;

$\Gamma$  – граница прямоугольной области  $\Omega$ .

Деформации поперечного сдвига  $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$  и деформации изменения кривизн  $\kappa_x, \kappa_y$  и кручения  $\kappa_{xy}$  срединной поверхности трансверсально-изотропной пластины определяются следующими геометрическими соотношениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xz} &= \gamma_x + \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial x} \neq 0, \quad \kappa_x = \frac{1}{a} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yz} &= \gamma_y + \frac{\lambda}{a} \frac{\partial w}{\partial y} \neq 0, \quad \kappa_y = \frac{\lambda}{a} \frac{\partial \gamma_y}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$2\kappa_{xy} = \frac{1}{a} \left( \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} \right) \quad \text{в } \bar{\Omega},$$

где  $w(x, y)$  – прогиб пластины;

$\gamma_x(x, y)$  и  $\gamma_y(x, y)$  – углы поворота нормального элемента пластины в плоскостях « $xOz$ » и « $yOz$ » соответственно.

Положительное направление осей координат, действующих нагрузок, удельных усилий и моментов, перемещений и углов поворота показано на рис. 1.

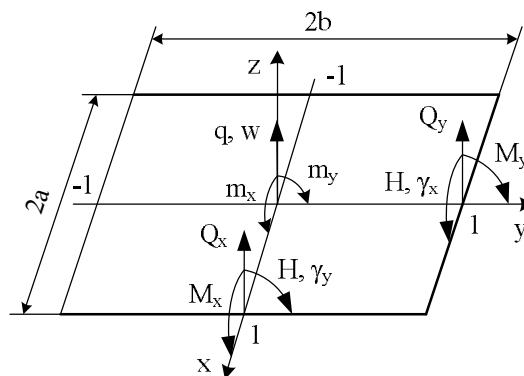


Рис. 1. Система координат и положительные направления перемещений, нагрузок, усилий и моментов

В классической теории Кирхгофа из условий отсутствия деформаций поперечных сдвигов  $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$  следует равенство нулю перерезывающих сил. Тогда уравнения равновесия будут грубо нарушены. Поэтому при использовании теории Кирхгофа в уравнениях равновесия сохраняют перерезывающие силы, а в соотношениях упругости (2) нарушают первые два уравнения, предварительно переписав их так:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{Q_x}{hk^* G^*} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{yz} = \frac{Q_y}{hk^* G^*}.$$

Теперь  $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$  можно принять равными нулю при  $G^* = \infty$ , тем самым реальный материал заменяется неким гипотетическим, обладающим бесконечной жесткостью на сдвиг. Одновременно это означает, что при вычислении потенциальной энергии деформирования пренебрегают влиянием касательных напряжений  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ , считая их вклад в энергию весьма и весьма малым в сравнении с энергией других напряжений. Но если жесткость на сдвиг  $G^*$  – величина конечная, тогда приходим к рассматриваемой здесь теории.

Учитывая сказанное выше, получим разрешающую систему уравнений равновесия в обобщенных перемещениях. Для этого усилия и моменты в пластине (2) представим через деформации (3), а полученный результат подставим в уравнения равновесия (1). В итоге придем к следующей системе

уравнений равновесия в перемещениях и углах поворота:

$$\begin{aligned} L_{11}\tilde{w} + L_{12}\gamma_x + L_{13}\gamma_y &= +\frac{aq}{hk^*G^*}, \\ L_{21}\tilde{w} + L_{22}\gamma_x + L_{23}\gamma_y &= -\frac{m_x}{hk^*G^*}, \\ L_{31}\tilde{w} + L_{32}\gamma_x + L_{33}\gamma_y &= -\frac{m_y}{hk^*G^*} \text{ в } \Omega, \end{aligned} \quad (4)$$

где дифференциальные операторы  $L_{ij}$  определяются формулами:

$$\begin{aligned} L_{11} &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right), \quad L_{12} = L_{21} = -\frac{\partial}{\partial x}, \\ L_{13} = L_{31} &= -\lambda \frac{\partial}{\partial y}, \quad L_{23} = L_{32} = \frac{\lambda D(1+\nu)}{2hk^*G^*a^2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}, \\ L_{22} &= -1 + \frac{D}{hk^*G^*a^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\lambda^2 D(1-\nu)}{2hk^*G^*a^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{33} &= -1 + \frac{D(1-\nu)}{2hk^*G^*a^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\lambda^2 D}{hk^*G^*a^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

а функция  $w(x, y) = a\tilde{w}(x, y)$ .

В рассматриваемой здесь неоднородной краевой задаче типа Дирихле ставятся следующие краевые условия:

$$x = -1: w = \eta_1(y), \quad \gamma_x = \eta_3(y), \quad \gamma_y = \eta_5(y); \quad (6)$$

$$x = +1: w = \eta_2(y), \quad \gamma_x = \eta_4(y), \quad \gamma_y = \eta_6(y); \quad (7)$$

$$y = -1: w = \mu_1(x), \quad \gamma_x = \mu_3(x), \quad \gamma_y = \mu_5(x); \quad (8)$$

$$y = +1: w = \mu_2(x), \quad \gamma_x = \mu_4(x), \quad \gamma_y = \mu_6(x); \quad (9)$$

где  $\eta_k(y)$  и  $\mu_k(x)$ ,  $k = 1..6$  – заданные функции прогиба и углов поворота на соответствующих участках граничного контура пластины.

В соответствии с методом, предложенным одним из авторов [11] и используемым в работе, наряду с постановкой полностью неоднородной краевой задачи формулируются и следующие две полуоднородные задачи.

Первая **базовая** краевая задача описывается неоднородной системой дифференциальных уравнений (4) при однородных краевых условиях, следующих из условий (6) – (9), т. е.:

$$w = \gamma_x = \gamma_y \equiv 0 \text{ на } \Gamma. \quad (10)$$

Вторая краевая задача описывается системой однородных дифференциальных уравнений:

$$L_{i1}\tilde{w} + L_{i2}\gamma_x + L_{i3}\gamma_y = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (11)$$

в прямоугольной области  $\Omega$  и неоднородными краевыми условиями (6) – (9) на  $\Gamma$ .

Происхождение термина «**базовая** краевая задача» объясняется тем, что решение второй полуоднородной краевой задачи сводится к решению ряда

базовых задач на основании теоремы о продолжении функции с границы в область и обратной ей теоремы о следах. При этом существенно используются теоремы вложения.

Вкратце обсудим свойства гладкости ожидаемых решений базовой задачи. Гладкость этих решений зависит от гладкости входных данных: коэффициентов операторов  $L_{ij}$  (в данной задаче эти коэффициенты постоянны), гладкости правых частей в системе разрешающих уравнений задачи, гладкости краевых функций и гладкости границы  $\Gamma$  области  $\Omega$ .

Из конечности энергии деформирования автоматически следует, что искомым вектор  $\mathbf{u} = (w, \gamma_x, \gamma_y) \in (H^{(1)}(\Omega))^3$ , где  $H^{(1)}(\Omega)$  – пространство С. Л. Соболева функций, квадратично интегрируемых вместе с первыми производными ( $H^{(k)}(\Omega) \equiv W_2^{(k)}(\Omega)$ ). Отсюда, между прочим, и из теорем вложения следует, что  $\mathbf{u} \in C(\bar{\Omega})$  [12], т. е.

граничные функции должны быть непрерывными, что вполне согласуется с их механическим смыслом. Дальнейшее увеличение гладкости искомых функций зависит, прежде всего, от гладкости границы  $\Gamma$ . Поскольку здесь граница  $\Gamma$  содержит угловые точки (нормаль в этих точках терпит разрыв и угол между нормалью равен  $90^\circ$ ), а краевые условия заданы в терминах значений искомых функций, согласованных в этих точках, то, как известно, для классической изотропной модели [13], не учитывающей деформации поперечного сдвига, можно показать, что  $\mathbf{u} \in H^{(2)}(\Omega)$ . Дальнейшее увеличение гладкости даже для классической модели не имеет места. Какова же ситуация для рассматриваемой модели, нам, к сожалению, не известно. В связи с этим необходимо исследовать особенности решения в угловой точке границы для данной модели, т. е. определить: влияет ли и насколько учет поперечных сдвигов на указанную особенность.

В плане поднятого вопроса необходимо отметить работу [14], в которой в связи с гладкостью уравнений второго порядка и их систем другим путем получен аналогичный результат. Однако в этой работе свойства гладкости границы не обсуждаются вовсе. Данный вопрос имеет непосредственное отношение к решению XIX и XX проблем Д. Гильберта [15, с. 151 – 152].

Прежде чем переходить к необходимой гладкости правых частей, следует ввести пространство функционалов  $H^{(-k)}$  – пространство Соболева с отрицательным индексом. Поскольку, как было установлено выше, ожидаемое решение  $\mathbf{u} \in (H^{(2)}(\Omega))^3$  (здесь  $k = 2$ ), тогда всякий элемент  $f \in H^{(-2)}$  можно представить (хотя не единственным способом) в виде

$$f = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f_\alpha, \quad f_\alpha \in L_2(\Omega), \quad (12)$$

и это равенство принимается в смысле обобщенных функций. Здесь  $\alpha$  – мультииндекс,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots$ ;  $D^\alpha$  – производная следующих видов:  $D^0 \equiv 1$ ,  $D^1$  – производные вида:  $\partial / \partial x$  или  $\partial / \partial y$ ,  $D^2$  – производные вида:  $\partial^2 / \partial x^2$ ,  $\partial^2 / \partial y^2$  и  $\partial^2 / (\partial x \partial y)$ . Таким образом, правые части являются функционалами, в нашем конкретном случае в составе правых частей могут присутствовать  $\delta$ -Дирака и их производные. Механически это означает, что в правых частях могут присутствовать как сосредоточенные силы, так и сосредоточенные моменты.

И, наконец, базовая задача эквивалентна вариационной. В рассматриваемом случае, как нетрудно показать, оператор  $L$  является положительно определенным. Доказательство этого утверждения, минуя механический смысл задачи, базируется на так называемом неравенстве Корна. Однако в теории оболочек и пластин существуют и свои установленные принципы и теоремы, которые подтверждают справедливость принципа симметрии (теорема Бетти о взаимности работ: оператор  $L$  – симметричный) и положительную определенность оператора  $L$  (существование конечной положительной энергии деформирования).

Данное обстоятельство приводит к тому, что краевая базовая задача (4), (10) эквивалентна интегральному тождеству

$$\mathbf{u} \in \left( H_0^{(1)}(\Omega) \right)^3, \quad (13)$$

$$(\mathbf{L}\mathbf{u}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{q}, \mathbf{v}) \equiv 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \left( H^{(1)}(\Omega) \right)^3,$$

где  $(\mathbf{L}\mathbf{u}, \mathbf{v})$  – симметрическая билинейная форма;

$l(\mathbf{q}, \mathbf{v})$  – непрерывный и ограниченный линейный функционал.

Отсюда немедленно следует вариационная постановка:

$$L(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - 2l(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \rightarrow \min, \quad \mathbf{u} \in \left( H_0^{(1)}(\Omega) \right)^3. \quad (14)$$

Поскольку две задачи: краевая (4), (10) и вариационная (14) эквивалентны, то в дальнейшем будем исходить из постановки базовой краевой задачи в виде системы дифференциальных уравнений и однородных краевых условий. При этом решение общей неоднородной краевой задачи сведем к решению ряда базовых задач. В заключение отметим, что требование симметричности оператора  $L$ , а, следовательно, его положительной определенности, не обязательно. Вариационная задача (14) корректна и имеет единственное решение, если оператор  $L$  –  $(H^{(1)}(\Omega))^3$  – эллиптичен (теорема Лакса–Мильграма).

## 2. Решение неоднородной краевой задачи

Рассмотрим исходную краевую задачу (4), (6) – (9). Общее решение этой задачи представим в виде суммы двух компонент:

$$\begin{aligned} w(x, y) &= w^*(x, y) + w^0(x, y), \\ \gamma_x(x, y) &= \gamma_x^*(x, y) + \gamma_x^0(x, y), \\ \gamma_y(x, y) &= \gamma_y^*(x, y) + \gamma_y^0(x, y), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $w^*$ ,  $\gamma_x^*$ ,  $\gamma_y^*$  – специальное частное решение исходной краевой задачи (4), (10), такое, что выполнены однородные краевые условия;

$w^0$ ,  $\gamma_x^0$ ,  $\gamma_y^0$  – решение второй полуоднородной краевой задачи (11), (6) – (9).

Точные решения указанных задач не известны. Поэтому следует обратиться к методам построения приближенных аналитико-численных решений в том смысле, что они должны быть представлены в виде замкнутых выражений, содержащих некоторое множество неизвестных параметров. Последние же определяются из решений системы линейных алгебраических уравнений, построенных тем или иным методом (вариационным, проекционным и т. д.).

### 2.1. Построение решения базовой краевой задачи

Рассматривается краевая задача для системы дифференциальных уравнений (4) при однородных краевых условиях (10). Решение отыскивается так:

$$\begin{aligned} w^*(x, y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} W_{mn} h_m(x) h_n(y), \\ \gamma_x^*(x, y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_{1mn} h_m(x) h_n(y), \\ \gamma_y^*(x, y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_{2mn} h_m(x) h_n(y), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $W_{mn}$ ,  $\Gamma_{1mn}$ ,  $\Gamma_{2mn}$  – коэффициенты, подлежащие определению;  $h_i(s)$ ,  $i = \overline{0, \infty}$  – специальная система ортонормированных на отрезке  $[-1; +1]$  координатных функций, предложенная и исследованная в работах [16, 17].

Определить значения коэффициентов  $W_{mn}$ ,  $\Gamma_{1mn}$ ,  $\Gamma_{2mn}$  в искомым решениях (16) можно различными способами. В данной работе остановимся на следующих двух методах: Бубнова–Галеркина и Ритца. Поскольку оператор  $L$  краевой задачи (4), (10) является положительно определенным, то вариационный метод Ритца и метод ортогонализации по Бубнову–Галёркину приводят к одним и тем же системам линейных алгебраических уравнений, т.е. они эквивалентны. Так как  $h_m(x) \cdot h_n(y) \in D(L)$  (где  $D$  – область определения оператора  $L$ ), то краевые условия выполнены. Выбор этой системы в качестве

координатной оправдан тем, что, кроме линейной независимости и полноты в энергетическом пространстве  $H_L$  оператора  $L$ , они отвечают всем требованиям к координатным системам, предъявляемым в вариационных и проекционных методах [18, 19], а именно: эта система сильно минимальна в  $H_L$ , более того, она почти ортонормирована в  $H_L$ , что обеспечивает устойчивость как процедуры решения системы линейных алгебраических уравнений относительно искомым коэффициентов, так и самих решений (это будет продемонстрировано далее), а также сходимость приближенных решений к точному в соответствующей метрике. Остается решить вопрос о стремлении невязки системы уравнений к нулю. В работе [20] предложен способ построения системы координатных функций, которые обеспечивали бы это стремление к нулю. С. Г. Михлин предлагает в качестве координатной выбрать систему собственных функций оператора  $M$ , сходного с оператором  $L$ , при этом он доказывает теорему о достаточности, но не необходимости такого выбора. Это означает (как было ранее показано [21–24]), что существуют и другие системы функций, обеспечивающие стремление невязки к нулю. А построение собственных функций оператора  $M$ , сходного с оператором  $L$ , – задача такой же сложности, как и здесь решаемая. Как будет показано в дальнейшем (конструктивно), предложенная система также обеспечивает стремление к нулю невязки в системе уравнений.

## 2.2. Сведение решения второй полуоднородной краевой задачи к решению базовой

Применяемый ниже подход [11] сведения неоднородной краевой задачи к базовой существенно опирается на возможности представления правых частей краевых функций (6) – (9) в виде суммы двух компонент, одна из которых линейна, а вторая может быть представлена в виде рядов по системе  $h_i(s)$ , где  $s$  равно либо  $x$ , либо  $y$ :

$$\begin{aligned} \eta_k(y) &= \pi_k(y) + \varphi_k(y), \\ \mu_k(x) &= \rho_k(x) + \psi_k(x) \quad \text{для } k = 1..6, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\pi_k$  и  $\rho_k$  – многочлены первой степени, которые подбираются так, чтобы выполнялись условия:

$$\varphi_k(\pm 1) = \psi_k(\pm 1) = 0, \quad k = 1..6, \quad (18)$$

т. е.  $\pi_k$  и  $\rho_k$  ( $k = 1..6$ ) выбирают значения компонент искомой вектор-функции перемещений в угловых точках. Тогда вторые компоненты в представлениях (17) будут удовлетворять условиям:

$$\pi_k(\pm 1) = \eta_k(\pm 1), \quad \rho_k(\pm 1) = \mu_k(\pm 1), \quad k = 1..6. \quad (19)$$

Но поскольку правые части краевых условий – функции непрерывные, вторые компоненты также непрерывны и могут быть разложены в сходящиеся

в том или ином смысле ряды по полной и ортонормированной системе  $h_i(s)$ , которые удовлетворяют тем же краевым условиям, что и разлагаемые функции. Если же краевые функций имеют непрерывные производные на рассматриваемом интервале, то указанные ряды будут сходиться абсолютно и равномерно. Если же гладкость краевых условий более высока, а именно: производные этих функций непрерывны до порядка  $j-1$ , а производная порядка  $j$  удовлетворяет условиям Дирихле, тогда для коэффициентов  $\alpha_i$  обобщенного ряда Фурье по системе  $h_i(s)$  справедливы оценки  $|\alpha_i| < C / |i|^{j+1}$ . Иными словами, ситуация здесь такая же, как и в тригонометрическом случае [25]. Отсюда, между прочим, следует, что все особенности краевых функций  $\mu_k$  и  $\eta_k$  будут содержаться лишь во вторых компонентах  $\varphi_k$ ,  $\psi_k$ , т. е. вторые компоненты наследуют свойства гладкости исходных краевых функций. Из дальнейшего изложения будет ясно, что для получения классического решения (понимаемого в обычном смысле) краевой задачи требования к гладкости к краевым функциям (6) – (9) нужно повысить, а именно: потребовать, чтобы они были класса  $C_3(-1;+1)$ , тогда, как следует из изложенного выше, ряды вторых производных будут сходиться также равномерно и абсолютно. Поскольку максимальный порядок каждого дифференциального уравнения из системы (4) равен двум, то левые части могут быть вычислены корректно, а полученные решения будут решениями в их классическом понимании<sup>1</sup>.

Таким образом, представления (17) конкретизируются так: на каждом из участков граничного контура

$$\chi_k(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{ik} h_i(s), \quad k = 1..6, \quad s \in (-1;1), \quad (20)$$

где  $\chi_k(s)$  – это либо  $\varphi_k(y)$ , либо  $\psi_k(x)$ ;  $\chi_k(s) \in C_3(-1;+1)$ <sup>2</sup>.

Теперь все готово для перехода к изложению самого метода сведения.

В соответствии с представлением (17) правых частей неоднородных краевых условий (6) – (9) аналитическо-численное решение второй полуоднородной краевой задачи представляется в виде суммы двух компонент:

<sup>1</sup> Необходимо отметить, что если не выполняется требование  $\varphi_k, \psi_k \in C_3(-1;+1)$ , то решение краевой задачи может и не существовать в его классическом понимании. Однако это решение существует и единственно в обобщенном понимании в классе обобщенных функций (в смысле слабого решения).

<sup>2</sup> Если функции  $\chi_k(s)$  являются также многочленами, чего можно добиться на основании теоремы К. Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции степенными многочленами с любой наперед заданной точностью [15, с. 107], то ряды в (20) превращаются в конечные суммы.

$$\begin{aligned} w^0(x, y) &= w^{01}(x, y) + w^{02}(x, y), \\ \gamma_x^0(x, y) &= \gamma_x^{01}(x, y) + \gamma_x^{02}(x, y), \\ \gamma_y^0(x, y) &= \gamma_y^{01}(x, y) + \gamma_y^{02}(x, y), \end{aligned} \quad (21)$$

где слагаемые с индексом «01» – соответствуют первым компонентам краевых функций в (17), а слагаемые с индексом «02» – вторым компонентам из того же представления.

### 2.2.1. Построение решения, убирающего значения краевых функций в угловых точках границы

Приступим к построению решения, отвечающего первой (линейной) компоненте в представлении (17)<sup>3</sup>. Поскольку эта компонента есть многочлен, то построим полиномиальное продолжение этих компонент в область так, чтобы краевые условия, им отвечающие, были выполнены (здесь требуется отметить, что такое продолжение вовсе необязательно и таких продолжений – множество). Продолженным таким образом функциям предадим верхние индексы «11»:

$$\begin{aligned} w^{11}(x, y) &= \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \widetilde{W}_{pq} f_p(x) f_q(y), \\ \gamma_x^{11}(x, y) &= \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \widetilde{\Gamma}_{1pq} f_p(x) f_q(y), \\ \gamma_y^{11}(x, y) &= \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \widetilde{\Gamma}_{2pq} f_p(x) f_q(y), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$f_1(z) = \frac{1}{2}(1-z), \quad f_2(z) = \frac{1}{2}(1+z), \quad z = x \text{ или } y, \quad (23)$$

а  $\widetilde{W}_{pq}$ ,  $\widetilde{\Gamma}_{1pq}$ ,  $\widetilde{\Gamma}_{2pq}$  – значения заданных функций в угловых точках:

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{11} &= w(-1, -1), \quad \widetilde{W}_{12} = w(-1, +1), \\ \widetilde{W}_{21} &= w(+1, -1), \quad \widetilde{W}_{22} = w(+1, +1), \\ \widetilde{\Gamma}_{1,11} &= \gamma_x(-1, -1), \quad \widetilde{\Gamma}_{1,12} = \gamma_x(-1, +1), \\ \widetilde{\Gamma}_{1,21} &= \gamma_x(+1, -1), \quad \widetilde{\Gamma}_{1,22} = \gamma_x(+1, +1), \\ \widetilde{\Gamma}_{2,11} &= \gamma_y(-1, -1), \quad \widetilde{\Gamma}_{2,12} = \gamma_y(-1, +1), \\ \widetilde{\Gamma}_{2,21} &= \gamma_y(+1, -1), \quad \widetilde{\Gamma}_{2,22} = \gamma_y(+1, +1). \end{aligned} \quad (24)$$

Однако можно предложить более «экономичный» подход, заключающийся в эквивалентном представлении полиномиального продолжения:

$$\begin{aligned} w^{11}(x, y) &= A_0 + A_1x + A_2y + A_3xy, \\ \gamma_x^{11}(x, y) &= B_0 + B_1x + B_2y + B_3xy, \\ \gamma_y^{11}(x, y) &= C_0 + C_1x + C_2y + C_3xy. \end{aligned} \quad (25)$$

Сопоставив равенства (22) с (25), легко заметить, что между вновь введенными коэффициентами  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$ ,  $k = 0..3$  и  $\widetilde{W}_{pq}$ ,  $\widetilde{\Gamma}_{1pq}$ ,  $\widetilde{\Gamma}_{2pq}$  существует взаимно однозначная связь. Выбор эквивалентных представлений (22) или (25) зависит от предпочтений исследователя, хотя некоторые рекомендации будут сделаны в дальнейшем.

Если воспользоваться продолжением краевых функций в область в виде (22), то для получения решения, «выбирающего» значения заданных функций в угловых точках, необходимо указанное решение записать в виде

$$\begin{aligned} w^{01}(x, y) &= w^{11}(x, y) + w^{12}(x, y), \\ \gamma_x^{01}(x, y) &= \gamma_x^{11}(x, y) + \gamma_x^{12}(x, y), \\ \gamma_y^{01}(x, y) &= \gamma_y^{11}(x, y) + \gamma_y^{12}(x, y). \end{aligned} \quad (26)$$

Для определения вторых компонент этого решения надо решить следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} L_{i1} \widetilde{w}^{i2} + L_{i2} \gamma_x^{i2} + L_{i3} \gamma_y^{i2} &= \\ = - \left( L_{i1} \widetilde{w}^{i1} + L_{i2} \gamma_x^{i1} + L_{i3} \gamma_y^{i1} \right), \quad i = 1, 2, 3; \end{aligned} \quad (27)$$

при однородных краевых условиях (10). Таким образом, построение искомых решений (26) сведено к решению ряда базовых задач.

С этой же целью подобную модификацию необходимо выполнить и в продолжении функции с границы в область в виде (25):

$$\begin{aligned} w^{01}(x, y) &= A_0(1 + f_{0,w}) + A_1(x + f_{1,w}) + \\ &+ A_2(y + f_{2,w}) + A_3(xy + f_{3,w}), \\ \gamma_x^{01}(x, y) &= B_0(1 + f_{0,\gamma_x}) + B_1(x + f_{1,\gamma_x}) + \\ &+ B_2(y + f_{2,\gamma_x}) + B_3(xy + f_{3,\gamma_x}), \\ \gamma_y^{01}(x, y) &= C_0(1 + f_{0,\gamma_y}) + C_1(x + f_{1,\gamma_y}) + \\ &+ C_2(y + f_{2,\gamma_y}) + C_3(xy + f_{3,\gamma_y}), \end{aligned} \quad (28)$$

где  $f_{i,w}$ ,  $f_{i,\gamma_x}$ ,  $f_{i,\gamma_y}$ ,  $i = 0..3$  – функции двух переменных, подлежащие определению путем решения однородных краевых задач типа (27), (10) (но на этом вопросе мы подробно не останавливаемся ввиду его тривиальности). Отметим только, что последняя запись может иметь некоторые преимущества (в основном вычислительного характера) перед формой представления (26), поскольку некоторые из функций  $f_{i,w}$ ,  $f_{i,\gamma_x}$ ,  $f_{i,\gamma_y}$  могут обратиться в нуль.

Наконец отметим, что, если в некоторой угловой точке задано значение любой искомой функции

<sup>3</sup> Гарантом возможности построения такой процедуры является теорема о продолжении (не единственном) функции с границы в область. Задача о продолжении функции весьма сложна, если область произвольна, но для канонических областей, таких, как прямоугольник, круг и др., решение этого вопроса тривиально.

из (22), (25), то в силу её непрерывности на смежных с угловой точкой границах индуцируются линейные распределения соответствующих функций, принимающие значение в данной угловой точке, равное единице, и обращающиеся в нуль на противоположных концах смежных сторон области.

В силу неединственности продолжения функции с границы в область можно предложить и вариант тригонометрического продолжения, который в дальнейшем может понадобиться. Это продолжение рассматривается в преобразованной области  $\Omega'' = \{(x, y) : 0 < x, y < 1\}$ . Функции  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  в формулах (23) следует заменить на функции:

$$f_1(z) = 1 - \frac{\sin(z)}{\sin(1)}, \quad f_2(z) = \frac{\sin(z)}{\sin(1)} \quad z = x \text{ или } y, \quad (29)$$

при этом соответствие между угловыми точками в области  $\Omega$  и области  $\Omega''$  таково:

$$\begin{aligned} (-1; -1)_{\Omega} &\rightarrow (0; 0)_{\Omega''}, & (-1; +1)_{\Omega} &\rightarrow (0; 1)_{\Omega''}, \\ (+1; -1)_{\Omega} &\rightarrow (1; 0)_{\Omega''}, & (+1; +1)_{\Omega} &\rightarrow (1; 1)_{\Omega''}. \end{aligned} \quad (30)$$

Разумеется, что корректирующие решения  $w^{22}(x, y)$ ,  $\gamma_x^{22}(x, y)$ ,  $\gamma_y^{22}(x, y)$  в преобразованной области  $\Omega''$  необходимо теперь искать в виде двойных рядов по системе синусов  $\sin(m\pi x) \cdot \sin(n\pi y)$ ,  $m, n = 1.. \infty$ .

### 2.2.2. Построение решения, выбирающего значения краевых функций, заданных по границе и обращающихся в нуль в угловых точках

Здесь речь пойдет о построении решений, зависящих от вторых компонент краевых функций из (21). Следует напомнить, что эти функции обращаются в нуль на границах соответствующего сегмента и наследуют свойства гладкости исходных краевых функций из (6) – (9). Ранее на эти функции были наложены достаточно жесткие требования, а именно: было принято, что они являются функциями класса  $C_3(\Gamma_i)$ , где  $\Gamma_i$  –  $i$ -й сегмент граничного контура,  $i = 1..4$ . Но эти требования не необходимы, их можно существенно ослабить, перейдя к вариационной постановке. Однако, исходя из механического смысла искомых функций (они являются обобщенными перемещениями), такое жесткое требование можно считать приемлемым. Предположение такой гладкости краевых функций позволяет теоретически обеспечить равномерную и абсолютную сходимость рядов, которыми они представлены, вместе с их производными до второго порядка (что не требуется существом проблемы, а обусловлено лишь особенностями проводимого здесь подхода). В дальнейшем показано, что это именно так: построенное конструктивно решение обладает именно таким свойством (эта гладкость может быть и намного выше предполагаемой), и, более того, как

само решение, так и процедура его получения являются устойчивыми, сходящимися к точному с наперед заданной (контролируемой) точностью.

Ниже предложено два подхода к построению искомого решения. Обращаясь к равенству (21), следует заметить, что вторые компоненты в отмеченных равенствах, впрочем, как и постоянные из равенств (22), являются величинами неизвестными, как только речь идет об анализе больших систем, где пластина является одним из конструктивных элементов, в которых указанные величины и подлежат определению. Поэтому эти равенства должны быть как-то упорядочены. Равенства (22) представляют собой первый шаг такого упорядочения, присутствующие там константы выделены явно и стоят перед известными функциями. Естественным является сопоставление вторым компонентам краевых функций из (17) соответствующих им рядов по некоторой линейно независимой и полной системе функции  $h_i(s)$ , обращающихся в нуль на концах интервала  $(-1; +1)$ , желательно, чтобы эти системы функций были к тому же и ортогональными.

Итак, пусть

$$\psi_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_{km} h_m(x), \quad \varphi_k(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{kn} h_n(y), \quad (31)$$

$$k = 1..6,$$

где  $\Psi_{km}$ ,  $\Phi_{kn}$  – коэффициенты обобщенных рядов Фурье (известные, если разлагаемые в ряды функции заданы, и неизвестные – при анализе конструкции, когда разлагаемые функции подлежат определению), а  $\int_{-1}^{+1} h_i(s) h_j(s) ds = \delta_{ij}$ ,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Отмеченные ряды сходятся равномерно и абсолютно вместе со своими производными до второго порядка включительно на сегменте ортогональности, что позволяет формально их дважды непрерывно дифференцировать.

Таких систем функций можно построить сколько угодно много, но не все они будут одинаково эффективными для наших целей. Здесь только отметим, что в дальнейшем будут применяться две системы таких функций:  $h_i(s) \equiv H_i^{(0)}(s)$  [16],  $s \in (-1; +1)$  и тригонометрическая система  $\sin(i\pi s)$ ,  $s \in (0; +1)$ .

Первая схема реализации метода формально проводится, как и в предыдущем пункте. Решение представляется в виде

$$\begin{aligned} w^{02}(x, y) &= w^{21}(x, y) + w^{22}(x, y), \\ \gamma_x^{02}(x, y) &= \gamma_x^{21}(x, y) + \gamma_x^{22}(x, y), \\ \gamma_y^{02}(x, y) &= \gamma_y^{21}(x, y) + \gamma_y^{22}(x, y), \end{aligned} \quad (32)$$

где первые компоненты в равенствах (32) выбираются так, чтобы удовлетворить лишь граничным условиям (6) – (9), т. е. (функции  $\varphi_k$  и  $\psi_k$  – известны):

$$w^{21}(x, y) = \sum_{k=1}^2 \{ \varphi_k(y) f_k(x) + \psi_k(x) f_k(y) \},$$

$$\gamma_x^{21}(x, y) = \sum_{k=1}^2 \{ \varphi_{k+2}(y) f_k(x) + \psi_{k+2}(x) f_k(y) \}, \quad (33)$$

$$\gamma_y^{21}(x, y) = \sum_{k=1}^2 \{ \varphi_{k+4}(y) f_k(x) + \psi_{k+4}(x) f_k(y) \}.$$

Если же рассматриваем конструкцию, то в представленных равенствах (33) неизвестные функции  $\varphi_k$  и  $\psi_k$  необходимо заменить соответствующими рядами типа (31).

Вторые компоненты в представлениях (32) отыскиваем в виде

$$w^{22}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{W}_{mn} h_m(x) h_n(y),$$

$$\gamma_x^{22}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\Gamma}_{1mn} h_m(x) h_n(y), \quad (34)$$

$$\gamma_y^{22}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\Gamma}_{2mn} h_m(x) h_n(y),$$

неизвестные коэффициенты  $\bar{W}_{mn}$ ,  $\bar{\Gamma}_{1mn}$ ,  $\bar{\Gamma}_{2mn}$  в рядах (34) определим из решения базовой задачи типа (27), (10), где неизвестные функции в левой части системы дифференциальных уравнений заменяются функциями с верхними индексами «22», а известные функции в правой части системы уравнений – функциями с индексами «21»:

$$L_{i1} \tilde{w}^{22} + L_{i2} \gamma_x^{22} + L_{i3} \gamma_y^{22} =$$

$$= - \left( L_{i1} \tilde{w}^{21} + L_{i2} \gamma_x^{21} + L_{i3} \gamma_y^{21} \right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (35)$$

В силу того, что искомые решения (32) из класса  $C_3(\Omega)$  (по предположению), то все формальные операции дифференцирования корректны. На этом решение поставленной задачи на основании изложенного подхода завершается.

Прежде чем перейти к другому возможному методу построения данной компоненты решения, следует отметить, что изложенный выше метод является формальным. Формальность заключалась в том, чтобы выполнить только краевые условия и после этого для получения полного решения обратиться к исходной системе уравнений второй полунормальной задачи. При этом продолженная с границы в область функция дополнялась некоторой корректирующей так, чтобы их сумма в силу линейности задачи представляла решение исходной полунормальной краевой задачи. Важно отметить то, что вторые компоненты решения являются корректирующими в плане, что они устраняют недостатки первой функции в смысле удовлетворения ею исходным уравнениям. Говоря иначе, при формальном продолжении функции с границы в область никак не

учитывались свойства продолженной функции, диктуемые исходным уравнением, кроме требуемой гладкости. Поскольку это продолжение полиномиальное, то оно обеспечивает любую гладкость в открытой области  $\Omega$ . При данном подходе может оказаться, что корректирующая компонента внесет в решение значительный вклад в том смысле, что ее нормы в любом из пространств  $C^{k_1}(\Omega)$  или  $H^{k_2}(\Omega)$  ( $k_1, k_2$  – целые положительные числа) могут быть соизмеримы с нормами первых компонент в тех же пространствах или даже их превосходить.

Переходя к изложению другого подхода к продолжению функции с границы в область, обратимся к диагональным операторам  $L_{ii}$ , которые являются и старшими, т. е. главными частями исходной операторной матрицы. Иначе говоря, можно ожидать, что они ответственны за свойства соответствующих компонент искомой вектор-функции. Оператор  $L_{11}$  с помощью линейного преобразования лишь одной координаты «у» приводится к оператору Лапласа, взятого со знаком минус; операторы же  $L_{22}$  и  $L_{33}$  с помощью линейного преобразования (каждого для своего) обеих координат приводятся к оператору Гельмгольца. Краевые задачи Дирихле с этими тремя операторами решаются точно в виде перекрестной суперпозиции одинарных тригонометрических рядов при условии, что вторые компоненты краевых функций в (17) представлены одинарными тригонометрическими рядами (по системе синусов).

Изложим два способа реализации продолжения граничных функций в область.

В первом из них, оставаясь в рамках построения полиномиальных решений, найдем приближенное аналитическое решение неоднородных краевых задач с указанными операторами при неоднородных краевых условиях, в которых заданные краевые функции  $\psi_k(x)$ ,  $\varphi_k(y)$ ,  $k = 1..6$  представлены своими разложениями в ряды (31) по линейно независимой и полной (замкнутой) системе функций  $h_i(s)$ , где  $s$  принимает значения либо  $x$ , либо  $y$  в зависимости от рассматриваемого сегмента  $\Gamma_i$  граничного контура:

$$w(x, -1) = \psi_1(x), \quad w(x, +1) = \psi_2(x), \quad (36)$$

$$w(-1; y) = \varphi_1(y), \quad w(+1; y) = \varphi_2(y);$$

$$\gamma_x(x, -1) = \psi_3(x), \quad \gamma_x(x, +1) = \psi_4(x), \quad (37)$$

$$\gamma_x(-1; y) = \varphi_3(y), \quad \gamma_x(+1; y) = \varphi_4(y);$$

$$\gamma_y(x, -1) = \psi_5(x), \quad \gamma_y(x, +1) = \psi_6(x), \quad (38)$$

$$\gamma_y(-1; y) = \varphi_5(y), \quad \gamma_y(+1; y) = \varphi_6(y).$$

Рассмотрим неоднородную краевую задачу с оператором  $L_{11}$

$$L_{11} w^{21}(x, y) \equiv - \left( \frac{\partial^2 w^{21}}{\partial x^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 w^{21}}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (39)$$

при неоднородных краевых условиях (36). При ре-



шении этой задачи примем [16, 17]:

$$(h'_i, h'_j)_{L_2(-1,+1)} = 0 \text{ при } i \neq j, \quad (40)$$

где  $(\dots)_{L_2(-1,+1)}$  – знак скалярного произведения в  $L_2(-1,+1)$ .

Приближенность равенства (40) предопределяет приближенность искомого аналитического решения рассматриваемой краевой задачи. Опуская подробности, приведем окончательное выражение искомого решения:

$$w^{21}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m(x) \left( \frac{\Psi_{1m} + \Psi_{2m}}{2 \operatorname{ch}(\alpha_m^w)} \operatorname{ch}(\alpha_m^w y) + \frac{\Psi_{2m} - \Psi_{1m}}{2 \operatorname{sh}(\alpha_m^w)} \operatorname{sh}(\alpha_m^w y) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} h_n(y) \left( \frac{\Phi_{1n} + \Phi_{2n}}{2 \operatorname{ch}(\beta_n^w)} \operatorname{ch}(\beta_n^w x) + \frac{\Phi_{2n} - \Phi_{1n}}{2 \operatorname{sh}(\beta_n^w)} \operatorname{sh}(\beta_n^w x) \right), \quad (41)$$

где  $\alpha_m^w = \frac{1}{\lambda} \|h'_m(x)\|$  и  $\beta_n^w = \lambda \|h'_n(y)\|$ ,

$\|\dots\|$  – норма указанной функции в  $L_2(-1,+1)$ .

Аналогично рассматриваются краевые задачи с операторами  $L_{22}$  и  $L_{33}$ :

$$\frac{D}{hk^* G^* a^2} \frac{\partial^2 \gamma_x^{21}}{\partial x^2} + \frac{\lambda^2 D(1-\nu)}{2hk^* G^* a^2} \frac{\partial^2 \gamma_x^{21}}{\partial y^2} - \gamma_x^{21} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (42)$$

$$\frac{D(1-\nu)}{2hk^* G^* a^2} \frac{\partial^2 \gamma_y^{21}}{\partial x^2} + \frac{\lambda^2 D}{hk^* G^* a^2} \frac{\partial^2 \gamma_y^{21}}{\partial y^2} - \gamma_y^{21} = 0 \text{ в } \Omega \quad (43)$$

при краевых условиях (37) и (38) соответственно.

Приближенные аналитические решения краевых задач (42), (37) и (43), (38) имеют вид:

$$\gamma_x^{21}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m(x) \left( \frac{\Psi_{3m} + \Psi_{4m}}{2 \operatorname{ch}(\alpha_m^{\gamma_x})} \operatorname{ch}(\alpha_m^{\gamma_x} y) + \frac{\Psi_{4m} - \Psi_{3m}}{2 \operatorname{sh}(\alpha_m^{\gamma_x})} \operatorname{sh}(\alpha_m^{\gamma_x} y) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} h_n(y) \left( \frac{\Phi_{3n} + \Phi_{4n}}{2 \operatorname{ch}(\beta_n^{\gamma_x})} \operatorname{ch}(\beta_n^{\gamma_x} x) + \frac{\Phi_{4n} - \Phi_{3n}}{2 \operatorname{sh}(\beta_n^{\gamma_x})} \operatorname{sh}(\beta_n^{\gamma_x} x) \right), \quad (44)$$

$$\gamma_y^{21}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m(x) \left( \frac{\Psi_{5m} + \Psi_{6m}}{2 \operatorname{ch}(\alpha_m^{\gamma_y})} \operatorname{ch}(\alpha_m^{\gamma_y} y) + \frac{\Psi_{6m} - \Psi_{5m}}{2 \operatorname{sh}(\alpha_m^{\gamma_y})} \operatorname{sh}(\alpha_m^{\gamma_y} y) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} h_n(y) \left( \frac{\Phi_{5n} + \Phi_{6n}}{2 \operatorname{ch}(\beta_n^{\gamma_y})} \operatorname{ch}(\beta_n^{\gamma_y} x) + \frac{\Phi_{6n} - \Phi_{5n}}{2 \operatorname{sh}(\beta_n^{\gamma_y})} \operatorname{sh}(\beta_n^{\gamma_y} x) \right), \quad (45)$$

где  $\alpha_m^{\gamma_x} = \sqrt{\frac{2}{\lambda^2(1-\nu)} \left( \|h'_m(x)\|^2 + \frac{a^2 hk^* G^*}{D} \right)}$ ;

$\beta_n^{\gamma_x} = \sqrt{\frac{\lambda^2(1-\nu)}{2} \|h'_n(y)\|^2 + \frac{a^2 hk^* G^*}{D}}$ ;

$\alpha_m^{\gamma_y} = \sqrt{\frac{(1-\nu)}{2\lambda^2} \|h'_m(x)\|^2 + \frac{a^2 hk^* G^*}{\lambda^2 D}}$ ;

$\beta_n^{\gamma_y} = \sqrt{\frac{2}{1-\nu} \left( \lambda^2 \|h'_n(y)\|^2 + \frac{a^2 hk^* G^*}{D} \right)}$ .

Второй способ реализации продолжения граничных функций в область заключается в использовании вместо функций  $h_i(s)$  тригонометрической системы функций  $\sin(its)$ . Предварительно отметим, что обе эти системы входят в один и тот же функциональный класс: во-первых, обе системы являются линейно независимыми, полными (замкнутыми) и ортогональными в области своего определения и, кроме того, бесконечно дифференцируемыми; во-вторых, на концах своих интервалов они обращаются в нуль (в этом смысле они родственны), и более того, в-третьих, все то, что справедливо для тригонометрических рядов автоматически переносится и на ряды по системе  $h_i(s)$  в силу теоремы о равносходимости [26]. Отличие же при решении в одинарных рядах по тригонометрической системе с рассмотренными выше решениями краевых задач по системе  $h_i(s)$  заключается в том, что они здесь будут точными. Это немаловажное обстоятельство дает, на первый взгляд, системе тригонометрических функций некоторые преимущества перед системой полиномиальных функций  $h_i(s)$ . Однако, как будет показано в дальнейшем при построении корректирующих решений, отмеченное достоинство тригонометрической системы перед полиномиальными системами теряет свою силу (теорема Джексона об аппроксимативных свойствах тригонометрических

функций [27]). Этот вопрос нами обсуждался в работе [28]. Основным недостатком системы тригонометрических функций, на наш взгляд, является то, что они при нечетном дифференцировании переходят в *co*-функции, а при четном – в сами себя, сохраняя тем самым поведение четных производных в окрестностях концов интервалов. И, более того, тригонометрическая система, являясь периодической на координатной прямой, при их рассмотрении на конечном интервале требует четного или нечетного продолжения с конечного интервала на всю координатную ось, а при таком продолжении появляются разрывы первого рода в продолжаемой функции. Этим недостаткам лишена полиномиальная система. Здесь это немаловажно.

Переходя ко второму способу продолжения функции с границы в область, снова преобразуем исходную область  $\Omega$  в  $\Omega''$  с началом координат в точке (0;0). Рассмотрим те же самые краевые задачи: (39), (36); (42), (37) и (43), (38) в области  $\Omega''$ . Предварительно функции (36) – (38) разложим в ряды по системе  $\sin(i\pi s)$ . Поскольку эти функции на концах интервала принимают нулевые значения и являются непрерывными (по их механическому смыслу), то заранее можно утверждать равномерную и абсолютную сходимость указанных рядов. Итак, краевые функции (36) – (38) здесь представляют в виде:

$$w(x;0) = \psi_1(x), \quad w(x;+1) = \psi_2(x), \quad (46)$$

$$w(0;y) = \varphi_1(y), \quad w(+1;y) = \varphi_2(y);$$

$$\gamma_x(x;0) = \psi_3(x), \quad \gamma_x(x;+1) = \psi_4(x), \quad (47)$$

$$\gamma_x(0;y) = \varphi_3(y), \quad \gamma_x(+1;y) = \varphi_4(y);$$

$$\gamma_y(x;0) = \psi_5(x), \quad \gamma_y(x;+1) = \psi_6(x), \quad (48)$$

$$\gamma_y(0;y) = \varphi_5(y), \quad \gamma_y(+1;y) = \varphi_6(y),$$

где функции  $\psi_k(x)$ ,  $\varphi_k(y)$  определяются равенствами:

$$\psi_k = \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_{km} \sin(m\pi x), \quad \varphi_k = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{kn} \sin(n\pi y), \quad (49)$$

k = 1..6.

Решения краевых задач (39), (46); (42), (47) и (43), (48), но уже в виде перекрестной суперпозиции одинарных тригонометрических рядов, имеют вид:

$$w^{21}(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin(m\pi x) \left( \Psi_{1m} \operatorname{ch}(\alpha_m^w y) + \frac{\Psi_{2m} - \Psi_{1m} \operatorname{ch}(\alpha_m^w)}{\operatorname{sh}(\alpha_m^w)} \operatorname{sh}(\alpha_m^w y) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi y) \left( \Phi_{1n} \operatorname{ch}(\beta_n^w x) + \frac{\Phi_{2n} - \Phi_{1n} \operatorname{ch}(\beta_n^w)}{\operatorname{sh}(\beta_n^w)} \operatorname{sh}(\beta_n^w x) \right), \quad (50)$$

$$\gamma_x^{21}(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin(m\pi x) \left( \Psi_{3m} \operatorname{ch}(\alpha_m^{\gamma_x} y) + \frac{\Psi_{4m} - \Psi_{3m} \operatorname{ch}(\alpha_m^{\gamma_x})}{\operatorname{sh}(\alpha_m^{\gamma_x})} \operatorname{sh}(\alpha_m^{\gamma_x} y) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi y) \left( \Phi_{3n} \operatorname{ch}(\beta_n^{\gamma_x} x) + \frac{\Phi_{4n} - \Phi_{3n} \operatorname{ch}(\beta_n^{\gamma_x})}{\operatorname{sh}(\beta_n^{\gamma_x})} \operatorname{sh}(\beta_n^{\gamma_x} x) \right), \quad (51)$$

$$\gamma_y^{21}(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin(m\pi x) \left( \Psi_{5m} \operatorname{ch}(\alpha_m^{\gamma_y} y) + \frac{\Psi_{6m} - \Psi_{5m} \operatorname{ch}(\alpha_m^{\gamma_y})}{\operatorname{sh}(\alpha_m^{\gamma_y})} \operatorname{sh}(\alpha_m^{\gamma_y} y) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi y) \left( \Phi_{5n} \operatorname{ch}(\beta_n^{\gamma_y} x) + \frac{\Phi_{6n} - \Phi_{5n} \operatorname{ch}(\beta_n^{\gamma_y})}{\operatorname{sh}(\beta_n^{\gamma_y})} \operatorname{sh}(\beta_n^{\gamma_y} x) \right), \quad (52)$$

где  $\alpha_m^w = \frac{m\pi}{\lambda}$ ,  $\beta_n^w = n\pi\lambda$ ;

$$\alpha_m^{\gamma_x} = \sqrt{\frac{2m^2\pi^2}{\lambda^2(1-\nu)} + \frac{8hk^*G^*a^2}{D\lambda^2(1-\nu)}};$$

$$\beta_n^{\gamma_x} = \sqrt{\frac{\lambda^2 n^2 \pi^2 (1-\nu)}{2} + \frac{4hk^*G^*a^2}{D}};$$

$$\alpha_m^{\gamma_y} = \sqrt{\frac{m^2\pi^2(1-\nu)}{2\lambda^2} + \frac{4hk^*G^*a^2}{\lambda^2 D}};$$

$$\beta_n^{\gamma_y} = \sqrt{\frac{2\lambda^2 n^2 \pi^2}{1-\nu} + \frac{8hk^*G^*a^2}{(1-\nu)D}}.$$

В тригонометрическом варианте продолжения функций с границы в область компоненты с верхними индексами «22» в представлении (32) ищутся в двойных тригонометрических рядах:

$$w^{22}(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{W}_{mn} \sin(m\pi x) \sin(n\pi y),$$

$$\gamma_x^{22}(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_{1mn} \sin(m\pi x) \sin(n\pi y), \quad (53)$$

$$\gamma_y^{22}(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_{2mn} \sin(m\pi x) \sin(n\pi y)$$

как решения следующей базовой задачи (при однородных краевых условиях) в  $\Omega''$  для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} L_{11}\tilde{w}^{22} + L_{12}\gamma_x^{22} + L_{13}\gamma_y^{22} &= -(L_{12}\gamma_x^{21} + L_{13}\gamma_y^{21}), \\ L_{21}\tilde{w}^{22} + L_{22}\gamma_x^{22} + L_{23}\gamma_y^{22} &= -(L_{21}\tilde{w}^{21} + L_{23}\gamma_y^{21}), \\ L_{31}\tilde{w}^{22} + L_{32}\gamma_x^{22} + L_{33}\gamma_y^{22} &= -(L_{31}\tilde{w}^{21} + L_{32}\gamma_x^{21}). \end{aligned} \quad (54)$$

Сопоставляя операторы левой и правой частей замечаем, что диагональные операторы, действующие на известные функции с верхним индексом «21», отсутствуют. Это связано со способом продолжения в этом случае функции с границы в область, т. е. правая часть дифференциального уравнения упростилась (отсутствуют вторые четные производные от продолженных функций, как и нулевая производная, равная самой функции). А оставшиеся операторы содержат первые и вторую смешанную производные. Данное обстоятельство весьма важно, так как накладывает более мягкие требования на гладкость продолженных функций и при условии непрерывности отмеченных производных приводит к решениям в обычном (классическом) понимании. Здесь необходимо отметить, что из непрерывности и непрерывной дифференцируемости четное число раз функций из  $W_p^{(k)}(\Omega)$  не следует существование дважды непрерывно дифференцируемых смешанных производных. К счастью, это имеет место при  $p = \infty$  [29, с. 132].

### 3. Вычислительные аспекты

Нельзя утверждать, что решение (34) базовой задачи (35), (10) при использовании продолженных функций в форме (41), (44), (45) и корректирующие решение (53) краевой задачи (54), (10) с использованием второй формы продолженных функций (50) – (52) являются равноценными в смысле как их гладкости, так и их точности. Чтобы это показать, достаточно рассмотреть два перекрестных разложения, а именно: представим любую (смещенную) функцию  $h_i^*(s) \in C^\infty[0;1]$  в виде ряда по тригонометрической системе  $\sin(j\pi s)$ , во втором случае наоборот – функции  $\sin(i\pi s)$  разложим в ряды по системе  $h_j^*(s)$ :

$$h_i^*(s) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j^{(i)} \sin(j\pi s), \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad s \in [0;1], \quad (55)$$

$$\sin(i\pi s) = \sum_{j=0}^{\infty} B_j^{(i)} h_j^*(s), \quad i \in \mathbb{N}, \quad s \in [0;1]. \quad (56)$$

Исследуем ряд (55). Теоретически в силу непрерывности и бесконечной дифференцируемости функций  $h_i^*(s)$  ( $h_i^*(s)$  – многочлен и  $h_i^*(0) = h_i^*(+1) = 0$ ) следует равномерная и абсолютная сходимость ряда, стоящего в правой части (55), чего нельзя сказать о сходимости производных  $h_i^{(k)}(s)$  до любого порядка  $k$ . Этот очевидный факт

следует из конкретного представления коэффициентов  $A_j^{(i)}$ . Например, для первых трех функций с четными индексами ряды (55) имеют вид:

$$\begin{aligned} h_0^* &= \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} \frac{2\sqrt{15}}{j^3\pi^3} \sin(j\pi s), \\ h_2^* &= \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} \frac{24\sqrt{5}}{j^3\pi^3} \left( \frac{168}{j^2\pi^2} - 17 \right) \sin(j\pi s), \\ h_4^* &= \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} \frac{8\sqrt{2730}}{j^3\pi^3} \left( \frac{1332}{j^2\pi^2} - \frac{11880}{j^4\pi^4} - 13 \right) \sin(j\pi s). \end{aligned} \quad (57)$$

Таким образом, из представлений (57) видно, что коэффициенты  $A_j^{(i)}$  стремятся к нулю, как  $j^{-3}$  при  $j \rightarrow \infty$  независимо от  $i$ , аналогичный результат имеет место и для нечетных  $i$ . Отсюда немедленно следует равномерная и абсолютная сходимость рядов на замкнутом интервале  $[0;+1]$ , их первых производных на открытых интервалах  $(0;+1)$  и всего лишь сходимость в среднем вторых производных на этом же интервале. Как было отмечено при постановке краевой задачи (54), (10), данной сходимости достаточно для корректного построения корректирующих компонент решения (решения в его классическом смысле). Это – во-первых. Во-вторых, для выяснения возникающих при решении краевых задач погрешностей необходимо указать, что, хотя слева в (55) стоят функции, бесконечно дифференцируемые, наивысший порядок дифференцируемости ряда, стоящего справа, ограничен. Это большой недостаток тригонометрических рядов в общем, в виде (55) – в частности [25].

При практических вычислениях верхние пределы сумм заменяются конечным натуральным числом  $J$ , для назначения которого (конструктивно) необходимо обратиться к практическим вычислениям. Эти вычисления приводятся в табл. 1 для самих функций и их первых производных при  $i = 0; 2; 4$  и, наконец,  $i = 10$ , там же приведена относительная погрешность в равномерной метрике, т. е. речь идет об оценке максимума модуля значений функций  $h_i^*(s)$  и их первых производных соответственно. Отметим, что максимум модуля в точке  $s = 0.5$  достигается только для функции  $h_0^*(s)$ , с увеличением же номера  $i$  многочлена  $h_i^*(s)$  точка максимума модуля постепенно сдвигается от середины к концам интервала, где он равен нулю. Однако существует неравенство:

$$\max_{i \in \mathbb{N}_+ \cup \{0\}} |h_i(s = 0,5)| < C_i(s_i) < 1, \quad s_i \in (0;1), \quad (58)$$

где  $s_i$  – точка экстремума многочлена  $h_i^*(s)$ , а  $C_i$  – некоторая константа, своя для каждого номера  $i$ . Поэтому на основании неравенства (58) в приводимой ниже таблице указаны значения относительной погрешности  $\varepsilon$  (%) в точке  $s = 0,5$ . Оценка же точ-

Таблица 1

К сходимости и точности рядов (55) и их производных

$h_0(0,5) = 0,968245836551854$			$h_2(0,5) = -0,838525491562421$			$h_4(0,5) = 0,81639690485082$			$h_{10}(0,5) = -0,802729028837124$		
J	ряд	$\epsilon, \%$	J	ряд	$\epsilon, \%$	J	ряд	$\epsilon, \%$	J	ряд	$\epsilon, \%$
1	0,999277246	-3,205	3	-1,006527561	-20,04	7	0,681469426	16,53	15	-0,955799802	-19,069
3	0,962266978	0,66175	9	-0,824734082	1,645	9	0,891403309	-9,187	25	-0,730360815	9,015
7	0,967347851	0,09274	11	-0,846657521	-0,9698	21	0,824355806	-0,9749	59	-0,810570822	-0,9769
17	0,968329979	-0,008690	25	-0,837696962	0,09881	47	0,815610163	0,09637	131	-0,803502887	-0,09640
35	0,968235177	0,001101	55	-0,838609078	-0,009968	103	0,816319123	0,009527	281	-0,802648867	0,009986
$h'_0(1) = -3,87298334620741$			$h'_2(1) = -20,1246117974981$			$h'_4(1) = -52,2494019104525$			$h'_{10}(1) = -273,998175176405$		
J	ряд	$\epsilon, \%$	J	ряд	$\epsilon, \%$	J	ряд	$\epsilon, \%$	J	ряд	$\epsilon, \%$
1	-3,139322055	18,94	3	-9,008696793	55,24	5	-10,905312117	79,13	15	-6,066812707	97,786
3	-3,488135617	9,937	23	-18,201066630	9,558	53	-47,158130711	9,744	79	-204,000810278	25,547
41	-3,835617521	9,648E-1	75	-19,516544447	3,022	175	-50,685465597	2,993	205	-246,552705274	10,017
135	-3,861441929	2,980E-1	115	-19,726196591	1,980	263	-51,206706758	1,996	405	-260,055006195	5,089
201	3,865212811	2,006E-1	231	-19,925396788	0,9899	525	-51,726050713	1,002	689	-265,791579778	2,995

Таблица 2

К сходимости и точности рядов (56) и их производных

$\sin(i\pi x) _{i=1;x=0,5} = 1$			$\sin(i\pi x) _{i=3;x=0,5} = -1$			$\sin(i\pi x) _{i=5;x=0,5} = 1$			$\sin(i\pi x) _{i=9;x=0,5} = 1$		
J	ряд	$\epsilon, \%$	J	ряд	$\epsilon, \%$	J	ряд	$\epsilon, \%$	J	ряд	$\epsilon, \%$
1	0,96754603300	3,245	3	-0,77629467956	22,371	7	0,89066801319	10,933	15	0,96475677858	3,524
3	0,99941533308	5,847E-2	5	-0,97597225254	2,403	9	0,98483584198	1,516	17	0,99406285025	5,937E-1
5	0,99999395453	6,045E-4	7	-0,99843901124	1,561E-1	11	0,99854428473	1,456E-1	19	0,99921465181	7,853E-2
7	0,9999996007	3,993E-6	9	-0,99993187546	6,812E-3	13	0,99989711088	1,029E-2	21	0,99991597680	8,402E-3
9	0,9999999982	1,821E-8	11	-0,99999786310	2,137E-4	15	0,99999440905	5,591E-4	23	0,99999256158	7,438E-4
$\sin'(i\pi x) _{i=1;x=1} = -\pi$			$\sin'(i\pi x) _{i=3;x=1} = -3\pi$			$\sin'(i\pi x) _{i=5;x=1} = -5\pi$			$\sin'(i\pi x) _{i=9;x=1} = -9\pi$		
J	ряд	$\epsilon, \%$	J	ряд	$\epsilon, \%$	J	ряд	$\epsilon, \%$	J	ряд	$\epsilon, \%$
1	-3,8701841320	-23,192	5	-6,8550887106	27,265	11	-15,098552963	3,880	19	-27,351354182	3,264
3	-3,1053209299	1,155	7	-9,7308338247	-3,247	13	-15,770210646	-3,963E-1	21	-28,402165163	-4,521E-1
5	-3,1423527024	-2,419E-2	9	-9,4032567624	2,283E-1	15	-15,703323934	2,953E-2	23	-28,260095354	5,036E-2
7	-3,1415839931	2,757E-4	11	-9,4257805460	-1,064E-2	17	-15,708227443	-1,682E-3	25	-28,275640832	-4,622E-3
9	-3,1415927153	-1,963E-6	13	-9,4247446949	3,530E-4	19	-15,707951381	7,567E-5	27	-28,274233121	3,564E-4

ности вычисления первых производных  $h'_i(s)$  выполняется на конце интервала ортогональности  $s = 1$ , поскольку там они достигают наибольшего по модулю значения.

В первых строках табл. 1 даны точные значения функций при  $s = 0,5$  и их первых производных в точке  $s = 1$ , а в колонках, озаглавленных «ряд», приведены значения соответствующих функций и их производных, вычисленных по представлению (55).

Как и следовало ожидать, точность вычисления наибольших значений производных намного меньше точности вычисления самих функций и для повышения этой точности необходимо в рядах (55) увеличивать число членов  $J$ , причем  $J$  тем больше,

чем больше номер  $i$  многочлена  $h_i(s)$ .

Обратимся теперь к разложению (56). Здесь, как и прежде, функции слева  $\sin(i\pi s)$  и система функций  $h_i^*(s)$ , по которой идет разложение – являются бесконечно дифференцируемыми. Означает ли это, как и в рассмотренном выше случае, что ряд в (56) можно дифференцировать бесконечное число раз? Это первый вопрос, и ответ на него отрицательный. Но если в первом случае ряд (55) можно было дифференцировать дважды, то – второй вопрос: «Какой порядок дифференцирования допустим в рассматриваемом случае?» Покажем конструктивно, что этот порядок здесь выше, чем в предыдущем случае. Для этого, как ранее, рассмот-

рим разложения в ряды (56) нескольких синусоид.

Результаты вычисления рядов (56) отражены в табл. 2. Структура таблицы такова: в колонках «J» указано число удержанных слагаемых в суммах (56), а в колонках, озаглавленных «ряд», приведены значения соответствующих сумм и их первых производных, «ε, %» – погрешность между значениями величин, стоящими слева и справа в формуле (56).

Выполнив сравнительный анализ данных табл. 1 и 2, можно прийти к следующим выводам:

– ряды (55) и (56) вместе со своими первыми производными сходятся равномерно и абсолютно в  $C^{(1)}[0;+1]$ , но скорость сходимости у них разная;

– для получения примерно одинаковой погрешности в разложении (55) необходимо удерживать примерно в 7–10 раз больше слагаемых, чем в разложении (56); в то время как для получения примерно одинаковой погрешности первых производных от этих рядов указанное соотношение увеличивается до 20 раз;

– как было отмечено выше, производные второго и выше порядков от рядов (55) сходятся в среднем (это общее свойство тригонометрических рядов), в то время как для обеспечения абсолютной и равномерной сходимости производной порядка  $k \leq 10$  от ряда (56) необходимо в нем удерживать слагаемые  $J > k + 2(i + 1)$ .

Дополнительно следует отметить неустойчивость процедуры вычисления коэффициентов  $A_j^{(i)}$  рядов (55), состоящую в том, что точность их определения напрямую зависит от длины мантиссы чисел. Весьма часто для получения достоверного результата необходимо увеличивать длину мантиссы до 32 и даже больше значащих цифр.

Очень важно иметь возможность непрерывного периодического (нечетного) продолжения не только самой функции с отрезка  $[0;+1]$  на всю числовую ось, но и производных до некоторого требуемого порядка  $k$ . Если это невыполнимо, то можно обеспечить только сходимость производных, утверждаемых следующим предложением: если функция  $f(x)$  непрерывна на любом интервале  $[a;b]$ , причем  $f(a) = f(b)$ , а производные вплоть до порядка  $k-1$  удовлетворяют условиям Дирихле, то для коэффициентов ряда Фурье  $\alpha_j, j = 1, 2, 3, \dots$  справедливы оценки:  $|\alpha_j| < C \cdot j^{-(k+1)}$ . Например, для функции

$$f(x) \equiv H_0^{(1)}(x) = 3\sqrt{35}x^2(x-1)^2, \quad x \in [0;1], \quad (59)$$

$$f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0,$$

имеет место разложение

$$f(x) = \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} \frac{24\sqrt{35}}{j^3\pi^3} \left( \frac{12}{j^2\pi^2} - 1 \right) \sin(j\pi x), \quad (60)$$

здесь  $H_0^{(1)}(x)$  – первая функция из семейства многочленов  $H_i^{(\alpha)}(x)$  [16].

Ряд же функции

$$f(x) \equiv H_0^{(1)}(x) = \frac{3\sqrt{35}}{16} (1-x^2)^2 \quad (61)$$

по функциям  $h_i(x) \equiv H_i^{(\alpha)}(x)$  при  $\alpha = 0$  [16, 17] на сегменте  $[-1;+1]$  превращается в конечную сумму, состоящую всего лишь из двух членов, которая равна  $H_0^{(1)}(x)$  тождественно. Если же разложить произвольную функцию  $H_i^{(1)}(x)$  по системе  $h_j(x)$ , то ряд опять же превратится в конечную сумму, состоящую из  $(i+2)$  членов, результат будет тождественно равен  $H_i^{(1)}(x)$ .

Суммируя все сказанное выше, приходим к фундаментальному результату: **продолжение любой непрерывной функции  $f(s)$  из класса  $C^{(3)}(\Gamma)$  в  $\Omega$  необходимо строить в полиномиальной форме, а корректирующее решение строить в виде двойных рядов по системе  $h_i(x) \cdot h_j(y)$ .**

В подтверждение такого вывода ниже приводятся результаты по основным, на наш взгляд, численным экспериментам, представленные в виде графиков. Если при тригонометрическом продолжении рассматривалась область  $\Omega''$ , а при полиномиальном  $\Omega$ , то при представлении результатов с использованием тригонометрического продолжения путем линейного преобразования область  $\Omega''$  переводилась в область  $\Omega$ . При проведении всех вычислительных экспериментов рассматривалась пластина со следующими исходными данными:  $a = b = 1$  м ( $\lambda = 1$ ),  $h = 0.05$  м;  $\nu = 0.3$ ,  $E = 72$  ГПа,  $G^* = 720$  МПа. Рассмотрены два варианта задания граничных функций.

В первом варианте угловая точка с координатами  $(+1;+1)$  получала единичное перемещение  $w(+1;+1) = 1$  (ед. длины), при этом стороны, примыкающие к этой угловой точке, получают перемещения по двум законам: в задаче 1 – линейный закон:

$$w(x;+1) = \frac{1}{2}(1+x)w(+1;+1),$$

$$w(+1;y) = \frac{1}{2}(1+y)w(+1;+1), \quad (62)$$

$$-1 \leq x, y \leq +1;$$

в задаче 2 – синусоидальный закон:

$$w(x;1) = \frac{\sin(x)}{\sin(1)}w(1;1), \quad w(1;y) = \frac{\sin(y)}{\sin(1)}w(1;1), \quad (63)$$

$$0 \leq x, y \leq +1.$$

На рис. 2 представлены графики продолженных функций  $w^{11}(x,y)$ , корректирующих функций  $w^{12}(x,y)$  и самих решений  $w^{01}(x,y)$  по характерной линии  $x=y$  для двух задач 1 и 2. В этих задачах корректирующие решения вносят к продолженным функциям незначительные поправки (приблизительно 10%) независимо от способа продолжения функции, но это вовсе не означает, что в другой задаче поправка будет такой же. Однако точность по-

лученных решений зависит от способа продолжения и коррекции. При одном и том же числе неизвестных, удерживаемых в рядах корректирующих решений ( $M = N = 20$ ), при получении коррекции через тригонометрические функции обеспечивается точность самого решения до порядка  $10^{-5}$ , в то время как полиномиальная коррекция обеспечивает точность до  $10^{-7}$ . Разница более чем существенна.

На рис. 3 изображены компоненты вектора решения из первой задачи. В связи с тем, что углы поворота на границе принимались нулевыми, то их продолженные функции тождественно равны нулю, поэтому корректирующие решения для этих компонент являются окончательными.

Во втором варианте на стороне  $y = +1$  задавалась перемещение  $w(x, +1)$  по закону:

$$w(x, +1) = \frac{\sqrt{15}}{4}(1 - x^2) \equiv h_0(x) \text{ (ед. длины)}, \quad (64)$$

на остальной части границы  $w \equiv 0$ ,  $\gamma_x = \gamma_y \equiv 0$  на всей границе. На рис. 4 представлены графики компонент искомой функции  $w(x, y)$  из (32) по линии  $x = 0$ . При этом выносы соответствуют: 1 – продолженная функция строится в виде (33), а корректирующее решение – в виде (34); 2 – первое неформальное построение продолженной функции в виде (41) при той же форме корректирующего решения; 3 – тригонометрическое представление продолженной функции и корректирующего решения по формулам (50) и (53) соответственно.

Здесь следует отметить:

- в первом и втором вариантах построения продолженной функции краевые условия на  $y = +1$  выполнены точно. В третьем варианте (тригонометрическое продолжение) краевое условие по прогибу выполнено приближенно, что связано с необходимостью разложения заданной на границе функции  $w(x, +1) = h_0(x)$  после перехода к интервалу  $[0; +1]$  в ряд Фурье (57) по синусам. При вычислениях ограничили значением верхнего предела в ряде (57), равным 17, что обеспечило относительную погрешность в равномерной метрике  $|\varepsilon| = 0,00869\%$  (см. табл. 1);

- на точность построения функции продолжения и корректирующего решения в третьем, тригонометрическом, варианте и определения корректирующего решения второго варианта существенно сказывается разрядность мантиссы. Вычисления проводились с мантиссой, имеющей длину в тридцать две значащие цифры, что связано с точностью вычисления гиперболических и гипербологотригонометрических функций;

- при построении полиномиальных и тригонометрических корректирующих решений с удержанием одного и того же количества членов ( $M = N = 20$ ) в соответствующих двойных рядах

получаем различную точность: полиномиальные решения устанавливаются с точностью до шестого знака в мантиссе, а тригонометрические – до четвертого (тенденция сохраняется);

- при неформальных продолжениях (41), (50) заданных функций с границы в область путем решения соответствующих полуоднородных краевых задач с диагональными операторами  $L_{ii}$ ,  $i = 1, 2, 3$  (для уравнений Лапласа и Гельмгольца) получаем намного меньший вклад корректирующих решений в окончательное в сравнении с формальным продолжением (33). Отсюда следует, что учет свойств хотя бы диагональных операторов очень важен.

На рис. 5 показаны поверхности компонент, полученных с точностью до седьмого знака в мантиссе, решения данной краевой задачи. Поэтому такие решения с полным правом можно называть критериальными. Как и в предыдущих задачах, здесь корректирующие решения для углов поворота  $\gamma_x(x, y)$  и  $\gamma_y(x, y)$  являются искомыми.

## Заключение

Предложен и проведен метод решения полностью неоднородной краевой задачи типа Дирихле для прямоугольной трансверсально-изотропной пластины, описываемой системой трех дифференциальных уравнений относительно компонент обобщенного вектора перемещения, общий порядок которой равен шести.

Краевые функции представлены в виде сумм двух компонент, первая из которых либо линейная, либо некоторая синусоида, а вторая – разложениями или в тригонометрические ряды, или в ряды по линейно независимой и полной в  $L_2[-1; +1]$  системе ортонормированных многочленов, предложенных и изученных одним из авторов ранее.

Решение полностью неоднородной краевой задачи сведено к решению ряда *базовых* задач, описываемых неоднородной системой дифференциальных уравнений и однородными краевыми условиями, что достигается путем продолжения краевых функций с границы в область. При этом рассматриваются разные способы продолжения: формальное и неформальное. Формальный способ продолжения заключается в выполнении соответствующих краевых условий и некоторых дополнительных условий гладкости, но не учитывает свойства дифференциальных операторов системы уравнений. При неформальном продолжении дополнительно учитываются свойства диагональных дифференциальных операторов. В первом уравнении системы это оператор, сводящийся к оператору Лапласа, а в двух других – к оператору Гельмгольца. Для этих операторов поставлены и решены соответствующие краевые

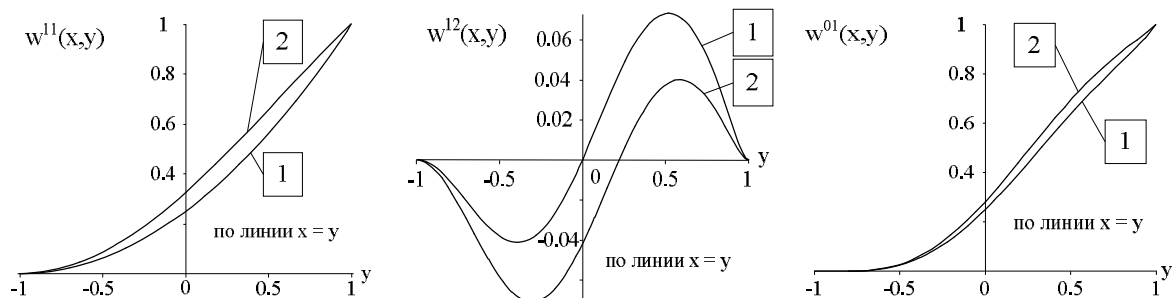


Рис. 2. Сопоставление компонент продолженных и корректирующих функций с решением

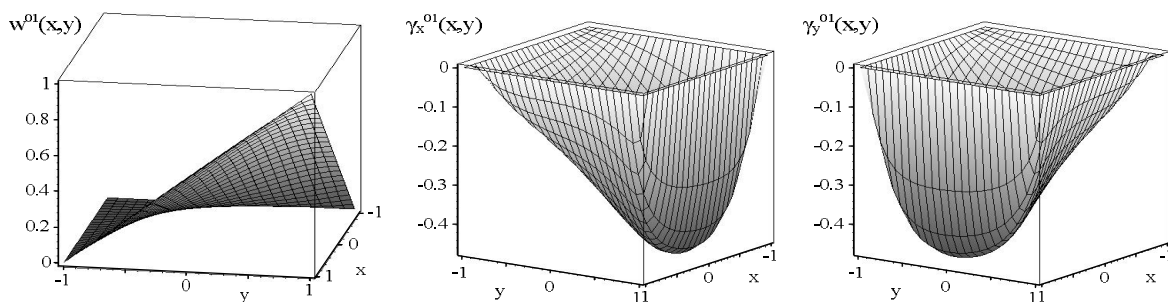


Рис. 3. Прогибы и углы поворота в задаче 1

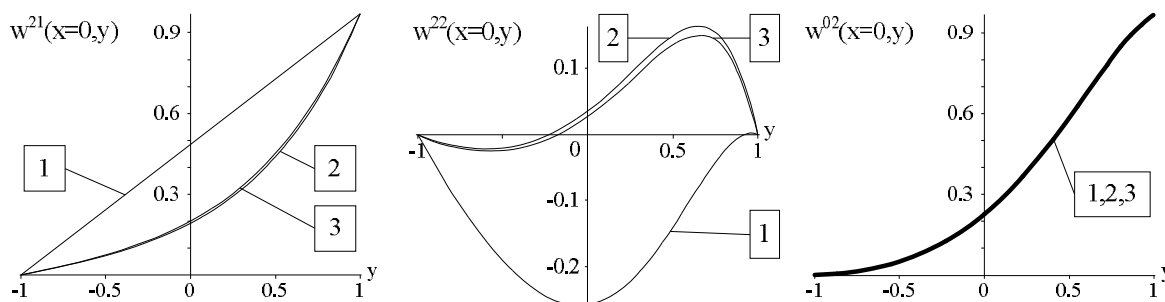


Рис. 4. Продолженные функции  $w^{21}$ , корректирующие решения  $w^{22}$  и решение  $w^{02}$

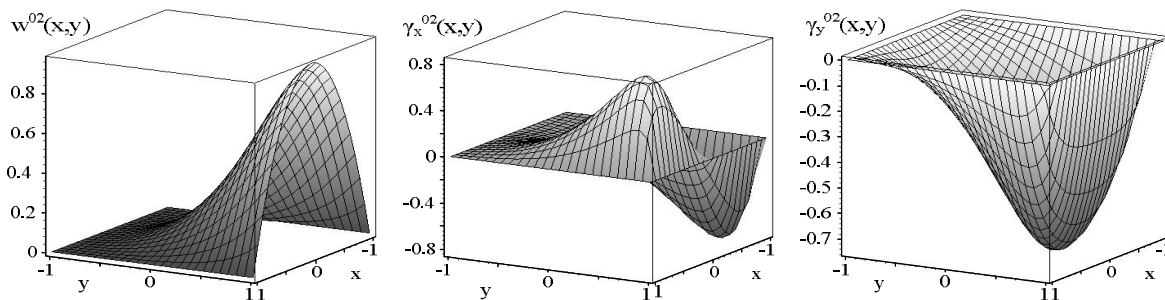


Рис. 5. Поверхности функций прогибов и углов поворота

задачи Дирихле в виде перекрестной суперпозиции тригонометрических или полиномиальных рядов.

Для получения полного решения вводятся так называемые корректирующие решения. Задача этих решений: выполнить исходные уравнения, являющиеся уравнениями равновесия. Неформальный способ продолжения обеспечивает меньшую норму корректирующего решения как в  $L_2(\Omega)$ , так и в энергетическом пространстве  $H_L(\Omega)$  положительно определенного матричного дифференциального оператора  $L$ . При необходимости «быстрых» (проектировочных) вычислений данное обстоятельство

может принести определенную выгоду.

Дан сравнительный анализ аппроксимативных свойств тригонометрических и полиномиальных функций при решении поставленной задачи. Показано, что точность и сходимость полиномиальных решений на два-три порядка выше, чем при использовании тригонометрических функций.

### Литература

1. Reissner, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates [Text] / E. Reissner // J. Appl. Mech. – 1945. – № 12. – P. A-69 – A-77.

2. Reissner, E. On small finite deflections of shear-deformable elastic plates [Text] / E. Reissner // *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* – 1986. – № 59. – P. 227 – 233.

3. Reissner, E. A note on finite twisting and transverse bending of shear deformable orthotropic plates [Text] / E. Reissner // *Int. J. Solids Structures.* – 1992. – Vol. 29, № 17. – P. 2177 – 2180.

4. Whitney, J. M. The effect of transverse shear deformation in the bending of laminated plates [Text] / J. M. Whitney // *J. Comp. Mat.* – 1969. – № 3. – P. 534 – 547.

5. Reddy, J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, Second Edition* [Text] / J. N. Reddy. – USA : CRC Press, 2004. – 831 p.

6. Лехницкий, С. Г. Теория упругости анизотропного тела [Текст] / С. Г. Лехницкий. – 2-е изд. – М. : Наука, 1977. – 416 с.

7. Королев, В. И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс [Текст] / В. И. Королев. – М. : Машиностроение, 1965. – 272 с.

8. Болотин, В. В. Механика многослойных конструкций [Текст] / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. – М. : Машиностроение, 1980. – 375 с.

9. Амбарцумян, С. А. Общая теория анизотропных оболочек [Текст] / С. А. Амбарцумян. – М. : Наука, 1974. – 448 с.

10. Рассказов, А. О. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек [Текст] / А. О. Рассказов, И. И. Соколовская, Н. А. Шульга. – К. : Высш. шк., 1986. – 192 с.

11. Новые методы исследования линейно и нелинейно деформируемых тел из композиционных материалов. Т. 2. Математические модели, методы их анализа и численная реализация нелинейного деформирования тонкостенных пространственных систем [Текст] : отчет о НИР (заключ.) / Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»; рук. Халилов С. А.; исполн. Минтюк В. Б. [и др.] – X., 2014. – 160 с. № ГР 0112U002135. Инв. № 0215U006163.

12. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике [Текст] / С. Л. Соболев. – М. : Наука, 1988. – 333 с.

13. Партон, В. З. Методы математической теории упругости [Текст] : учеб. пособие / В. З. Партон, П. И. Перлин. – М. : Наука, 1981. – 688 с.

14. Ладыжеская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа [Текст] / О. А. Ладыжеская, Н. Н. Уральцева. – М. : Наука, 1973. – 576 с.

15. Математический энциклопедический словарь [Текст] / под ред. Ю. В. Прохорова. – М. : Сов. энциклопедия, 1988. – 847 с.

16. Халилов, С. А. Новые системы ортонормированных многочленов, некоторые их свойства и приложения [Текст] / С. А. Халилов // Прочность конструкций летательных аппаратов : темат. сб. науч. тр. – X. : ХАИ, 1978. – Вып. 5. – С. 46 – 56.

17. Халилов, С. А. Вычисление некоторых определенных интегралов, содержащих присоединённые функции Лежандра второго и четвёртого порядков [Текст] / С. А. Халилов // Прочность конструкций летательных аппаратов : темат. сб. науч. тр. – X. : ХАИ, 1984. – Вып. 7. – С. 158 – 165.

18. Михлин, С. Г. Вариационные методы в математической физике [Текст] / С. Г. Михлин. – М. : Гостехиздат, 1957. – 478 с.

19. Приближенное решение операторных уравнений [Текст] / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко,

П. П. Забрейко, Я. Б. Рунцицкий, В. Я. Стеценко. – М. : Наука, 1969. – 456 с.

20. Михлин, С. Г. Численная реализация вариационных методов [Текст] / С. Г. Михлин. – М. : Наука, 1966. – 432 с.

21. Халилов, С. А. Построение и исследование аналитико-численного решения задачи об изгибе жёстко защемлённой прямоугольной пластины [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии : сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 49. – 2011. – С. 81 – 94.

22. Ткаченко, Д. А. Ортонормированный в энергетическом пространстве бигармонического оператора базис в прямоугольнике при однородных главных краевых условиях по границе [Текст] / Д. А. Ткаченко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2014. – № 3 (110). – С. 41 – 51.

23. Собственный спектр бигармонического оператора в прямоугольнике при главных краевых условиях [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копычко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2014. – № 5 (112). – С. 70 – 78.

24. Функция Грина основной краевой задачи для бигармонического оператора в прямоугольнике [Текст] / С. А. Халилов, В. С. Кривцов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2015. – № 6 (123). – С. 12 – 22.

25. Воробьев, Н. Н. Теория рядов [Текст] / Н. Н. Воробьев. – 4-е изд., испр. и доп. – М. : Наука, 1979. – 408 с.

26. Szego, G. *Orthogonal Polynomials* [Text] / G. Szego // *Amer. Math. Soc. Colloquium Publications.* – 1939. – Vol. 23. – 432 p.

27. Jackson, D. *The theory of approximation* [Text] / D. Jackson // *Amer. Math. Soc. Colloquium Publications.* – Vol. 11. – 1930. – 178 p.

28. Халилов, С. А. Приближённое аналитическое решение бигармонической проблемы в прямоугольнике при однородных главных краевых условиях на двух противоположных сторонах и произвольных – на двух других [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // Авиационно-космическая техника и технология. – X., 2013. – № 5 (102). – С. 40 – 49.

29. Бесов, О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения [Текст] / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1975. – 480 с.

## References

1. Reissner, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.*, 1945, no. 12, pp. A-69 – A-77.

2. Reissner, E. On small finite deflections of shear-deformable elastic plates. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1986, no. 59, pp. 227 – 233.

3. Reissner, E. A note on finite twisting and transverse bending of shear deformable orthotropic plates. *Int. J. Solids Structures*, 1992, vol. 29, no. 17, pp. 2177 – 2180.

4. Whitney, J. M. The effect of transverse shear deformation in the bending of laminated plates. *J. Comp. Mater.*, 1969, no. 3, pp. 534 – 547.



5. Reddy, J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, Second Edition. USA: CRC Press, 2004. 831 p.
6. Lekhnitskii, S. G. *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela*, 2-e izd [The elasticity theory of anisotropic body, 2nd ed.]. Moscow, «Nauka» Publ., 1977. 416 p.
7. Korolev, V. I. *Sloistye anizotropnye plastinki i obolochki iz armirovannykh plastmass* [Laminated anisotropic reinforced plastic plates and shells]. Moscow, «Mashinostroenie» Publ., 1965. 272 p.
8. Bolotin, V. V., Novichkov, Ju. N. *Mekhanika mnogosloinykh konstruktssii* [Mechanics of multilayer structures]. Moscow, «Mashinostroenie» Publ., 1980. 375 p.
9. Ambartsumyan, S. A. *Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek* [The general theory of anisotropic shells]. Moscow, «Nauka» Publ., 1974. 448 p.
10. Rasskazov, A. O., Sokolovskaya, I. I., Shul'ga, N. A. *Teoriya i raschet sloistykh ortotropnykh plastin i obolochek* [Theory and calculation of lamellar orthotropic plates and shells]. Kiev, «Vysshaya shkola» Publ., 1986. 192 p.
11. Khalilov, S. A., Mintyuk, V. B., Tkachenko, D. A. *Novye metody issledovaniya lineino i nelineino deformiruemyykh tel iz kompozitsionnykh materialov. T. 2. Matematicheskie modeli, metody ikh analiza i chislennaya realizatsiya nelineinogo deformirovaniya tonkostennykh prostranstvennykh sistem; ochet o NIR*. [New methods of research in linear and nonlinear deformable bodies made of composite materials. Vol. 2. Mathematical models, analysis techniques and numerical implementation of thin-walled spatial systems nonlinear deformation]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2014, no. GR 0112U002135. Inv. no. 0215U006163, 160 p.
12. Sobolev, S. L. *Nekotorye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoi fizike* [Some applications of functional analysis in mathematical physics]. Moscow, «Nauka» Publ., 1988. 333 p.
13. Parton, V. Z., Perlin, P. I. *Metody matematicheskoi teorii uprugosti* [Methods of mathematical elasticity theory]. Moscow, «Nauka» Publ., 1981. 688 p.
14. Ladyzheskaya, O. A., Ural'tseva, N. N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and quasi-linear elliptic equations]. Moscow, «Nauka» Publ., 1973. 576 p.
15. Prokhorov, Yu. V. *Matematicheskii entsiklopedicheskiy slovar'* [Mathematical encyclopedia]. Moscow, «Sovetskaya Entsiklopediya» Publ., 1988. 847 p.
16. Khalilov, S. A. *Novye sistemy ortonormirovannykh mnogochlenov, nekotorye ikh svoystva i prilozheniya* [New orthonormal polynomials systems, some of their properties and applications]. *Prochnost' konstruktssii letatel'nykh apparatov: temat. sb. nauch. tr.* [Strength of aircraft structures: thematic collection of scientific papers]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 1978, vol. 5, pp. 46 – 56.
17. Khalilov, S. A. *Vychislenie nekotorykh opredelennykh integralov, sodержashchikh prisoedinennyye funktsii Lezhandra vtorogo i chetvertogo poryadkov* [Calculation of some definite integrals containing attached second and fourth order Legendre functions]. *Prochnost' konstruktssii letatel'nykh apparatov: temat. sb. nauch. tr.* [Strength of aircraft structures: thematic collection of scientific papers]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 1984, vol. 7, pp. 158 – 165.
18. Mikhlin, S. G. *Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike* [Variational methods in mathematical physics]. Moscow, «Gostekhizdat» Publ., 1957. 478 p.
19. Krasnosel'skii, M. A., Vainikko, G. M., Zabreiko, P. P., Rutitskii, Ya. B., Stetsenko, V. Ya. *Priblizhennoe reshenie operatornykh uravnenii* [Approximate solution of operator equations]. Moscow, «Nauka» Publ., 1969. 456 p.
20. Mikhlin, S. G. *Chislennaya realizatsiya variatsionnykh metodov* [Numerical realization of variational methods]. Moscow, «Nauka» Publ., 1966. 432 p.
21. Khalilov, S. A., Mintyuk, V. B., Tkachenko, D. A. *Postroenie i issledovanie analitiko-chislennogo resheniya zadachi ob izgibe zhestko zashchemlennoi pryamougol'noi plastiny* [Development and research of the analytic-numerical solution for the bending problem of stiffened rectangular plate]. *Otkrytye informatsionnye i komp'yuternyye integrirovannyye tekhnologii : sb. nauch. tr. Nats. aerokosm. un-ta im. N. E. Zhukovskogo «KhAI»* [Open information and computer integrated technologies : scientific papers collection of Zhukovsky National Aerospace university "KhAI"]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2011, vol. 49, pp. 81 – 94.
22. Tkachenko, D. A. *Ortonormirovannyy v energeticheskom prostranstve bigarmonicheskogo operatora bazis v pryamougol'nike pri odnorodnykh glavnykh kraevykh usloviyakh po granitse* [Orthonormal basis in the biharmonic operator energy space in the rectangle with homogeneous principal boundary conditions along the boundary]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya* [Aerospace Engineering and Technology]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2014, no. 3, vol. 110, pp. 41 – 51.
23. Khalilov, S. A., Mintyuk, V. B., Tkachenko, D. A., Kopychko, V. V. *Sobstvennyi spektr bigarmonicheskogo operatora v pryamougol'nike pri glavnykh kraevykh usloviyakh* [Biharmonic operator own spectrum in a rectangle at the main boundary conditions]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya* [Aerospace Engineering and Technology]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2014, no. 5, vol. 112, pp. 70 – 78.
24. Khalilov, S. A., Krivtsov, V. S., Mintyuk, V. B., Tkachenko, D. A. *Funktsiya Grina osnovnoi kraevoi zadachi dlya bigarmonicheskogo operatora v pryamougol'nike* [Green function of basic boundary value problem for biharmonic operator in the rectangle]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya* [Aerospace Engineering and Technology]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2015, no. 6, vol. 123, pp. 12 – 22.
25. Vorob'ev, N. N. *Teoriya ryadov*, 4-e izd., ispr. i dop. [The theory of series, 4th ed.]. Moscow, «Nauka» Publ., 1979. 408 p.
26. Szego, G. *Orthogonal Polynomials*, 4th ed. *Amer. Math. Soc., Colloquium Publications*, 1939, vol. 23. 432 p.
27. Jackson, D. *The theory of approximation. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications*, 1930, vol. 11. 178 p.
28. Khalilov, S. A., Mintyuk, V. B., Tkachenko, D. A. *Priblizhennoe analiticheskoe reshenie bigarmonicheskoi problemy v pryamougol'nike pri odnorodnykh glavnykh kraevykh usloviyakh na dvukh protivopolozhnykh storonakh i proizvol'nykh – na dvukh drugikh* [An approximate analytical solution of biharmonic problem in the rectangle with homogeneous main boundary conditions on the two opposite sides and arbitrary boundary conditions on the other two sides]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya* [Aerospace Engineering and Technology]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2013, no. 5, vol. 102, pp. 40 – 49.
29. Besov, O. V., Il'in, V. P., Nikol'skii, S. M. *Integral'nye predstavleniya funktsii i teoremy vlozheniya* [Integral representations of functions and embedding theorems]. Moscow, «Nauka» Publ., 1975. 480 p.

Поступила в редакцию 12.02.2017, рассмотрена на редколлегии 15.03.2017

## ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОЇ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ

*С. А. Халілов, В. С. Кривцов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко, В. Н. Павленко, В. В. Копичко*

Описано подальший розвиток запропонованого раніше підходу до розв'язання крайових задач типу Ді-ріхле при вигині прямокутної трансверсально-ізотропної пластини, що описується системою трьох диференціальних рівнянь із частковими похідними і має сумарний порядок, який дорівнює шести. Підхід до розв'язання повністю неоднорідної крайової задачі базується на зведенні до розв'язання ряду базових крайових задач. Для реалізації методу запропоновано кілька способів продовження крайових функцій з границі в область і подано порівняльний аналіз їхньої ефективності. Показано, що найкращі апроксимативні властивості за збіжністю і точністю побудованих аналітико-чисельних розв'язань притаманні поліноміальній функції.

**Ключові слова:** базова крайова задача, критеріальне розв'язання, формальне і неформальне продовження функції з границі в область, збіжність і точність.

## THE DIRICHLET PROBLEM FOR TRANSVERSELY ISOTROPIC RECTANGULAR PLATE

*S. A. Khalilov, V. S. Kryvtsov, V. B. Myntiuk, D. A. Tkachenko, V. N. Pavlenko, V. V. Kopychko*

The approach offered before to solve Dirichlet boundary value problems for bending of rectangular transversely isotropic plate which is described by system of three differential equations with partial derivatives and total order equal six is developed. The approach to solve totally heterogeneous boundary value problem is based on reducing to solving a set of basic boundary value problems. Several ways to extend the functions from boundary to area and comparative analysis of their efficiency are offered in order to implement the method. It is showed that polynomial functions are of the best approximative properties concerning convergence and accuracy of constructed analytical numerical solutions.

**Keywords:** basic boundary value problem, criterion solution, formal and informal function extension from boundary to area, convergence and accuracy.

**Халілов Сявюш Ахмедович** – ст. науч. сотр., Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, e-mail: khalilov@ukr.net.

**Кривцов Владимир Станиславович** – д-р техн. наук, проф., ректор, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, e-mail: v.krivtsov@khai.edu.

**Минтюк Виталий Борисович** – канд. техн. наук, доц. каф. прочности летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, e-mail: vitalii.myntiuk@khai.edu.

**Ткаченко Денис Анатольевич** – асп. каф. технологии и производства летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, e-mail: tkachenko\_d\_an@ukr.net.

**Павленко Виталий Николаевич** – д-р техн. наук, проф., проректор по науч.-пед. работе, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, e-mail: v.pavlenko@khai.edu.

**Копычко Виктор Владимирович** – асп. каф. технологии и производства летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: viktor\_kopychko@mail.ru.

**Khalilov Siavush Akhmedovych** – senior researcher of National Aerospace University “KhAI” named after M. Ye. Zhukovsky, Kharkiv, e-mail: khalilov@ukr.net.

**Kryvtsov Volodymyr Stanislavovych** – Doctor of Technical Sciences, professor, Rector of National Aerospace University “KhAI” named after M. Ye. Zhukovsky, Kharkiv, e-mail: v.krivtsov@khai.edu.

**Myntiuk Vitalii Borysovych** – Candidate of technical sciences, assistant professor of Aircraft strength department of National Aerospace University “KhAI” named after M. Ye. Zhukovsky, Kharkiv, e-mail: vitalii.myntiuk@khai.edu.

**Tkachenko Denys Anatoliiovych** – postgraduate student of Aircraft technology and manufacture department of National Aerospace University “KhAI” named after M. Ye. Zhukovsky, Kharkiv, e-mail: tkachenko\_d\_an@ukr.net.

**Pavlenko Vitalii Mykolayovych** – Doctor of Technical Sciences, professor, vice-rector of National Aerospace University “KhAI” named after M. Ye. Zhukovsky, Kharkiv, e-mail: v.pavlenko@khai.edu.

**Kopychko Viktor Volodymyrovych** – postgraduate student of Aircraft technology and manufacture department of National Aerospace University “KhAI” named after M. Ye. Zhukovsky, Kharkiv, e-mail: viktor\_kopychko@mail.ru.